

گنجینه سوال رایگان

+ پاسخ تشریحی

یاوران دانش



راه های ارتباطی با ما:

www.Dyavari.com

۰۲۱-۷۶۷۰۳۸۵۸

۰۹۱۲-۳۴ ۹۴ ۱۳۴



- | | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
|------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|
| ۱ - | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۲ - | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۳ - | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۴ - | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۵ - | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۶ - | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۷ - | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۸ - | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۹ - | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۱۰ - | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۱۱ - | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |
| ۱۲ - | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |
| ۱۳ - | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |
| ۱۴ - | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۱۵ - | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۱۶ - | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۱۷ - | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۱۸ - | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۱۹ - | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۲۰ - | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۲۱ - | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۲۲ - | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۲۳ - | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |
| ۲۴ - | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |
| ۲۵ - | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۲۶ - | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |
| ۲۷ - | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |
| ۲۸ - | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۲۹ - | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |
| ۳۰ - | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |
| ۳۱ - | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۳۲ - | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۳۳ - | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۳۴ - | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |

- | | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
|------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|
| ۳۵ - | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۳۶ - | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |
| ۳۷ - | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۳۸ - | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۳۹ - | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۴۰ - | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۴۱ - | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۴۲ - | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۴۳ - | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |
| ۴۴ - | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۴۵ - | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۴۶ - | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |
| ۴۷ - | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۴۸ - | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۴۹ - | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |
| ۵۰ - | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |



۱- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. چون $(\sqrt{5}-2) \times (\sqrt{5}+2) = 1$ پس دو عبارت $\sqrt{5}+2$ و $\sqrt{5}-2$ معکوس هم هستند.

$$\begin{aligned} \sqrt{\sqrt{(\sqrt{5}-2)^2} + \sqrt{(\sqrt{5}+2)^2} + 6} &= \sqrt{|\sqrt{5}-2| + |\sqrt{5}+2| + 6} \\ &= \sqrt{\sqrt{5}-2 + \sqrt{5}+2 + 6} = \sqrt{2\sqrt{5} + 6} = \sqrt{(\sqrt{5}+1)^2} = (\sqrt{5}+1) = \sqrt{5}+1 \end{aligned}$$

۲- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. معادله داده شده را به صورت زیر می نویسیم:

$$49x^2 - 14x + 1 + 16x^2 + y^2 + 8xy = (7x-1)^2 + (4x+y)^2 = 0$$

با توجه به اینکه هر دو عبارت نامنفی هستند و جمع آنها برابر صفر شده است، نتیجه می گیریم هر دو عبارت برابر با صفر هستند.

$$7x-1=0 \Rightarrow x=\frac{1}{7}, \quad 4x+y=0 \Rightarrow \frac{4}{7}+y=0 \Rightarrow y=-\frac{4}{7}$$

$$x-y = \frac{1}{7} - \left(-\frac{4}{7}\right) = \frac{5}{7} \approx 0.71$$

بنابراین گزینه ۱ درست است.

۳- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

در عبارت $\sqrt[3]{a+b\sqrt{2}} + \sqrt[3]{3-2\sqrt{2}}$ ، حاصل بخش اول $\sqrt{(\sqrt{2}-1)^2} = \sqrt{2}-1$ است. پس باید جواب قسمت دوم حتماً $k-\sqrt{2}$ شود تا $\sqrt{2}$ ها با هم بروند و جواب بشود $k-1$.

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{a+b\sqrt{2}} = k-\sqrt{2} &\xrightarrow{\text{به توان ۳}} a+b\sqrt{2} = (k-\sqrt{2})^3 = k^3 - 3\sqrt{2}k^2 + 6k - 2\sqrt{2} \\ &= (k^3 + 6k) - (3k^2 + 2)\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$b = -3k^2 - 2, \quad a = k^3 + 6k$$

پس داریم:

بنابراین $16-b = 3k^2+18$ و نسبت $\frac{a}{16-b}$ می شود $\frac{k^3+6k}{3k^2+18}$ یعنی $\frac{k}{3}$ که یک سوم عدد طبیعی است و در

گزینه ها فقط $\frac{7}{3}$ امکان دارد.



۴- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. عبارت داده شده را ساده می کنیم.

$$\frac{\sqrt[4]{x^3} \sqrt{x} \times \sqrt[3]{x^4} \sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2} \sqrt{x^3}} = \frac{\left(x^{3+\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{4}} \times \left(x^{4+\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}}{\left(x^{2+\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}} = \frac{\left(x^{\frac{7}{2}}\right)^{\frac{1}{4}} \times \left(x^{\frac{9}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}}{\left(x^{\frac{7}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}}$$

$$= \frac{x^{\frac{7}{8} + \frac{3}{2}}}{x^{\frac{7}{6}}} = x^{\frac{7}{8} + \frac{3}{2} - \frac{7}{6}} = x^{\frac{29}{24}}$$

۵- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. مسئله را به زبان ریاضی می نویسیم:
همه پایه ها را بر حسب عامل ۲ می نویسیم:

$$2^4 \times \sqrt[4]{(2^3)^{x^2}} = ((2^2)^{3x})^{\frac{1}{6}} \Rightarrow 2^4 \times (2^{3x^2})^{\frac{1}{4}} = (2^{6x})^{\frac{1}{6}} \Rightarrow 2^4 \times 2^{\frac{3}{4}x^2} = 2^x$$

$$\Rightarrow 2^{4+\frac{3}{4}x^2} = 2^x \Rightarrow 4 + \frac{3}{4}x^2 = x \Rightarrow \frac{3}{4}x^2 - x + 4 = 0$$

در معادله درجه دو حاصل $\Delta < 0$ است و معادله ریشه ندارد، پس هیچ مقداری برای x وجود ندارد.

۶- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$x = 3 + 2\sqrt{2} \Rightarrow x^2 = (3 + 2\sqrt{2})^2 = 9 + 8 + 12\sqrt{2} = 17 + 12\sqrt{2}$$

$$x = 3 + 2\sqrt{2} \Rightarrow x^{-2} = \frac{1}{x^2} = \frac{1}{(3 + 2\sqrt{2})^2} \times \frac{(3 - 2\sqrt{2})^2}{(3 - 2\sqrt{2})^2} = \frac{(3 - 2\sqrt{2})^2}{(9 - 8)} = 9 + 8 - 12\sqrt{2}$$

$$= 17 - 12\sqrt{2}$$

حاصل عبارت خواسته شده را می یابیم.

$$\sqrt{(17 + 12\sqrt{2}) + 5} - \sqrt{(17 - 12\sqrt{2}) + 5} = \sqrt{22 + 12\sqrt{2}} - \sqrt{22 - 12\sqrt{2}}$$

$$= \sqrt{(3\sqrt{2} + 2)^2} - \sqrt{(3\sqrt{2} - 2)^2} = |3\sqrt{2} + 2| - |3\sqrt{2} - 2| = 4$$



۷- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$A = \sqrt[3]{2^2} \sqrt[3]{2^5 \times 2^{\frac{1}{2}}} = \sqrt[3]{2^2 \times 2^{\frac{13}{2}}} = \sqrt[3]{2^2 \times 2^{\frac{13}{2}}} = \sqrt[3]{2^{\frac{21}{2}}} = 2^{\frac{7}{4}}$$

$$B = (2 - \sqrt{3})^{-1}$$

$$\begin{aligned} \text{عبارت سؤال} &= (\sqrt{3} + 1) A^{\frac{2}{7}} \times B^{-\frac{1}{2}} = (\sqrt{3} + 1) \times 2^{\frac{1}{2}} \times (2 - \sqrt{3})^{\frac{1}{2}} \\ &= (\sqrt{3} + 1) \sqrt{2} \sqrt{2 - \sqrt{3}} = (\sqrt{3} + 1) \sqrt{4 - 2\sqrt{3}} = (\sqrt{3} + 1) \sqrt{(\sqrt{3} - 1)^2} \\ &= (\sqrt{3} + 1)(\sqrt{3} - 1) = 3 - 1 = 2 \end{aligned}$$

۸- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^3 = (3)^3 \Rightarrow x^3 + \frac{1}{x^3} + 3x^2 \times \frac{1}{x} + 3x \times \frac{1}{x^2} = 27$$

$$\Rightarrow x^3 + \frac{1}{x^3} + 3 \underbrace{\left(x + \frac{1}{x}\right)}_{=3} = 27 \Rightarrow x^3 + \frac{1}{x^3} = 18$$

$$A = \frac{3\sqrt{3} - 8}{7 + 2\sqrt{3}} \times \frac{7 - 2\sqrt{3}}{7 - 2\sqrt{3}} + \sqrt{(2 + \sqrt{3})^2} = \frac{21\sqrt{3} + 16\sqrt{3} - 56 - 18}{49 - 12} + \underbrace{|2 + \sqrt{3}|}_{\text{عبارت مثبت}}$$

$$= \frac{37\sqrt{3} - 74}{37} + 2 + \sqrt{3} = \frac{\cancel{37}(\sqrt{3} - 2)}{\cancel{37}} + 2 + \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$$

$$\text{عبارت موردنظر سؤال} = A^2 + B + 1 = (2\sqrt{3})^2 + 18 + 1 = 31$$



۹- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\sqrt{3 + \frac{3\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{\frac{6 + 3\sqrt{3}}{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{12 + 6\sqrt{3}}{4}} = \frac{\sqrt{12 + 6\sqrt{3}}}{2}$$

عبارت $12 + 6\sqrt{3}$ را به صورت $(3 + \sqrt{3})^2$ می نویسیم:

$$\frac{\sqrt{12 + 6\sqrt{3}}}{2} = \frac{\sqrt{(3 + \sqrt{3})^2}}{2} = \frac{3 + \sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{\frac{9}{4}} + \sqrt{\frac{3}{4}}$$

a می تواند $\frac{9}{4}$ و b می تواند $\frac{3}{4}$ باشد و $\frac{3}{4} = \frac{3}{2} - \frac{6}{4} = \frac{3}{2} - a = b$ باشد.

$$\sqrt[5]{A} = \frac{2}{3} \Rightarrow A = \frac{2^5}{3^5}$$

۱۰- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ریشه پنجم عدد A برابر $\frac{2}{3}$ است.

b ریشه منفی چهارم عدد A است یعنی:

$$b = -\sqrt[4]{\frac{2^5}{3^5}} = -\frac{2}{3}\sqrt[4]{\frac{2}{3}} = -\frac{2\sqrt[4]{2}}{3\sqrt[4]{3}} \times \frac{\sqrt[4]{3^3}}{\sqrt[4]{3^3}} = \frac{-2\sqrt[4]{54}}{9}$$

«بانک سوال یاوران دانش»

۱۱- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$(x + x^{-1})^2 = 5^2 \Rightarrow x^2 + x^{-2} + \underbrace{2x \cdot x^{-1}}_{=1} = 25$$

$$x^2 + x^{-2} = 23 \xrightarrow{\text{دو طرف به توان ۲}} x^4 + x^{-4} + 2x^2 \cdot x^{-2} = 529 \Rightarrow x^4 + x^{-4} = 527 \quad (1)$$

$$(x + x^{-1})^3 = 5^3 \Rightarrow x^3 + x^{-3} + 3x^2 \cdot x^{-1} + 3x \cdot x^{-2} = 125$$

$$x^3 + x^{-3} + \underbrace{3(x + x^{-1})}_{=5} = 125 \Rightarrow x^3 + x^{-3} = 110 \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow (x^4 + x^{-4})(x^3 + x^{-3}) = 527 \times 110$$

$$x^7 + x^{-7} + \underbrace{x + x^{-1}}_{=5} = 57970 \Rightarrow x^7 + x^{-7} = 57965$$



۱۲- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\begin{aligned} \left(x + \frac{1}{x} + \sqrt{2}\right)^2 \left(x + \frac{1}{x} - \sqrt{2}\right)^2 &= \left(\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2\right)^2 \\ &= \left(x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x} - 2\right)^2 = \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 = x^4 + \frac{1}{x^4} + 2x^2 \times \frac{1}{x^2} \\ x &= \sqrt[4]{7-4\sqrt{3}} \\ &= x^4 + \frac{1}{x^4} + 2 \xrightarrow{\text{گویا کردن مخرج}} 7 - 4\sqrt{3} + \frac{1}{7-4\sqrt{3}} + 2 \\ &= 7 - 4\sqrt{3} + \frac{1}{7-4\sqrt{3}} \times \frac{7+4\sqrt{3}}{7+4\sqrt{3}} + 2 \\ &= 7 - 4\sqrt{3} + \frac{7+4\sqrt{3}}{49-48} + 2 = 7 - 4\sqrt{3} + 7 + 4\sqrt{3} + 2 = 16 \end{aligned}$$

۱۳- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\begin{aligned} A &= \left(3^2 \times 3^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{5}} \times \left(2^2 \times 3\right)^{-\frac{3}{2}} = \left(3^{\frac{5}{2}}\right)^{\frac{1}{5}} \times 2^{-3} \times 3^{-\frac{3}{2}} = 3^{\frac{1}{2}} \times 3^{-\frac{3}{2}} \times 2^{-3} \\ &= 3^{-1} \times 2^{-3} \Rightarrow \boxed{A = \frac{1}{24}} \Rightarrow \left(1 + A^{-1}\right)^{\frac{1}{2}} = (1 + 24)^{\frac{1}{2}} = 25^{\frac{1}{2}} = 5 \quad (1) \\ B &= \left(2^2 \times (2^4)^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{5}} \times (2^{-1})^{-\frac{4}{3}} = \left(2^{\frac{14}{3}}\right)^{\frac{1}{5}} \times \left(2^{\frac{4}{3}}\right) = 2^{\frac{14}{15}} \times 2^{\frac{4}{3}} = 2^2 = 4 \\ &\Rightarrow \boxed{B = 4} \Rightarrow (2B)^{-\frac{1}{3}} = (8)^{-\frac{1}{3}} = (2^3)^{-\frac{1}{3}} = 2^{-1} = \frac{1}{2} \quad (2) \\ \left(1 + A^{-1}\right)^{\frac{1}{2}} \times (2B)^{-\frac{1}{3}} &= 5 \times \frac{1}{2} = 2.5 \end{aligned}$$



۱۴- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\begin{aligned} \sqrt{\underbrace{(x-1)(x-4)}_{\text{دسته بندی جدید}} \underbrace{(x-2)(x-3)}_{\text{دسته بندی جدید}}} &= \sqrt{\underbrace{(x^2 - 5x + 4)}_{\text{فرض سوال}} \underbrace{(x^2 - 5x + 6)}_{\text{فرض سوال}}} \\ &= \sqrt{(5\sqrt{2} - 5 + 4)(5\sqrt{2} - 5 + 6)} = \sqrt{(5\sqrt{2} - 1)(5\sqrt{2} + 1)} \\ &\xrightarrow{\text{اتحاد مزدوج}} \sqrt{50 - 1} = \sqrt{49} = 7 \end{aligned}$$

۱۵- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\begin{aligned} \sqrt{-x} + x > 0 &\Rightarrow x < 0, (B \text{ یا } A) \Rightarrow \sqrt{-x} > -x \Rightarrow -x > x^2 \Rightarrow x^2 + x < 0 \\ &\Rightarrow -1 < x < 0 \Rightarrow B \text{ جواب} \\ x - \sqrt{x} > 0 &\Rightarrow x > 0, (D \text{ یا } C) \Rightarrow x > \sqrt{x} \Rightarrow x^2 > x \Rightarrow x^2 - x > 0 \\ &\Rightarrow x < 0 \text{ یا } x > 1 \Rightarrow D \text{ جواب} \end{aligned}$$

۱۶- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\begin{aligned} (A^2 + B^2 - AB)(A^2 + B^2 + AB) &= (A^2 + B^2)^2 - A^2 B^2 \\ &= A^4 + B^4 + 2A^2 B^2 - A^2 B^2 = A^4 + B^4 + A^2 B^2 \\ &= (2\sqrt{3} + 3) + (2\sqrt{3} - 3) + \sqrt{2\sqrt{3} + 3} \times \sqrt{2\sqrt{3} - 3} = 4\sqrt{3} + \sqrt{12 - 9} \\ &= 4\sqrt{3} + \sqrt{3} = 5\sqrt{3} \end{aligned}$$

۱۷- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. حاصل کل عبارت زیر رادیکال باید 1401^{40} باشد تا جذر آن 1401^{20} شود. بنابراین اگر 1401^2 به تعداد 1401^{38} بار تکرار شود، حاصل کل عبارت زیر رادیکال برابر 1401^{40} می شود.

$$\sqrt{\underbrace{1401^2 + 1401^2 + \dots + 1401^2}_{38 \text{ مرتبه}}} = \sqrt{1401^{38} (1401)^2} = \sqrt{1401^{40}} = 1401^{20}$$

۱۸- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\begin{aligned} -2 < \sqrt[7]{x} < 2 &\Rightarrow (-2)^7 < x < 2^7 \\ &\Rightarrow -128 < x < 128 \xrightarrow{x \in \mathbb{Z}} -127, -126, \dots, -1, 0, 1, 2, \dots, 127 \\ &\quad \underbrace{\hspace{10em}}_{255 \text{ عدد صحیح}} \end{aligned}$$



۱۹- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

اتحاد چاق و لاغر

$$\frac{x^6 - 1}{x^4 - x^2} = \frac{(x^2 - 1)(x^4 + x^2 + 1)}{x^2(x^2 - 1)} = \frac{x^4 + x^2 + 1}{x^2} \xrightarrow{\text{تفکیک}} x^2 + 1 + \frac{1}{x^2}$$

تبدیل به مربع کامل

$$= \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2x \times \frac{1}{x} + 1 = 17^2 - 2 + 1 = 288$$

۲۰- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. چون $a^4 \geq 0$ بنابراین از فرض $\sqrt[5]{a} \geq 0$ نتیجه می شود که a الزاماً عددی نامنفی است. بنابراین $(-a^3)$ کمترین مقدار ممکن است. با توجه به نامنفی بودن a دو طرف فرض سؤال را به توان ۵ می رسانیم. و داریم:

$$a^4 < \sqrt[5]{a} \xrightarrow[\text{و } a \geq 0]{\text{دو طرف به توان ۵}} a^{20} < a \Rightarrow a^{20} - a < 0 \Rightarrow a(a^{19} - 1) < 0$$

نامنفی ($a \geq 0$) \downarrow

$$a^{19} - 1 < 0$$

$$\frac{1}{a} > \sqrt[3]{a} > \sqrt{a} > -a^3 \leftarrow \boxed{0 \leq a < 1}$$

$a^{19} < 1$ \downarrow

توجه: این تست را می توان با فرض $a = \frac{1}{64}$ بررسی کرد، زیرا:

$$\frac{1}{a} = 64, \sqrt[3]{\frac{1}{64}} = \frac{1}{4}, \sqrt{\frac{1}{64}} = \frac{1}{8}, -a^3 = -\left(\frac{1}{64}\right)^3$$

۲۱- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. با استفاده از اتحادهای مربع کامل و مکعب کامل داریم:

$$\frac{x^3 - 6x^2 + 12x - 5}{x^2 - 4x + 4} = \frac{(x-2)^3 + 3}{(x-2)^2}$$

حالا با جایگذاری $x = \sqrt[3]{9} + 2 = \sqrt[3]{3} + 2$ داریم:

$$\frac{((\sqrt[3]{3} + 2) - 2)^3 + 3}{((\sqrt[3]{3} + 2) - 2)^2} = \frac{(\sqrt[3]{3})^3 + 3}{(\sqrt[3]{3})^2} = \frac{6}{\sqrt[3]{9}} \xrightarrow[\sqrt[3]{3}]{\text{ضرب و تقسیم در}} \frac{6\sqrt[3]{3}}{3} = 2\sqrt[3]{3}$$



۲۲- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\frac{x\sqrt{x+\sqrt{x}}}{\sqrt{x-\sqrt{x}}} \times \frac{\sqrt{x-\sqrt{x}}}{\sqrt{x-\sqrt{x}}} = \frac{x\sqrt{x(x-1)}}{x-\sqrt{x}} \times \frac{x+\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}} = \frac{x(x+\sqrt{x}) \cdot \sqrt{x(x-1)}}{x(x-1)}$$

$$= \frac{\cancel{x}(x+\sqrt{x}) \cdot \sqrt{x(x-1)}}{\cancel{x}(x-1)} \times \frac{\cancel{x-1}}{x+\sqrt{x}} = \sqrt{x^2 - x}$$

۲۳- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ابتدا برای A هم فرجه سازی انجام می دهیم:

$$A = \sqrt[2 \times 3]{(\sqrt{5} - \sqrt{2})^2 \times \sqrt[6]{7+2\sqrt{10}}} = \sqrt[6]{7-2\sqrt{10}} \times \sqrt[6]{7+2\sqrt{10}}$$

$$A = \sqrt[6]{49-40} = \sqrt[6]{9} = \sqrt[3]{3} \Rightarrow \sqrt[3]{9}A = \sqrt[3]{9} \times \sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{27} = 3 \quad (1)$$

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} = 5 \xrightarrow{\text{دو طرف به توان ۲}} a + b + 2\sqrt{ab} = 25 \xrightarrow{\sqrt{ab} = 3}$$

$$a + b = 19 \xrightarrow{\text{دو طرف به توان ۲}} a^2 + b^2 + 2ab = 361 \xrightarrow{ab = 9} a^2 + b^2 = 343 \quad (2)$$

$$1, 2 \Rightarrow \text{حاصل جمع موردنظر} = 3 + 343 = 346$$

۲۴- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\frac{(\sqrt{4+\sqrt{7}} - \sqrt{4-\sqrt{7}})(\sqrt{4+\sqrt{7}} + \sqrt{4-\sqrt{7}})}{\sqrt{4+\sqrt{7}} + \sqrt{4-\sqrt{7}}} = \frac{2\sqrt{7}}{\sqrt{4+\sqrt{7}} + \sqrt{4-\sqrt{7}}} = A$$

$$A^2 = \frac{28}{4 + \sqrt{7} + 4 - \sqrt{7} + 2\sqrt{(4+\sqrt{7})(4-\sqrt{7})}} = \frac{28}{8+6} = 2 \Rightarrow A = \sqrt{2}$$



۲۵- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{5} + \sqrt{2} - \sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{5} + \sqrt{2} + \sqrt{3}}{\sqrt{5} + \sqrt{2} + \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{5} + \sqrt{2} + \sqrt{3}}{5 + 2 + 2\sqrt{10} - 3} \times \frac{4 - 2\sqrt{10}}{4 - 2\sqrt{10}} \\ & = \frac{2(\sqrt{5} + \sqrt{2} + \sqrt{3})(2 - \sqrt{10})}{16 - 40} = \frac{(\sqrt{5} + \sqrt{2} + \sqrt{3})(2 - \sqrt{10})}{-12} \\ & = \frac{2\sqrt{5} + 2\sqrt{2} + 2\sqrt{3} - 5\sqrt{2} - 2\sqrt{5} - \sqrt{30}}{-12} = \frac{2\sqrt{3} - 3\sqrt{2} - \sqrt{30}}{-12} \\ & \frac{2\sqrt{3} - 3\sqrt{2} - \sqrt{30}}{-12} \times \frac{1}{2\sqrt{3} - 3\sqrt{2} - \sqrt{30}} = -\frac{1}{12} \end{aligned}$$

«بانک سوال یاوران دانش»

۲۶- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\begin{aligned} x &= (2 - \sqrt{3})^{14} (2 + \sqrt{3})^{14} (2 + \sqrt{3}) = (4 - 3)^{14} (2 + \sqrt{3}) = 2 + \sqrt{3} \\ & \quad \text{اتحاد مزدوج} \\ (x + x^{-1})^{\frac{1}{2}} &= \left(2 + \sqrt{3} + \frac{1}{2 + \sqrt{3}}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(2 + \sqrt{3} + 2 - \sqrt{3}\right)^{\frac{1}{2}} = 4^{\frac{1}{2}} = (2^2)^{\frac{1}{2}} = 2 \\ & \quad \text{با گویا کردن مخرج} \end{aligned}$$

۲۷- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\begin{aligned} \sqrt{x} + \sqrt{y} &= M \xrightarrow{\text{دو طرف به توان ۲}} x + y + 2\sqrt{xy} = M^2 \Rightarrow 19 + 2\sqrt{9} = M^2 \\ \Rightarrow M &= 5 \Rightarrow \sqrt{x} + \sqrt{y} = 5 \xrightarrow{\text{دو طرف به توان ۳}} x\sqrt{x} + y\sqrt{y} + 3\sqrt{xy}(\sqrt{x} + \sqrt{y}) = 125 \\ \Rightarrow x\sqrt{x} + y\sqrt{y} + 3\sqrt{9}(5) &= 125 \Rightarrow x\sqrt{x} + y\sqrt{y} = 80 \end{aligned}$$



۲۸- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\sqrt[9]{\frac{x-3}{x} + \frac{3x-1}{x^3}} = \sqrt[9]{\frac{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}{x^3}} = \sqrt[9]{\frac{(x-1)^3}{x^3}} = \sqrt[3]{\frac{x-1}{x}} = \sqrt[3]{1 - \frac{1}{x}}$$

$$= \sqrt[3]{1 - \frac{1}{\sqrt{2}-1}} \quad \text{گویا کردن مخرج} = \sqrt[3]{-\sqrt{2}} = -\sqrt[6]{2}$$

۲۹- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$(a^3 b^2) \left(a^{\frac{1}{3}} b^{\frac{1}{2}}\right) \left(a^{-\frac{1}{3}} b^{-\frac{1}{2}}\right) = (a^3 b^2) (a' b') = a^3 b^2$$

۳۰- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\frac{x}{\sqrt{x+\sqrt{x}}} \cdot \frac{x+1}{\sqrt{x+\sqrt{x}}} \cdot \frac{(x-1)(x+\sqrt{x})}{(x-\sqrt{x})(x+\sqrt{x})} = \frac{\cancel{x} \cdot (x+1) \cdot \cancel{(x-1)} (x+\sqrt{x})}{(x+\sqrt{x}) \cdot \cancel{x} \cdot \cancel{(x-1)}} = x+1$$

۳۱- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\sqrt{x+5+4\sqrt{x+1}} \cdot \sqrt{x+5-4\sqrt{x+1}} = \sqrt{(2+\sqrt{x+1})^2} \cdot \sqrt{(2-\sqrt{x+1})^2}$$

$$= (2+\sqrt{x+1})(2-\sqrt{x+1}) = 4 - (x+1) = 3-x \Rightarrow \frac{3-x}{\sqrt{3}-\sqrt{x}} = \sqrt{3} + \sqrt{x}$$

$$k(k^{2x} - k^{2x} - 6) = k(k^{2x} - 3)(k^{2x} + 2)$$

۳۲- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$0 < a < b < 1 \Rightarrow 0 < \sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b} < 1$$

۳۳- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

گزینه‌های دیگر با مثال نقض رد می‌شوند.

۳۴- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$A = \sqrt{\sqrt[3]{\frac{36^3}{9}}} \times 3\sqrt[3]{3} = \sqrt[6]{4 \times 36^2} \times 3\sqrt[3]{3} = 2\sqrt[6]{9^2} \times 3\sqrt[3]{3} = 18$$

$$\left(\frac{1}{2A}\right)^{-\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{36}\right)^{-\frac{1}{2}} = 36^{\frac{1}{2}} = \sqrt{36} = 6 \Rightarrow 3^2 = 9 \text{ سه واحد از } 3^2 \text{ کمتر است.}$$



۳۵- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$x - 3 = \sqrt{2} \Rightarrow x^3 - 3 \times 3x^2 + 27x - 27 = (\sqrt{2})^3 \Rightarrow x^3 - 9x^2 + 27x - 2\sqrt{2} = 27$$

۳۶- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$(2 \pm \sqrt{3})^2 = 7 \pm 4\sqrt{3}, (7 - 4\sqrt{3})(7 + 4\sqrt{3}) = (2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3}) = 1 \\ \Rightarrow (7 - 4\sqrt{3})^3 (2 - \sqrt{3})(7 + 4\sqrt{3})^4 (2 + \sqrt{3}) = 7 + 4\sqrt{3}$$

۳۷- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$13 \times \frac{\sqrt{2(2 - \sqrt{2})} \times \sqrt[4]{2(3 + 2\sqrt{2})}}{19 - 8\sqrt{3}} = 13 \times \frac{\sqrt[4]{4(6 - 4\sqrt{2})} \times \sqrt[4]{6 + 4\sqrt{2}}}{\sqrt{(4 - \sqrt{3})^2}} \\ = 13 \times \frac{\sqrt[4]{4(36 - 32)}}{4 - \sqrt{3}} = \frac{26}{4 - \sqrt{3}} \times \frac{4 + \sqrt{3}}{4 + \sqrt{3}} = \frac{26(4 + \sqrt{3})}{13} = 8 + 2\sqrt{3}$$

۳۸- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ابتدا عبارت $\sqrt{5 + \sqrt{22 + \sqrt{5}}} \times \sqrt{5 - \sqrt{22 + \sqrt{5}}}$ را ساده می کنیم:

$$\sqrt{25 - (22 + \sqrt{5})} = \sqrt{3 - \sqrt{5}}$$

حال داریم:

$$(\sqrt{3 + \sqrt{5}}) \times (\sqrt{3 - \sqrt{5}}) \times (\sqrt[4]{9} + 1)^{-1} = \sqrt{9 - 5} \times (\sqrt{3} + 1)^{-1} \\ = \frac{2}{\sqrt{3} + 1} \times \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} - 1} = \frac{2(\sqrt{3} - 1)}{2} = \sqrt{3} - 1$$

۳۹- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$3 - 2\sqrt{2} = (\sqrt{2} - 1)^2, 17 - 12\sqrt{2} = (3 - 2\sqrt{2})^2 = (\sqrt{2} - 1)^4 \\ \Rightarrow -(\sqrt{2} - 1) + (\sqrt{2} - 1) + \sqrt{2} = \sqrt{2}$$



«بانک سوال یاوران دانش»

۴۰- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. با فرض $a = \sqrt{2} + 1$ و $b = \sqrt{2}$ داریم:

$$(a + b)(a^2 + b^2)(a^4 + b^4) = \frac{a^8 - b^8}{a - b} = (\sqrt{2} + 1)^8 - 16 \Rightarrow \text{حاصل عبارت} = -16$$

۴۱- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$-\sqrt[3]{\sqrt{a^3}} = b^3 \Rightarrow -\sqrt{a} = b^3 \Rightarrow a = b^6 \quad b < 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{-b^3}{b^6} \times b^2} = \frac{1}{\sqrt{-b}} = -\frac{\sqrt{-b}}{b}$$

جایگذاری می کنیم.

۴۲- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$m - \sqrt{3} = 1 \Rightarrow m^2 - 2\sqrt{3}m + 3 = 1 \Rightarrow m^2 - 2\sqrt{3}m = -2$$

۴۳- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\frac{1}{x+y} - \frac{1}{x-y} + \frac{2y}{(x-y)(x+y)} = \frac{(x-y) - (x+y) + 2y}{(x-y)(x+y)}$$

$$= \frac{x-y-x-y+2y}{(x-y)(x+y)} = \frac{0}{(x-y)(x+y)} = 0$$



۴۴- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.
روش اول:

$$a + b = 6 \xrightarrow{\text{توان } 2} a^2 + b^2 + 2ab = 36 \xrightarrow{ab=7} a^2 + b^2 = 36 - 14 = 22$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 + b^2 - ab) = 6(22 - 7) = 6 \times 15 = 90$$

روش دوم:

$$\begin{cases} a + b = 6 \Rightarrow b = 6 - a \\ ab = 7 \end{cases} \Rightarrow a(6 - a) = 7 \Rightarrow 6a - a^2 = 7 \Rightarrow a^2 - 6a + 7 = 0$$

$$\Rightarrow \Delta = 36 - 4 \times 7 = 8 \Rightarrow a = \frac{6 \pm \sqrt{8}}{2} \Rightarrow \begin{cases} a = 3 + \sqrt{2} \Rightarrow b = 3 - \sqrt{2} \\ a = 3 - \sqrt{2} \Rightarrow b = 3 + \sqrt{2} \end{cases}$$

بنابراین دو عدد مطلوب $3 + \sqrt{2}$ و $3 - \sqrt{2}$ اند و داریم:

$$\begin{cases} (3 - \sqrt{2})^3 = 27 - 3 \times 9\sqrt{2} + 3 \times 2 \times 3 - 2\sqrt{2} = 45 - 29\sqrt{2} \\ (3 + \sqrt{2})^3 = 27 + 3 \times 9\sqrt{2} + 3 \times 2 \times 3 + 2\sqrt{2} = 45 + 29\sqrt{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow (3 - \sqrt{2})^3 + (3 + \sqrt{2})^3 = 90$$

روش سوم:

$$a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b) = 6^3 - 3(7)(6) = 216 - 126 = 90$$

۴۵- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. فرض می کنیم که $a = \sqrt[3]{14 + \sqrt{x}}$ و $b = \sqrt[3]{14 - \sqrt{x}}$ باشد:

$$a + b = 4, a^3 + b^3 = 28$$

$$(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b) \Rightarrow 64 = 28 + 3ab(4)$$

$$ab = \frac{64 - 28}{12} = 3 \Rightarrow \sqrt[3]{(14 + \sqrt{x})(14 - \sqrt{x})} = 3$$

$$\Rightarrow 196 - x = 27 \Rightarrow x = 169 \Rightarrow \left(\frac{x}{169} + 2\right)^2 = 9$$



۴۶- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. طرفین $x + y = 4$ را به توان ۲ می‌رسانیم تا $x^2 + y^2$ ایجاد گردد:

$$\begin{aligned} x + y = 4 &\xrightarrow{\text{توان } 2} (x + y)^2 = 4^2 \Rightarrow x^2 + y^2 + 2xy = 16 \\ x^2 + y^2 = 10 &\xrightarrow{\quad\quad\quad} 10 + 2xy = 16 \Rightarrow 2xy = 6 \Rightarrow xy = 3 \quad (*) \end{aligned}$$

از طرفی به کمک اتحاد چاق و لاغر داریم:

$$x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 + y^2 - xy) \stackrel{(*)}{=} 4(10 - 3) = 4 \times 7 = 28$$

۴۷- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\begin{aligned} (0/5)^{-\frac{2}{3}} &= \left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{2}{3}} = 2^{\frac{2}{3}} \\ \sqrt[4]{4}\sqrt[3]{4} &= \sqrt[4]{\sqrt[3]{4^3 \times 4}} = \sqrt[12]{(2^2)^3 \times 2^2} = \sqrt[12]{2^6 \times 2^2} = \sqrt[12]{2^8} = 2^{\frac{8}{12}} = 2^{\frac{2}{3}} \\ \Rightarrow \text{حاصل} &= 2^{\frac{2}{3}} - 3\left(2^{\frac{2}{3}}\right) = 2^{\frac{2}{3}}(1 - 3) = -2^1 \times 2^{\frac{2}{3}} = -2^{\frac{5}{3}} \\ \Rightarrow -2^{\frac{5}{3}} &= (-1) \times 2^{\frac{5}{3}} + 0 \Rightarrow \begin{cases} m = -1 \\ x = 2 \\ a = 5 \\ b = 3 \\ n = 0 \end{cases} \\ \Rightarrow \frac{a + b + x}{m + n} &= \frac{5 + 3 + 2}{-1 + 0} = \frac{10}{-1} = -10 \end{aligned}$$

«بانک سوال یاوران دانش»

۴۸- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\begin{aligned} A^2 &= \left(\sqrt{2 + \sqrt{3}} + \sqrt{2 - \sqrt{3}}\right)^2 = 2 + \sqrt{3} + 2 - \sqrt{3} + 2\sqrt{(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3})} \\ \Rightarrow A^2 &= 2 + 2 + 2\sqrt{4 - 3} = 6 \xrightarrow{A > 0} A = \sqrt{6} \\ \frac{A}{\sqrt{2}} &= \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{6}{2}} = \sqrt{3} \end{aligned}$$

۴۹- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. هر عدد حقیقی حداکثر ۲ ریشه‌ی دوم دارد (اگر مثبت باشد ۲ تا، اگر صفر باشد یکی و اگر منفی باشد هیچی) و هر عدد حقیقی دقیقاً یک ریشه‌ی سوم دارد.



۵۰- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt[3]{9a}}{\sqrt[3]{3}\sqrt[3]{a^3}} &= \frac{(9a)^{\frac{1}{3}}}{\sqrt[3]{3}\left(a^{\frac{1}{3}}\right)^3} = \frac{3^{\frac{1}{3}} \times \left(a^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{4}{3}}}{\sqrt[3]{3} \times \left(\frac{1}{9}\right)^{\frac{4}{3}}} \\ &= \frac{3^{\frac{1}{3}} \times \left(3^{-2}\right)^{\frac{4}{3}}}{\left(3^1 - 9\right)^{\frac{1}{3}}} = \frac{3^{\frac{1}{3}} \times 3^{-\frac{8}{3}}}{3^{-\frac{5}{3}}} = \frac{3^{\frac{1}{3} - \frac{8}{3}}}{3^{-\frac{5}{3}}} = 3^{-\frac{7}{3} + \frac{5}{3}} = 3^{\frac{-9 + 25}{15}} = 3^{\frac{16}{15}} = 3^{1\frac{1}{15}} \\ 3 \times 3^{\frac{1}{15}} &= 3\sqrt[15]{3} \end{aligned}$$