

گنجینه سوال رایگان

+ پاسخ تشریحی

یاوران دانش



راه های ارتباطی با ما:

www.Dyavari.com

۰۲۱-۷۶۷۰۳۸۵۸

۰۹۱۲-۳۴ ۹۴ ۱۳۴



	۱	۲	۳	۴
۱ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۲ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۴ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۵ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۶ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۷ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۸ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۹ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۰ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۱ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۱۲ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۳ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۴ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۵ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۶ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۷ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۱۸ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۹ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۰ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۱ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۲ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۲۳ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۴ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۵ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۶ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۷ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۸ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۹ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۰ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۱ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۳۲ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۳ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۴ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

	۱	۲	۳	۴
۳۵ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۶ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۳۷ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۸ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۹ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۴۰ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۴۱ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۴۲ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۴۳ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۴۴ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۴۵ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۴۶ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۴۷ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۴۸ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۴۹ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۵۰ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



۱- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. برد تابع f بازه $[-\infty, 4]$ است.

تابع f و در نتیجه تابع f^{-1} اکیداً صعودی است.

$$\text{شرط دامنه: } \begin{cases} 2x \in R_f \\ -x \in R_f \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x \leq 4 \\ -x \leq 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq 2 \\ x \geq -4 \end{cases} \Rightarrow -4 \leq x \leq 2$$

دامنه‌ی تابع شامل ۷ عدد صحیح است.

۲- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. اول تابع را مرتب می‌کنیم.

$$f = \left\{ \left(\sqrt[4]{2}, k \right), \left(\sqrt[3]{2}, k+1 \right), \left(\sqrt{2}, 2k-3 \right) \right\}$$

واضح است که تابع نزولی نیست زیرا برای نزولی بودن باید $k > k+1$ و یعنی $0 > 1$ باشد که امکان ندارد. حالا برای صعودی بودن داریم:

$$k < k+1 \leq 2k-3 \Rightarrow k \geq 4$$

۳- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. دقت کنید که فقط (-1) ریشه‌ی حقیقی f است.

$$g(x) = f(x+3) - 3$$

$$f \circ g(x) = 0 \Rightarrow g(x) = -1$$

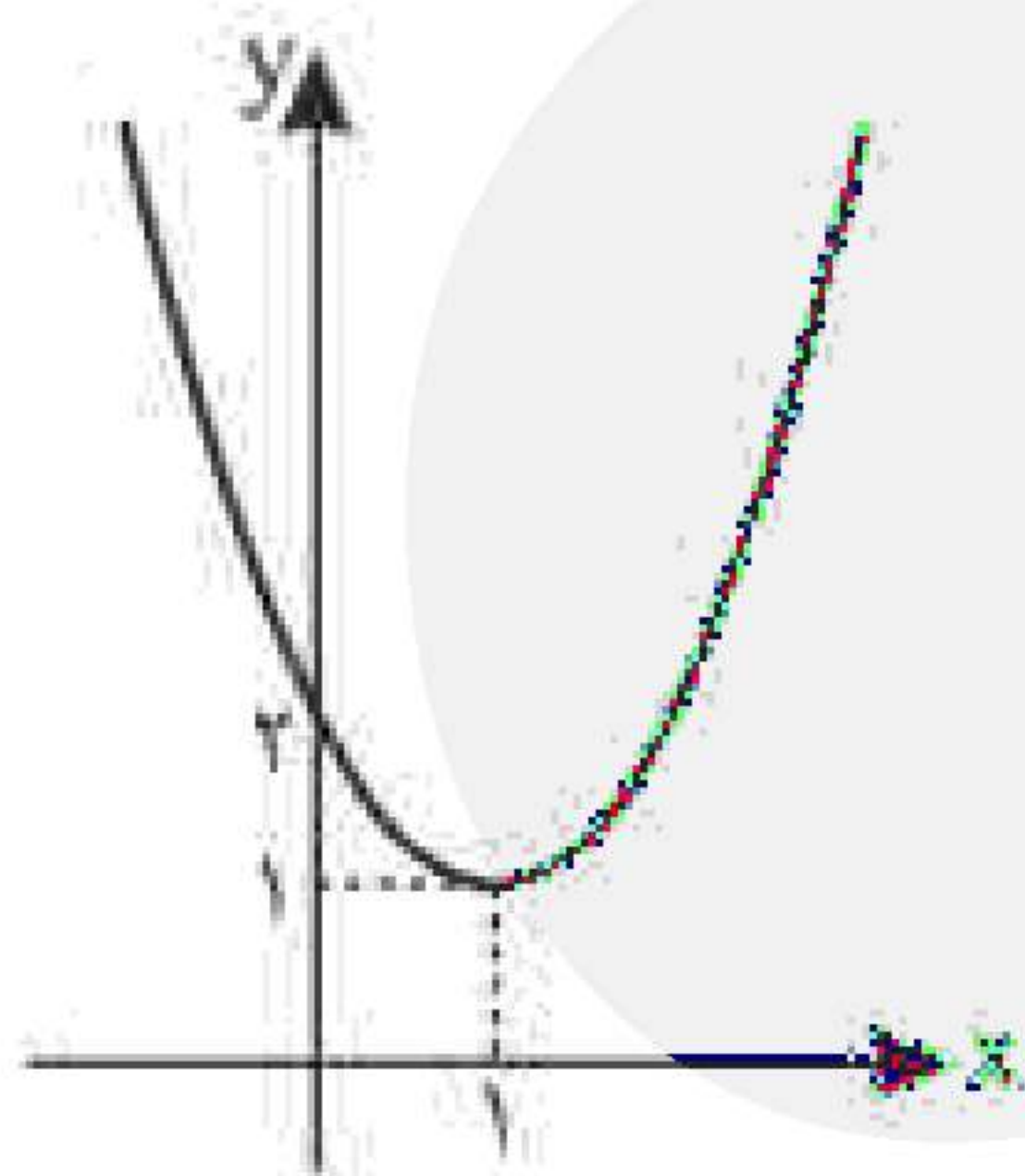
$$\Rightarrow f(x+3) - 3 = -1 \Rightarrow f(x+3) = 2$$

$$\Rightarrow (x+3)^2 + \frac{1}{x+3} = 2$$

با آزمایش گزینه‌ها، $x = -2$ به دست می‌آید.

۴- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ابتدا نمودار تابع f را در R رسم می‌کنیم:

واضح است که f روی R یک به یک نیست ولی f روی $(1, +\infty)$ یا روی $[-\infty, 1]$ یک به یک است که با توجه به صورت سوال $[-\infty, 1]$ قابل قبول نیست پس می‌بایست $a \geq 1$ و در نتیجه کمترین مقدار a برابر یک است.



۵- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$f \circ f(x) = 2(2x + [-x]) + [-2x - [-x]] = 4x + 2[-x] + [-2x] - [-x]$$

$$= 4x + [-x] + [-2x] = [-x] + f(2x)$$

$$f \circ f(x) - f(2x) = [-x]$$

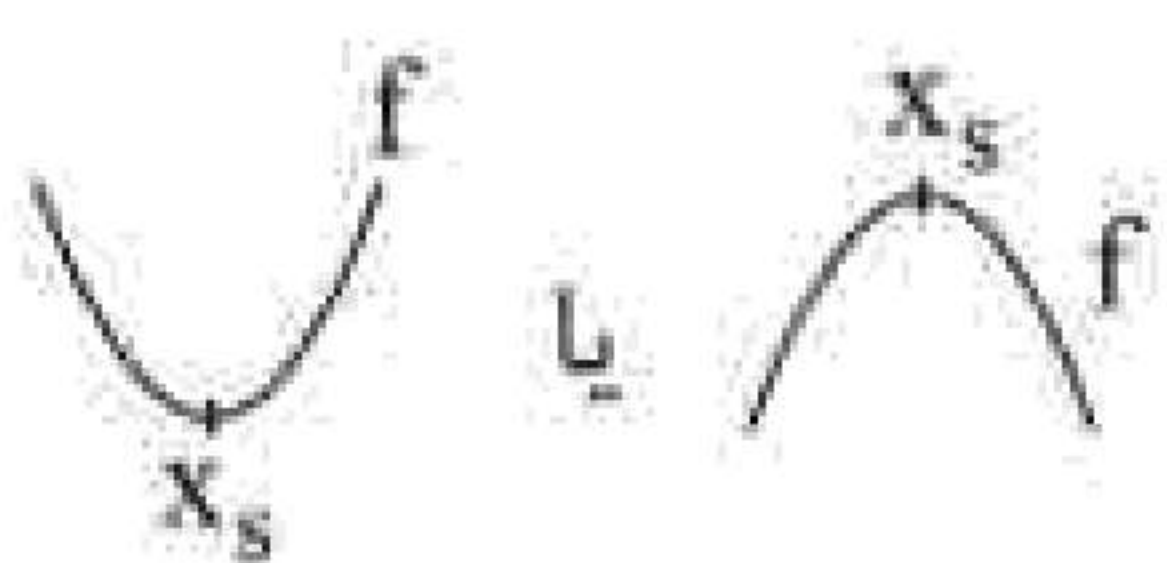


۶- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$f(x) = \frac{3^x}{1-3^x} \Rightarrow y = \frac{3^x}{1-3^x} \Rightarrow 3^x = y - y \times 3^x$$

$$\Rightarrow 3^x + y \times 3^x = y \Rightarrow 3^x(1+y) = y \Rightarrow 3^x = \frac{y}{1+y}$$

$$\Rightarrow x = \log_3\left(\frac{y}{1+y}\right) \Rightarrow f^{-1}(x) = \log_3\left(\frac{x}{1+x}\right)$$



۷- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. نکته: تابع درجه دوم $y = ax^2 + bx + c$ در بازه‌های $(-\infty, x_s]$ و $[x_s, +\infty)$ یا هر زیرمجموعه‌ای از این دو بازه یک به یک است. اگر $m = 0$ باشد، $f(x) = -5x$ و تابع خطی f در هر بازه‌ای مانند $(-\infty, -1]$ یک به یک است. اگر $m \neq 0$ باشد، ضابطه‌ی تابع را ساده می‌کنیم و داریم:

$$f(x) = x(m-x)^2 - x^3 - 5x = x(m^2 - 2mx + x^2) - x^3 - 5x$$

$$= mx^2 - 2mx^2 + x^3 - x^3 - 5x = -2mx^2 + (m^2 - 5)x$$

ضابطه‌ی f یک سهمی است و این سهمی در بازه‌ی $(-\infty, -1]$ یک به یک است، پس باید نامعادله‌ی $x_s \geq -1$ را حل کنیم:

$$x_s = -\frac{b}{2a} = \frac{m^2 - 5}{4m} \Rightarrow \frac{m^2 - 5}{4m} \geq -1 \Rightarrow \frac{m^2 + 4m - 5}{4m} \geq 0$$

$$m^2 + 4m - 5 = 0 \Rightarrow m = 1, -5$$

$$4m = 0 \Rightarrow m = 0$$

m	$-\infty$	-5	0	1	$+\infty$
$m^2 + 4m - 5$	+	0	-	-	+
$4m$	-	-	0	+	+
$\frac{m^2 + 4m - 5}{4m}$	-	0	+	-	+

$$\Rightarrow m \in [-5, 0) \cup [1, +\infty)$$

چون $m = 0$ نیز قابل قبول است، پس جواب نهایی به صورت زیر است:

$$m \in [-5, 0] \cup [1, +\infty)$$

با توجه به محدوده‌ی m گزینه‌ی ۳ درست است.

۸- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. برای تعیین دامنه تابع باید نامعادله‌ی مقابل را حل کنیم: $f(f(x)) \geq f(2x)$ چون f اکیداً صعودی است، داریم:

$$f(x) \geq 2x \Rightarrow x^3 + x \geq 2x \Rightarrow x^3 - x \geq 0$$

$$D = [-1, 0] \cup [1, +\infty) \Rightarrow D \cap \mathbb{Z}^- = \{-1\}$$



«بانک سوال یاوران دانش»

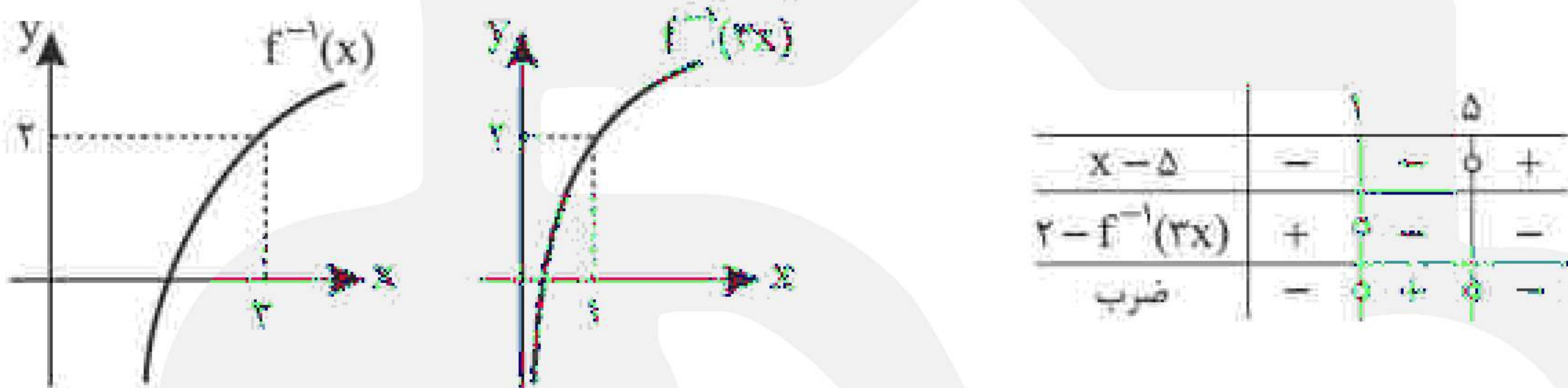
۹- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$f(x) = \begin{cases} -x + 2 - 2x + ax + a & x \leq 0 \\ -x + 2 + 2x + ax + a & 0 \leq x \leq 2 \\ x - 2 + 2x + ax + a & x \geq 2 \end{cases}$$

اگر تابع صعودی باشد، باید شیب هر سه ضابطه نامنفی باشد.

$$\begin{cases} a - 3 \geq a \geq 3 \\ a + 1 \geq 0 \Rightarrow a \geq -1 \\ a + 3 \geq 0 \Rightarrow a \geq -3 \end{cases} \Rightarrow a \geq 3$$

۱۰- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. f اکیداً صعودی است پس f^{-1} نیز اکیداً صعودی و نمودار فرضی آن به صورت زیر است.



بازه $[1, 5]$ برابر دامنه‌ی تابع است که شامل پنج عدد صحیح است.

۱۱- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. طول رأس سهمی f برابر $\frac{5}{2}$ و طول رأس سهمی g برابر $\frac{1}{3}$ است. چون هر دوی f و g روی (a, b) یک یه یک هستند، پس:

$$\frac{5}{2} \notin (a, b), \frac{1}{3} \notin (a, b), a < b \Rightarrow \begin{cases} b \leq \frac{1}{3}, a < \frac{1}{3} \\ a \geq \frac{1}{3}, b \leq \frac{5}{2} \\ a \geq \frac{5}{2}, b > \frac{5}{2} \end{cases}$$

اکنون به عنوان مثال توجه کنید که اگر $b \leq \frac{1}{3}$ آنگاه a می‌تواند هر مقدار حقیقی دلخواهی باشد که $a < \frac{1}{3}$ پس بیشترین مقدار $b - a$ وجود ندارد. همچنین برای حالت $a \geq \frac{5}{2}, b > \frac{5}{2}$ نیز مانند استدلال قبل بیشترین مقدار وجود ندارد.

۱۲- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\begin{aligned} f((a+1)x - b) &\xrightarrow{x \rightarrow -x} f(-(a+1)x - b) \xrightarrow{x \rightarrow x-3} f(-(a+1)(x-3) - b) \\ &\xrightarrow{x \rightarrow 2x} f(-(a+1)(2x-3) - b) = f(-2(a+1)x + 3(a+1) - b) = f(-2x + 8) \\ &\Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \end{cases} \Rightarrow a + b = -1 \end{aligned}$$



۱۳- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. چون تابع درجه دوم هیچ گاه بر روی R نمی تواند یک به یک و وارون پذیر باشد، پس این تابع قطعاً نمی تواند از درجه دوم باشد و به ناچار باید از درجه اول باشد، یعنی داریم:

$$2m + 10 = 0 \Rightarrow m = -5 \Rightarrow f(x) = (n + 3)x - 15 - n + \frac{1}{2}k$$

می دانیم تلاقی تابع خطی با وارون خودش قطعاً روی خط $y = x$ قرار دارد. مگر تابع خطی با شیب -1 که خودش و وارونش برابر هستند و در این صورت بی شمار نقطه‌ی تلاقی دارند.

چون در این سوال نقطه‌ی تلاقی f و f^{-1} یعنی نقطه‌ی $(-2, 3)$ روی خط $y = x$ قرار ندارد پس به ناچار این تابع خطی دارای شیب -1 است و در تمام نقاط دامنه‌اش و از جمله در نقطه‌ی $(-2, 3)$ وارونش را قطع می کند، یعنی داریم:

$$\text{شیب خط} = n + 3 \Rightarrow n + 3 = -1 \Rightarrow n = -4$$

$$f(x) = -x - 11 + \frac{1}{2}k \xrightarrow[\text{باید } f(-2) = 3]{\text{طبق فرض باید}} f(-2) = 2 - 11 + \frac{1}{2}k = 3 \Rightarrow \frac{1}{2}k = 12 \Rightarrow k = 24$$

$$f(x) = -x + 1 \Rightarrow f(0) = 1$$

۱۴- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$g(x) = \frac{1}{2(x - b) + a}$$

$$h(x) = \frac{1}{-2x + a}$$

$$(g + h)(x) = \frac{1}{2x - 2b + a} + \frac{1}{-2x + a} = \frac{2a - 2b}{-4x^2 + 4bx + a^2 - 2ab}$$

به شرطی تابع ثابت است که $2a - 2b = 0$ باشد پس $a = b$ است.

۱۵- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. در تابع یک به یک، اگر در دو زوج مرتب، مؤلفه‌های دوم برابر بودند، باید مؤلفه‌های اول نیز برابر باشند، پس داریم:

$$f = \{(a - 1, 4), (5, -3), (6, 4), (b, -3)\}$$

$$(a - 1, 4) = (6, 4) \Rightarrow a - 1 = 6 \Rightarrow a = 7$$

$$(5, -3) = (b, -3) \Rightarrow b = 5$$

تابع وارون تابع $g(x) = 2x - 1$ را می یابیم.

$$y = 2x - 1 \Rightarrow x = \frac{y + 1}{2} \Rightarrow g^{-1}(x) = \frac{x + 1}{2}$$

خواسته‌ی سؤال برابر است با:

$$g^{-1}(a + b) = g^{-1}(7 + 5) = g^{-1}(12) = \frac{12 + 1}{2} = 6/5$$



۱۶- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. تابع $\frac{f}{g}$ به صورت زیر است:

$$\frac{f}{g} = \{(-1, 1), (2, -1), (3, -1), (1, 2)\} \Rightarrow f \circ \frac{f}{g} = \{(-1, 10), (2, 2), (3, 2), (1, -3)\}$$

بنابراین برد تابع $f \circ \frac{f}{g}$ عبارت است از مجموعه‌ی $\{2, -3, 10\}$ که حاصل ضرب اعضای آن برابر -60 است.

«بانک سوال یاوران دانش»

۱۷- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\begin{aligned} f - g &= \{(1, 3), (2, 3), (3, -3)\} \\ f + g &= \{(1, 1), (2, 3), (3, 1)\} \\ (f - g) \circ (f + g) &= \{(1, 3), (2, -3), (3, 3)\} \\ \text{برد تابع} &= \{3, -3\} \Rightarrow \text{جمع اعضاء} = 0 \end{aligned}$$

۱۸- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. چون $f(4) = f(3) = f(1) = f(-1) = 0$ پس جواب‌های معادله‌ی $f(g(x)) = 0$

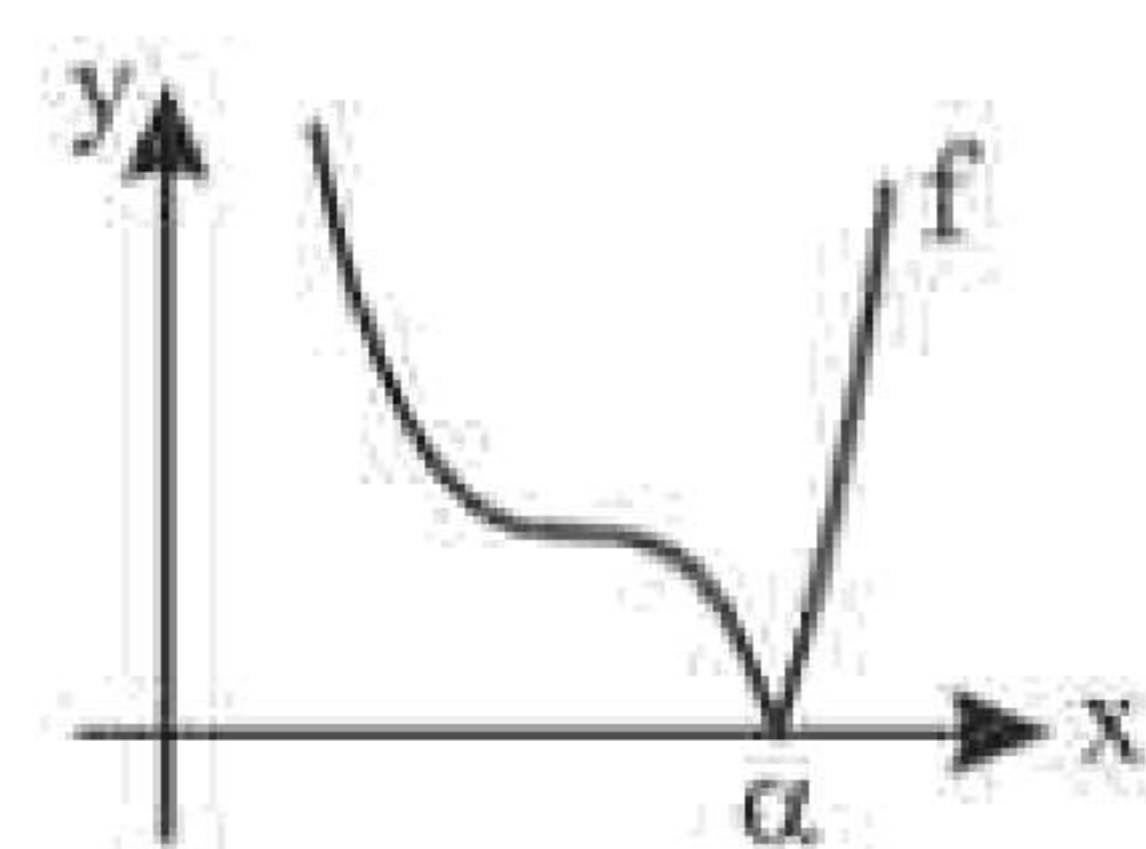
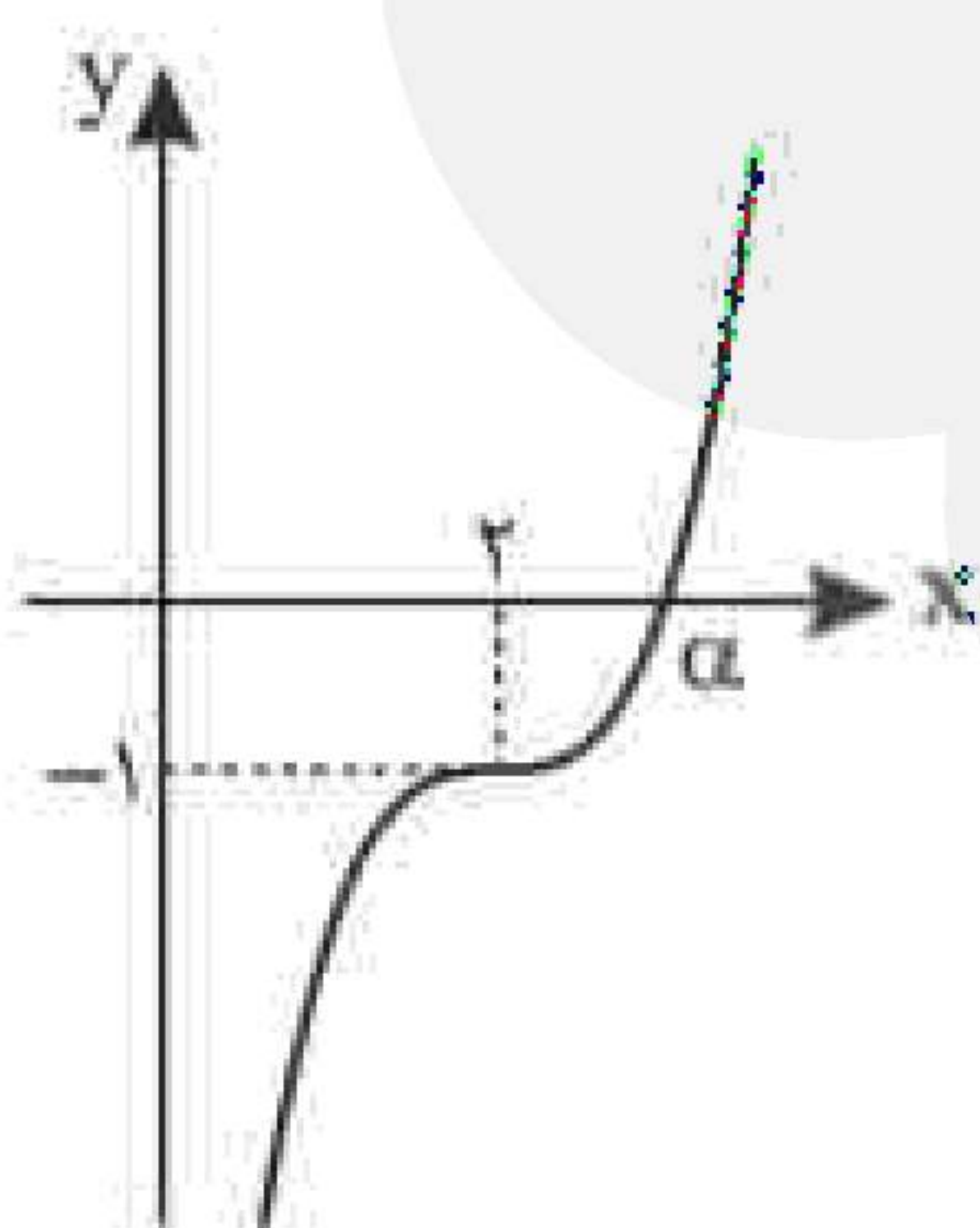
معادل جواب‌های معادله‌های $g(x) = -1, 1, 3, 4$ هستند. $g(x) = ax(x - 2)$ و $g(1) = -\frac{1}{4}$ پس جواب‌های

معادله‌های $\frac{1}{4}x^2 - x = -1$ ، $\frac{1}{4}x^2 - x = 1$ و $\frac{1}{4}x^2 - x = 4$ مدنظر هستند، پس $x^2 - 2x + 2 = 0$ ،

$x^2 - 2x - 2 = 0$ ، $x^2 - 2x - 6 = 0$ و $x^2 - 2x - 8 = 0$ که معادله اولی جواب ندارد. حاصل ضرب جواب‌ها در سه معادله دیگر $-96 = (-2)(-6)(-8)$ است که برابر حاصل ضرب ریشه‌ها در معادله $f(g(x)) = 0$ است.

۱۹- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ابتدا نمودار تابع $y = x^3$ را رسم کرده و آن را ۲ واحد به سمت راست و سپس ۱ واحد

به پایین انتقال می‌دهیم تا تابع $y = (x - 2)^3 - 1$ به دست آید.



سپس قسمت زیر محور x ها را نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم تا نمودار f به صورت زیر به دست آید.

همان‌طور که مشاهده می‌شود تابع f در بازه‌ی $(-\infty, \alpha]$ نزولی و در بازه‌ی $[\alpha, +\infty)$ صعودی است پس f در $x = \alpha$ تغییر یکنوایی می‌دهد. α طول نقطه‌ی

برخورد تابع $y = (x - 2)^3 - 1$ با محور x ها است. پس:

$$(x - 2)^3 - 1 = 0 \Rightarrow x - 2 = 1 \Rightarrow x = 3 \Rightarrow \alpha = 3$$



۲۰- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

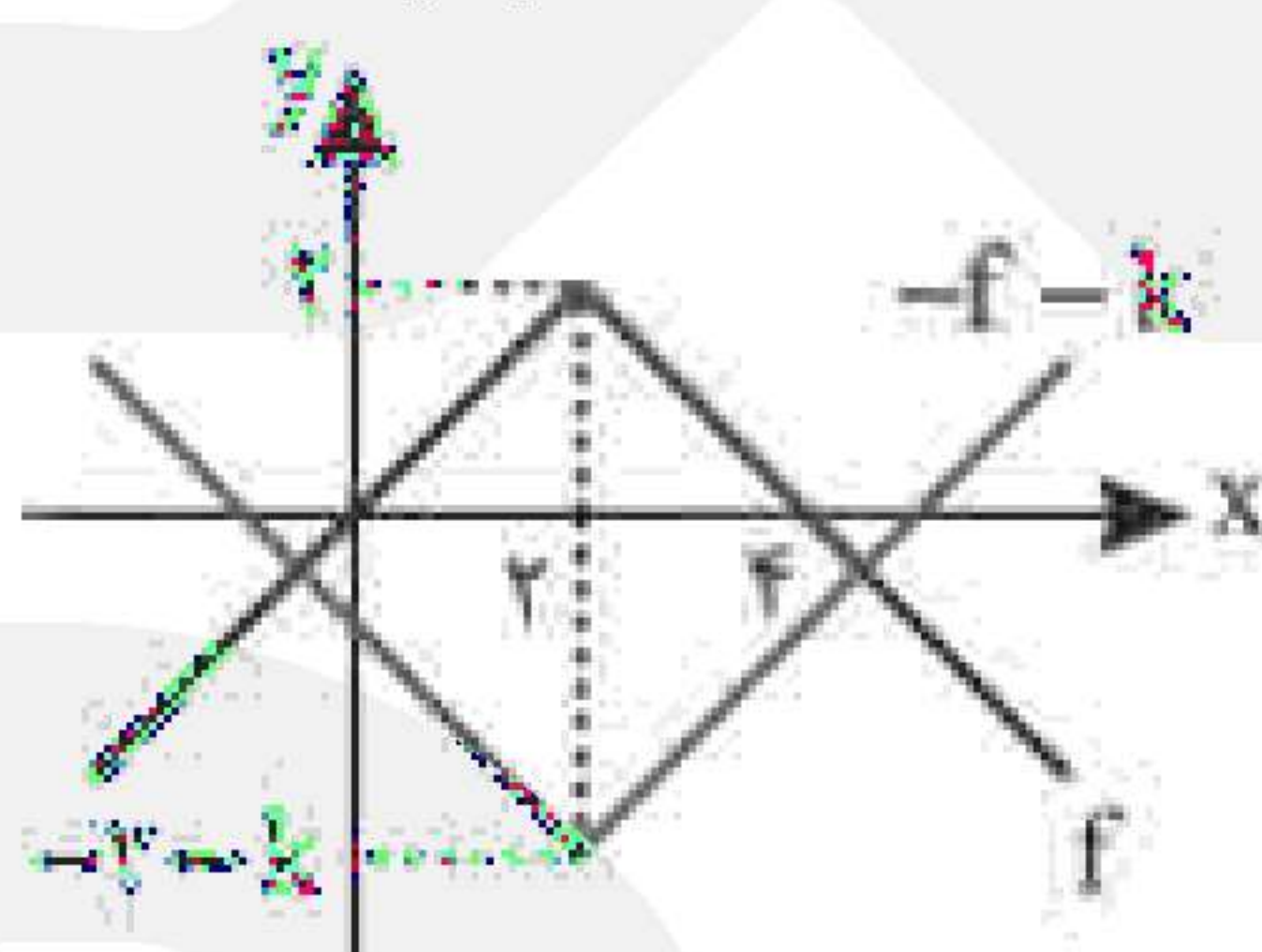
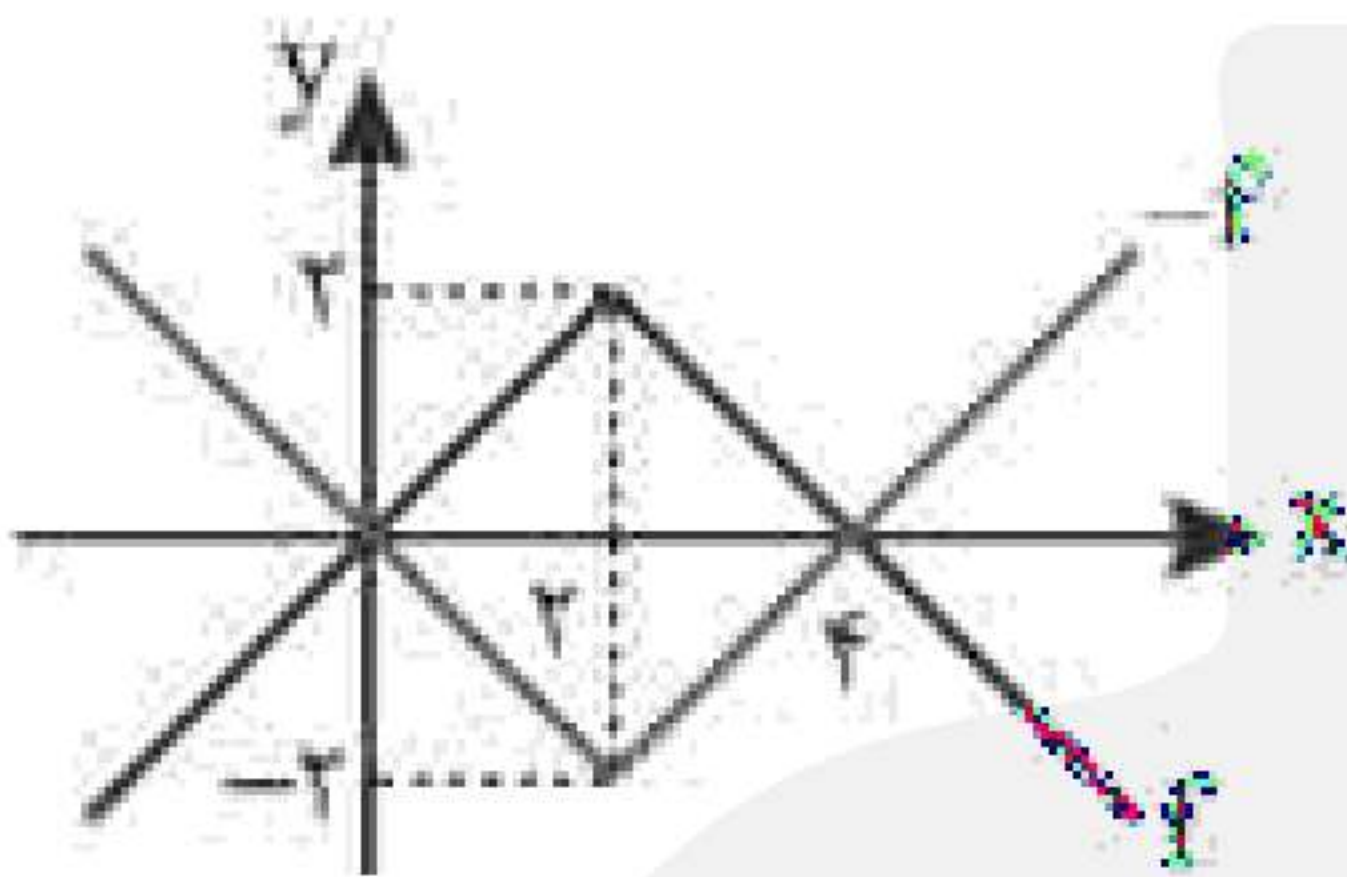
$$y = \frac{x-2}{2x+5} + k \quad k \text{ واحد بالا}$$

$$y = \frac{-x-2}{-2x+5} + k = \frac{x+2}{2x-5} + k$$

تابع g باید با وارون خود برابر باشد. در تابع $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ با شرط $a = -d$ تابع با وارون خود برابر است. بنابراین:

$$g(x) = \frac{x+2}{2x-5} + k = \frac{(1+2k)x+2-5k}{2x-5} \Rightarrow 1+2k=5 \Rightarrow k=2$$

۲۱- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. مساحت محدود به نمودار f و $-f$ برابر ۸ است.



قطر مربع جدید برابر $k+4$ است.

$$S = \frac{1}{2}(k+4)^2 = 18$$

$$(k+4)^2 = 36 \Rightarrow k=2$$

۲۲- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. مرحله اول: به جای x ، $x-2$ قرار می دهیم.

$$y = \sqrt{(x-2)(3(x-2)-2)} = \sqrt{(x-2)(3x-8)}$$

مرحله دوم: به جای x ، $2-x$ قرار می دهیم.

$$y = \sqrt{(2-x-2)(3(2-x)-8)} = \sqrt{(-x)(-3x-2)}$$

حال تقاطع دو تابع را بررسی می کنیم.

$$\sqrt{(-x)(-3x-2)} = mx-3$$

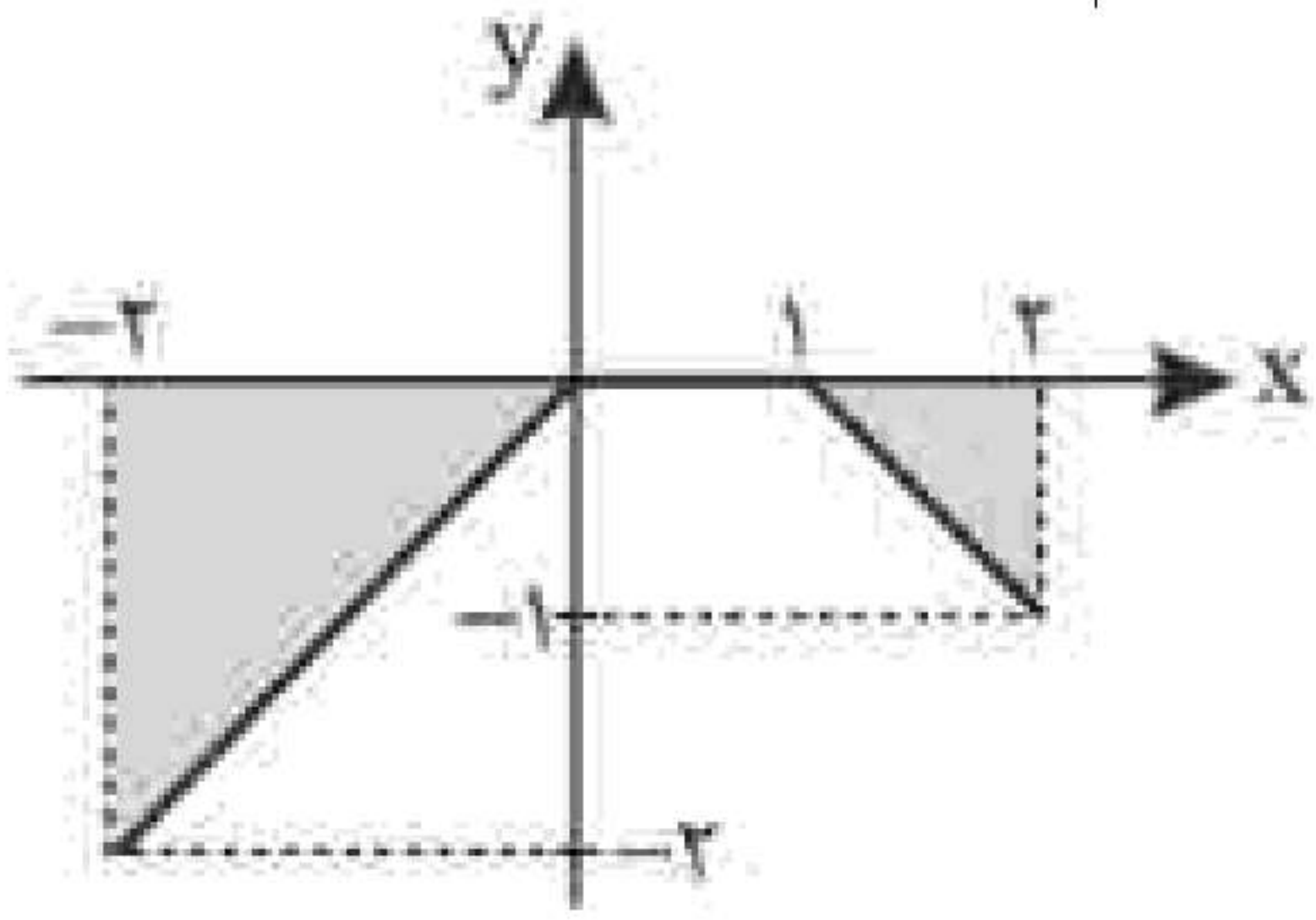
$$x = -9 \Rightarrow 3 \times 5 = -9m - 3 \Rightarrow m = -2$$

۲۳- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. فرض می کنیم $y = \frac{x}{2} - \frac{1}{2}$ ، پس:

$$2y = x - 1 \Rightarrow x = 2y + 1 \Rightarrow f(x) = 2x + 1$$



۲۴- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. در نمودار $y = f(x)$ ابتدا طول نقاط را باید نصف کنیم سپس عرض نقاط را نیز نصف کنیم و سپس نمودار را یک واحد به پایین انتقال دهیم تا نمودار تابع g به صورت زیر رسم شود. مساحت ناحیه‌ی هاشور خورد مورد نظر است که برابر مجموع مساحت‌های دو مثلث است و عبارت است از:



$$S = \frac{2 \times 2}{2} + \frac{1 \times 1}{2} = \frac{5}{2}$$

۲۵- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ضابطه g به صورت $-\frac{2}{5}x + 2$ است.

$$f(g(x)) = 0 \Rightarrow g(x) = -1, 3, 5$$

$$\Rightarrow -\frac{2}{5}x + 2 = -1, 3, 5$$

$$\Rightarrow x = \frac{15}{2}, -\frac{5}{2}, -\frac{15}{2}$$

$$\Rightarrow \text{جمع} = -\frac{5}{2}$$

$$\left. \begin{array}{l} \Rightarrow -\frac{2}{5}x + 2 = -1, 3, 5 \\ \Rightarrow x = \frac{15}{2}, -\frac{5}{2}, -\frac{15}{2} \\ \Rightarrow \text{جمع} = -\frac{5}{2} \end{array} \right\} -\frac{2}{5}(x_1 + x_2 + x_3) + 6 = 7 \Rightarrow x = -\frac{5}{2}$$

۲۶- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ضابطه‌ی تابع f به فرم ضابطه‌ی یک تابع خطی است، ولی با توجه به صورت سوال یک به یک نیست. پس f یک تابع ثابت است و این یعنی:

$$(2a - 1)^2 = 0 \Rightarrow 2a - 1 = 0 \Rightarrow a = \frac{1}{2} \Rightarrow f(x) = 4\left(\frac{1}{2}\right) + 1 = 3 \Rightarrow f(x) = 3$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) = 3$$



«بانک سوال یاوران دانش»

۲۷- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. طبق تعریف داریم:

$$D_{gof} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in \left\{ 3, -\frac{1}{4}, -2\sqrt{3}, \frac{1}{2} \right\} \right\}$$

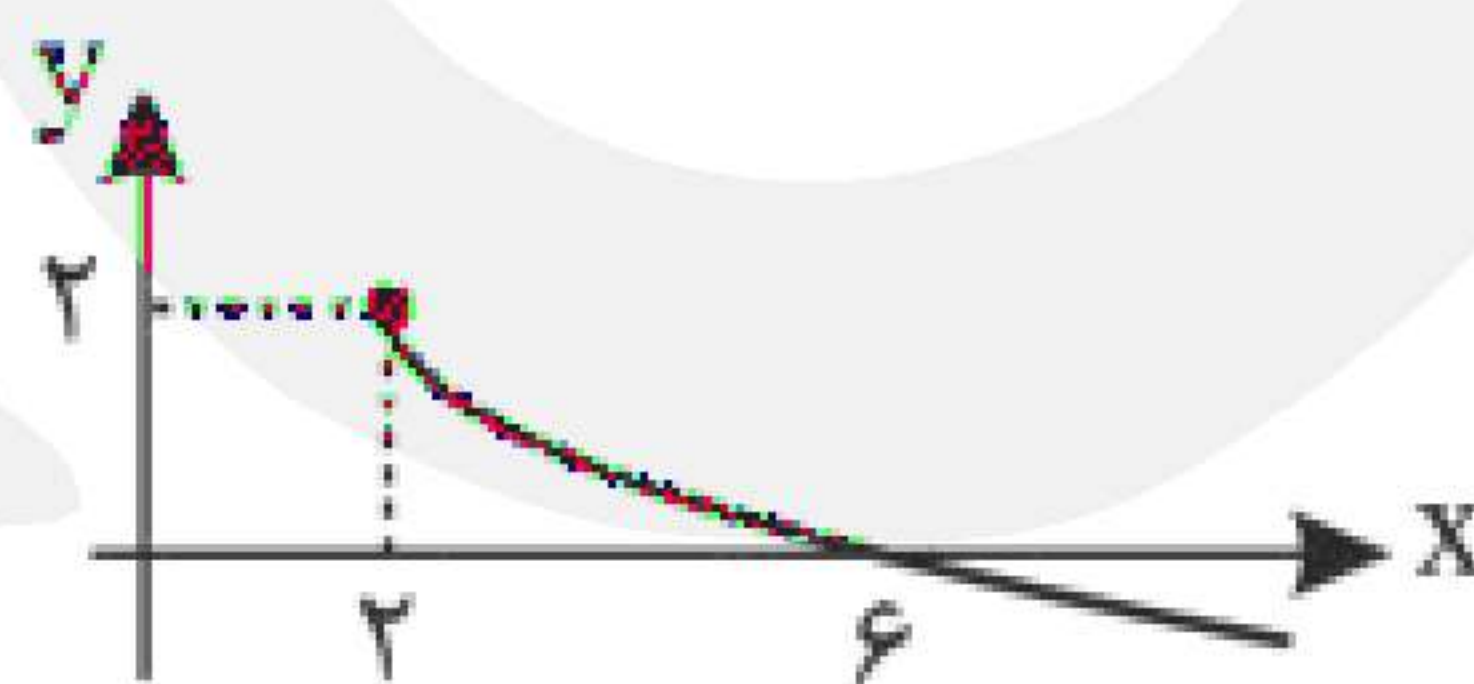
پس $f(x)$ را باید مساوی اعضای دامنه‌ی g قرار دهیم و x های قابل قبول را بیابیم. (توجه داشته باشید که ضابطه‌ی $f(x)$ برابر x^2 یا $(x < 1)\frac{-x}{2}$ است.)

$$\left. \begin{aligned} &\begin{cases} x^2 = 3 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3} \Rightarrow x = -\sqrt{3} \text{ (ق ق)} \\ -\frac{x}{2} = 3 \Rightarrow x = -6 \text{ (غ ق ق)} \end{cases} \\ &\begin{cases} x^2 = -\frac{1}{4} \text{ (غ ق ق)} \\ -\frac{x}{2} = -\frac{1}{4} \Rightarrow x = \frac{1}{2} \text{ (غ ق ق)} \end{cases} \\ &\begin{cases} x^2 = -2\sqrt{3} \text{ (غ ق ق)} \\ -\frac{x}{2} = -2\sqrt{3} \Rightarrow x = 4\sqrt{3} \text{ (ق ق)} \end{cases} \\ &\begin{cases} x^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ (ق ق)} \\ -\frac{x}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow x = -1 \text{ (غ ق ق)} \end{cases} \end{aligned} \right\} \Rightarrow D_{gof} = \left\{ -\sqrt{3}, 4\sqrt{3}, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right\}$$

بنابراین حاصل ضرب اعضای دامنه‌ی gof برابر است با: ۶

۲۸- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. کافی است به جای x ، عبارت $6 - x$ را جایگزین کنیم.

$$y = 2 - \sqrt{4 - (6 - x)} = 2 - \sqrt{x - 2}$$



اگر حداقل ۶ واحد به چپ یا حداقل دو واحد انتقال به پایین، از ناحیه اول عبور نمی‌کند.



۲۹- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. اگر $f(x)$ تابعی اکیداً صعودی باشد، تابع $f(-3x + 1)$ حتماً اکیداً نزولی است (چرا؟) و اگر ریشه‌ی تابع $f(x)$ ، ریشه‌ی تابع $f(-3x + 1)$ ، $x = -1$ است. (چرا؟) پس تعیین علامت زیر رادیکال به صورت زیر خواهد بود:

x	-3	-1	3
$-x^2 + 9$	$-$	$+$	$-$
$f(-3x + 1)$	$+$	$-$	$+$

$D_y : [-3, -1] \cup [3, +\infty) \Rightarrow a = -3, b = -1$

۳۰- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$y = 2 - f(2 - x) \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به مبدا}} y = -2 + f(2 + x) \xrightarrow[\text{به سمت راست}]{\text{۲ واحد}} y = -2 + f(x) \Rightarrow$$

حال اگر ۲ واحد به سمت بالا انتقال دهیم به ضابطه‌ی f می‌رسیم.

۳۱- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. تابع $y = x^2 - 4x - 2$ را ۳ واحد به سمت چپ انتقال می‌دهیم. پس باید x را به $x + 3$ تبدیل کنیم.

$$\begin{aligned} y = x^2 - 4x - 2 &\xrightarrow{x \rightarrow x + 3} y = (x + 3)^2 - 4(x + 3) - 2 \\ y = x^2 + 6x + 9 - 4x - 12 - 2 &\Rightarrow y = x^2 + 2x - 5 \\ y = x^2 + 2x + 1 - 1 - 5 &\Rightarrow y = (x + 1)^2 - 6 \end{aligned}$$

سپس نمودار را ۴ واحد به سمت بالا انتقال می‌دهیم:

$$\begin{aligned} f(x) = (x + 1)^2 - 6 + 4 &\Rightarrow f(x) = (x + 1)^2 - 2 \Rightarrow a = 1, b = -2 \\ f(a) = f(1) &= (1 + 1)^2 - 2 = 4 - 2 = 2 \\ f(b) = f(-2) &= (-2 + 1)^2 - 2 = 1 - 2 = -1 \\ f(a) + f(b) &= 2 + (-1) = 1 \end{aligned}$$

۳۲- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$f(x) = f^{-1}(25x - 4) \Rightarrow f(f(x)) = f(f^{-1}(25x - 4)) \Rightarrow f \circ f(x) = 25x - 4$$

اگر فرض کنیم $f(x) = ax + b$ در این صورت خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} f \circ f(x) &= f(f(x)) = f(ax + b) = a(ax + b) + b = a^2x + ab + b \\ \Rightarrow a^2x + ab + b &= 25x - 4 \Rightarrow \begin{cases} a^2 = 25 \\ ab + b = -4 \end{cases} \xrightarrow{\text{طبق فرض } a < 0} a = -5 \Rightarrow -5b + b = -4 \\ \Rightarrow -4b &= -4 \Rightarrow b = 1 \Rightarrow f(x) = -5x + 1 \Rightarrow f(1) = -4 \end{aligned}$$



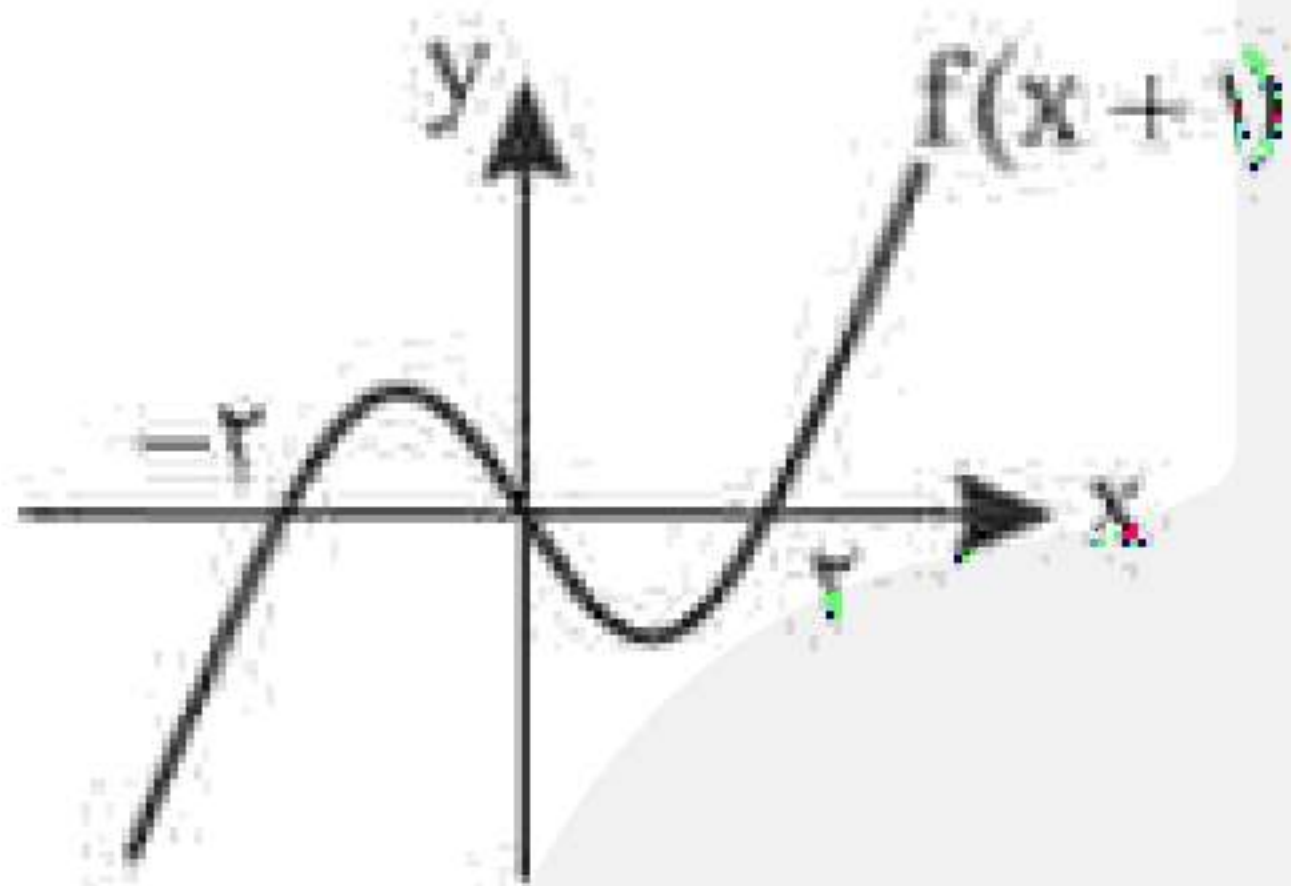
۳۳- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. نقاط برخورد f و f^{-1} نسبت به $y = x$ متقارند.

$$\begin{cases} f(3) = 4 \\ f(4) = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + \sqrt{b-3} = 4 \\ a + \sqrt{b-4} = 3 \end{cases}$$

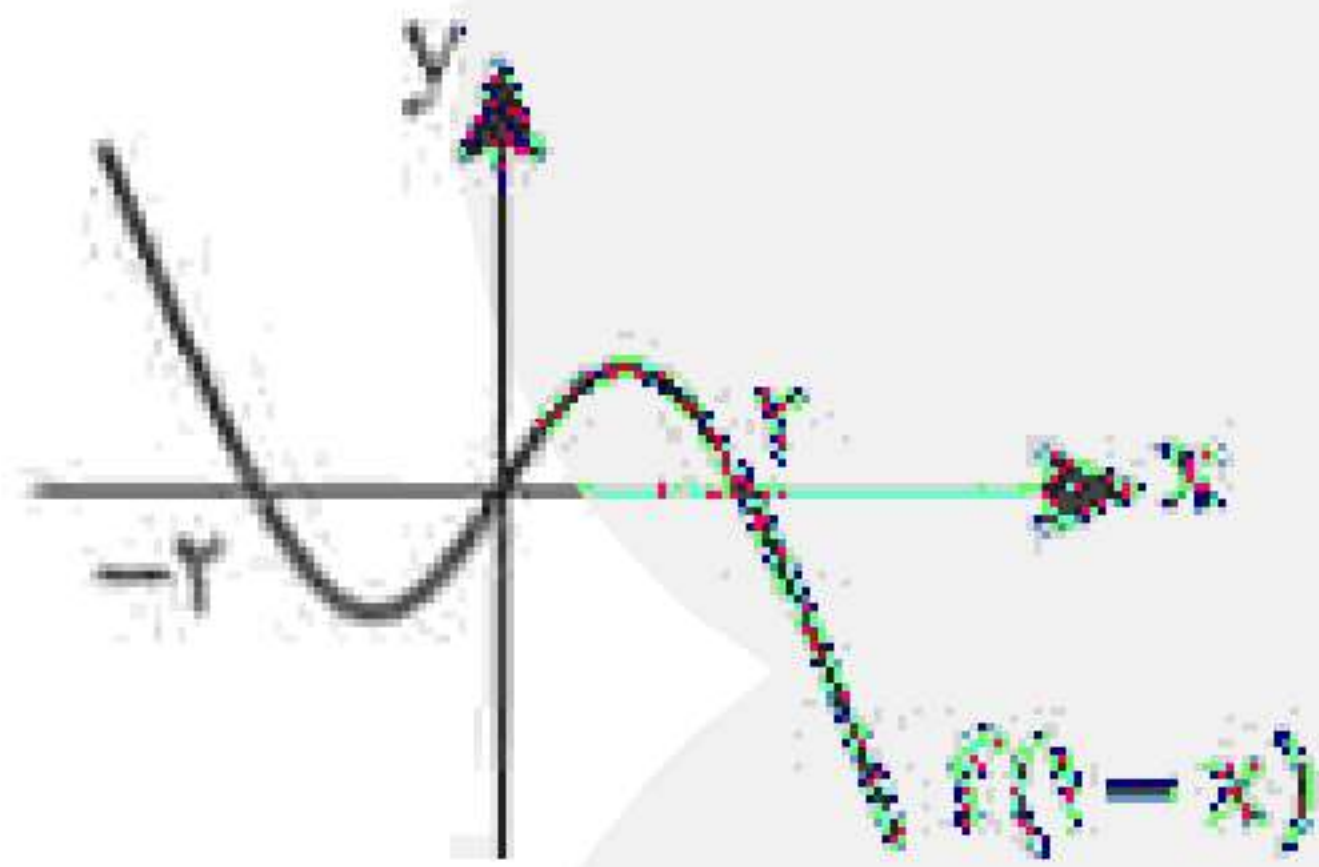
دو رابطه را از هم کم می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \sqrt{b-3} - \sqrt{b-4} = 1 &\Rightarrow \sqrt{b-3} = 1 + \sqrt{b-4} \Rightarrow b-3 = 1 + b-4 + 2\sqrt{b-4} \\ \Rightarrow \sqrt{b-4} = 0 &\Rightarrow b = 4 \Rightarrow a = 3 \Rightarrow a+b = 7 \end{aligned}$$

۳۴- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ابتدا نمودار $y = f(x-1)$ را ۲ واحد به چپ انتقال می‌دهیم تا به تابع $y = f(x+1)$ برسیم.



اگر تابع به دست آمده را نسبت به محور عرض‌ها قرینه کنیم به $f(1-x)$ می‌رسیم.



برای یافتن دامنه‌ی تعریف $y = \sqrt{f(x+1) - f(1-x)}$ باید $f(x+1) \geq f(1-x)$. با مقایسه‌ی نمودار آنها نسبت به هم داریم:

$$D = [-2, 0] \cup [2, +\infty)$$

«بانک سوال یاوران دانش»

۳۵- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

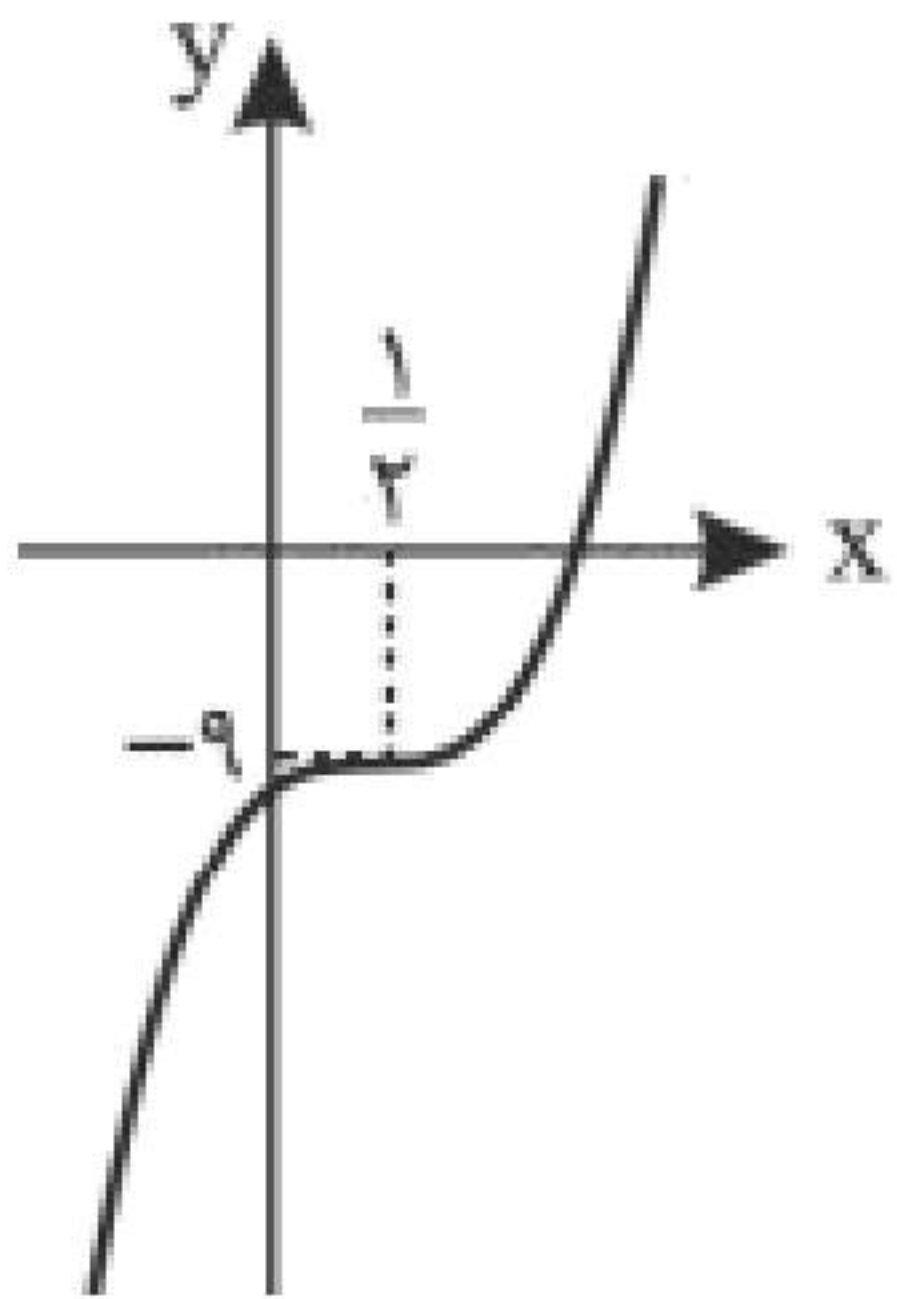
$$\begin{aligned} &\xrightarrow[\text{انبساط عمودی با ضریب ۲}]{2\sqrt{x}} 2\sqrt{x} \xrightarrow[\text{قرینه نسبت به yها}]{2\sqrt{-x}} 2\sqrt{-x} \\ &\xrightarrow[\text{یک واحد انتقال به راست}]{2\sqrt{-(x-1)}} 2\sqrt{-(x-1)} = 2\sqrt{-x+1} = \sqrt{-4x+4} \end{aligned}$$



۳۶- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$f(x) = (2x - 3)(4x^2 + 3) - 1 = 8x^3 - 12x^2 + 6x - 1 = (2x - 1)^3 - 9$$

نمودار f از نواحی ۱، ۳ و ۴ می‌گذرد، پس نمودار f^{-1} از نواحی ۱، ۳ و ۲ می‌گذرد.



۳۷- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. رأس f نقطه‌ی $(-3, -3)$ است پس:

$$۱) \Rightarrow (-3, -3) \text{ قرینه نسبت به } y \text{ ها}$$

$$k \Rightarrow A(-3, -3 + k) \text{ واحد بالا}$$

$$۲) \Rightarrow (3, 3) \text{ قرینه نسبت به } x \text{ ها}$$

$$k \Rightarrow B(3 + k, 3) \text{ واحد به چپ}$$

$$\Rightarrow AB = \sqrt{(k+6)^2 + (k-6)^2} = 7\sqrt{2} \Rightarrow k^2 + 36 = 49 \Rightarrow k = \sqrt{13}$$

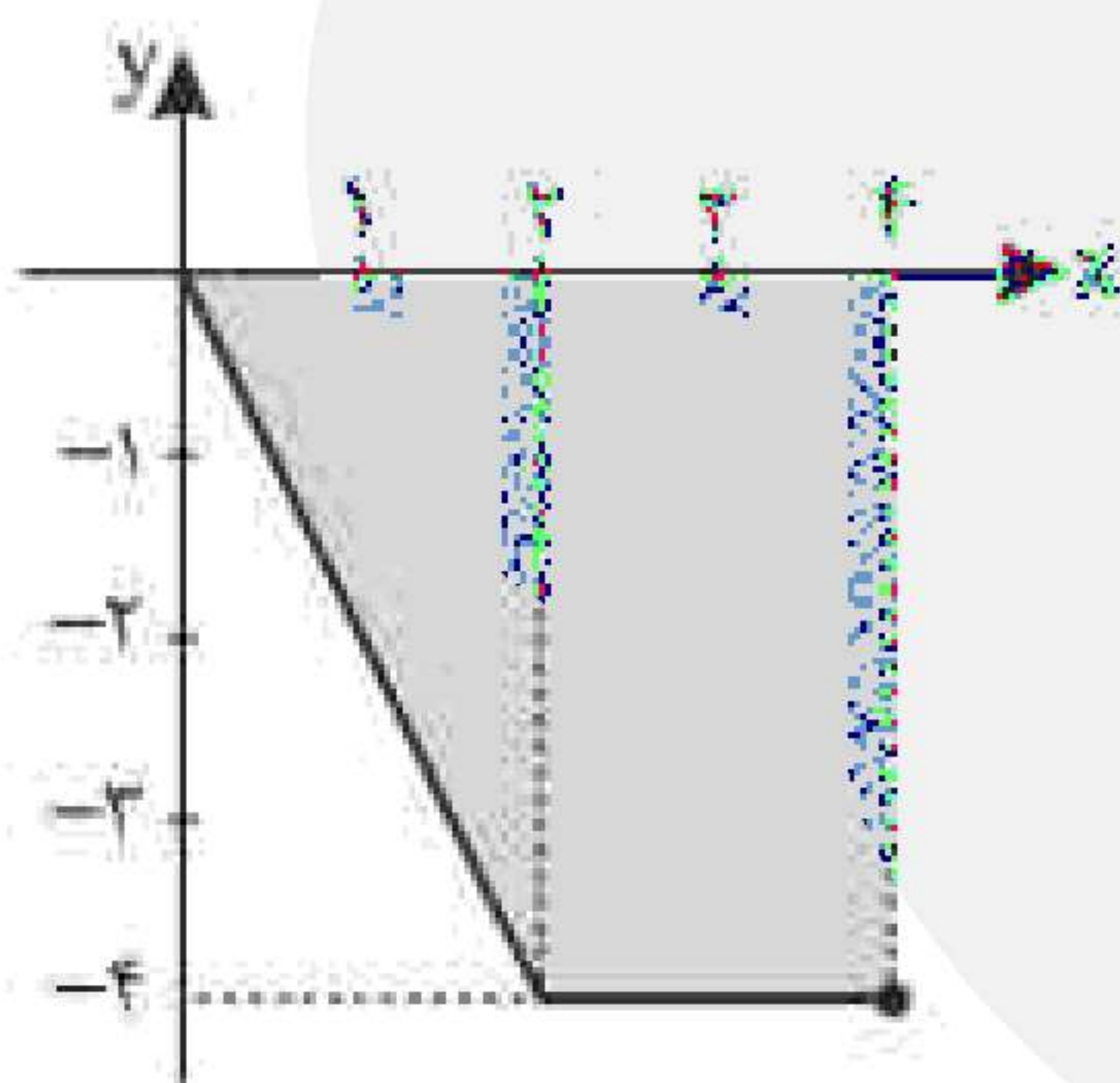
۳۸- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$f(x) \rightarrow f(-x) \rightarrow f(-(x - 2k)) = f(2k - x)$$

$$y = f(2k - x) \xrightarrow{\text{وارون}} f^{-1}(y) = 2k - x \Rightarrow x = 2k - f^{-1}(y) \Rightarrow g(x) = 2k - f^{-1}(x)$$

۳۹- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. در تابع f ، عرض نقاط را در -2 ضرب می‌کنیم تا نمودار تابع $g(x) = -2f(x)$ به دست آید.

$$\text{مساحت : } S = \frac{4 + 2 \times 4}{2} = 12$$





۴۰- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. تابع f نزولی اکیدا است.

$$f \circ f(x) < f(x-1) \Rightarrow f(x) > x-1 \Rightarrow 2 + \sqrt{5-x} > x-1 \Rightarrow \sqrt{5-x} > x-3$$

$$\Rightarrow 5-x > x^2 - 6x + 9 \Rightarrow x^2 - 5x + 4 < 0 \Rightarrow 1 < x < 4$$

البته دقت کنید اگر $x-3$ منفی باشد (یعنی $x < 3$)، نامعادله همواره برقرار است. پس تمام بازه‌ی $x < 4$ قابل قبول است. از طرفی شرط دامنه به صورت زیر است:

$$x-1 \in D_f \Rightarrow x-1 \leq 5 \Rightarrow x \leq 6$$

$$f(x) \in D_f \Rightarrow 2 + \sqrt{5-x} \leq 5 \Rightarrow -4 \leq x$$

پس جواب نهایی به صورت $(-4, 4]$ است، که شامل ۸ عدد صحیح است.

۴۱- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$f(x) = ax + b \Rightarrow (f \circ f)(x) = a(ax + b) + b = a^2x + ab + b$$

$$\Rightarrow (f \circ f \circ f)(x) = a^2 f(x) + ab + b = a^2(ax + b) + ab + b$$

$$\Rightarrow a^3x + b(a^2 + a + 1) = 8x - 35$$

$$a^3 = 8 \Rightarrow a = 2$$

$$\Rightarrow b(a^2 + a + 1) = -35 \Rightarrow 7b = -35 \Rightarrow b = -5$$

$$f(x) = 2x - 5 \Rightarrow f(1) = -3$$

۴۲- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$y = ax - 2f(3x) = ax - 2|6x| = ax - 12|x| = \begin{cases} (a-12)x & x \geq 0 \\ (a+12)x & x < 0 \end{cases}$$

باید شیب هر دو خط هم علامت باشند.

$$(a-12)(a+12) > 0 \Rightarrow a^2 - 144 > 0 \Rightarrow |a| > 12$$

۴۳- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$-f(-x) = \frac{-x-1}{-2x+1} = \frac{x+1}{-2x+1}$$

قرینه نسبت به مبدأ

$$y = \frac{x+1}{-2x+1} + k = \frac{(1-2k)x + 1+k}{-2x+1}$$

k واحد بالا

$$f(ax+b) = \frac{ax+b-1}{2ax+2b+1} = \frac{(1-2k)x + 1+k}{-2x+1}$$

باید نسبت ضرایب در دو تابع یکسان باشد.

$$\frac{a}{2a} = \frac{1}{2} = \frac{1-2k}{-2} \Rightarrow k = 1$$

$$\Rightarrow \frac{ax+b-1}{2ax+2b+1} = \frac{-x+2}{-2x+1} = \frac{x-2}{2x-1} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-1 \end{cases} \Rightarrow a+b+k=1$$



۴۴- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$-1 \leq x \leq 2 \Rightarrow -2 \leq -x \leq 1 \Rightarrow \frac{a-2}{3} \leq \frac{a-x}{3} \leq \frac{1+a}{3}$$

در بازه‌ای که تابع $f(x)$ صعودی اکید است، متناظر با آن، تابع داده شده نزولی اکید است. پس باید محدوده‌ی $\frac{a-x}{3}$ در بازه‌ی $[0, -3]$ باشد.

$$-3 \leq \frac{a-2}{3} \leq \frac{a-x}{3} \leq \frac{1+a}{3} \leq 0 \Rightarrow \begin{cases} -7 \leq a \\ a \leq -1 \end{cases} \Rightarrow -7 \leq a \leq -1$$

۴۵- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$g(x) = 1 + \frac{k}{x-2} = \frac{x-2+k}{x-2} = \frac{(x-2)(x-2+k)}{(x-2)^2}$$

$$g(x) = f(x) \Rightarrow \begin{cases} x^2 + 3x + b = (x-2)(x-2+k) \\ x^2 + ax + 4 = (x-2)^2 \end{cases} \Rightarrow a = -4, b = -10, k = 7$$

$$g(k) = g(7) = 1 + \frac{7}{5} = 2/4$$

۴۶- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ابتدا ضابطه‌ی $f^{-1}(x)$ را به دست می‌آوریم:

$$y = ax + a - 1 \Rightarrow y - a + 1 = ax \xrightarrow{a \neq 0} x = \frac{y}{a} + \frac{-a+1}{a} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x}{a} + \frac{-a+1}{a}$$

اکنون طبق فرض همواره باید داشته باشیم: $f(x) = f^{-1}(x)$

$$\Rightarrow ax + a - 1 = \frac{1}{a}x + \frac{-a+1}{a} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{a} \Rightarrow a^2 = 1 \\ a - 1 = \frac{-a+1}{a} \Rightarrow a^2 = 1 \end{cases}$$

بنابراین $a = 1$ یا $a = -1$ ، پس:

$$f(a) = \underbrace{a^2}_{=1} + a - 1 = a \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \Rightarrow f(a) = 1 \\ a = -1 \Rightarrow f(a) = -1 \end{cases}$$



۴۷- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$D_f = (-\infty, -\sqrt{5}] \cup [\sqrt{5}, +\infty)$$

$$D_g = [-2, 2]$$

$$D_{g \circ f} = \{x \geq \sqrt{5} \text{ یا } x \leq -\sqrt{5} \mid -2 \leq \sqrt{x^2 - 5} \leq 2\}$$

$$x^2 - 5 \leq 4 \Rightarrow x^2 \leq 9 \Rightarrow -3 \leq x \leq 3$$

$$D_{g \circ f} = [-3, -\sqrt{5}] \cup [\sqrt{5}, 3]$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -3 \leq x \leq -\sqrt{5} \Rightarrow [x] = -3, x = 3 \Rightarrow [x] = 2 \\ \sqrt{5} \leq x < 3 \Rightarrow [x] = 2 < x = 3 \Rightarrow [x] = 3 \end{cases}$$

«بانک سوال یاوران دانش»

۴۸- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. نکته:

$$f(a) = b \Leftrightarrow f^{-1}(b) = a$$

ابتدا داریم:

$$f^{-1}(3) = k \Leftrightarrow f(k) = 3$$

$$f(x) = f^{-1}(3) + 4x - 2 \xrightarrow{x=k} f(k) = f^{-1}(3) + 4k - 2$$

$$\xrightarrow{f(k)=3} 3 = k + 4k - 2 \Rightarrow 5k = 5 \Rightarrow k = 1$$

$$f^{-1}(3) = k$$

$$\Rightarrow f(x) = 1 + 4x - 2 = 4x - 1$$

اکنون وارون تابع f را به دست می‌آوریم:

$$y = 4x - 1 \Rightarrow y + 1 = 4x \Rightarrow x = \frac{y+1}{4} \xrightarrow{x \leftrightarrow y} f^{-1}(x) = \frac{x+1}{4}$$

۴۹- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$f^{-1} \circ f(x) = x, x \in D_f = (-\infty, 3]$$

$$f \circ f^{-1}(x) = x, x \in R_f = [2, +\infty)$$

$$g(x) = \frac{f \circ f^{-1}(x) + f^{-1} \circ f(x)}{2} = \frac{x+x}{2} = x, x \in D_f \cap R_f = [2, 3]$$



۵۰- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. در رابطه‌ی $f\left(\frac{x}{3}\right) = x^2 + x + 1$ به جای x قرار می‌دهیم $9z$:

$$f(3z) = 81z^2 + 9z + 1 \Rightarrow 81z^2 + 9z + 1 = 7 \Rightarrow 81z^2 + 9z - 6 = 0$$

$$\Delta > 0 \Rightarrow z_1 + z_2 = -\frac{9}{81} = -\frac{1}{9}$$

