

# گنجینه سوال رایگان

+ پاسخ تشریحی

## یاوران دانش



راه های ارتباطی با ما:

[www.Dyavari.com](http://www.Dyavari.com)

۰۲۱-۷۶۷۰۳۸۵۸

۰۹۱۲-۳۴ ۹۴ ۱۳۴





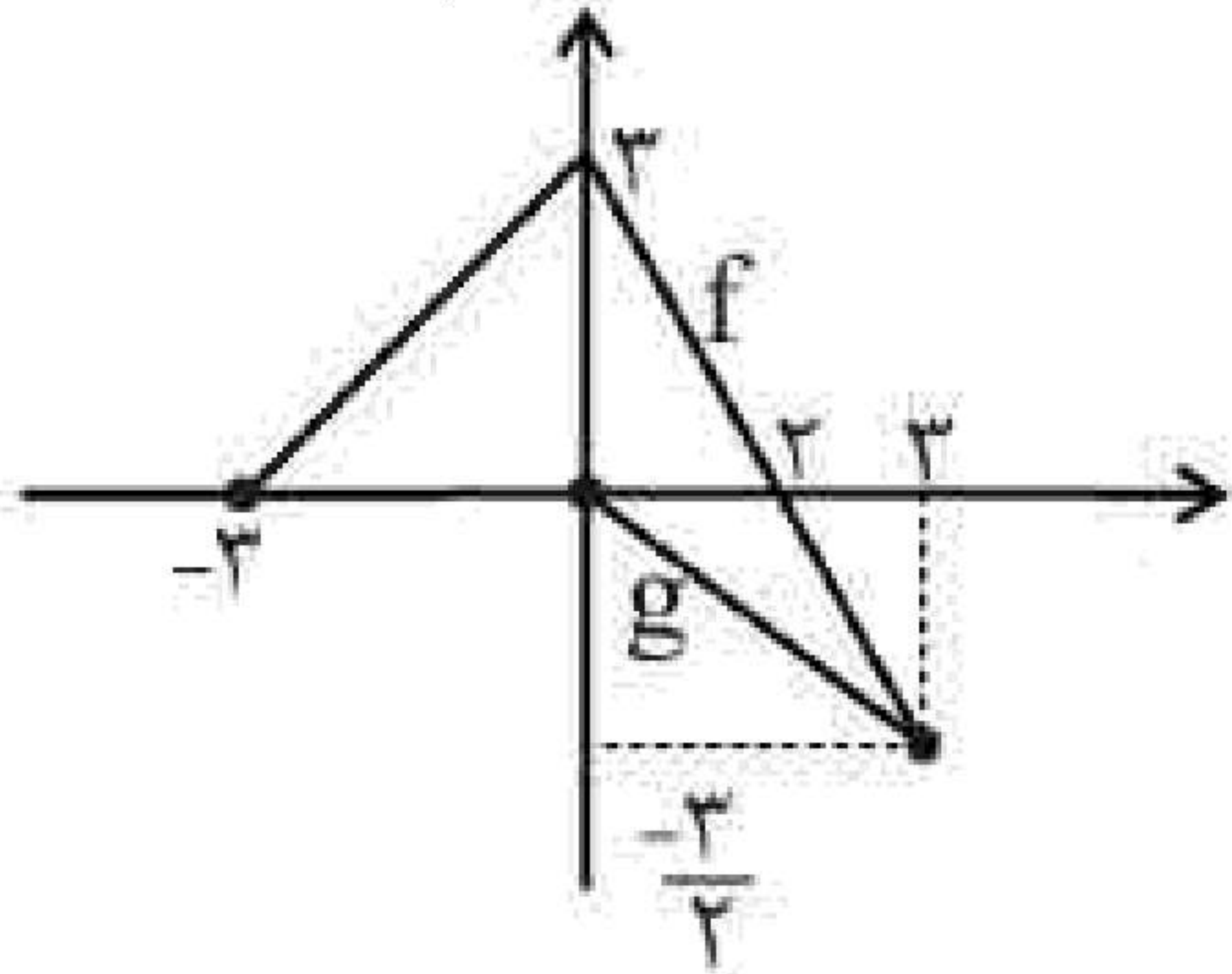
|      | ۱                                   | ۲                                   | ۳                                   | ۴                                   |
|------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|
| ۱ -  | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input checked="" type="checkbox"/> |
| ۲ -  | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            |
| ۳ -  | <input type="checkbox"/>            | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            |
| ۴ -  | <input type="checkbox"/>            | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            |
| ۵ -  | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            |
| ۶ -  | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            |
| ۷ -  | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input checked="" type="checkbox"/> |
| ۸ -  | <input type="checkbox"/>            | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            |
| ۹ -  | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input checked="" type="checkbox"/> |
| ۱۰ - | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            |
| ۱۱ - | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input checked="" type="checkbox"/> |
| ۱۲ - | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            |
| ۱۳ - | <input type="checkbox"/>            | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            |
| ۱۴ - | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            |
| ۱۵ - | <input type="checkbox"/>            | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            |
| ۱۶ - | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input checked="" type="checkbox"/> |
| ۱۷ - | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            |
| ۱۸ - | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input checked="" type="checkbox"/> |
| ۱۹ - | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input checked="" type="checkbox"/> |
| ۲۰ - | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input checked="" type="checkbox"/> |
| ۲۱ - | <input type="checkbox"/>            | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            |
| ۲۲ - | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            |
| ۲۳ - | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            |
| ۲۴ - | <input type="checkbox"/>            | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            |
| ۲۵ - | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input checked="" type="checkbox"/> |
| ۲۶ - | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            |
| ۲۷ - | <input type="checkbox"/>            | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            |
| ۲۸ - | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            |
| ۲۹ - | <input type="checkbox"/>            | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            |
| ۳۰ - | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            |
| ۳۱ - | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input checked="" type="checkbox"/> |
| ۳۲ - | <input type="checkbox"/>            | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            |
| ۳۳ - | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            |
| ۳۴ - | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            |

|      | ۱                                   | ۲                                   | ۳                                   | ۴                                   |
|------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|
| ۳۵ - | <input type="checkbox"/>            | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            |
| ۳۶ - | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            |
| ۳۷ - | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input checked="" type="checkbox"/> |
| ۳۸ - | <input type="checkbox"/>            | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            |
| ۳۹ - | <input type="checkbox"/>            | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            |
| ۴۰ - | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            |
| ۴۱ - | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input checked="" type="checkbox"/> |
| ۴۲ - | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            |
| ۴۳ - | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            |
| ۴۴ - | <input type="checkbox"/>            | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            |
| ۴۵ - | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            |
| ۴۶ - | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            |
| ۴۷ - | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input checked="" type="checkbox"/> |
| ۴۸ - | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            |
| ۴۹ - | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            |
| ۵۰ - | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            |





۱- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ضابطه تابع  $g$  و  $f$  را پس از محاسبه مقدار تابع‌ها در  $x = 4$  محاسبه می‌کنیم.



$$g(x) = -\frac{x}{3} \quad (0 \leq x \leq 3)$$

$$f(x) = \begin{cases} x+3 & -3 \leq x \leq 0 \\ -\frac{2}{3}x+3 & 0 < x \leq 3 \end{cases}$$

$$fog(x) = \begin{cases} -\frac{x}{3} + 3 & -3 \leq -\frac{x}{3} \leq 0 \Rightarrow 6 \geq x \geq 0 \\ \frac{2}{3}x + 3 & 0 < -\frac{x}{3} \leq 3 \Rightarrow 0 > x \geq -6 \end{cases}$$

ضابطه  $fog(x)$  را می‌یابیم:

اشتراک دامنه تابع اخیر با دامنه تابع  $g(x)$  بازه  $[0, 3]$  است.

برد تابع  $fog(x)$  روی بازه  $[0, 3]$  برابر بازه  $[\frac{3}{2}, 3]$  است و برای اینکه خط  $y = k$  نمودار تابع  $fog(x)$  را قطع

کند باید  $\frac{3}{2} \leq k \leq 3$  باشد.

۲- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ابتدا دامنه توابع  $f(x)$  و  $g(x)$  را به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} f(2x) &= 3x - 1 & 1 < x < 5 \Rightarrow 2 < 2x < 10 \\ \text{پس : } f(x) : & & 2 < x < 10 \Rightarrow D_{f(x)} = (2, 10) \\ g(x-1) &= 3x - 1 & 1 < x < 5 \Rightarrow 0 < x-1 < 4 \\ \text{پس : } g(x) : & & 0 < x < 4 \Rightarrow D_{g(x)} = (0, 4) \end{aligned}$$

نهایتاً داریم:

$$D_{gof(x)} = \{x \in D_{f(x)} \mid f(x) \in D_{g(x)}\} = \{x \in (2, 10) \mid f(x) \in (0, 4)\}$$

دقت کنید که  $f(2x) = 3x - 1$  و در نتیجه  $f(x) = \frac{3}{2}x - 1$  است، پس برای آنکه  $f(x) \in (0, 4)$  باشد، باید:

$$0 < \frac{3}{2}x - 1 < 4 \Rightarrow 1 < \frac{3}{2}x < 5 \Rightarrow \frac{2}{3} < x < \frac{10}{3} \Rightarrow x \in \left(\frac{2}{3}, \frac{10}{3}\right)$$

اشتراک بازه‌های  $(2, 10)$  و  $\left(\frac{2}{3}, \frac{10}{3}\right)$  که بازه  $\left(2, \frac{10}{3}\right)$  است جواب تست است.

۳- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. با توجه به اینکه  $f+g$  ثابت و  $gof$  خطی است، پس هر دو تابع  $f$  و  $g$  خطی‌اند. فرض کنید  $g(x) = ax + b$  باشد:

$$gof(x) = 10 - 9x \Rightarrow a(6 - ax - b) + b = 10 - 9x \Rightarrow -a^2x + 6a - ab + b = 10 - 9x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -a^2 = -9 \\ 6a - ab + b = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 3 \Rightarrow b = 4 \Rightarrow g(x) = 3x + 4 \\ a = -3 \Rightarrow b = 7 \Rightarrow g(x) = -3x + 7 \end{cases}$$

$$\Rightarrow g(3) = 13 \text{ یا } -2 \Rightarrow \text{جمع} = 11$$





۴- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$f \circ g^{-1}(x) = \frac{3x-1}{x+2} \Rightarrow g^{-1}(x) = f^{-1}\left(\frac{3x-1}{x+2}\right) \Rightarrow x = g \circ f^{-1}\left(\frac{3x-1}{x+2}\right)$$

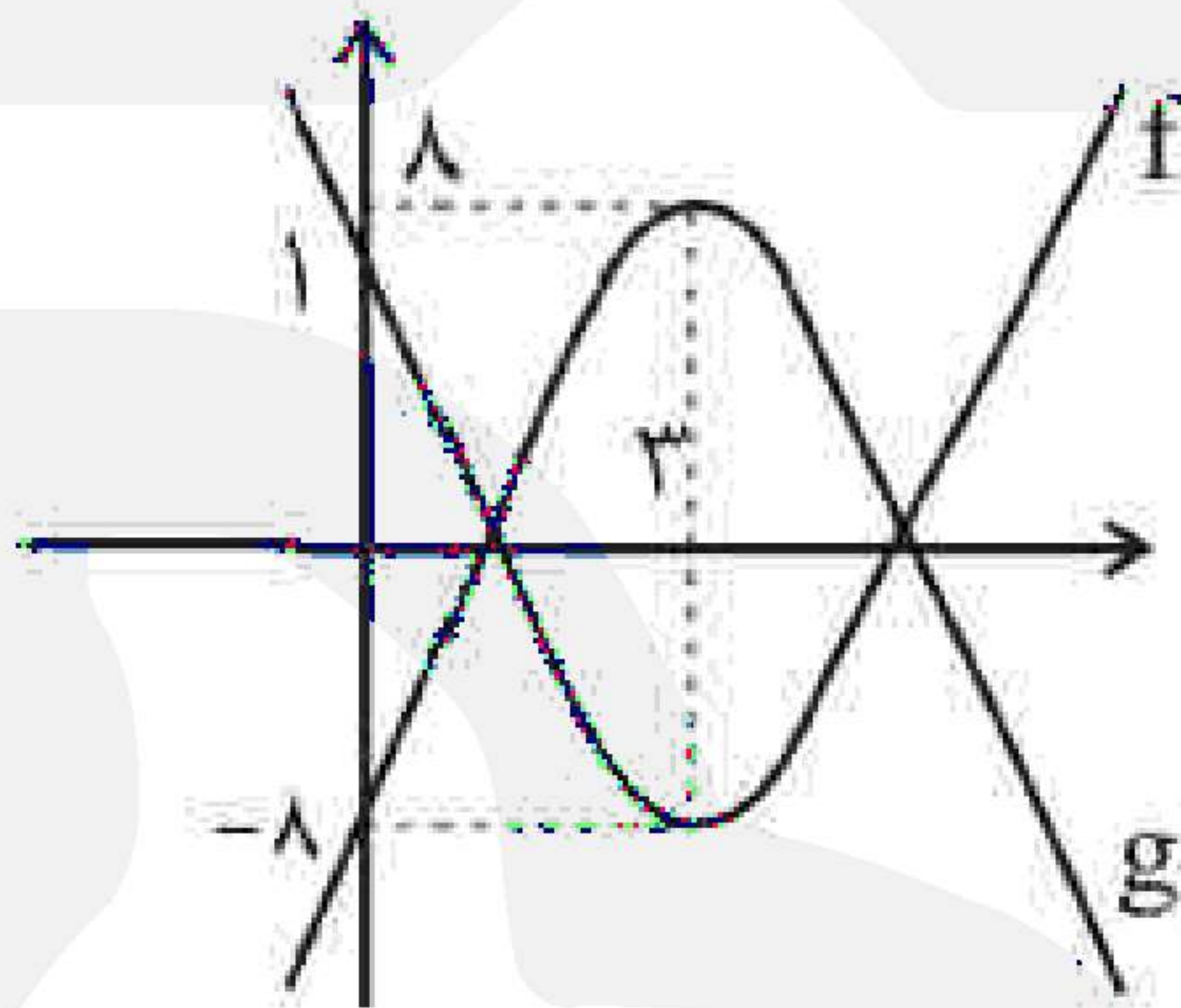
$$\Rightarrow x = 5f^{-1}\left(\frac{3x-1}{x+2}\right) + 9$$

اگر  $\frac{3x-1}{x+2} = -4$  آنگاه  $x = -1$  می شود:  $(1) \quad -1 = 5f^{-1}(-4) + 9 \Rightarrow f^{-1}(-4) = -2$

(2)  $g^{-1}(-6) = K \Rightarrow -6 = g(K) \Rightarrow -6 = 5K + 9 \Rightarrow K = -3 \Rightarrow g^{-1}(-6) = -3$

$(1), (2) \Rightarrow f^{-1}(-4) \times g^{-1}(-6) = (-2)(-3) = 6$

۵- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. نمودار تابع  $f$  و  $g$  را رسم می کنیم:



برای اینکه  $h(x)$  نمودار  $f$  را قطع نکند باید  $g$  حداقل ۱۶ واحد به پایین در جهت محور عرض ها انتقال یابد. بنابراین  $k < -16$  باشد.

۶- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. تابع  $f(x)$  را  $y$  فرض می کنیم:

$$f(x) = 2g(x) \Rightarrow y = 2g(x) \Rightarrow g(x) = \frac{y}{2} \Rightarrow x = g^{-1}\left(\frac{y}{2}\right)$$

$$f^{-1}(f(x)) = g^{-1}\left(\frac{y}{2}\right)$$

از طرفی  $f^{-1} \circ f(x) = x$  پس:

$$f^{-1}(y) = g^{-1}\left(\frac{y}{2}\right)$$

به جای  $f(x)$  دوباره  $y$  قرار می دهیم:

با تغییر متغیر  $y$  به  $x$  داریم:

$$f^{-1}(x) = g^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) \Rightarrow 8x^3 + 2x = a\left(\frac{x}{2}\right)^3 + b\left(\frac{x}{2}\right) \Rightarrow a = 64, b = 2$$

$$\Rightarrow a + 2b = 64 + 4 = 68$$





۷- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$f(x) \text{ دامنه: } \left\{ \begin{array}{l} x-1 > 0 \rightarrow x > 1 \\ \log_2^{(x-1)} \geq 0 \rightarrow x-1 \geq 2^0 \rightarrow x \geq 2 \end{array} \right\} \Rightarrow D_f = [2, +\infty)$$

$$g(x) \text{ دامنه: } -x^2 + 4x - 4 \geq 0 \Rightarrow -(x-2)^2 \geq 0 \Rightarrow (x-2)^2 \leq 0 \Rightarrow x=2 \Rightarrow D_g = \{2\}$$

$$D_{gaf} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} = \left\{ x \geq 2, \sqrt{\log_2^{(x-1)}} = 2 \right\}$$

$$= \left\{ x \geq 2, \log_2^{(x-1)} = 4 \right\} = \{x \geq 2, x=17\} = \{17\}$$

۸- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$y = \frac{-2x}{-x-3} = \frac{2x}{x+3} \text{ : قرینه نسبت به محور } y \text{ ها}$$

$$: y = \frac{2(x+2)}{x+2+3} - k = \frac{2x+4}{x+5} - k \Rightarrow g(-3) = -3 \Rightarrow \frac{-2}{2} - k = -3 \Rightarrow k = 2$$

۹- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} x_1 < x_2 \\ x_1^5 < x_2^5 \end{array} \right. \Rightarrow x_1^5 + x_1 < x_2^5 + x_2 \xrightarrow{+32} \\ \downarrow \\ x_1^5 + x_1 + 32 < x_2^5 + x_2 + 32 \\ \downarrow \\ f(x_1) < f(x_2) \end{array}$$

$f(x)$  تابع صعودی اکید است، بنابراین برای به دست آوردن نقطه برخورد  $f$  با  $f^{-1}$  کافی است  $f(x) = x$  را حل کنیم:

$$x^5 + x + 32 = x \Rightarrow x^5 = -32 \Rightarrow x = -2, y = -2$$

$$\left\{ \begin{array}{l} A \begin{vmatrix} -2 \\ -2 \end{vmatrix} \Rightarrow OA = \sqrt{(-2-0)^2 + (-2-0)^2} \Rightarrow OA = 2\sqrt{2} \\ O \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix} \text{ مبدا} \end{array} \right.$$





۱۰- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.  
نکته:

$$0 \leq a - [a] < 1$$

تابع  $2^x$  اکیداً صعودی است و چون  $\text{gof}(x) = 2^{f(x)}$  است، در نتیجه برای یافتن برد این تابع باید محدوده  $f$  را

$$0 \leq \frac{x-1}{3} - \left[ \frac{x-1}{3} \right] < 1 \Rightarrow 0 \leq x-1-3 \left[ \frac{x-1}{3} \right] < 3$$

بیابیم:

$$\Rightarrow 1 \leq x-3 \left[ \frac{x-1}{3} \right] < 4 \Rightarrow 1 \leq f(x) < 4 \Rightarrow 2^1 \leq 2^{f(x)} < 2^4$$

پس برد تابع  $\text{gof}$  برابر بازه  $[2, 16)$  است.

«بانک سوال یاوران دانش»

۱۱- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.  $f(x)$  ترکیب دو تابع  $3^x$  و  $\frac{3x-1}{x+2}$  است.

$$x \rightarrow \boxed{3^x} \rightarrow \boxed{\frac{3x-1}{x+2}} \rightarrow y$$

$$x \leftarrow \boxed{\text{Log}_3 x} \leftarrow \boxed{\frac{-2x-1}{x-3}} \leftarrow y$$

$$f^{-1}(x) = \text{Log}_3 \frac{-2x-1}{x-3}$$

پس برای  $f^{-1}(x)$  داریم:

یعنی:

$$g(x) = \frac{-2x-1}{x-3}$$

و داریم:

$$g(0) = \frac{1}{3} \Rightarrow [g(0)] = 0 \Rightarrow g([g(0)]) = g(0) = \frac{1}{3}$$





۱۲- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. تابع درجه دو هرگز بر روی  $R$  یک به یک و وارون پذیر نیست. یعنی این تابع نمی تواند درجه دو باشد:

بنابراین با تابع خطی  $f(x) = (n+1)x - 4 - n + 2k$  طرفیم.  
می دانیم تلاقی تابع خطی و وارونش حتماً روی خط  $y = x$  قرار دارد، مگر تابع خطی با شیب  $-1$  که خودش و وارونش برابر بوده و بی شمار نقطه تلاقی دارند.

در اینجا چون نقطه تلاقی  $(-1, 7)$  است که روی خط  $y = x$  نیست، نتیجه می گیریم این تابع خطی دارای شیب  $-1$  بوده و در تمام نقاط واقع بر آن، از جمله در  $(-1, 7)$  وارونش را قطع می کند. پس:

$$-1 \Rightarrow n+1 = -1 \Rightarrow n = -2$$

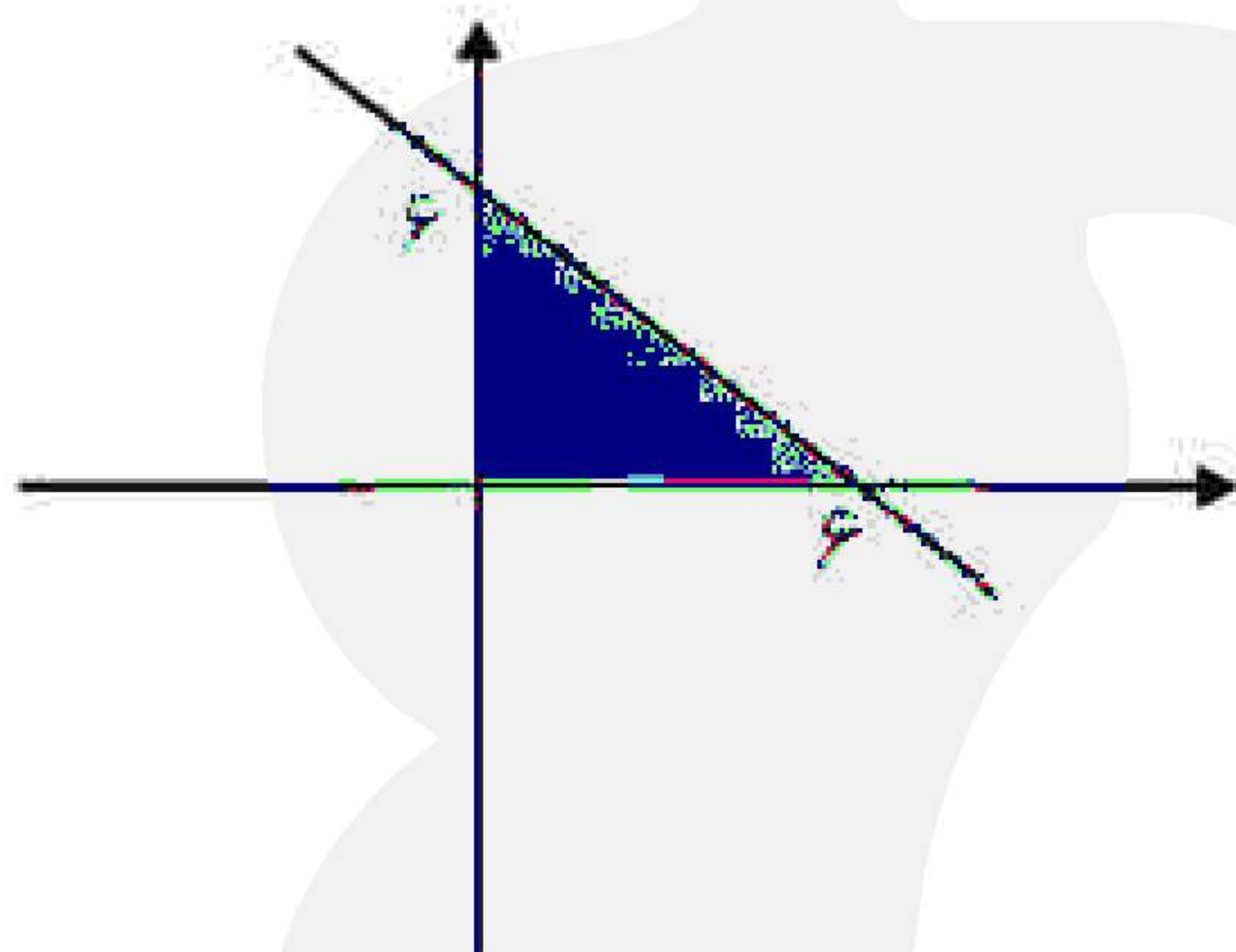
$$f(x) = (n+1)x - 4 - n + 2k \xrightarrow{n = -2} -x - 4 - (-2) + 2k \Rightarrow f(x) = -x - 2 + 2k$$

$$7 = -(-1) - 2 + 2k \Rightarrow 2k = 8 \Rightarrow k = 4$$

حالا نقطه  $(-1, 7)$  را در آن صدق می دهیم:

$$f(x) = -x - 2 + 2k \xrightarrow{k = 4} -x - 2 + 8 \Rightarrow f(x) = -x + 6$$

چون  $f$  و  $f^{-1}$  با هم برابرند، پس:



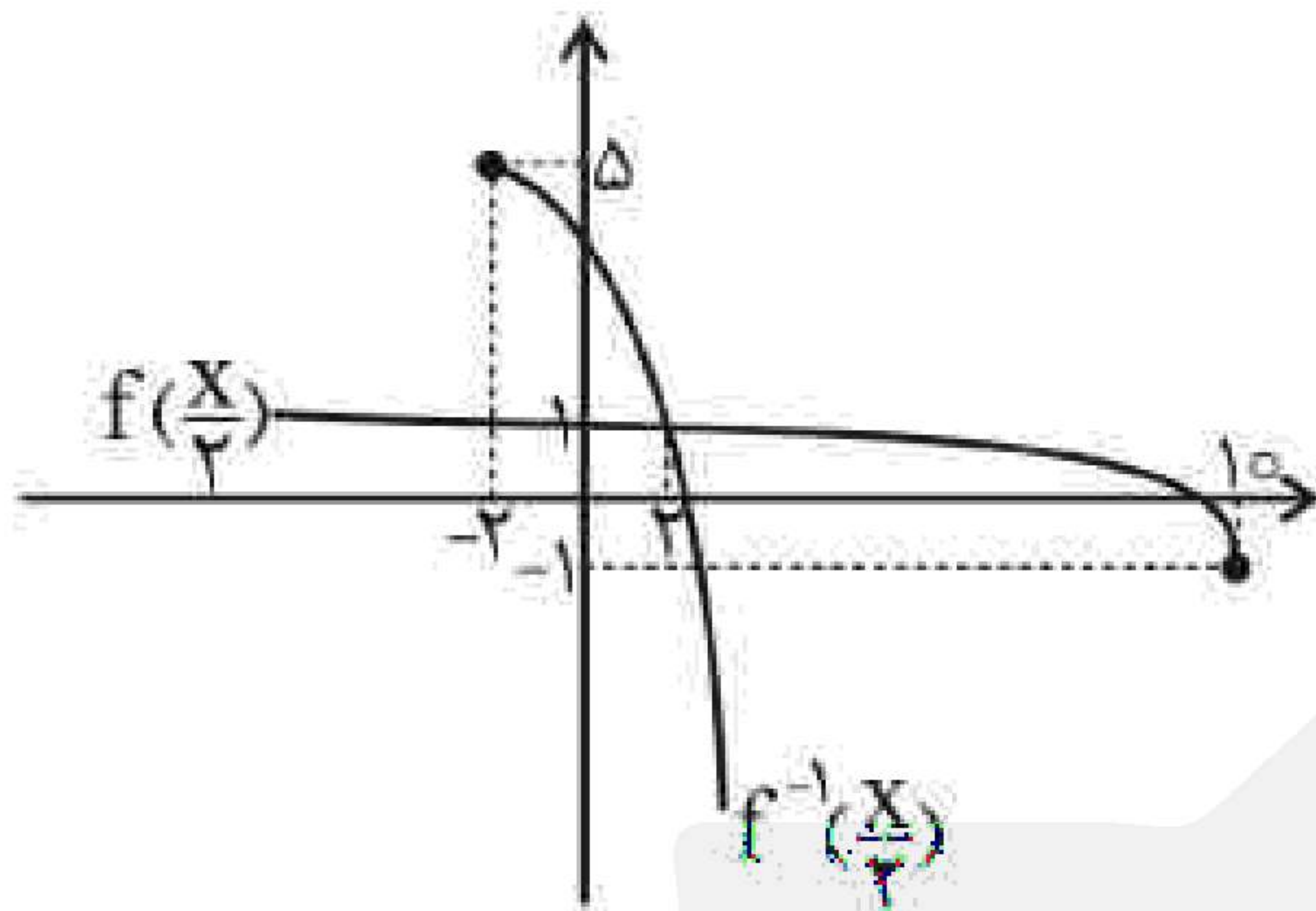
$$f^{-1}(x) = -x + 6$$

$$s = \frac{6 \times 6}{2} = 18$$





۱۳- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. اولاً باید بین دامنه دو تابع  $f\left(\frac{x}{2}\right)$  و  $f^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)$  اشتراک بگیریم و ثانیاً باید شرط منفی بودن زیر رادیکال را بررسی کنیم:



$$f(x) = \sqrt{5-x} - 1 \quad \begin{cases} D_F = (-\infty, 5] \\ R_F = [-1, +\infty) \end{cases}$$

$$\text{وارون: } x = \sqrt{5-y} - 1 \Rightarrow y = f^{-1}(x) = 5 - (x+1)^2$$

$$\begin{cases} D_{f^{-1}} = [-1, +\infty) \\ R_{f^{-1}} = (-\infty, 5] \end{cases}$$

پس دامنه  $f\left(\frac{x}{2}\right)$  بازه  $(-\infty, 10]$  و دامنه  $f^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)$  بازه  $[-2, +\infty)$  است که اشتراک این دو بازه به صورت  $[-2, 10]$  است.

حال به کمک نمودار  $f$  و  $f^{-1}$ ، شرط نامنفی بودن زیر رادیکال را بررسی می‌کنیم:

$$f\left(\frac{x}{2}\right) \geq f^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) \Rightarrow 2 \leq x \leq 10$$

از اشتراک این بازه با بازه  $[-2, 10]$  دامنه نهایی به صورت بازه  $[2, 10]$  خواهد بود که شامل ۹ عدد صحیح است.

۱۴- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.  $f(x-1)$  را یک واحد به چپ انتقال دهیم  $f(x)$  به دست می‌آید.

$$f(x) = \{(-2, 4), (1, 6), (2, 1), (4, 1)\}$$

پس تابع همانی  $g(x)$  در دامنه مشترک همان  $g(x) = \{(-2, -2), (1, 1), (2, 2), (4, 4)\}$  است. در نتیجه داریم:

$$f(x) + 2g(x) = \{(-2, 0), (1, 8), (2, 5), (4, 9)\}$$

۱۵- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. اگر تابع  $f$  روی یک مجموعه، اکیداً نزولی باشد، آنگاه برای  $a < b$  الزاماً  $f(a) > f(b)$  است و نیز اگر  $f$  روی یک مجموعه اکیداً صعودی باشد، آنگاه برای  $a < b$  الزاماً  $f(a) < f(b)$  خواهد بود، بنابراین:

$$K^2 + 3 < 2K^2 + 13 \xrightarrow{\text{g اکیدا صعودی}} g(K^2 + 3) < g(2K^2 + 13) \xrightarrow{\text{f اکیدا نزولی}}$$

$$f(g(K^2 + 3)) > f(g(2K^2 + 13))$$

$$(fog)(K^2 + 3) > (fog)(2K^2 + 13)$$

$$3m - 1 > 2m + 7$$

این بازه شامل ۸ عدد طبیعی ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵ و ۶ و ۷ و ۸ نمی‌شود.  $m > 8 \Rightarrow$

۱۶- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. اگر  $f$  اکیداً صعودی و  $f(a) < f(b)$  باشد، آنگاه  $a < b$  است.

$$fog(x+2) < 1 \Rightarrow fog(x+2) < f(3) \Rightarrow g(x+2) < 3 \Rightarrow (x+2)^2 - 5(x+2) - 3 < 3$$

$$\Rightarrow x^2 - x - 12 < 0 \Rightarrow -3 < x < 4$$

اعداد صحیح -۲ و -۱ و ۰ و ۱ و ۲ و ۳ در این نامساوی‌ها صدق می‌کنند که جمع آنها برابر ۳ است.





۱۷- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. با توجه به حضور زوج مرتب‌های  $(۱, a-۱)$  و  $(۳, ۶)$  در تابع اکیداً نزولی  $f$ ، واضح است که:  
 $a-۱ > ۶ \Rightarrow a > ۷$  I

با توجه به حضور زوج مرتب‌های  $(۵, a+۲)$  و  $(۳, ۶)$  در تابع اکیداً نزولی  $f$ ، واضح است که:  
 $a+۲ > ۳ \Rightarrow a > ۱$  II

حالا زوج‌های مرتب  $(۵, a+۲)$  و  $(۱, a-۱)$  را ببینید. با توجه به نامساوی‌های I و II در بالا، قطعاً  $a+۲ > ۱$  است و داریم:  
 $۱ < a+۲ \Rightarrow f(۱) > f(a+۲) \Rightarrow a-۱ > ۵ \Rightarrow a > ۶$

اشتراک این ناحیه با نواحی I و II برابر است با:  $a > ۷$  و  $[a]$  می‌تواند مقادیر ۷، ۸ و ۹ و ... باشد، یعنی شامل شش عدد طبیعی ۱، ۲، ... و ۶ نیست.

۱۸- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$f(۱) = g(۱) = ۴ \Rightarrow ۴ = ۲ + ۲^{b-a} \Rightarrow b-a = ۱ \quad (۱)$$

$$f^{-1}(۱۰) = -۱ \Rightarrow f(-۱) = ۱۰ \Rightarrow ۱۰ = ۲ + ۲^{b+a} \Rightarrow b+a = ۳ \quad (۲)$$

$$(۱), (۲) \Rightarrow a = ۱, b = ۲ \Rightarrow \boxed{f(x) = ۲ + ۲^{x-۱}}$$

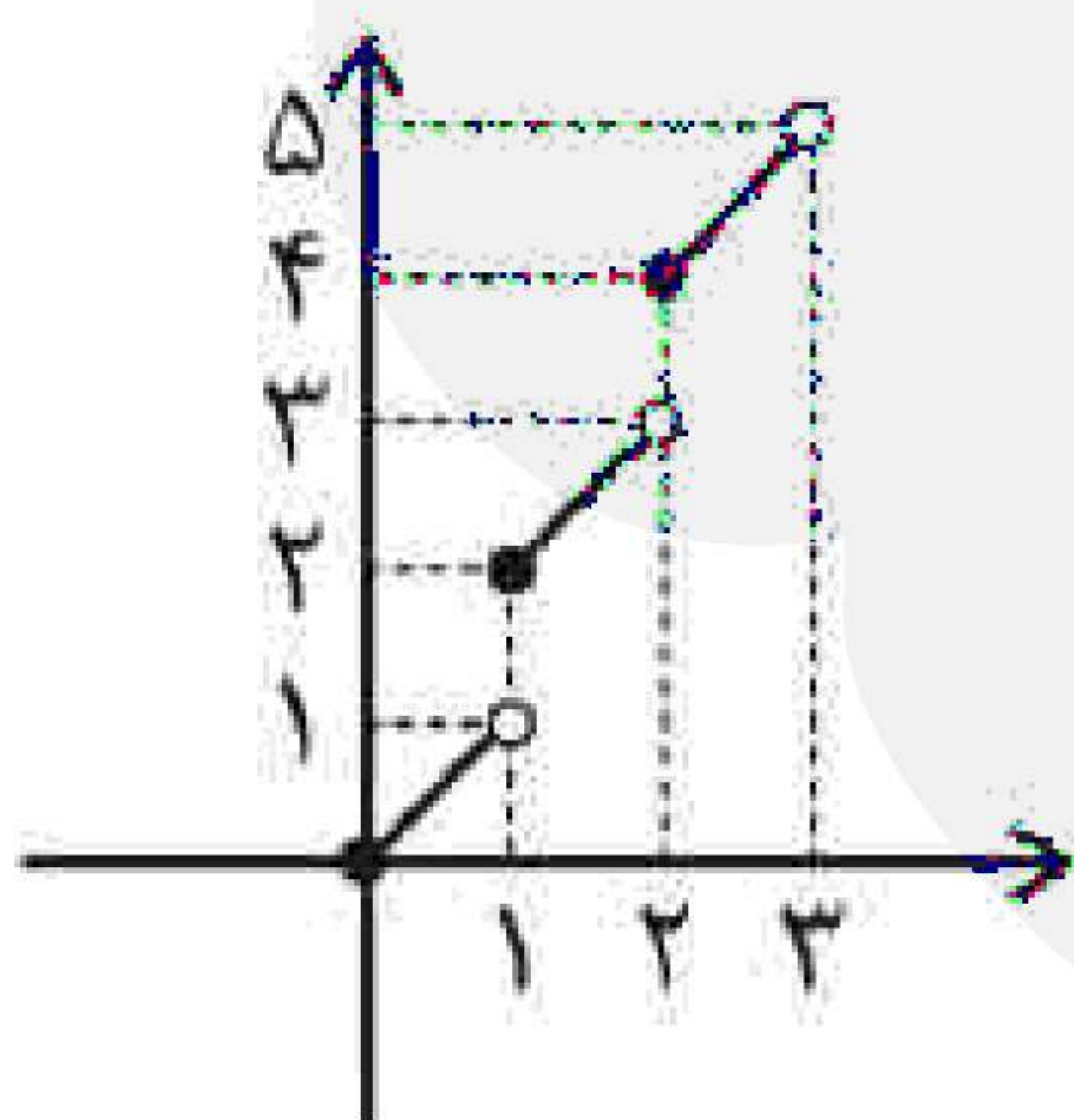
$$f \text{ وارون} \Rightarrow x = ۲ + ۲^{[۲-y]} \Rightarrow x-۲ = ۲^{۲-y} \Rightarrow \text{Log}_2(x-۲) = ۲-y$$

$$y = ۲ - \log_2(x-۲) \rightarrow \boxed{f^{-1}(x) = ۲ - \log_2(x-۲)} \Rightarrow x-۲ > ۰ \rightarrow \boxed{x > ۲} \quad (۳)$$

$$f^{-1}(x) + ۲ \geq ۰ \Rightarrow ۲ - \text{Log}_2(x-۲) + ۲ \geq ۰$$

$$\text{Log}_2(x-۲) \leq ۴ \Rightarrow x-۲ \leq ۲^4 \Rightarrow \boxed{x \leq ۱۸} \quad (۴)$$

مجموعه جواب نامعادله دارای ۱۶ عدد طبیعی است.  $(۳), (۴) \Rightarrow ۲ < x \leq ۱۸$



۱۹- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. نمودار تابع  $y = x + [x]$  به صورت مقابل است

$$\begin{cases} f \circ f^{-1}(x) = x & x \in R_f \\ f^{-1} \circ f(x) = x & x \in D_f \end{cases} \quad \text{و از طرفی:}$$

دقت کنید که برد تابع  $f$  شامل  $y = \frac{۷}{۲}$  نیست، پس  $f \circ f^{-1}(\frac{۷}{۲})$  وجود ندارد،

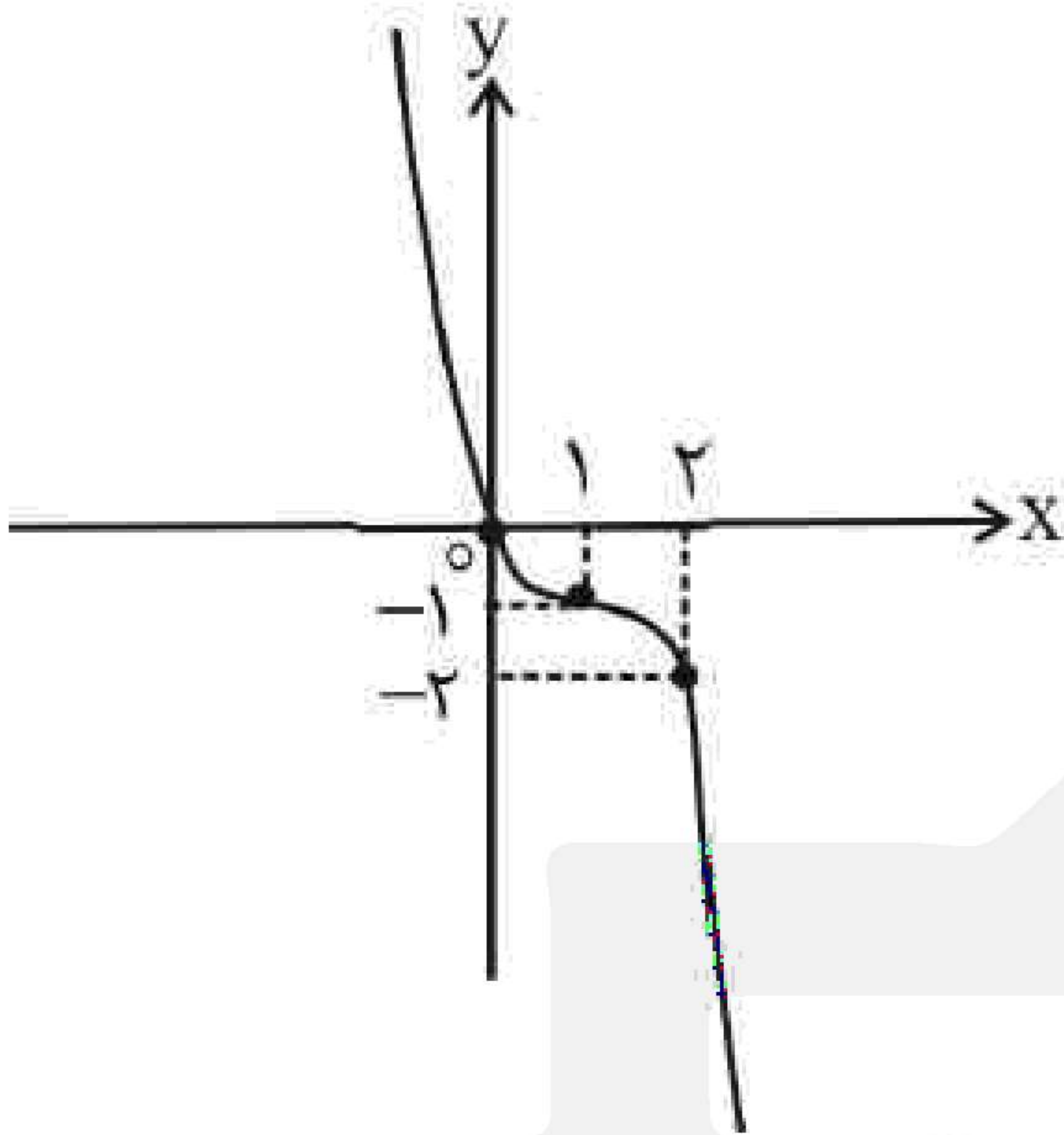
ولی چون دامنه  $f$  شامل  $\frac{۷}{۲}$  است، پس  $f^{-1} \circ f(\frac{۷}{۲}) = \frac{۷}{۲}$  است.





«بانک سوال یاوران دانش»

۲۰- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.



$$1 - x = t \Rightarrow x = 1 - t$$

$$f(1 - x) = x^3 - 1 \Rightarrow f(t) = (1 - t)^3 - 1$$

$$\Rightarrow f(x) = -(t - 1)^3 - 1$$

نمودار  $y = f(x)$  فقط از نواحی دوم و چهارم مختصاتی می‌گذرد.

۲۱- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. برای محاسبه دامنه  $g(x)$ ؛ زیر رادیکال را بزرگ‌تر مساوی صفر قرار می‌دهیم:

$$\frac{f(3x - 1) - f(2x)}{f(x)} \geq 0$$

برای آنکه این کسر بزرگ‌تر مساوی صفر باشد، دو حالت داریم:

$$\begin{cases} f(3x - 1) \geq f(2x) \Rightarrow 3x - 1 \leq 2x \Rightarrow x \leq 1 \\ f(x) > 0 \Rightarrow x < 2 \end{cases} \Rightarrow x \leq 1$$

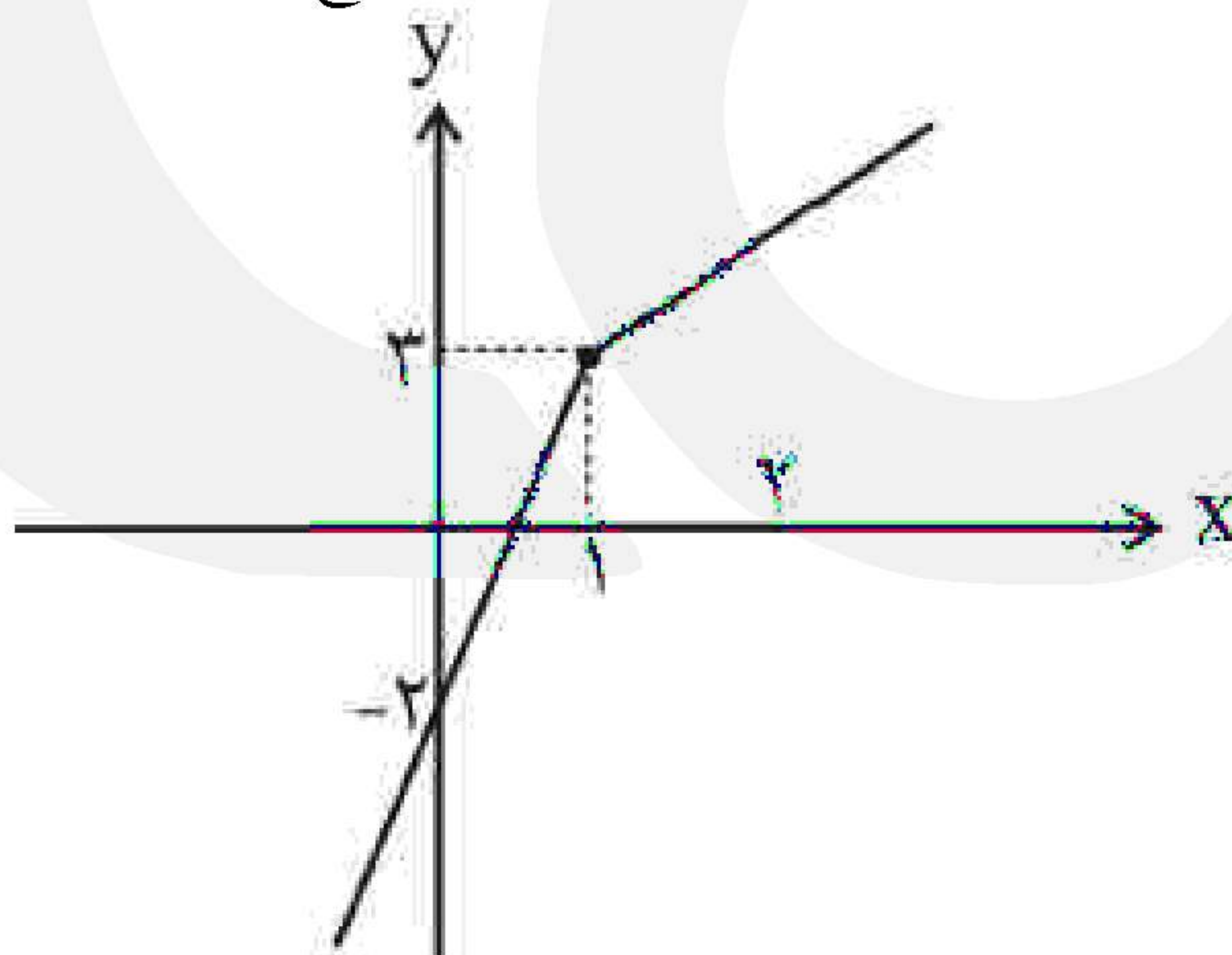
(۱) صورت نامنفی و مخرج مثبت

$$\begin{cases} f(3x - 1) \leq f(2x) \Rightarrow 3x - 1 \geq 2x \Rightarrow x \geq 1 \\ f(x) < 0 \Rightarrow x > 2 \end{cases} \Rightarrow x > 2$$

(۲) صورت نامثبت و مخرج منفی

بنابراین دامنه به صورت  $(-\infty, 1] \cup (2, +\infty)$  است، پس تنها عدد صحیحی که در دامنه نیست  $x = 2$  است.

۲۲- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. نمودار  $f(x) = 3x - |2x - 2|$  را ببینید. تابع  $f$  اکیداً صعودی است.



حالا برای اینکه  $g \circ f$  اکیداً نزولی شود باید  $g$  نزولی باشد. دقت کنید که  $\log x$  بر  $\mathbb{R}$  تعریف نمی‌شود.  $|2^x - 1|$  در

$x = 0$  تغییر آهنگ می‌دهد.  $|x - 1| + 2x$  اکیداً صعودی است، اما  $g(x) = \left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^x$  اکیداً نزولی است.





$$\begin{aligned} f(g(x)) &= 3x + 2 \xrightarrow{x \rightarrow h(x)} f(g(h(x))) = 3h(x) + 2 \\ f(h(x)) &= 2x - 1 \end{aligned}$$

۲۳- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\begin{aligned} f(2x - 1) &= 3h(x) + 2 \xrightarrow{x=1} f(1) = 3h(1) + 2 \\ \frac{f(1) - h(1)}{h(1) + 1} &= \frac{3h(1) + 2 - h(1)}{h(1) + 1} = \frac{2h(1) + 2}{h(1) + 1} = 2 \end{aligned}$$

بنابراین:

$$f^{-1}: (3, 2) \Rightarrow f: (2, 3), f(x) = x^3 - x + 2K - 23$$

۲۴- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$3 = 2^3 - 2 + 2K - 23$$

$$K = 10 \Rightarrow f(x) = x^3 - x - 3$$

$$f(3) - f(-3) = (27 - 3 - 3) - (-27 + 3 - 3) = 48$$

$$\begin{cases} (f + 3g)(x) = x \\ (f - 2g)(x) = k \end{cases} \xrightarrow{\text{کم}} 5g(x) = x - k$$

۲۵- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$f(x) = 2g(x) + k = \frac{2}{5}x - \frac{2k}{5} + k = \frac{2}{5}x + \frac{3k}{5}$$

پس  $g(x) = \frac{1}{5}x - \frac{k}{5}$  و در نتیجه:

$$-2 - \frac{k}{5} = -4 + \frac{3k}{5} \Rightarrow k = \frac{5}{2} \Rightarrow \begin{cases} f(x) = \frac{2}{5}x + \frac{3}{2} \\ g(x) = \frac{1}{5}x - \frac{1}{2} \end{cases}$$

از طرفی  $f(-10) = g(-10)$  پس:

$$g^{-1} \circ f^{-1}(1/7) = g^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = 5$$

۲۶- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ضابطه تابع وارون  $f(x)$  را می یابیم:

$$y = \sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} \Rightarrow y = \sqrt{(x-1) + 2\sqrt{x-1} + 1}$$

$$y = \sqrt{t^2 + 2t + 1} \Rightarrow y = \sqrt{(t+1)^2} \Rightarrow y = |t+1|$$

$\sqrt{x-1}$  را  $t$  فرض می کنیم:

با توجه به  $t > 0$  می توانیم بنویسیم:

$$y = t + 1 \Rightarrow y = \sqrt{x-1} + 1 \Rightarrow y-1 = \sqrt{x-1} \Rightarrow (y-1)^2 = x-1$$

$$\Rightarrow x = y^2 - 2y + 2 \Rightarrow f^{-1}(x) = x^2 - 2x + 2$$

بنابراین  $a = 1, b = -2, c = 2$  و  $2a + b + c = 2$  است.





۲۷- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$g(x) = 2 + \sqrt{3 - (x - 2) + 1} \Rightarrow g(x) = \sqrt{5 - x} + 3$$

تابع  $g$  نزولی است؛ پس:

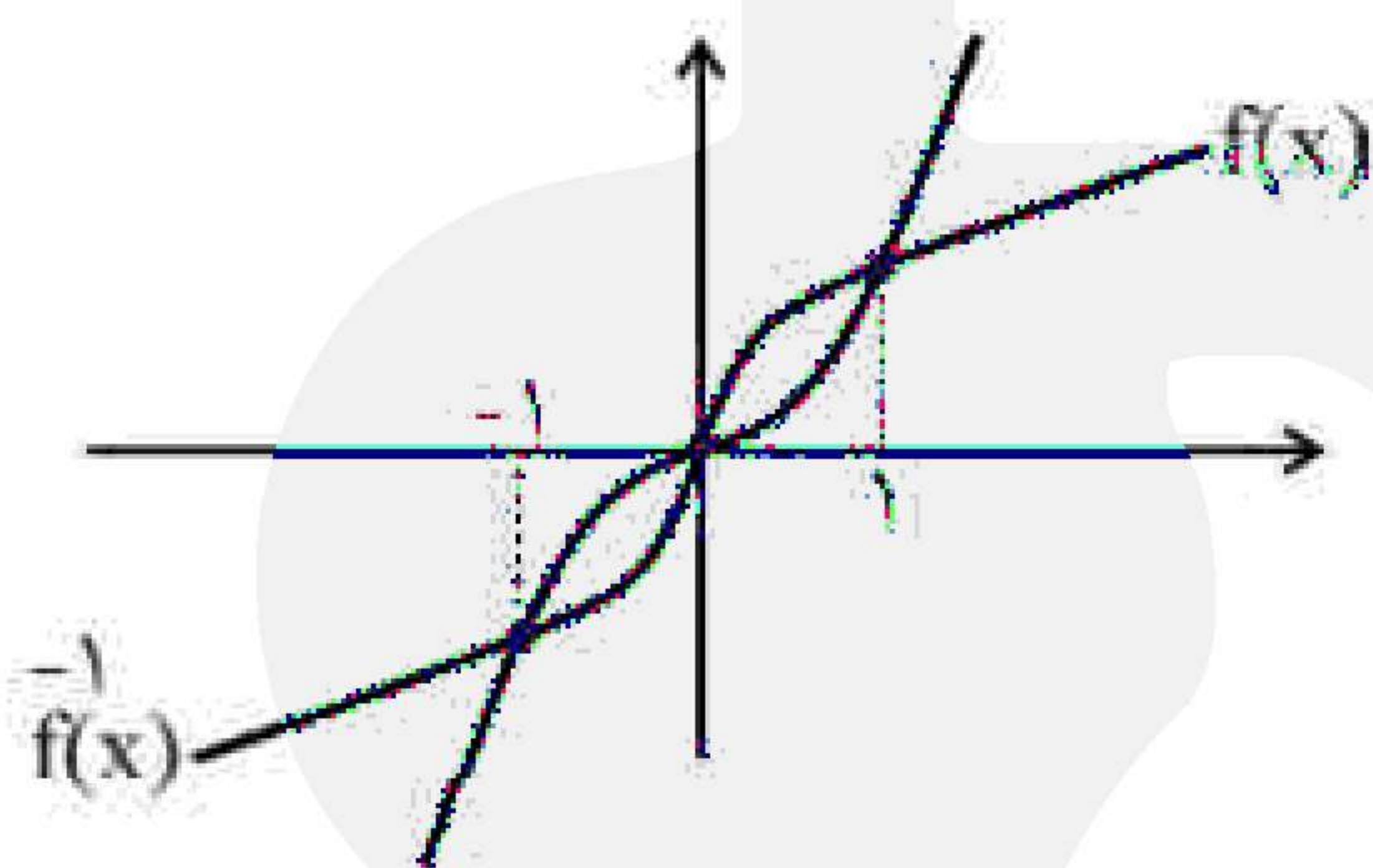
$$g(g(x)) < g(x) \Rightarrow g(x) > x \Rightarrow \sqrt{5 - x} + 3 > x \Rightarrow \sqrt{5 - x} > x - 3 \Rightarrow 5 - x > x^2 - 6x + 9$$

$$\Rightarrow x^2 - 5x + 4 < 0 \Rightarrow x < 4$$

از طرفی شرایط دامنه به صورت زیر است:

$$\begin{cases} x \in D_g \Rightarrow x \leq 5 \\ g(x) \in D_g \Rightarrow \sqrt{5 - x} + 3 \leq 5 \Rightarrow \sqrt{5 - x} \leq 2 \Rightarrow 5 - x \leq 4 \Rightarrow x \geq 1 \end{cases}$$

نتیجه نهایی آن است که  $1 \leq x < 4$  است که شامل سه عدد صحیح است.



۲۸- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. نمودار تابع  $f$  و  $f^{-1}$  به صورت مقابل است و هر دو، تابع اکیداً صعودی هستند.

$$f(f(x)) \geq f(f^{-1}(x)) \Rightarrow f(x) \geq f^{-1}(x)$$

با توجه به نمودار در بازه  $[-1, 1]$  نمودار  $f(x)$  بالاتر از

$f^{-1}(x)$  قرار دارد که شامل سه عدد صحیح است.

۲۹- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$f(x) = (x - 6)(x^2 + 12) = x^3 - 6x^2 - 12x - 72$$

$$f(x) = (x - 2)^3 - 64 \xrightarrow{\text{وارون}} y + 64 = (x - 2)^3$$

$$x - 2 = \sqrt[3]{64 + y} \rightarrow x = 2 + \sqrt[3]{64 + y}$$

$$f^{-1}(x) = 2 + \sqrt[3]{64 + x}$$

$$b = 2 \quad a = 64$$

$$a - b = 64 - 2 = 62$$





۳۰- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. در تابع هموگرافیک  $y = \frac{x-1}{2x-1}$ ، از آنجا که ضریب  $x$  در صورت و عدد ثابت در مخرج، قرینه یکدیگرند، این تابع با وارونش برابر است. پس برای محاسبه  $f(f(-2))$  می‌توان نوشت:

$$f(f(-2)) = f^{-1}(f(-2)) = -2$$

$$h(g(\underbrace{f(f(-2))}_{-2})) = h(g(-2))$$

پس داریم:

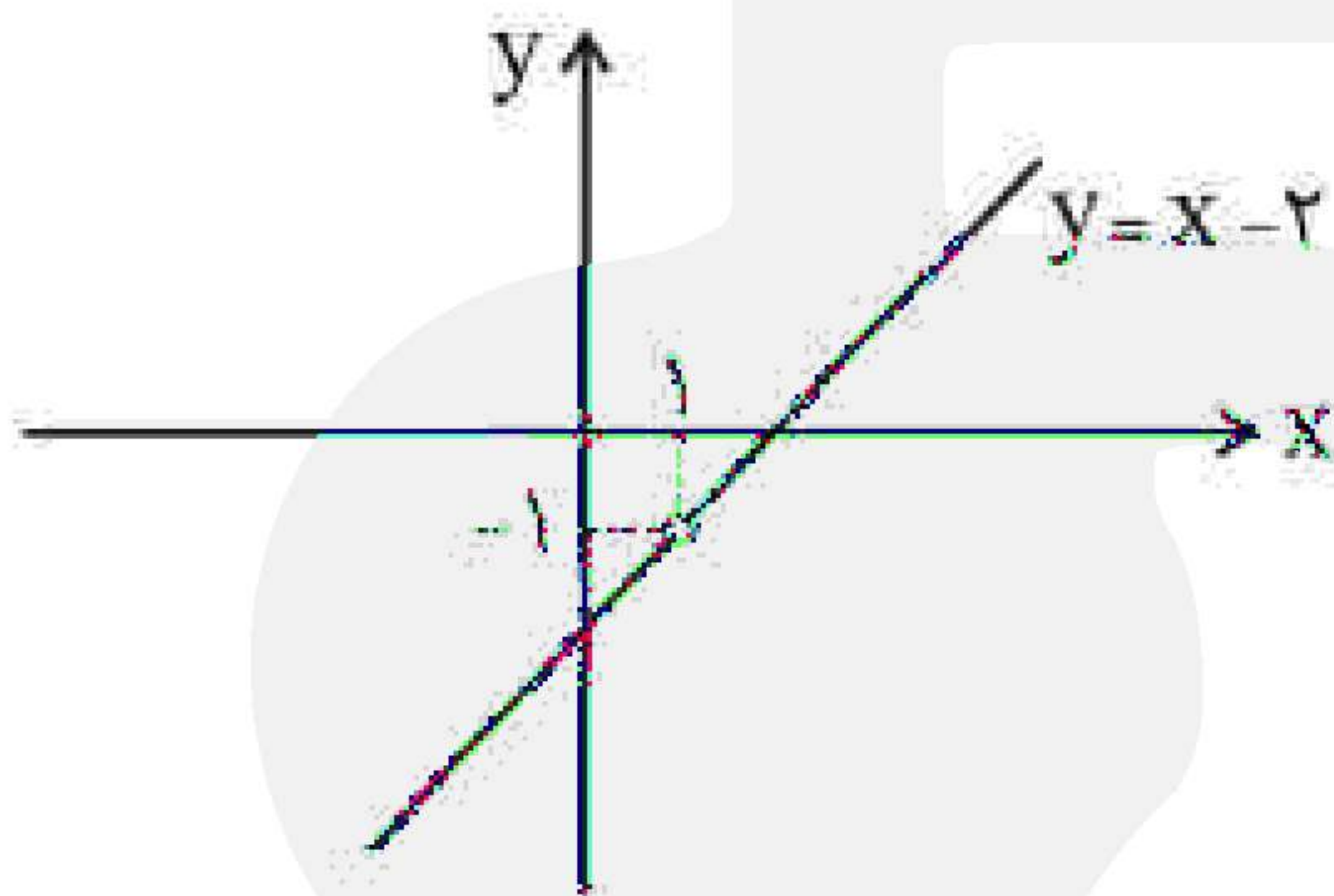
حالا برای محاسبه  $g(-2)$  کافی است در تساوی  $h^{-1}(x) = g(3x - 5)$ ،  $x = 1$  را جایگذاری کنیم:

$$h^{-1}(1) = g(-2)$$

$$h(g(-2)) = h(h^{-1}(1)) = 1$$

پس داریم:

۳۱- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ضابطه را ساده کنیم:



$$y = \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1} = \frac{(x - 1)(x - 2)}{x - 1} = x - 2, x \neq 1$$

پس برد تابع به صورت  $R - \{-1\}$  است.

ضابطه وارون  $y = x - 2$  به صورت  $y = x + 2$  است و دامنه آن  $x \neq -1$  خواهد بود. پس می‌نویسیم:

$$f^{-1}(x) = \frac{(x + 2)(x + 1)}{(x + 1)} = \frac{x^2 + 3x + 2}{x + 1}$$

و در مقایسه با صورت سؤال داریم:

$$a + b + c = 6$$





«بانک سوال یاوران دانش»

۳۲- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. تساوی  $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f$  موقعی برقرار است که دامنه و برد تابع  $f$  با هم برابر باشند:

$$\begin{cases} D_f: 2x - k \geq 0 \Rightarrow x \geq \frac{k}{2} \Rightarrow \frac{k}{2} = 2 \Rightarrow k = 4 \\ R_f: y \geq 2 \end{cases}$$

پس  $f(x) = 2 + \sqrt{2x - 4}$  و از آنجا که تابعی اکیداً صعودی است، تقاطع آن با وارونش حتماً روی خط  $y = x$  بوده و کافی است معادله  $f(x) = x$  را حل کنیم:

$$2 + \sqrt{2x - 4} = x \Rightarrow \sqrt{2x - 4} = x - 2 \xrightarrow{\text{توان دو}} 2x - 4 = x^2 - 4x + 4 \\ \Rightarrow x^2 - 6x + 8 = 0 \Rightarrow x = 2, 4$$

هر دو جواب به دست آمده قابل قبول هستند و لذا محل تقاطع توابع  $f$ ،  $f^{-1}$ ، نقاط  $(2, 2)$  و  $(4, 4)$  است که چون نقطه با طول کمتر مدنظر است:

برای پیدا کردن نقطه  $B$  که متناظر با نقطه  $A$  روی نمودار  $g(x) = -2f(3 - x) + 4$  است، کافی است:

$$\begin{array}{rcl} 2 & \xrightarrow{-3} & -1 \xrightarrow{\div -1} 1 \\ 2 & \xrightarrow{\times -2} & -4 \xrightarrow{+4} 0 \end{array}$$

از طول نقطه  $A$ ، ابتدا ۳ واحد کم کرده و سپس آن را بر ۱- تقسیم کنیم:

عرض نقطه  $A$  را ابتدا ۲- برابر کرده و سپس ۴ واحد به آن اضافه کنیم:

پس  $B(1, 0)$  بوده و طول پاره خط  $AB$  برابر با فاصله دو نقطه  $A(2, 2)$  و  $B(1, 0)$  است:

$$AB = \sqrt{(2-1)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{5}$$

۳۳- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$f = \{(1, 2)(-2, 3)(-1, 4)\} \Rightarrow g = \{(-2, 2)(-1, -2)\} \Rightarrow g^{-1} = \{(2, -2)(-2, -1)\}$$

$$\begin{array}{rcl} f^{-1}g = \{(-2, -1)(-1, 8)\} & & \\ \downarrow & & \downarrow \\ 3 - 2g = -1 & & 4 - 2g = 8 \\ \downarrow & & \downarrow \\ g = 2 & & g = -2 \end{array}$$

$$f \circ g^{-1} = \{(2, 3)(-2, 4)\}$$

$$f \circ g^{-1} = \{(2, 3)(-2, 4)\} \Rightarrow \text{حاصل ضرب اعضای برد} = 3 \times 4 = 12$$





۳۴- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. چون  $x = 2$  در دامنه تابع نیست، پس  $x = 2$  ریشه منخرج است، یعنی  $ax - 4 = 0$

$$f(x) = \frac{2}{2x-4} = \frac{1}{x-2} = \frac{x-2}{(x-2)^2}$$

است؛ بنابراین  $a = 2$  است و داریم:

$$f(x-1) = \frac{x-1-2}{(x-1-2)^2} = \frac{x-3}{(x-3)^2} = \frac{x-3}{x^2-6x+9}$$

با مقایسه ضابطه  $g(x)$  با این ضابطه، مقادیر  $p = -3$  و  $m = -6$  و  $n = 9$  به دست می‌آیند؛ پس:

$$m - n + p = -6 - 9 - 3 = -18$$

۳۵- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$3 \leq x \leq 5 \Rightarrow 2 \leq x-1 \leq 4 \xrightarrow{\text{در تابع جدید}} 2 \leq 1 - \frac{1}{x} \leq 4 \Rightarrow -6 \leq x \leq -2 \quad (1) \text{ دامنه تابع جدید}$$

$$-1 \leq 2f-3 \leq 3 \Rightarrow 1 \leq f \leq 3 \xrightarrow{\times (-3)} -9 \leq -3f \leq -3 \xrightarrow{-3} -12 \leq -3f-3 \leq -6 \quad (2) \text{ برد تابع جدید}$$

$$1, 2 \xrightarrow{\text{اجتماع}} [-12, -2] \Rightarrow 11 \text{ عدد صحیح}$$

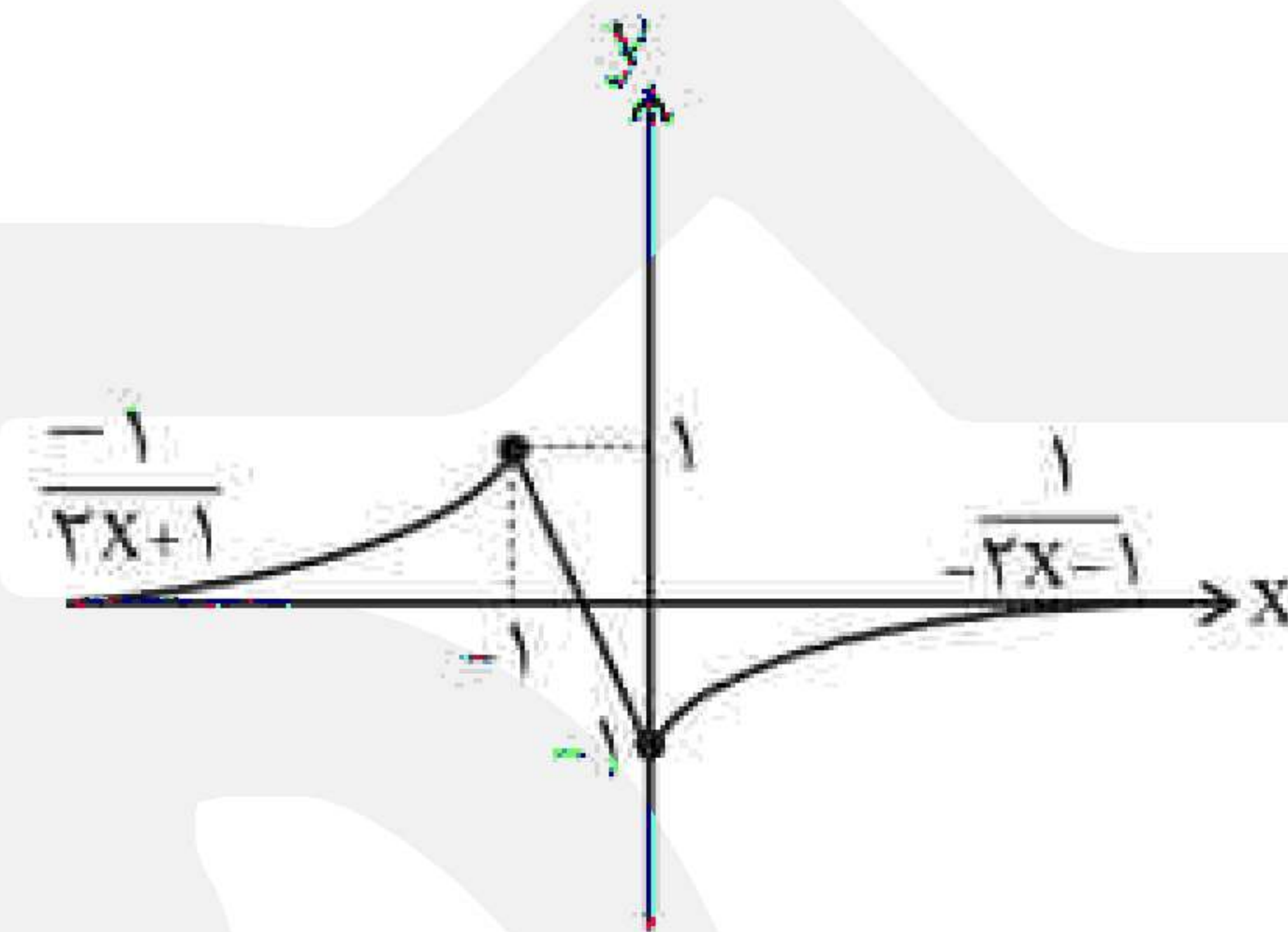




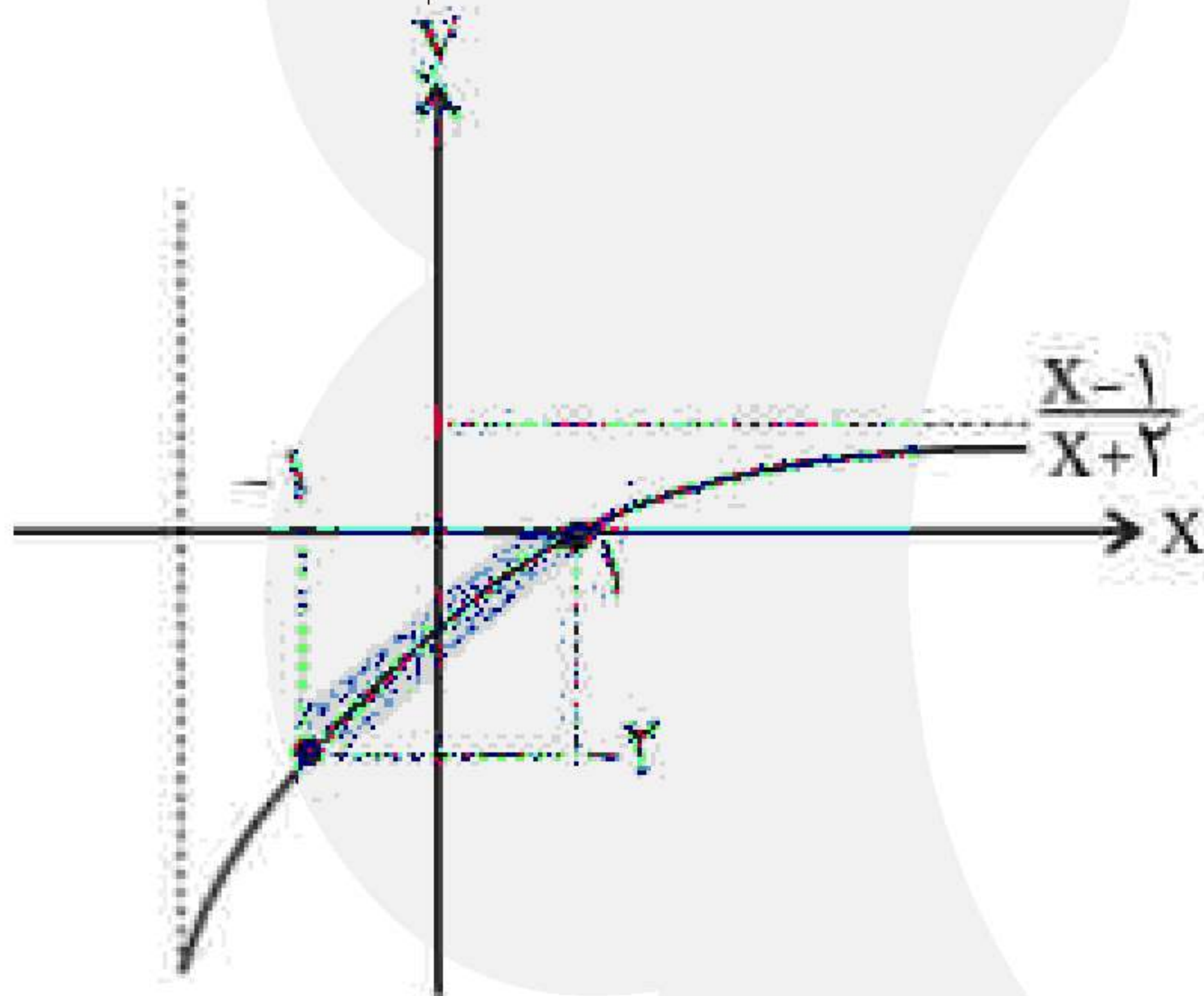
۳۶- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ابتدا نمودار  $g(x) = \frac{|x| - |x+1|}{|x| + |x+1|}$  را با بازه‌بندی رسم می‌کنیم:

$$g(x) = \begin{cases} \frac{-x + (x+1)}{-x - (x+1)} & , x < -1 \\ \frac{-x - (x+1)}{-x + (x+1)} & , -1 \leq x < 0 \\ \frac{x - (x+1)}{x + (x+1)} & , x \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{-2x-1} & , x < -1 \text{ یا } x \geq 0 \\ -\frac{1}{2x-1} & , -1 \leq x < 0 \end{cases}$$

نمودار  $g$  را ببینید.



پس برد  $g$  در فاصله  $[-1, 1]$  است و باید فقط قسمتی از نمودار  $f$  که در فاصله  $-1$  تا  $1$  است را ببینیم:



$$\begin{aligned} -1 &\leq g(x) \leq 1 \\ f &\text{ صعودی است} \\ \hline &\Rightarrow f(-1) \leq f(g(x)) \leq f(1) \\ &\Rightarrow -2 \leq fog \leq 0 \end{aligned}$$

یعنی برد  $fog$  فاصله  $[-2, 0]$  است که ۳ عدد صحیح دارد و جمع آنها می‌شود.

$$(-2) + (-1) + 0 = -3$$





۳۷- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. چون به ازای هر عدد حقیقی  $x$  علامت  $f'$  منفی است، پس تابع  $f$  به ازای هر  $x \in \mathbb{R}$  نزولی اکید است، بنابراین:  
در نتیجه:

$$\begin{aligned} f(2K^2 - 1) &> f(3K + 4) \\ \downarrow \text{چون } f \text{ نزولی اکید است} \\ 2K^2 - 1 &< 3K + 4 \\ \downarrow \\ 2K^2 - 3K - 5 &< 0 \\ \downarrow \\ -1 < K &< \frac{5}{2} \\ \downarrow K \in \mathbb{Z} \\ K = 0, 1, 2 \\ \downarrow \\ \text{با توجه به حدود نامعادله، ۳ عدد صحیح برای } K \text{ وجود دارد.} \end{aligned}$$

۳۸- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. به دلیل اینکه  $x$  ها در  $\frac{-5}{2}$  ضرب شده است، (یعنی  $2x$  به  $-5x$  تبدیل شده است) پس قاعده در  $\frac{2}{5}$  ضرب می شود و برابر  $\frac{8}{5}$  است و  $y$  ها در ۳ ضرب شده است (یعنی  $f$  به  $3f$  تبدیل شده است) و ارتفاع برابر ۱۵ می شود؛ پس مساحت برابر ۱۲ است.





۳۹- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$f(x) = \sqrt{1-x} - 1 \xrightarrow{\text{دامنه } f} 1-x \geq 0 \Rightarrow D_f = (-\infty, 1]$$

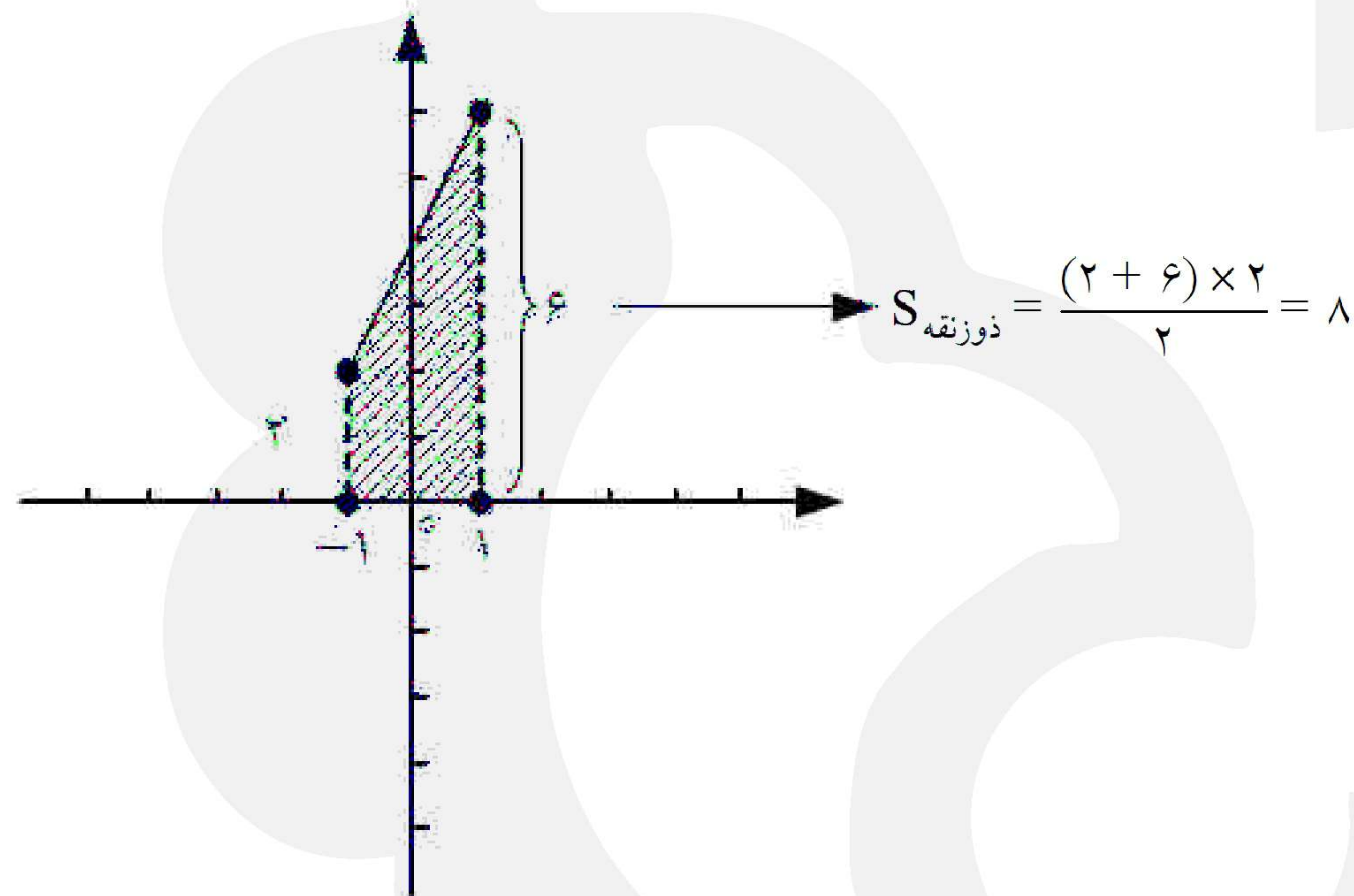
$$\sqrt{1-x} \geq 0 \xrightarrow{\text{برد } f} \sqrt{1-x} \geq -1 \Rightarrow R_f = [-1, +\infty)$$

$$f^{-1} \circ f(x) = x ; D_{f^{-1} \circ f} = D_f = (-\infty, 1] \quad (1)$$

$$f \circ f^{-1}(x) = x ; D_{f \circ f^{-1}} = D_{f^{-1}} = R_f = [-1, +\infty) \quad (2)$$

$$1, 2 \Rightarrow g(x) = x + x + 4 \Rightarrow \begin{cases} g(x) = 2x + 4 \\ D_g = D_f \cap R_f = [-1, 1] \end{cases}$$

بنابراین نمودار خط  $y = 2x + 4$  را در بازه  $[-1, 1]$  رسم کرده و مساحت محدود به آن و محور  $x$  ها را حساب می‌کنیم:



۴۰- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\begin{aligned} -2 \leq x \leq 22 &\xrightarrow{\div 2} -1 \leq \frac{x}{2} \leq 11 \Rightarrow -1 \leq \frac{3-4x}{2} \leq 11 \\ &\downarrow -3 \\ -4 \leq -4x \leq 8 \\ &\downarrow \div (-4) \\ -2 \leq x \leq 1 \\ &\downarrow \quad \downarrow \\ &a \quad b \end{aligned}$$

$$a^2 + b^2 = (-2)^2 + 1^2 = 5$$





۴۱- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. می‌دانیم که به ازای هر عدد حقیقی  $x$  داریم:

$$f(x-2) - f(x+2) = 0 \Rightarrow f(x-2) = f(x+2) \xrightarrow{x-2=X} f(X) = f(X+6)$$

پس تابع  $f$  متناوب با دوره تناوب ۶ است.

حالا برای محاسبه  $g'(3)$ ، ابتدا از طرفین رابطه داده شده مشتق می‌گیریم:

$$g(3x+1) = f(3-2x) - 2f\left(-x - \frac{29}{3}\right) + \frac{x}{2}$$

$$\rightarrow 3g'(3x+1) = -2f'(3-2x) + 2f'\left(-x - \frac{29}{3}\right) + \frac{1}{2}$$

$$3x+1=3 \Rightarrow x=\frac{2}{3}$$

برای رسیدن به  $g'(3)$  لازم است:

$$3g'(3) = -2f'\left(\frac{5}{3}\right) + 2f'\left(-\frac{31}{3}\right) + \frac{1}{2}$$

با جایگذاری  $x = \frac{2}{3}$  در رابطه اخیر داریم:

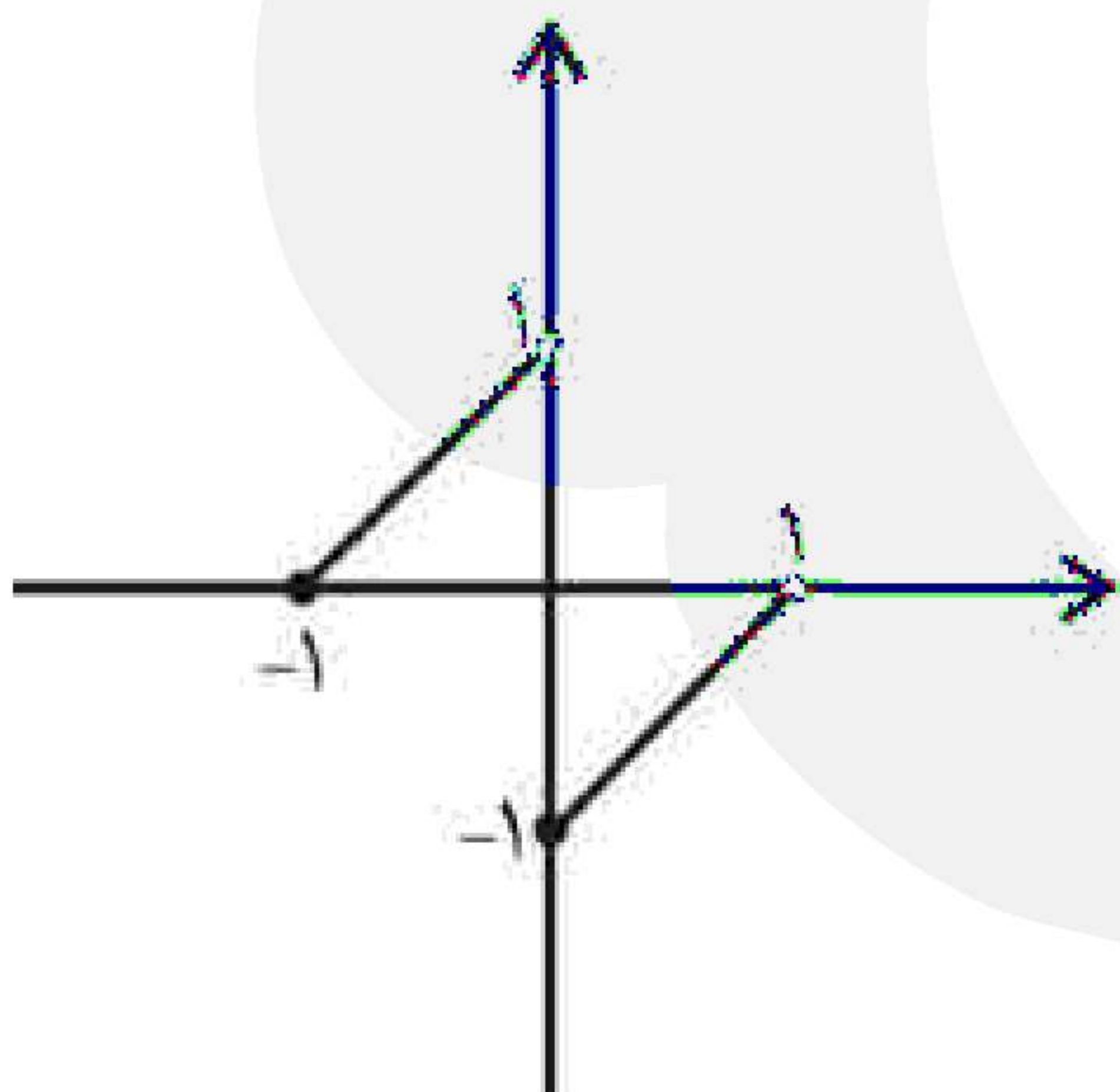
از طرفی تابع  $f$  متناوب با دوره تناوب ۶ است، پس  $f(x) = f(x+6)$  است، یعنی مثلاً:

$$f\left(-\frac{31}{3}\right) = f\left(-\frac{13}{3}\right) = f\left(\frac{5}{3}\right) = \dots$$

پس  $f\left(-\frac{31}{3}\right) = f\left(\frac{5}{3}\right)$  و از آنجا که تابع  $f$  متناوب است، شیب خط مماس بر منحنی  $f$  در نقاط  $x = \frac{5}{3}$  و  $x = -\frac{31}{3}$  و

$x = \frac{5}{3}$  هم برابر است، به عبارتی  $f'\left(-\frac{31}{3}\right) = f'\left(\frac{5}{3}\right)$  است و داریم:

$$3g'(3) = -2f'\left(\frac{5}{3}\right) + 2f'\left(-\frac{31}{3}\right) + \frac{1}{2} \Rightarrow g'(3) = \frac{1}{6}$$



۴۲- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. فاصله  $f(x)$  را ساده کرده و نمودار آن را

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & -1 \leq x < 0 \\ x-1 & 0 \leq x < 1 \end{cases}$$

رسم می‌کنیم:

واضح است که این تابع در فواصل  $(-1, 0)$  و  $(0, 1)$  اکیداً صعودی است، اما به خاطر پرش نمودار از بالا به پایین در  $x=0$ ، در کل بازه  $(-1, 1)$  غیریکنواست.

حالا ضابطه  $f \circ f(x)$  را به دست می‌آوریم:

$$f \circ f(x) = f(f(x)) = \begin{cases} f(x)+1 & -1 \leq f(x) < 0 \\ f(x)-1 & 0 \leq f(x) < 1 \end{cases}$$

با توجه به نمودار:

$$\begin{cases} 0 \leq x < 1 \Rightarrow -1 \leq f(x) < 0, f(x) = x-1 \\ -1 \leq x < 0 \Rightarrow 0 \leq f(x) < 1, f(x) = x+1 \end{cases}$$

$$f(f(x)) = \begin{cases} (x-1)+1 = x & 0 \leq x < 1 \\ (x+1)-1 = x & -1 \leq x < 0 \end{cases}$$

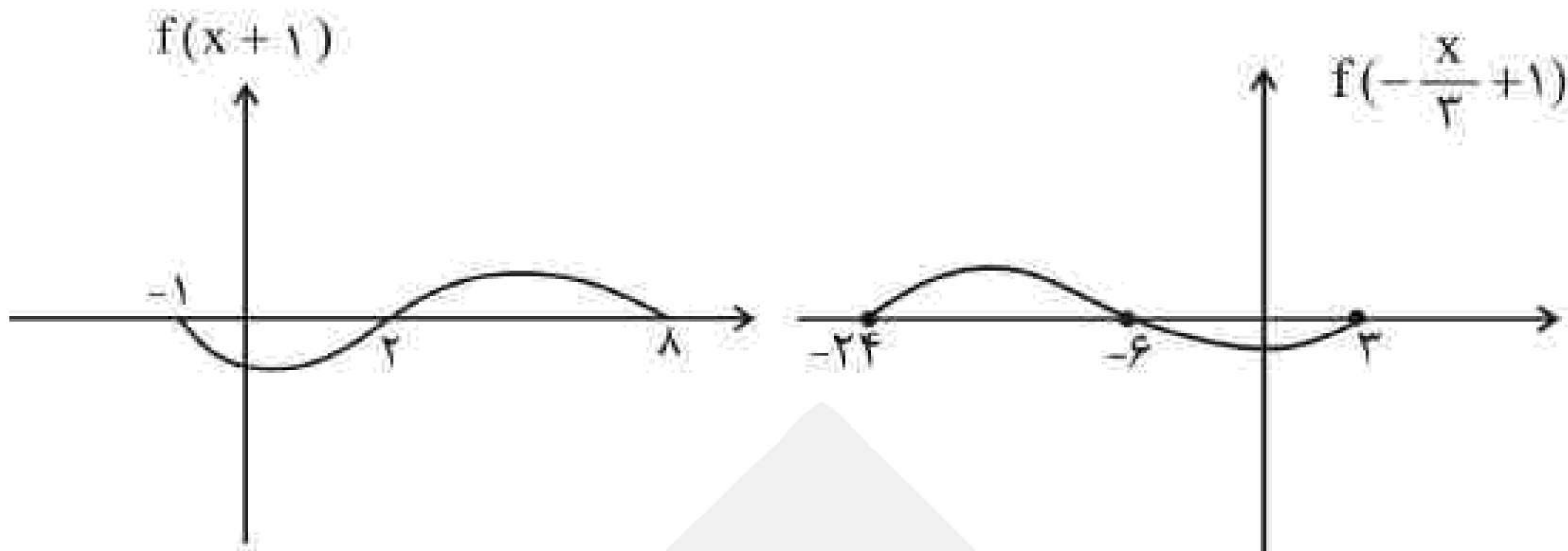
پس داریم:

پس  $f(f(x)) = x$  بوده و اکیداً صعودی است.





۴۳- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. نمودار تابع  $f\left(1 - \frac{x}{3}\right)$  را رسم می‌کنیم:



عبارت زیر رادیکال را تعیین علامت می‌کنیم:

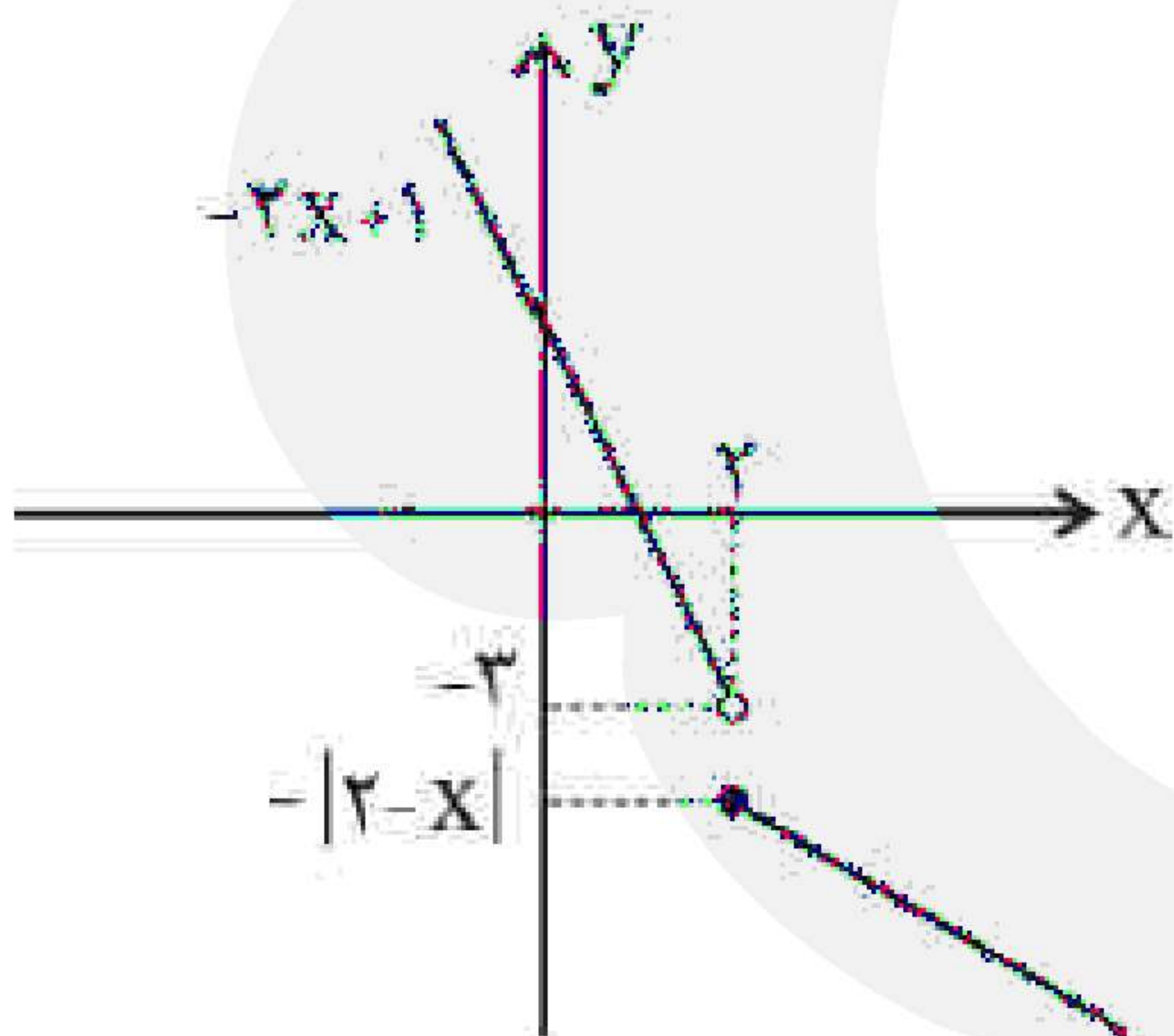
|                                 | -۲۴ | -۶ | ۰ | ۳ |
|---------------------------------|-----|----|---|---|
| $f\left(1 - \frac{x}{3}\right)$ |     | +  | - | - |
| x                               |     | -  | - | + |
| p                               |     | -  | + | - |

$$D = [-6, 0) \cup \{-2, 4, 3\}$$

دامنه تابع شامل ۸ عدد صحیح است.

«بانک سوال یاوران دانش»

۴۴- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.



باید ضابطه‌ها در دامنه خود ۱ به ۱ باشند، یعنی نقطهٔ ماکزیمم قدرمطلق در  $x \geq 2$  قرار ندارد:  
 $\Rightarrow m < 2$

و اشتراک بردها تهی باشد، یعنی عرض ماکزیمم ضابطه پایین (در  $x = 2$ ) از شروع ضابطه بالا (در نقطهٔ توخالی  $(2, -3)$ ) بیشتر نباشد:

$$f(2) = -|2 - m| \leq -3 \Rightarrow 2 - m \geq 3 \Rightarrow m \leq -1$$





۴۵- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. برای آنکه تابع یک به یک باشد باید شیب هر دو خط هم‌علامت باشد، یعنی:

$$m \times (3 - m) > 0 \Rightarrow 0 < m < 3$$

پس شیب هر دو مثبت است، پس اگر عدد  $x = 1$  را در معادله بالایی قرار دهیم باید از حالتی که  $x = 1$  را در پایینی قرار می‌دهیم بزرگ‌تر شود، یعنی:  $m + 1 - m \leq 2 \leftarrow m \leq \frac{1}{2}$ ، پس با اشتراک گرفتن از هر دو شرط داریم:

$$\frac{1}{2} \leq m < 3$$

حال چون  $m$  صحیح است، داریم: ۲، ۱،  $m = 1$ . اگر در تابع  $m$  را ۱ یا ۲ قرار دهیم  $f^{-1}(m+1)$  برابر ۱ می‌شود.

۴۶- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$f(x) = \begin{cases} (2+K)x - 2 & ; x \geq 0 \\ (2-K)x - 2 & ; x < 0 \end{cases}$$

اگر شیب دو خط در ضابطه تابع هم‌علامت باشند،  $f$  در هر دو ضابطه یک رفتار صعودی اکید یا نزولی اکید در کل دامنه خواهد داشت، بنابراین:

$$(2+K)(2-K) > 0 \Rightarrow -2 < K < 2$$

توجه داشته باشید که به ازای  $K = 2$  یا  $K = -2$  یک ضابطه از تابع ثابت می‌شود و یکنوایی اکید در کل دامنه به هم می‌خورد.

۴۷- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. دو طرف معادله را برابر  $t$  قرار می‌دهیم:

$$2f^{-1}(x) = t \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{t}{2} \Rightarrow x = f\left(\frac{t}{2}\right)$$

$$f^{-1}\left(\frac{8x+3}{4}\right) = t \Rightarrow f(t) = \frac{8x+3}{4} \Rightarrow x = \frac{4f(t)-3}{8}$$

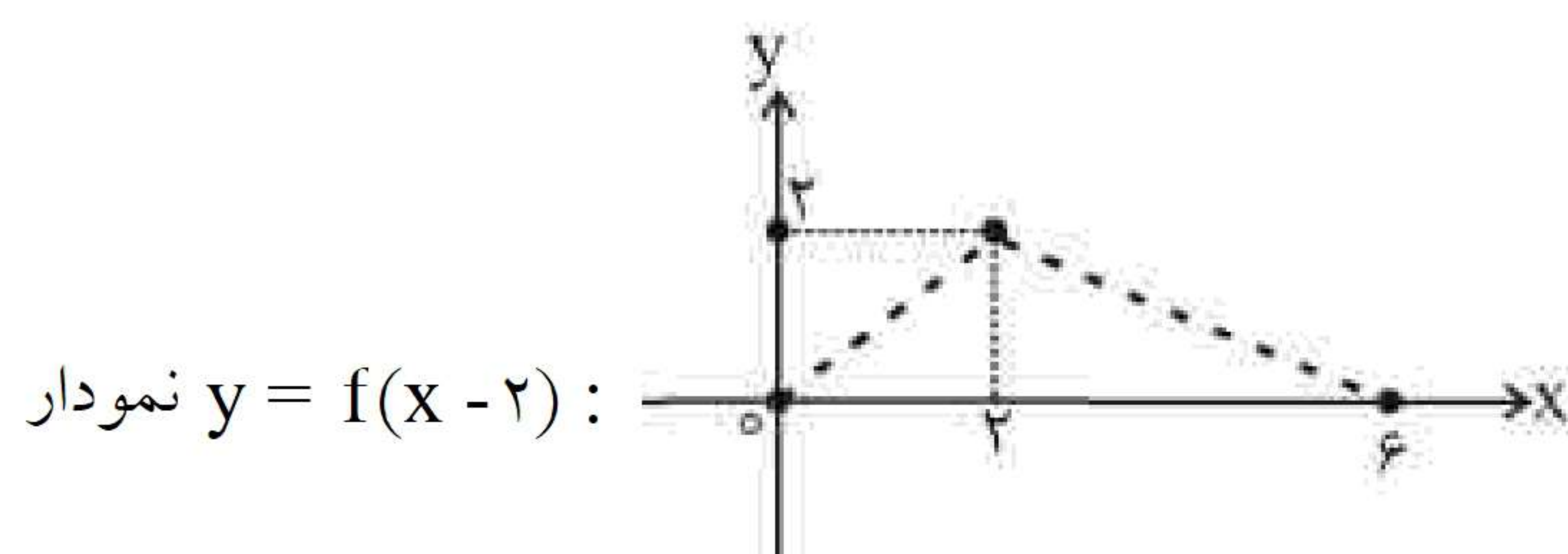
$$\frac{4f(t)-3}{8} = f\left(\frac{t}{2}\right) \Rightarrow 4\left(t^3 + t\right) - 3 = 8\left(\frac{t^3}{8} + \frac{t}{2}\right) \Rightarrow 4t^3 + 4t - 3 = t^3 + 4t$$

$$\Rightarrow 3t^3 = 3 \Rightarrow t = 1 \Rightarrow x = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{8}$$

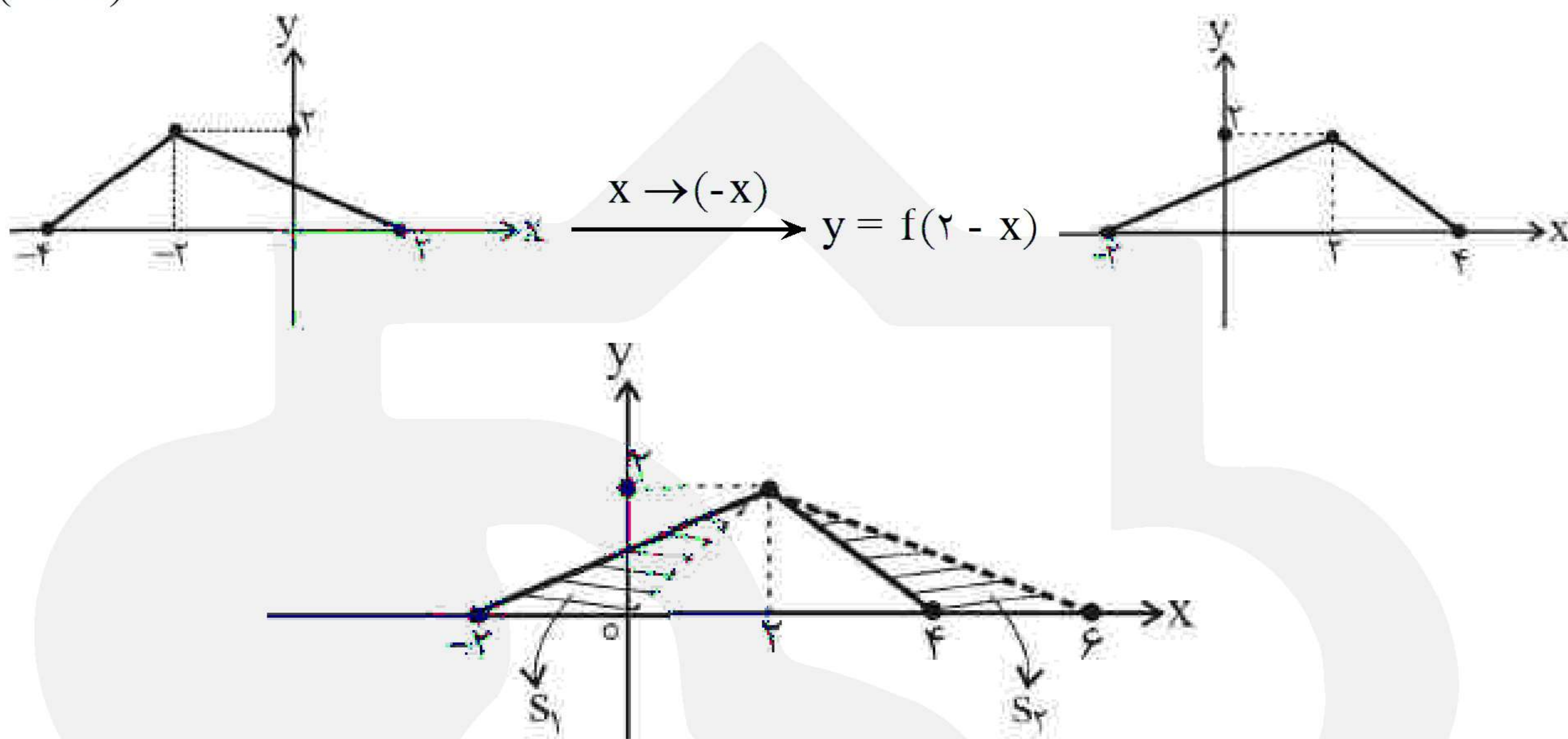




۴۸- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

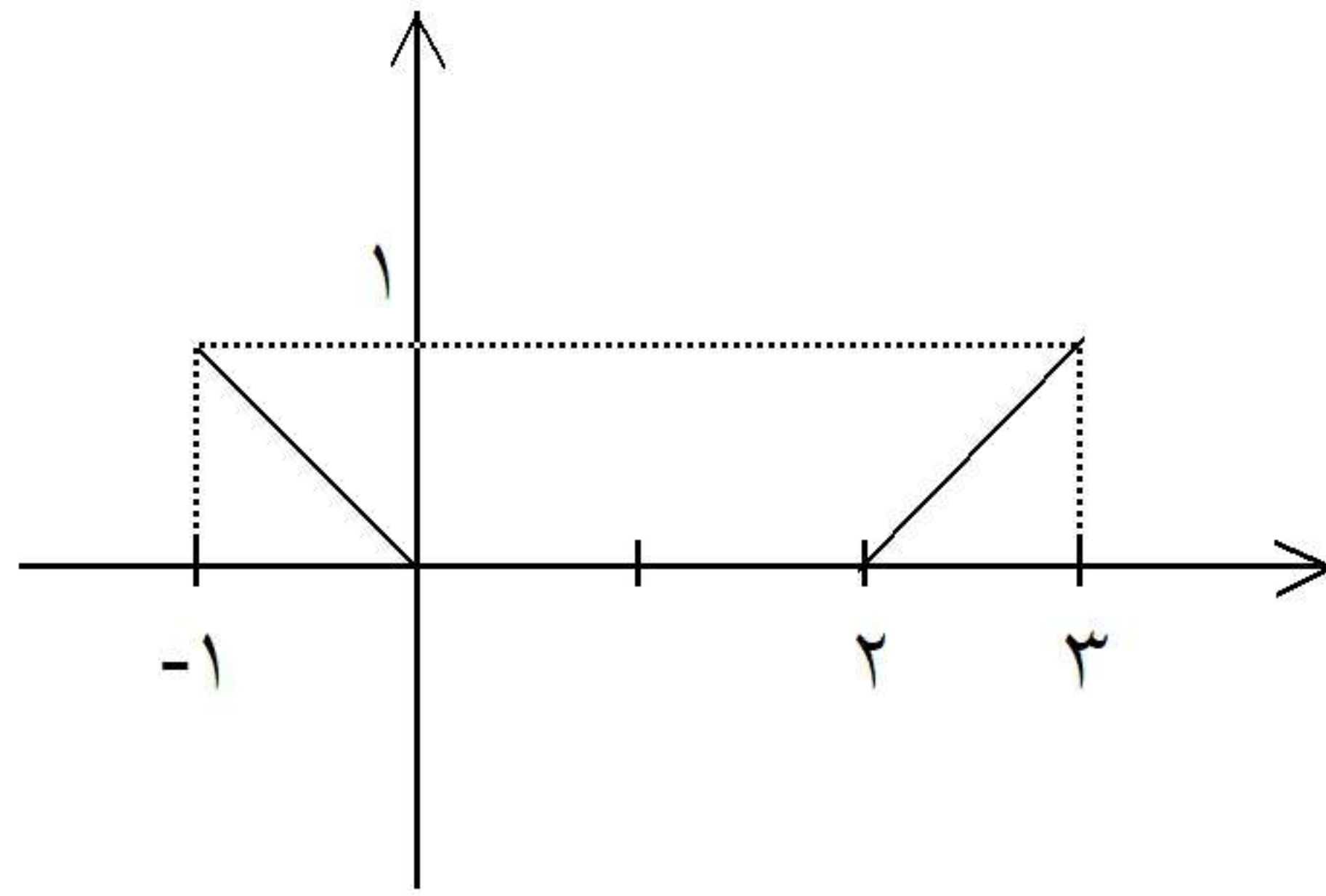


$y = f(2 + x)$ :



مساحت بین دو نمودار  $= S_1 + S_2 = \frac{2 \times 2}{2} + \frac{2 \times 2}{2} = 4$





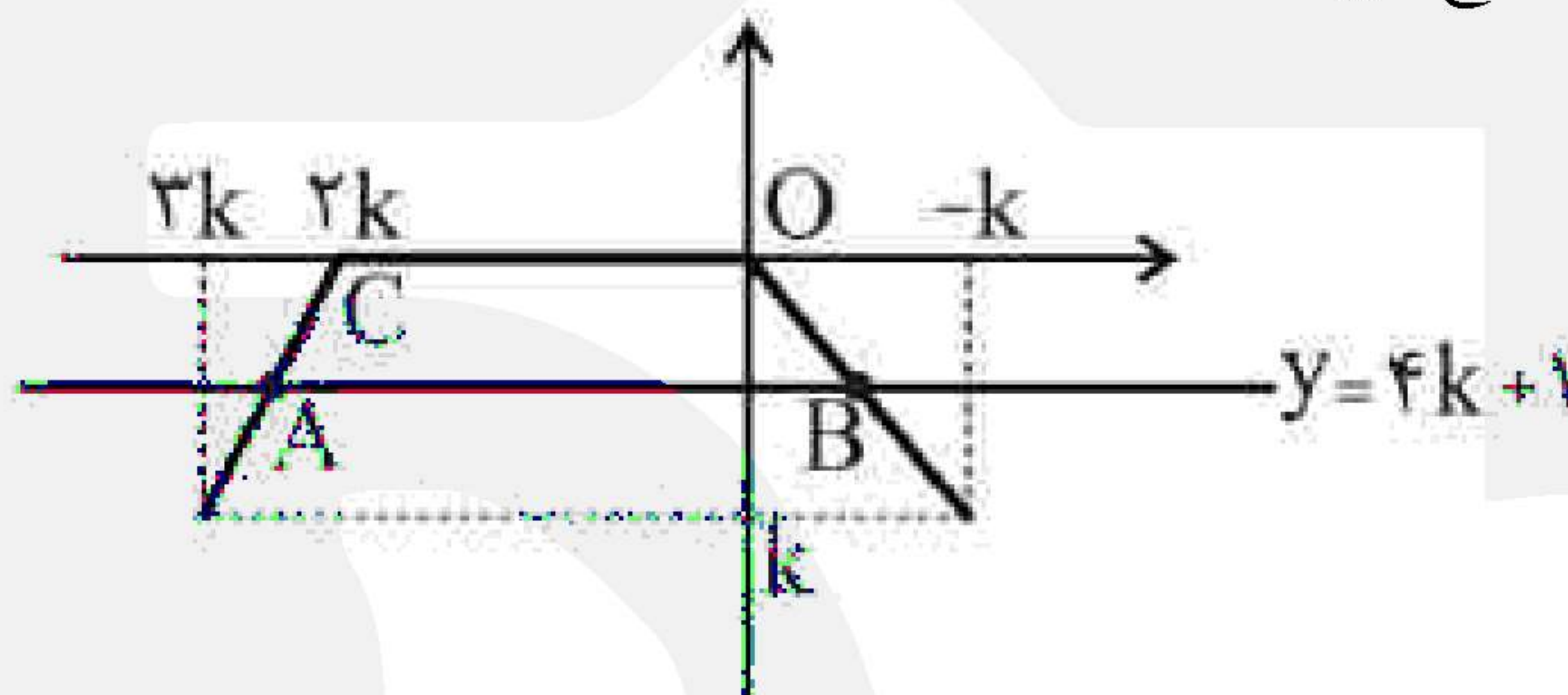
۴۹- نمودار تابع  $y = f(x)$  به شکل مقابل است. با فرض

$$k < 0 \text{ مجموع ریشه‌های معادله } kf\left(\frac{x}{k}\right) = 4k + 1$$

برابر ۳- است. مقدار  $f(|k| + 1)$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{1}{4}$  (۲)  $\frac{1}{3}$  (۳)  $\frac{1}{2}$  (۴) ۱

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. با فرض  $k < 0$  نمودار نسبت به محور عرض و طول‌ها قرینه می‌شود. همین طور نمودار  $f(x)$  در راستای افقی و عمودی دچار انبساط  $k$  برابری می‌شود. فرض کنیم نمودار خط افقی  $y = 4k + 1$  این نمودار را در دو نقطه  $A$  و  $B$  قطع می‌کند.



دقت کنید که شیب دو پاره‌خط مورب برابر ۱ و -۱ است. با توجه به فرض سؤال داریم:

$$x_A + x_B = -3 \Rightarrow x_C = -3 \Rightarrow 2k = -3 \Rightarrow k = -\frac{3}{2}$$

اکنون مقدار  $f(|k| + 1) = f\left(\frac{5}{2}\right)$  را می‌یابیم.

با توجه به شکل تابع  $f(x)$ ، ضابطه خط مورب در قسمت مثبت محور  $x$  را می‌یابیم:

$$f(x) = x - 2 \Rightarrow f\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{5}{2} - 2 = \frac{1}{2}$$

۵۰- اگر  $[-1, 3] \rightarrow [3, 5]$ ؛  $y = 2f(x-1) - 3$  باشد، آنگاه اجتماع دامنه و برد تابع  $y = -3 - 3f\left(1 - \frac{x}{2}\right)$  چند

عضو صحیح دارد؟

- (۱) ۹ (۲) ۱۰ (۳) ۱۱ (۴) ۱۲

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$(۱) \text{ دامنه تابع جدید } 3 \leq x \leq 5 \Rightarrow 2 \leq x-1 \leq 4 \Rightarrow 2 \leq 1 - \frac{x}{2} \leq 4 \Rightarrow -6 \leq x \leq -2$$

$$(۲) \text{ برد تابع جدید } -1 \leq 2f-3 \leq 3 \Rightarrow 1 \leq f \leq 3 \xrightarrow{x-3} -9 \leq -3f \leq -3 \Rightarrow -12 \leq -3f-3 \leq -6$$

بنابراین اجتماع ۱ و ۲ به صورت  $[-12, -2]$  و دارای ۱۱ عدد صحیح است.