

گنجینه سوال رایگان

+ پاسخ تشریحی

یاوران دانش



راه های ارتباطی با ما:

www.Dyavari.com

۰۲۱-۷۶۷۰۳۸۵۸

۰۹۱۲-۳۴ ۹۴ ۱۳۴



	۱	۲	۳	۴
۱ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۴ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۵ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۶ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۷ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۸ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۹ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۰ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۱ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۱۲ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۳ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۴ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۵ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۱۶ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۷ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۸ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۹ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۰ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۲۱ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۲ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۳ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۴ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۲۵ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۶ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۷ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۸ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۹ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۳۰ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۳۱ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۳۲ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۳ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۴ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

	۱	۲	۳	۴
۳۵ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۳۶ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۷ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۸ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۹ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۴۰ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۴۱ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۴۲ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۴۳ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۴۴ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۴۵ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۴۶ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۴۷ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۴۸ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۴۹ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۵۰ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



۱- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. اگر دنباله $f(1), f(x_2), f(x_3), \dots$ دنباله حسابی باشد، آنگاه:

$$2f(x_2) = f(1) + f(x_3) \Rightarrow 2 \log_{\frac{1}{2}} x_2 = \log_{\frac{1}{2}} 1 + \log_{\frac{1}{2}} x_3 \Rightarrow \log_{\frac{1}{2}} x_2^2 = \log_{\frac{1}{2}} x_3$$

$$\Rightarrow x_2^2 = x_3$$

دنباله $\{1, x_2, x_3, \dots\}$ دنباله‌ای هندسی با قدرنسبت q است. نسبت شیب‌ها را محاسبه می‌کنیم:

$$\frac{f(x_4) + f(x_3)}{x_4 - x_3} = \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} = \frac{q^4 - q^3}{q^3 - q^2} = \frac{q^4 - q^3}{q^2(q - 1)} = \frac{1}{q} = \frac{1}{2} \Rightarrow q = 2$$

$$d = \log_{\frac{1}{2}} x_2 - \log_{\frac{1}{2}} 1 = \log_{\frac{1}{2}} q - \log_{\frac{1}{2}} 1 = \log_{\frac{1}{2}} 2 = -1$$

قدرنسبت دنباله حسابی

۲- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. طرفین را بر $x^2 (\log x)^2$ تقسیم می‌کنیم.

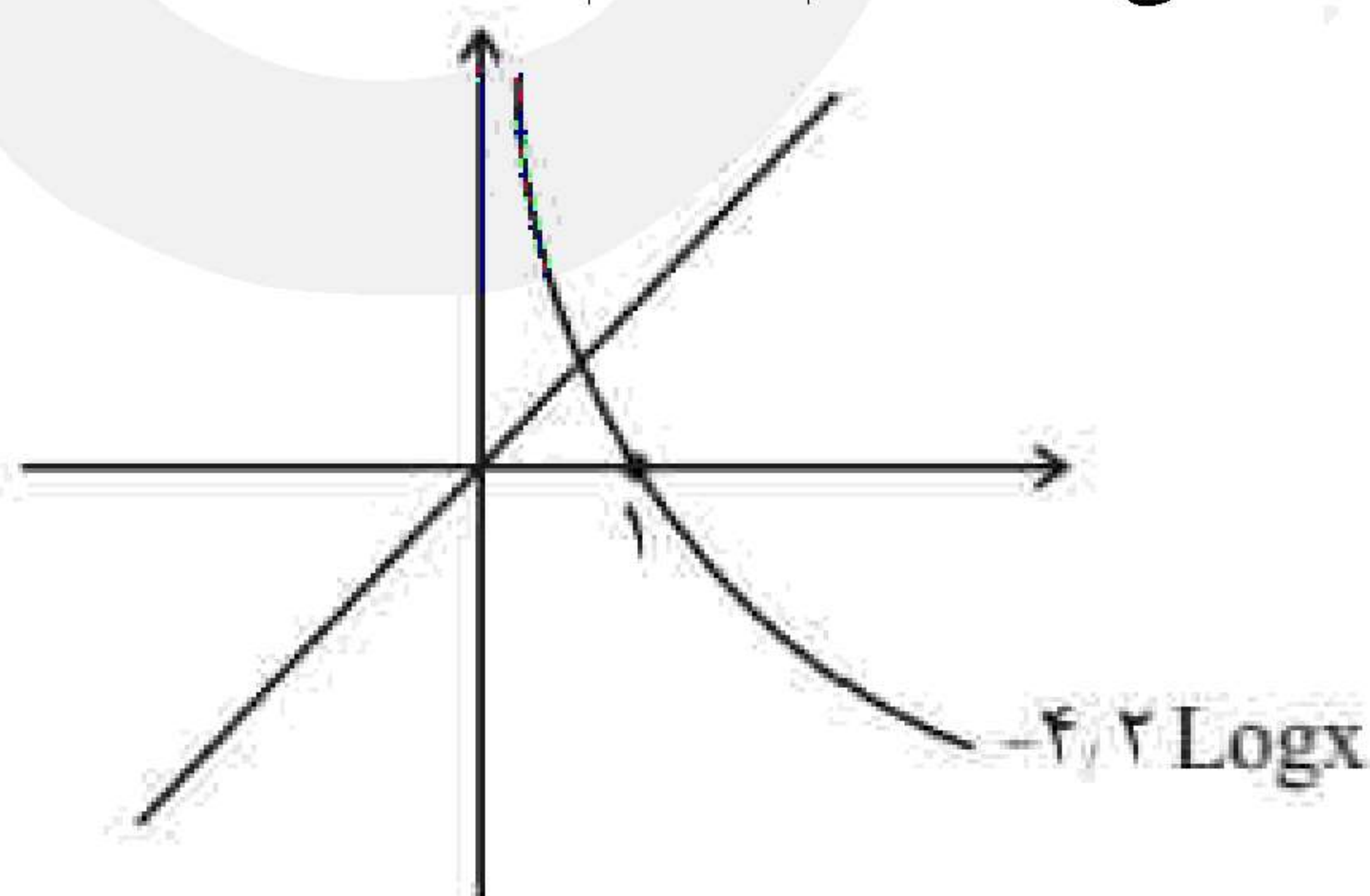
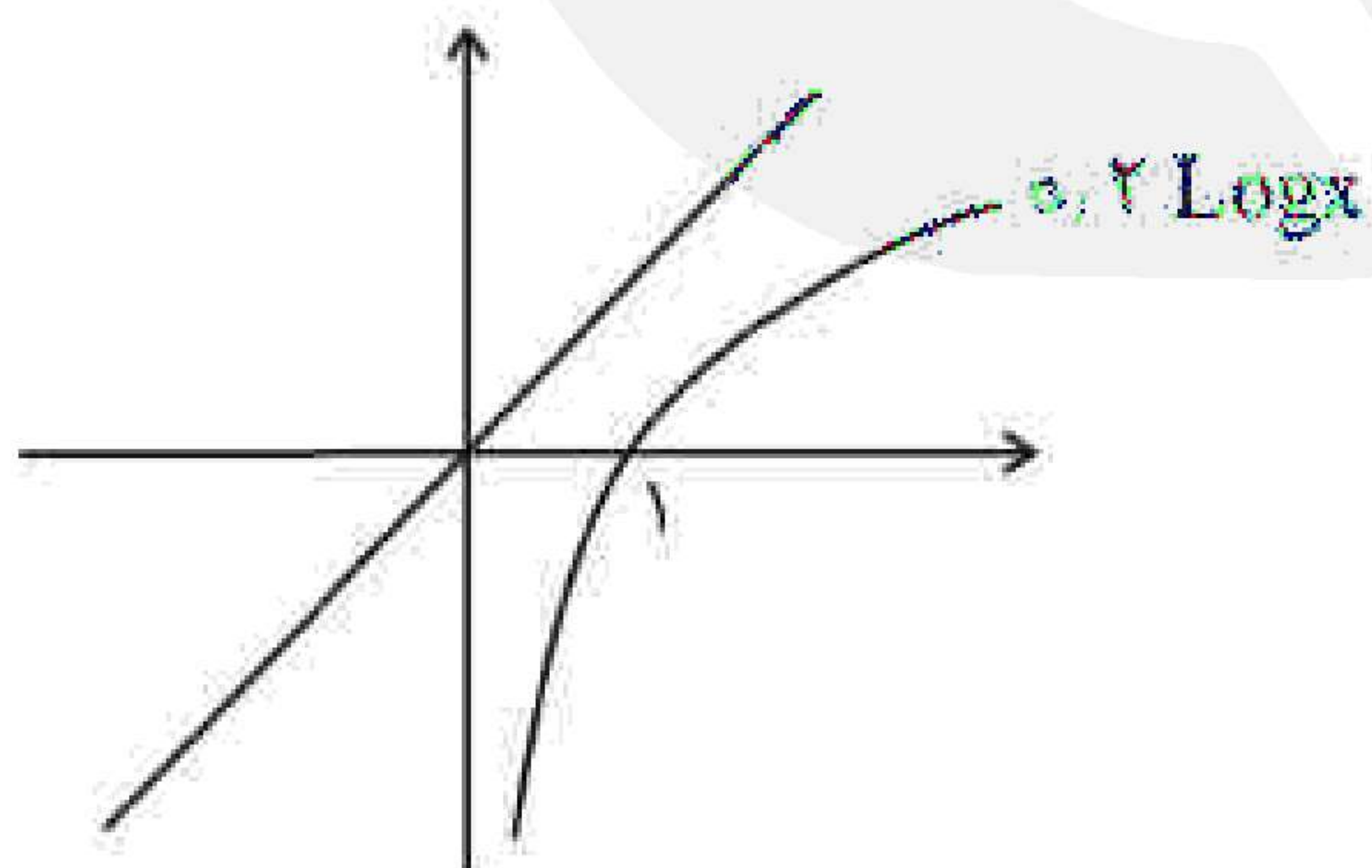
$$\frac{x^4}{x^2 (\log x)^2} + 4 = \frac{(\log x)^4}{x^2 (\log x)^2} \Rightarrow \frac{x^2}{(\log x)^2} + 4 = \frac{(\log x)^2}{x^2} \Rightarrow \left(\frac{x}{\log x}\right)^2 + 4 = \left(\frac{\log x}{x}\right)^2$$

$\left(\frac{x}{\log x}\right)^2$ را t فرض می‌کنیم.

$$t + 4 = \frac{1}{t} \xrightarrow{\times t} t^2 + 4t = 1 \xrightarrow{+4} t^2 + 4t + 4 = 5 \Rightarrow (t+2)^2 = 5 \Rightarrow t = \pm\sqrt{5} - 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{\log x} = \sqrt{5} - 2 \\ \frac{x}{\log x} = -\sqrt{5} - 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = (\sqrt{5} - 2) \log x \\ x = (-\sqrt{5} - 2) \log x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0/2 \log x \\ x = -4/2 \log x \end{cases}$$

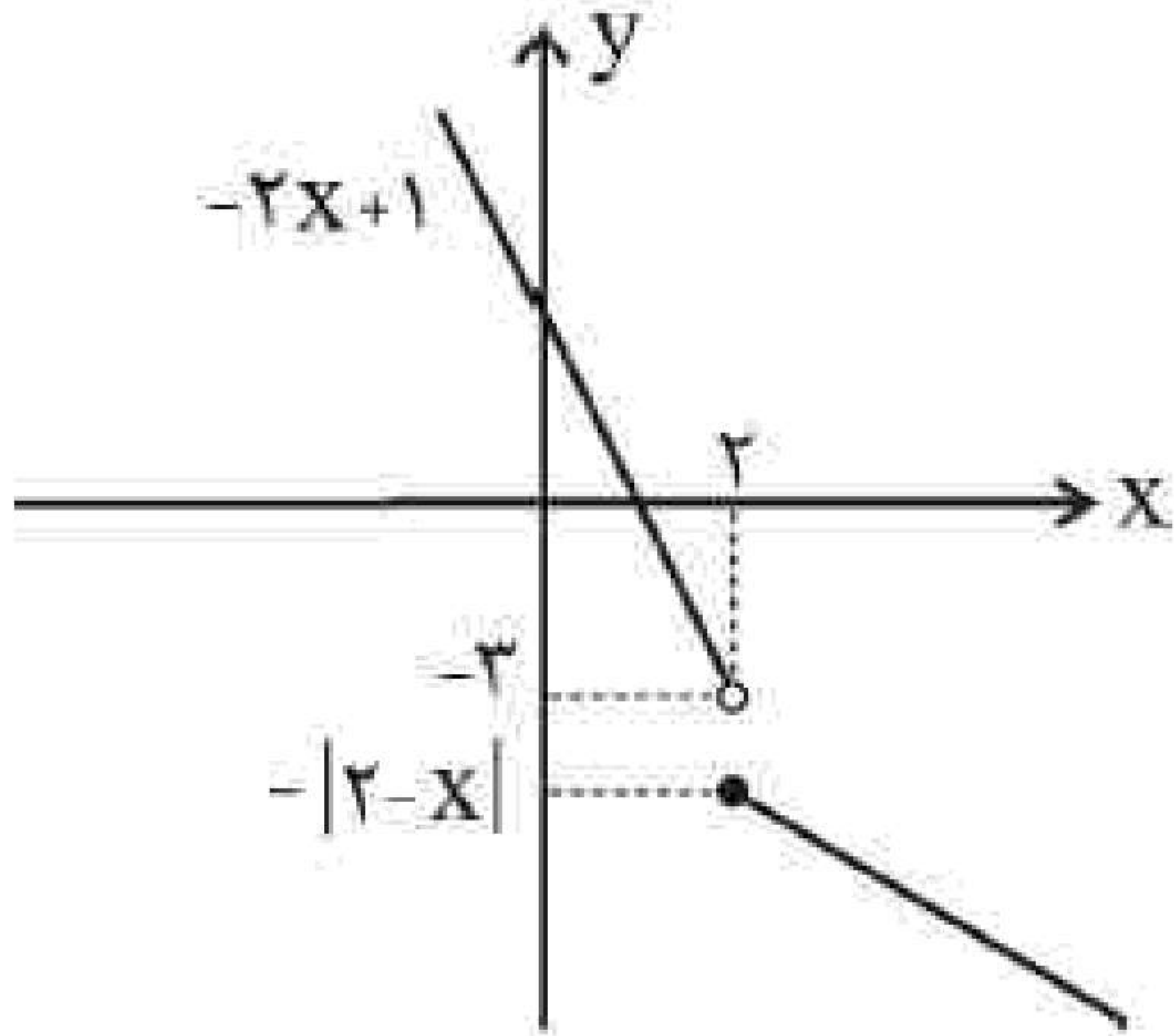
نمودارهای توابع بالا را رسم می‌کنیم.



معادله فقط یک ریشه قابل قبول دارد.



۳- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.



باید ضابطه‌ها در دامنه خود ۱ به ۱ باشند، یعنی نقطهٔ ماکزیمم
قدرمطلق در $x \geq 2$ قرار ندارد:
 $\Rightarrow m < 2$

و اشتراک بردها تهی باشد، یعنی عرض ماکزیمم ضابطه پایین
(در $x = 2$) از شروع ضابطه بالا (در نقطهٔ توخالی $(2, -3)$)
بیشتر نباشد:

$$f(2) = -|2 - m| \leq -3 \Rightarrow 2 - m \geq 3 \Rightarrow m \leq -1$$

$$\frac{x^2 + k}{x} = 3 \log 2 \Rightarrow x^2 - 3x \log 2 + k = 0$$

۴- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\begin{cases} S = \alpha + 2\alpha = 3 \log 2 \Rightarrow \alpha = \log 2 \\ P = 2\alpha^2 = k \end{cases}$$

$$\sqrt{\frac{k}{2}} = \alpha = \log 2$$

۵- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. خواسته سؤال را ساده می‌کنیم:

$$\log 45 = \log 9 + \log 5 = \log 9 + 1 - \log 2$$

حال با استفاده از معادله‌های داده شده داریم:

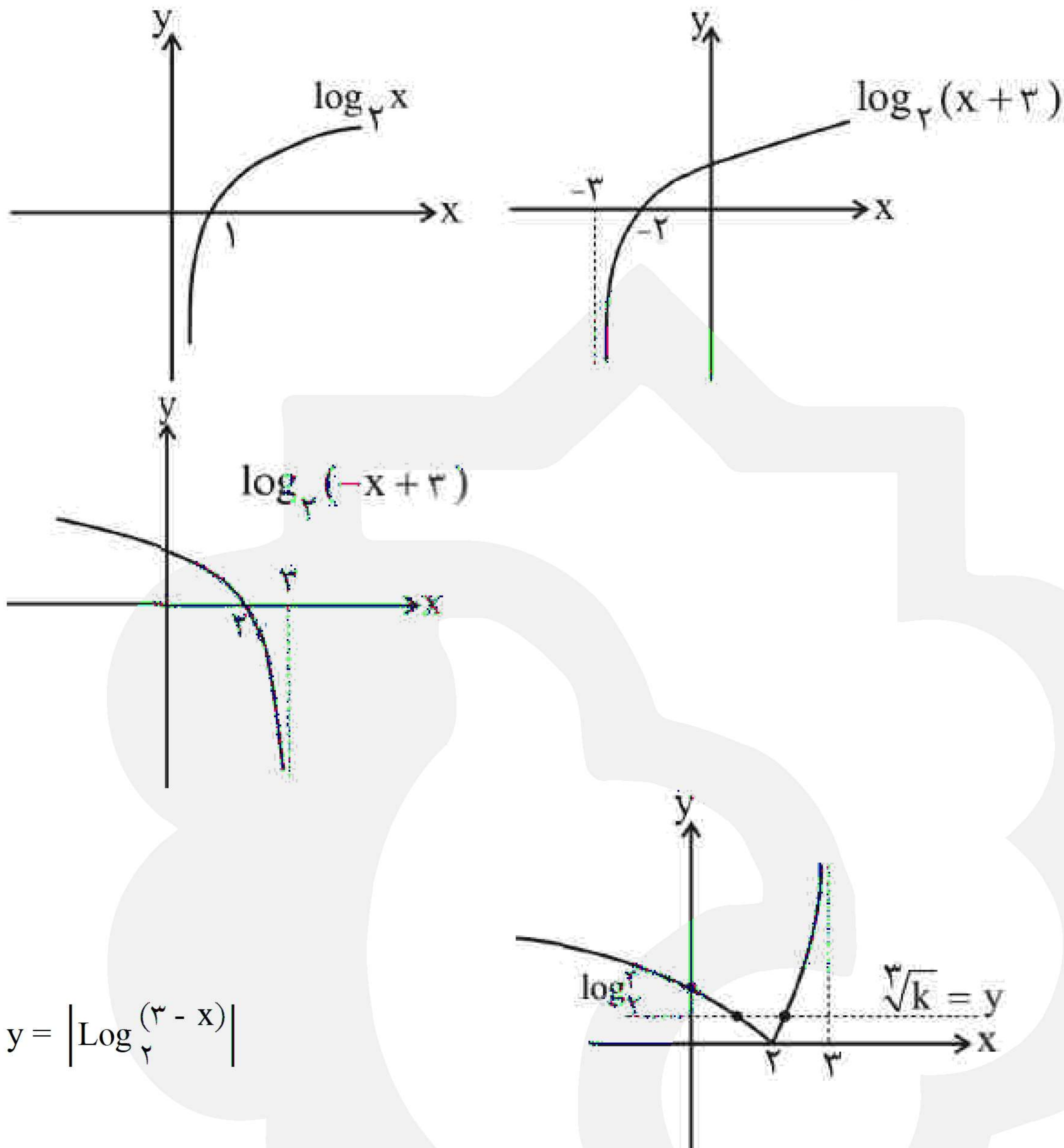
$$\begin{cases} \log 72 = \log 8 + \log 9 = 2 \log 3 + 3 \log 2 = a \Rightarrow \log 2 = \frac{a - 2 \log 3}{3} \\ \log 30 = \log 10 + \log 3 = 1 + \log 3 = b \Rightarrow \log 3 = b - 1 \end{cases}$$

پس داریم:

$$\begin{aligned} \log 9 + 1 - \log 2 &= \underbrace{2 \log 3}_{b-1} + 1 - \underbrace{\log 2}_{\frac{a - 2 \log 3}{3}} = 2b - 2 + 1 - \frac{a - 2 \log 3}{3} \\ &= \frac{6b - 3 - a + 2b - 2}{3} = \frac{-5 + 8b - a}{3} \end{aligned}$$



۶- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. نمودار $y = \left| \text{Log}_2 (3 - x) \right|$ را رسم می‌کنیم.



$$y = \left| \text{Log}_2 (3 - x) \right|$$

پس:

$$0 < \sqrt[3]{k} < \text{Log}_2 3$$

$$\text{Log}_2 3 = \frac{\text{Log } 3}{\text{Log } 2} = \frac{0.48}{0.3} = 1.6$$

حالا تلاقی آن با $y = \sqrt[3]{k}$ دو جواب مثبت دارد، پس:

مقدار $\text{Log}_2 3$ برابر است:

بنابراین $\sqrt[3]{k} < 1.6$ پس $k < 1.6^3$ یعنی $k < 4.096$ و بیشترین مقدار طبیعی k می‌شود ۴.



۷- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. در معادله $\text{Log}_x^y - 6\text{Log}_x^y = 5$ اگر به جای Log_x^y ، t قرار دهیم داریم:

$$= t - \frac{6}{t} = 5 \Rightarrow t^2 - 5t - 6 = 0$$

حالا با شرط $y < 1 < x$ باید Log_x^y منفی باشد، پس $t = \text{Log}_x^y = -1$ را قبول می‌کنیم و داریم: $xy = 1$

$$\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+y} = \frac{1+y+1+x}{(1+x)(1+y)} = \frac{2+x+y}{1+x+y+xy} = 1$$

حالا:

«بانک سوال یاوران دانش»

۸- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. از معادله $\text{Log } x + \text{Log}(x^2 - 8x + 17) = \text{Log } 6$ داریم:

$$x(x^2 - 8x + 17) = 6 \Rightarrow x^3 - 8x^2 + 17x - 6 = 0$$

$$27 - 72 + 51 - 6 = 0$$

$$(x-3)(x^2 - 5x + 2) = 0$$

با تقسیم بر $x-3$ به دست آمد

$$\text{پس ریشه‌ها } x = 3, \frac{5 \pm \sqrt{25-8}}{2} \text{ هستند و ریشه بزرگ‌تر معادله می‌شود } \frac{5 + \sqrt{17}}{2} \text{ و بنابراین:}$$

$$\left[\frac{b}{a}\right] = \left[\frac{17}{5}\right] = 3$$

۹- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. با توجه به داده‌های سؤال داریم:

$$\begin{cases} \text{Log}_c^a b = 3 \Rightarrow c^3 = a^3 b \\ \text{Log}_c^a b^3 = 1 \Rightarrow c^2 = a^3 b^3 \Rightarrow c = \frac{1}{ab^2} \Rightarrow ac = \frac{1}{b^2} = b^{-2} \end{cases}$$

حال خواسته سؤال را ساده می‌کنیم:

$$a^3 c^2 \times \text{Log}_b^a \times \underbrace{ac}_{\text{Log}_b^{ac}} \times \underbrace{\text{Log}_b^{a^{-2}}}_a = \text{Log}_b^a \times \text{Log}_a^b \times a^{-2} \times a^3 c^2 \times c \times \text{Log}_b^{\frac{1}{b^2}} b$$

$$= a^{-2} \times a^3 c^2 \times c^{-2} = 1$$



۱۰- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ابتدا در تابع $y = \log_x (x-2)$ داریم:

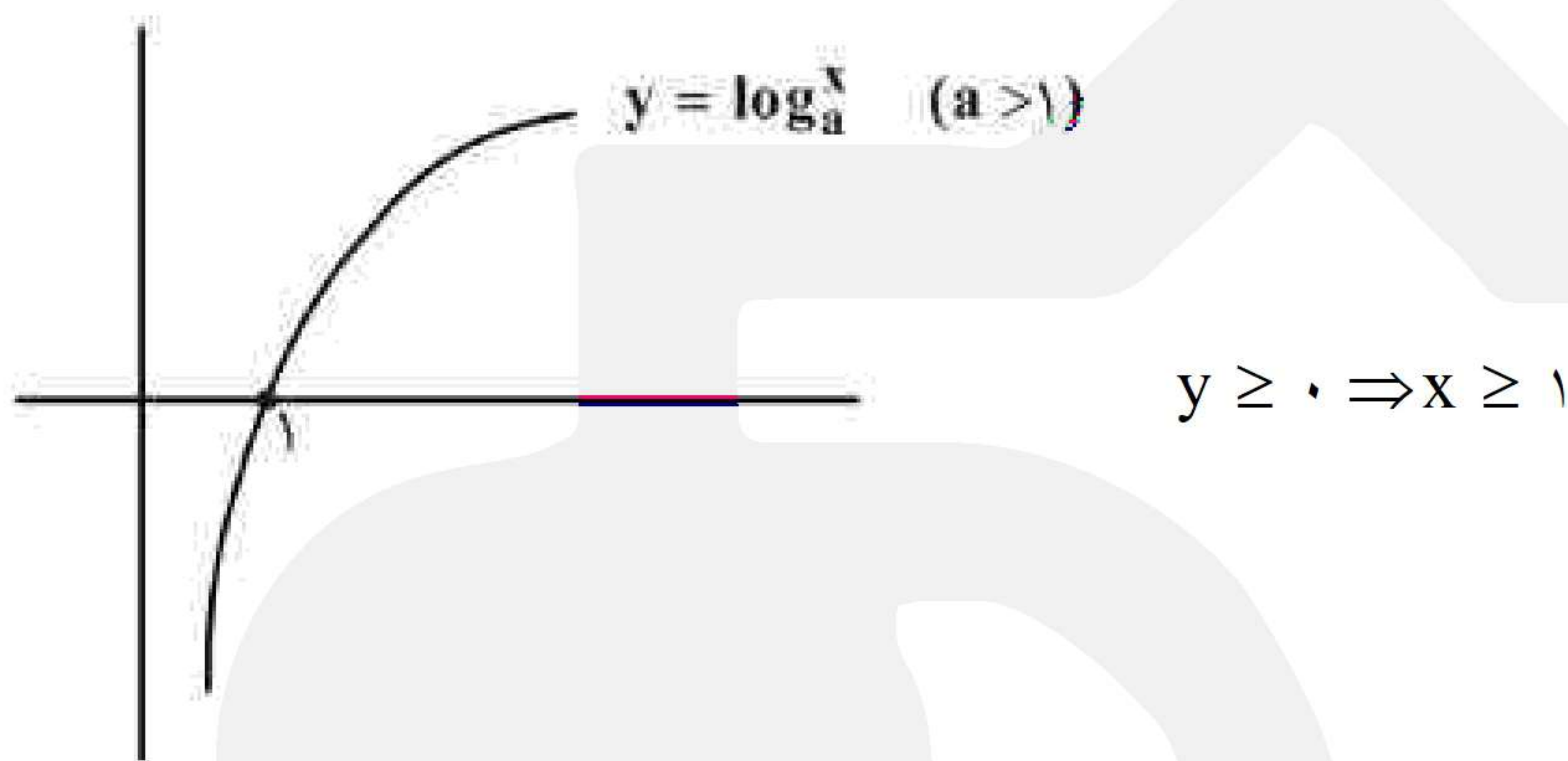
$$\begin{cases} x-2 > 0 \Rightarrow x > 2 \\ x > 0, x \neq 1 \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} x > 2$$

واضح است که وقتی $x > 2$ است، عبارت $x-1$ نیز مثبت بوده و برای آن که عبارت زیر رادیکال، بزرگتر یا مساوی

$$\log_x (x-2) \geq 0 \xrightarrow{\text{پایه } = x > 2} x-2 \geq 1 \Rightarrow x \geq 3$$

صفر باشد، کافی است:

این بازه، فقط شامل دو عدد طبیعی ۲ و ۱ نیست. یادآوری:



۱۱- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. به طول نقاط A و B و C توجه کنید:

سه جمله، متساوی الفاصله از دنباله حسابی a_n هستند، پس با یکدیگر تشکیل دنباله حسابی جدیدی می دهند. می دانیم که در تابع نمایی، اگر ورودی ها (Xها) تشکیل دنباله حسابی دهند، خروجی های (Yهای) متناظر، تشکیل دنباله هندسی می دهند. حالا به عرض نقاط A و B و C توجه کنید:

جملات دوم، ششم و هشتم از دنباله حسابی هستند و طبق آنچه در بالا گفتیم، باید سه جمله متوالی یک دنباله هندسی باشند.

در واقع سؤال به مسئله معروف زیر تبدیل می شود:

«جملات دوم، ششم و هشتم از یک دنباله حسابی، سه جمله متوالی یک دنباله هندسی هستند.»

قدرنسبت دنباله هندسی موردنظر، به راحتی قابل محاسبه و برابر با $q = \frac{1}{2}$ است در نتیجه:

$$a_2 \times \frac{1}{2} = a_6 \Rightarrow a_2 = 2a_6 \Rightarrow a_1 + d = 2(a_1 + 5d) \Rightarrow a_1 + d = 2a_1 + 10d$$

$$\Rightarrow 0 = a_1 + 9d \Rightarrow a_1 = -9d$$



۱۲- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. مقادیر $f(2)$ و $f(f(2))$ را به دست می آوریم:

$$f(x) = \log_v^x$$

$$\begin{cases} f(2) = \log_v^2 \\ f(f(2)) = f(\log_v^2) = \log_v(\log_v^2) \end{cases}$$

$$\frac{f(f(2))}{f(2)} = \frac{\log_v(\log_v^2)}{\log_v^2} = \log_v^2(\log_v^2)$$

$$\text{حالا با استفاده از خاصیت } \frac{\log_c^a}{\log_c^b} = \log_b^a \text{ داریم:}$$

$$\frac{f(f(2))}{f(2)} = \log_v^2(\log_v^2) = \log_v^2 = f(2)$$

$$\text{و نهایتاً با استفاده از خاصیت } \log_a^b = b \text{ داریم:}$$

۱۳- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. به طول نقاط A و B و C توجه کنید:

$$a_2 - a_1, a_3 - a_2, a_4 - a_3$$

تفاضل جملات متوالی از دنباله درجه دو a_n هستند، پس با یکدیگر، تشکیل یک دنباله حسابی می دهند. می دانیم که در تابع نمایی، اگر ورودی ها «Xها» تشکیل دنباله حسابی دهند، خروجی های «Yهای» متناظر، تشکیل دنباله هندسی می دهند.

$$\log_{\alpha}^{(-\alpha+10)}, \sqrt{2}, \log_{(\alpha+2)}^{\alpha}$$

حالا به عرض نقاط A و B و C توجه کنید:

طبق آنچه در بالا گفتیم، این مقادیر، باید تشکیل یک دنباله هندسی دهند. پس جمله وسط، واسطه هندسی بین جملات کناری است، یعنی:

$$\left(\sqrt{2}\right)^2 = \log_{\alpha}^{(-\alpha+10)} \times \log_{(\alpha+2)}^{\alpha} \xrightarrow{\log_b^a = \frac{\log a}{\log b}} 2 = \frac{\log(-\alpha+10)}{\log \alpha} \times \frac{\log \alpha}{\log(\alpha+2)}$$

$$\Rightarrow 2 = \frac{\log(-\alpha+10)}{\log(\alpha+2)} \Rightarrow 2 = \log_{(\alpha+2)}^{(-\alpha+10)} \xrightarrow{\text{تعریف لگاریتم}} (\alpha+2)^2 = -\alpha+10$$

$$\Rightarrow \alpha^2 + 4\alpha + 4 = -\alpha + 10 \Rightarrow \alpha^2 + 5\alpha - 6 = 0 \Rightarrow \alpha = -6, 1$$

اگر مقادیر به دست آمده برای α را در $\log_{\alpha}^{(-\alpha+10)}$ و $\log_{(\alpha+2)}^{\alpha}$ چک کنیم، متوجه می شویم که هر دو مقدار به دست آمده، غیرقابل قبول است.



۱۴- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$(۰, ۰) \Rightarrow ۰ = a + b\left(\frac{۱}{۹}\right)^۰ \Rightarrow a + b = ۰ \quad (۱)$$

$$y = -۲ \xrightarrow{۲x - y - ۱ = ۰} x = -\frac{۱}{۲} \xrightarrow{\text{جایگذاری در } f} -۲ = a + b\left(\frac{۱}{۹}\right)^{-\frac{۱}{۲}}$$

$$\Rightarrow -۲ = a + ۳b \quad (۲)$$

$$۱, ۲ \Rightarrow \begin{cases} a + b = ۰ \\ a + ۳b = -۲ \end{cases} \Rightarrow b = -۱, a = ۱ \Rightarrow f(x) = ۱ - ۱\left(\frac{۱}{۹}\right)^x$$

$$f(x) = ۱ - ۳^{-۲x} \xrightarrow{\text{پیدا کردن ضابطه } f^{-1}} x = ۱ - ۳^{-۲y} \Rightarrow ۳^{-۲y} = ۱ - x$$

$$\xrightarrow[\text{در پایه ۳ می گیریم}]{\text{از طرفین لگاریتم}} \text{Log}_۳ ۳^{-۲y} = \text{Log}_۳ (۱ - x) \Rightarrow -۲y \times \text{Log}_۳ ۳ = \text{Log}_۳ (۱ - x)$$

$$\Rightarrow y = -\frac{۱}{۲} \text{Log}_۳ (۱ - x) \Rightarrow f^{-1}(x) = -\text{Log}_۳ \sqrt{۱ - x}$$

۱۵- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. چون جمعیت شهر، سالانه یک درصد کاهش می یابد، با یک دنباله هندسی با قدرنسبت $۱ - \frac{۱}{۱۰۰} = \frac{۹۹}{۱۰۰}$ مواجهیم. پس:

جمعیت فعلی
(اولیه)

جمعیت در سال t

$$A \times \left(\frac{۹۹}{۱۰۰}\right)^t = \frac{A}{۲} \Rightarrow \frac{۱}{۲} = \left(\frac{۹۹}{۱۰۰}\right)^t \xrightarrow{\text{از طرفین Log}} \text{Log} \left(\frac{۱}{۲}\right) = \text{Log} \left(\frac{۹۹}{۱۰۰}\right)^t$$

$$\text{Log } ۱ - \text{Log } ۲ = t \times \text{Log} \frac{۹۹}{۱۰۰} \Rightarrow ۰ - ۰/۳ = t(\text{Log } ۹۹ - \text{Log } ۱۰۰)$$

$$-۰/۳ = t(۱/۹۹۵ - ۲) \Rightarrow -۰/۳ = t \times (-۰/۰۰۵) \Rightarrow t = ۶۰ \text{ سال}$$



۱۶- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. در هر روز حجم محلول تغییر نمی‌کند، بلکه از غلظت ماده حل شده کم می‌گردد. بنابراین غلظت محلول، پس از هر روز $\frac{1}{25}$ معادل $0/04$ کم، یعنی $0/96$ برابر می‌شود:

$$C_n = C_1 \times (0/96)^n \Rightarrow \frac{C_n}{C_1} = (0/96)^n \quad (\text{مطابق فرض سوال}) \quad (0/96)^n = \frac{1}{3} \xrightarrow{\text{از طریق لگاریتم}}$$

$$n \log(0/96) = \log\left(\frac{1}{3}\right) \Rightarrow n(\log 96 - \log 100) = -\log 3$$

$$n(\log 3 \times 2^5 - 2) = -\log 3 \Rightarrow n = \frac{-\log 3}{\log 3 + 5 \log 2 - 2}$$

$$n = \frac{-0/48}{0/48 + 5(0/3) - 2} \Rightarrow n = 24 \text{ روز}$$

۱۷- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$y = x + 1 \quad \left\{ \begin{array}{l} \xrightarrow{\text{محل برخورد با محور } x \text{ ها}} A|_{-1} \Rightarrow 0 = \log_2(b-a) \Rightarrow b-a=1 \quad (1) \\ \xrightarrow{\text{محل برخورد با محور } x \text{ ها}} B|_1 \Rightarrow 1 = \log_2 b \Rightarrow b=2 \xrightarrow{\text{طبق ۱}} a=1 \end{array} \right.$$

$$f(x) = \log_2(x+2) \Rightarrow y = \log_2(x+2) \Rightarrow 2^y = x+2$$

$$2^y - 2 = x \xrightarrow{\text{تغییر نام متغیر}} f^{-1}(x) = 2^x - 2$$

$$\log(2^x + 1) - \log 2^{(x-2)} = 1$$

$$\log_{10} \frac{2^x + 1}{2^{x-2}} = 1 \Rightarrow \frac{2^x + 1}{2^{x-2}} = 10$$

$$(2^x)^2 + 1 = \left(2^x \times \frac{1}{4}\right) \times 10 \xrightarrow{2^x = t} t^2 + 1 = \frac{5}{2}t \Rightarrow 2t^2 - 5t + 2 = 0$$

$$\begin{cases} t=2 \Rightarrow 2^x=2 \Rightarrow x_1=1 \\ t=\frac{1}{2} \Rightarrow 2^x=2^{-1} \Rightarrow x_2=-1 \end{cases} \Rightarrow |x_1| + |x_2| = 1 + 1 = 2$$

۱۸- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.



«بانک سوال یاوران دانش»

۱۹- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\left. \begin{aligned} D_f: 4 - x^2 \geq 0 &\Rightarrow -2 \leq x \leq 2 \\ D_g = \{-3, -2, 0\} \end{aligned} \right\} \Rightarrow D_{(g-f) \times 2g} = D_f \cap D_g = \{-2, 0\}$$

$$((g-f) \times 2g)(-2) = (4 - 0) \times 2(4) = 32$$

$$((g-f) \times 2g)(0) = (7 - 2) \times 2(7) = 70$$

$$\text{مجموع مقادیر تابع موردنظر} = 70 + 32 = 102$$

$$\text{Log}_2(2^x + 4^x) = x + 4 \Rightarrow 2^x + 4^x = 2^{x+4}$$

۲۰- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$2^x + 4^x = 2^x \times 2^4 \Rightarrow 4^x - 16 \times 2^x + 48 = 0 \xrightarrow{\text{با فرض } 2^x = t} t^2 - 16t + 48 = 0$$

$$\Rightarrow (t - 12)(t - 4) = 0$$

$$\begin{cases} t = 12 \Rightarrow 2^x = 12 \Rightarrow x_1 = \text{Log}_2^{12} \\ t = 4 \Rightarrow 2^x = 2^2 \Rightarrow x_2 = 2 \end{cases}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \text{Log}_2^{12} \times 2 = \left(\text{Log}_2^{2^2 \times 3} \right) \times 2 = \left(2 + \text{Log}_2^3 \right) \times 2 = 4 + 2 \text{Log}_2^3$$

$$= \text{Log}_2^{2^4} + \text{Log}_2^{3^2} = \text{Log}_2^{2^4 \times 3^2} = \text{Log}_2^{144} \xrightarrow{a=144, b=2} \frac{a}{b} = \frac{144}{2} = 72$$

۲۱- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$f(a_1) + f(a_1 q) + f(a_1 q^2) + f(a_1 q^3) + f(a_1 q^4)$$

$$= \text{Log}_3^{a_1} + \text{Log}_3^{a_1 q} + \text{Log}_3^{a_1 q^2} + \text{Log}_3^{a_1 q^3} + \text{Log}_3^{a_1 q^4} = \text{Log}_3^{a_1^5 q^{10}} = 30$$

$$\Rightarrow 5 \text{Log}_3^{a_1} + 10 \text{Log}_3^q = 30 \xrightarrow{q=9} 5 \text{Log}_3^{a_1} + 10(2) = 30 \Rightarrow \text{Log}_3^{a_1} = 2 \Rightarrow a_1 = 9$$



۲۲- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\begin{cases} f(x) + g(x) = 3x \\ f(x) - g(x) = 2x^2 + 5x \end{cases}$$

$$2f(x) = 2x^2 + 8x \Rightarrow \boxed{f(x) = x^2 + 4x} \quad (1)$$

$$f(x) + g(x) = 3x \xrightarrow{\text{جاگذاری (1)}} 2x^2 + 4x + g(x) = 3x \Rightarrow \boxed{g(x) = -2x^2 - x} \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow (f \times g)(x) = (x^2 + 4x) \times (-2x^2 - x) = -2x^4 - 10x^3 - 4x^2$$

$$\begin{matrix} \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ a & b & c \\ \hline a+b+c = -18 \end{matrix}$$

۲۳- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$${}_3\log 3 + \log 3 = {}_3\log 3^2 \rightarrow {}_3\log 9 = {}_3\log 3^2$$

$${}_3\log 3^2 = {}_3\log x^2 \rightarrow x^2 = 3 \quad \begin{cases} x = \sqrt{3} = m \\ x = -\sqrt{3} \text{ غ ق} \end{cases}$$

$$\log_{\sqrt[3]{4}} m^3 = \log_{\sqrt[3]{4}} (\sqrt{3})^3 = \log_{\sqrt[3]{4}} 3^{\frac{3}{2}} = \log_{\sqrt[3]{4}} 3^{\frac{3}{2}} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{6}} \log_{\sqrt[3]{4}} 3 = 9$$

۲۴- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\left(-\frac{1}{3}, 0\right) \xrightarrow{\text{جاگذاری}} 0 = 2a\left(-\frac{1}{3}\right) + b - 4 \Rightarrow \frac{-a}{3} + b = 2$$

$$\frac{-a}{3} + b = 2 \Rightarrow \boxed{-a + 3b = 6} \quad (1)$$

$$(0, -2) \xrightarrow{\text{جاگذاری}} -2 = 2a(0) + b - 4 \Rightarrow -2 = 2b - 4$$

$$2b = 2 \rightarrow \boxed{b = 1} \xrightarrow{\text{طبق (1)}} \boxed{a = -3}$$

$$f(x) = 2^{-3x+1} - 4$$

$$f\left(-\frac{8}{3}\right) + f\left(\frac{1}{3}\right) = (2^9 - 4) + (2^0 - 4) = 508 + (-3) = 505$$



۲۵- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. مطابق تعریف ریشتر M و ارتباط آن با انرژی آزاد شده زلزله E در واحد ارگ (Erg):

$$\text{Log } E = 11/8 + 1/5 M \leftrightarrow E = 10^{11/8 + 1/5 M}$$

$$\begin{cases} \text{زلزله اصلی} \\ \text{پس لرزه} \end{cases} \begin{cases} E_1 = 10^{11/8 + 1/5 M_1} \\ E_2 = 10^{11/8 + 1/5 M_2} \end{cases} \Rightarrow \frac{E_1}{E_2} = 10^{1/5 (M_1 - M_2)}$$

$$M_1 - M_2 = 0/8 \Rightarrow \frac{E_1}{E_2} = 10^{1/5 \times 0/8} \Rightarrow \frac{E_1}{E_2} = 10^{1/2} \Rightarrow \frac{E_1}{E_2} = (10^{0/3})^4 = 2^4 = 16$$

$$\Rightarrow E_1 = 16 E_2$$

$$\left(\text{توجه: } 10^{0/3} = 2 \Rightarrow \text{Log}_{10} 2 = 0/3 \right)$$

۲۶- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. می دانیم:

$$\text{Log}_a A \geq m \xrightarrow[\text{جهت نامعادله عوض می شود}]{0 < a < 1} A \leq a^m$$

$$\text{Log}_{0/5} \frac{2x+3}{5} \geq -1 \Rightarrow \frac{2x+3}{5} \leq (0/5)^{-1} \Rightarrow \frac{2x+3}{5} \leq 2$$

$$2x+3 \leq 10 \Rightarrow x \leq \frac{7}{2} \quad (1)$$

$$\frac{2x+3}{5} > 0 \Rightarrow x > \frac{-3}{2} \quad (2)$$

$$\Rightarrow \text{مجموعه جواب} = \left(-\frac{3}{2}, \frac{7}{2} \right] \quad 1, 2$$

$$\begin{array}{ccc} & \swarrow & \searrow \\ a = \frac{-3}{2} & & b = \frac{7}{2} \\ & \searrow & \swarrow \\ & b - a = 5 & \end{array}$$



۲۷- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$(m, 12) \xrightarrow{\text{روی نمودار } f} 12 = 2^m \Rightarrow \text{Log}_2^{12} = \text{Log}_2^{2^m}$$

$$\text{Log}_2^{2^2 \times 3} = m \times \boxed{\text{Log}_2^2} \Rightarrow m = 2 \text{Log}_2^2 + \text{Log}_2^3 \Rightarrow \boxed{m = 2 + \text{Log}_2^3}$$

$$(36, n) \xrightarrow{\text{روی نمودار } g^{-1}} (n, 36) \xrightarrow{\text{روی نمودار } g} 36 = \left(\frac{1}{3}\right)^{-n}$$

$$\Rightarrow 36 = (3^{-1})^{-n} \Rightarrow 3^n = 36 \Rightarrow \text{Log}_3^{3^n} = \text{Log}_3^{36} \Rightarrow$$

$$n \times \boxed{\text{Log}_3^3} = \text{Log}_3^{2^2 \times 3^2} \Rightarrow \boxed{n = 2 \text{Log}_3^2 + 2}$$

$$(m-2)(n-2) = (2 + \text{Log}_2^3 - 2)(2 \text{Log}_3^2 + 2 - 2) = (\text{Log}_2^3)(2 \text{Log}_3^2) = 2$$

$$\left(\text{توجه: } \text{Log}_b^a = \frac{1}{\text{Log}_a^b} \right)$$

۲۸- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. حل معادلات جبری حاصل از ضابطه‌های دو تابع:

$$\text{Log}_x^{x^2} + 1 = \text{Log}(x+1) \xrightarrow{x > -1} \text{Log}_{10}^{x^2} + \text{Log}_{10}^{10} = \text{Log}_{10}^{(x+1)} \Rightarrow \text{Log}_{10}^{10x^2}$$

$$= \text{Log}_{10}^{(x+1)} \Rightarrow 10x^2 = x+1 \Rightarrow 10x^2 - x - 1 = 0 \Rightarrow \Delta = 41$$

$$\Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{41}}{20}$$

$$A \text{ نقطه} \leftarrow x_1 = \frac{1 - \sqrt{41}}{20} > -1 \quad B \text{ نقطه} \leftarrow x_2 = \frac{1 + \sqrt{41}}{20}$$



۲۹- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$4^x \times 4^1 - 4^x - 11 \times 4^x \times \frac{1}{4} = (2^2)^{(\sqrt{2}-1)} \Rightarrow 4^x \left(4 - 1 - \frac{11}{4} \right) = 4^{(\sqrt{2}-1)}$$

$$\left(4^x \times \frac{1}{4} = 4^{(\sqrt{2}-1)} \right) \times 4 \Rightarrow 4^x = 4^{\sqrt{2}} \Rightarrow x = \sqrt{2}$$

$$5^{x^2+1} + 5^{x^2} + 5^{x^2-1} = 5^3 + 5^2 + 5^1 = 155$$

«بانک سوال یاوران دانش»

۳۰- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

از طرفین، لگاریتم در مبنای ۳ می گیریم

$$3^x = 0.216 \Rightarrow 3^x = \frac{216}{1000} \Rightarrow 3^x = \frac{2^3 \times 3^3}{10^3}$$

$$\text{Log}_3 3^x = \text{Log}_3 \frac{2^3 \times 3^3}{10^3} \Rightarrow x = 3 \text{Log}_3 2 - 3 \text{Log}_3 10 + 3 \text{Log}_3 3$$

$$x = 3 + 3 \text{Log}_3 \frac{1}{10} \Rightarrow x = 3 - 3 \text{Log}_3 10 \Rightarrow \text{Log}_3 10 = \frac{3-x}{3} \Rightarrow \text{Log}_5 3 = \frac{-3}{x-3} \quad (1)$$

از طرفین، لگاریتم در مبنای ۵ می گیریم

$$5^{f(x)} = 675 \xrightarrow{\text{از طرفین، لگاریتم در مبنای ۵ می گیریم}} \text{Log}_5 5^{f(x)} = \text{Log}_5 675 \Rightarrow f(x) = \text{Log}_5 5^2 \times 3^3$$

طبق (۱)

$$\Rightarrow f(x) = 2 + 3 \text{Log}_5 3 \xrightarrow{\text{طبق (۱)}} f(x) = 2 + 3 \left(\frac{-3}{x-3} \right) \Rightarrow f(x) = \frac{2x-15}{x-3}$$

$$f(2) - f(4) = 11 - (-7) = 18$$

۳۱- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

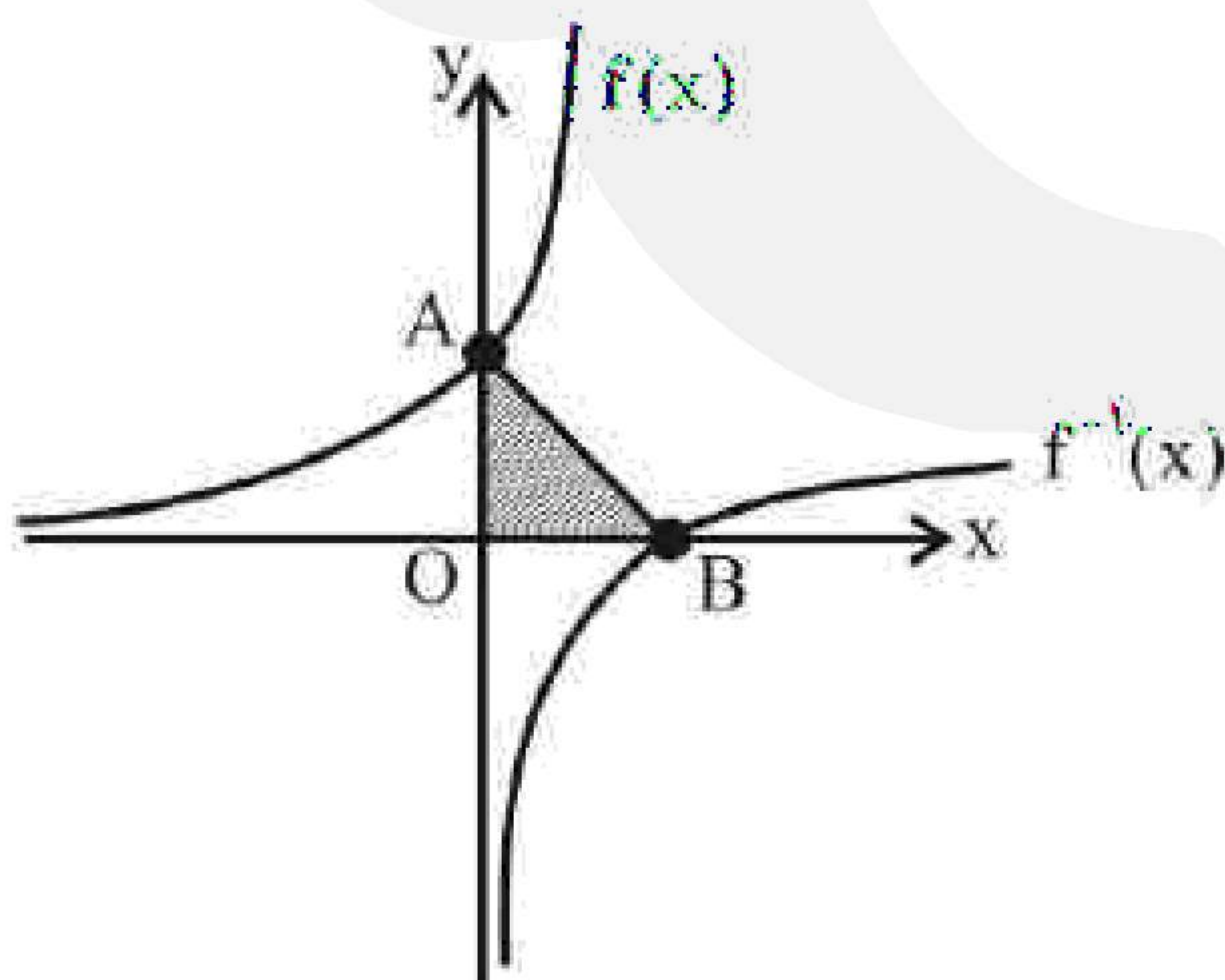
محل برخورد با محور y ها برای $f(x)$:

$$x = 0 \Rightarrow y = (\sqrt{6})^{0+4} = 36 \Rightarrow A(0, 36)$$

چون در تابع $f^{-1}(x)$ نسبت به $f(x)$ فقط جای x و y عوض می شود، بنابراین محل برخورد تابع وارون با محور x ها برای

$f^{-1}(x)$ برابر است با: $B(36, 0)$

$$S_{\triangle AOB} = \frac{OA \times OB}{2} = \frac{36 \times 36}{2} = 648$$





۳۲- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. هر تابع با ضابطه $f(x) = a^x$ که در آن a عددی مثبت و مخالف یک است را یک تابع نمایی می‌نامیم:

$$\begin{cases} \frac{2a-3}{a+2} > 0 \Rightarrow (-\infty, -2) \cup \left(\frac{3}{2}, +\infty\right) \\ \frac{2a-3}{a+2} \neq 1 \Rightarrow a \neq 5 \end{cases}$$

$$f(x) \text{ برای } a \text{ مقادیر } (-\infty, -2) \cup \left(\frac{3}{2}, +\infty\right) - \{5\} \text{ مجموعه مقادیر } a \text{ برای نمایی بودن } f(x)$$

این مجموعه شامل ۵ عدد صحیح ۲- و ۱- و ۰ و ۱ و ۵ نیست که به ازای آن‌ها $f(x)$ تابع نمایی نیست.

۳۳- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. چون $\log_b^a = \frac{1}{\log_a^b}$ بنابراین $\log_b^a \times \log_a^b = 1$.

برای حل معادله، دو طرف آن را در $\log_x^{12} \cdot \log_x^3$ ضرب می‌کنیم:

$$\underbrace{\log_x^3 \left(\log_x^3 \cdot \log_x^{12} \right)}_{=1} + \underbrace{\log_x^{12} \left(\log_x^3 \cdot \log_x^{12} \right)}_{=1} = 2 \underbrace{\log_x^3 \cdot \log_x^3}_{=1} \cdot \underbrace{\log_x^{12} \cdot \log_x^{12}}_{=1}$$

$$\log_x^{12} + \log_x^3 = 2 \Rightarrow \log_x^{12 \times 3} = 2 \Rightarrow x^2 = 36 \begin{cases} x = 6 \Rightarrow \alpha = 6 \\ \text{غ ق ق} \\ x = -6 \end{cases}$$

$$\log_{\sqrt[2]{32}}^{2\alpha+4} = \log_{\frac{5}{2}}^{\frac{2(6)+4}{2}} = \log_{\frac{5}{2}}^{\frac{4}{2}} = \frac{4}{\frac{1}{5}} \log_{\frac{5}{2}}^{\frac{1}{5}} = \frac{28}{5} = 5\frac{3}{5}$$



۳۴- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. از طرفین رابطه فرض، لگاریتم در پایه ۴ می‌گیریم:

$$\text{Log}_4 a^2 b^3 = \text{Log}_4 256 \Rightarrow \text{Log}_4 a^2 + \text{Log}_4 b^3 = 4 \Rightarrow 2 \text{Log}_4 a + 3 \text{Log}_4 b = 4$$

حالا عبارت حکم را ساده‌تر می‌کنیم:

$$\text{Log}_4 a^2 \times \text{Log}_4 b^3 = (2 \text{Log}_4 a) \times (3 \text{Log}_4 b) = 6 \text{Log}_4 a \times \text{Log}_4 b$$

می‌خواهیم این عبارت ماکزیمم شود، به عبارتی می‌خواهیم $\text{Log}_4 a \times \text{Log}_4 b$ ماکزیمم شود، برای این منظور کافی

است در عبارت فرض، عدد ۴ را به طور مساوی بین $\text{Log}_4 a$ ، $\text{Log}_4 b$ توزیع کنیم:

$$\begin{cases} 2 \text{Log}_4 a = 2 \Rightarrow \text{Log}_4 a = 1 \\ 3 \text{Log}_4 b = 2 \Rightarrow \text{Log}_4 b = \frac{2}{3} \end{cases}$$

$$6 \text{Log}_4 a \times \text{Log}_4 b = 6(1) \left(\frac{2}{3}\right) = 4$$

پس:

۳۵- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. معادله را به صورت ساده‌تری می‌نویسیم:

$$\left(\text{Log}_3 (x^4)\right)^2 = \text{Log}_3 (x^{20}) - \text{Log}_3 1 \Rightarrow \left(4 \text{Log}_3 x\right)^2 = 20 \text{Log}_3 x - 4$$

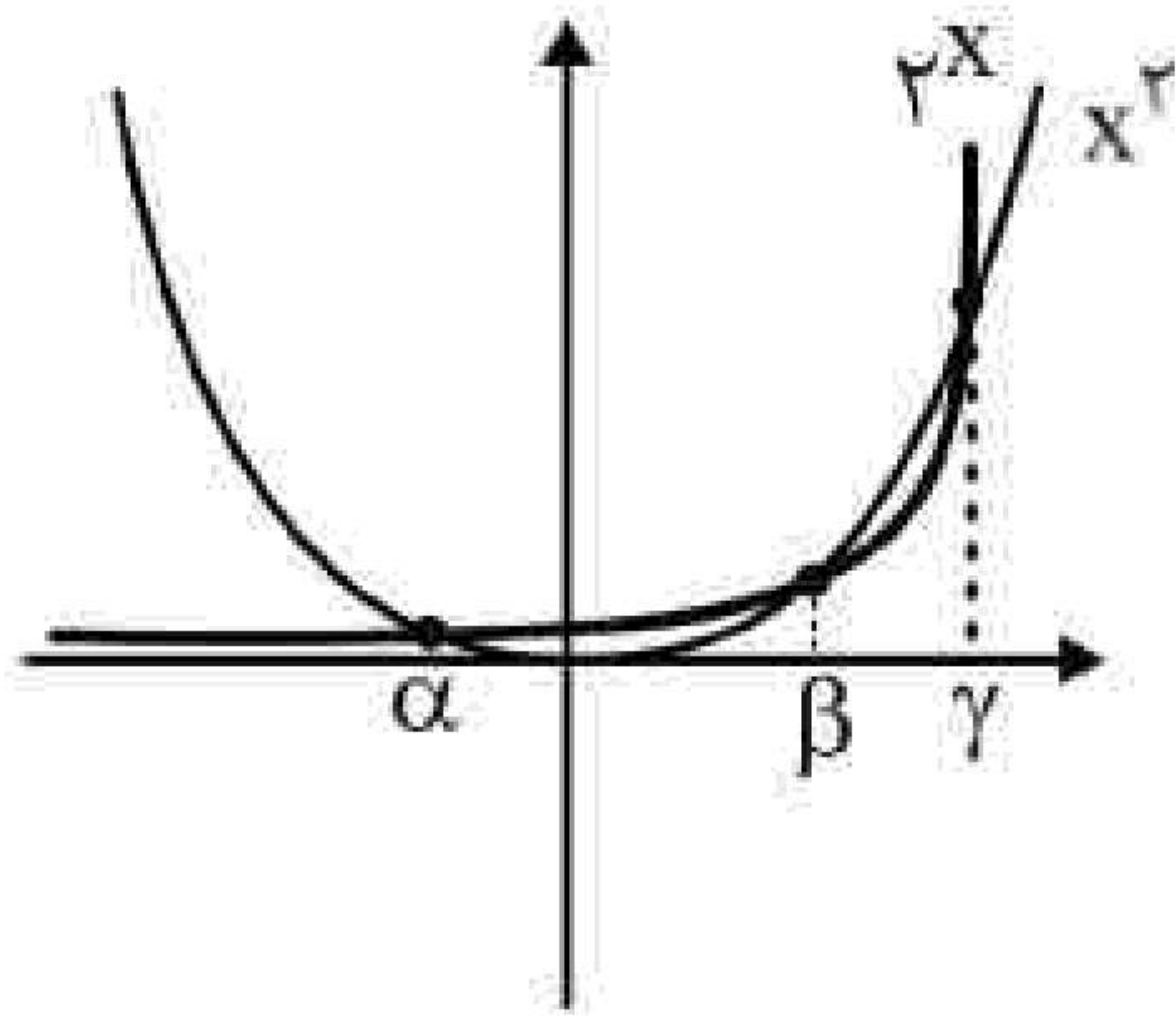
$$\Rightarrow 16 \left(\text{Log}_3 x\right)^2 - 20 \text{Log}_3 x + 4 = 0$$

با تغییر متغیر $\text{Log}_3 x = t$ داریم:

$$16t^2 - 20t + 4 = 0 \Rightarrow t = 1, \frac{1}{4} \Rightarrow \begin{cases} \text{Log}_3 x = 1 \Rightarrow x = 3 \\ \text{Log}_3 x = \frac{1}{4} \Rightarrow x = 3^{\frac{1}{4}} \end{cases}$$

هر دو جواب در دامنه لگاریتم‌ها قرار داشته و قابل قبول‌اند. پس حاصل ضرب جواب‌ها برابر است با:

$$3 \times 3^{\frac{1}{4}} = 3\sqrt[4]{3}$$



۳۶- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. منظور از صفرهای تابع f ، ریشه‌های معادله $f(x) = 0$ هستند. پس داریم:

$$2^x - x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 2^x$$

نمودار دو طرف معادله را رسم می‌کنیم:

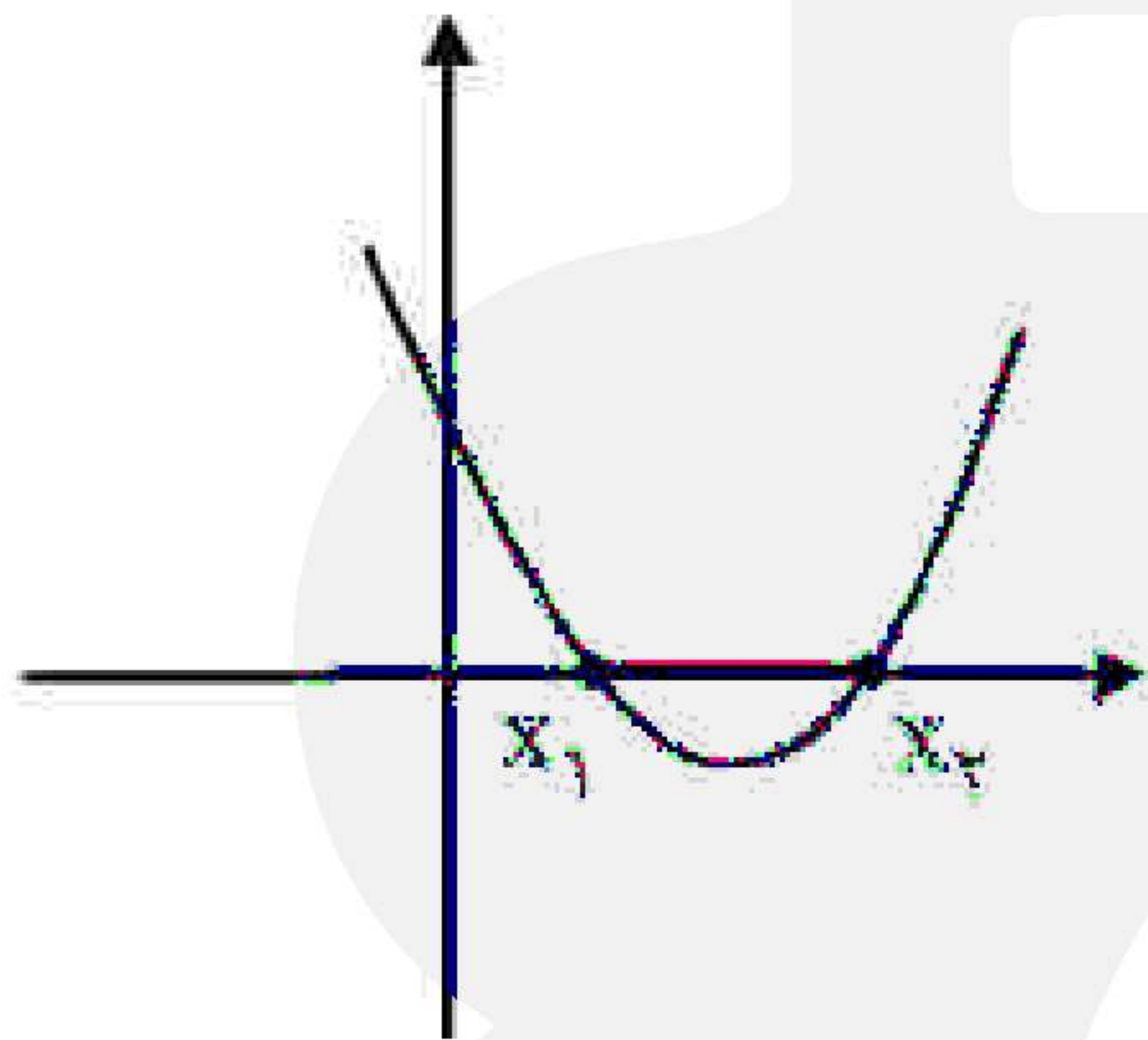
با توجه به نمودار، این معادله سه ریشه به صورت‌های زیر دارد:

$$\begin{cases} \alpha = -1 \\ \beta = 2 \\ \gamma = 4 \end{cases}$$

عددی بین صفر و ۱

پس $\left[\gamma + \frac{1}{\gamma}\right] = 4$ و $[\alpha] = -1$ است و $g(x) = 2x^2 - 4x + 1$

منظور از طول پاره‌خطی که نمودار $g(x)$ بر روی محور x ها جدا می‌کند، همان فاصله بین صفرهای این تابع یا در واقع همان تفاضل ریشه‌های معادله $g(x) = 0$ است:



$$\begin{aligned} x_2 - x_1 &= \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = \frac{\sqrt{(-4)^2 - 4(2)(1)}}{2} = \frac{\sqrt{8}}{2} \\ &= \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \end{aligned}$$



۳۷- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. تابع درجه دو هرگز بر روی R یک به یک و وارون پذیر نیست. یعنی این تابع نمی تواند درجه دو باشد:

بنابراین با تابع خطی $f(x) = (n+1)x - 4 - n + 2k$ طرفیم.
می دانیم تلاقی تابع خطی و وارونش حتماً روی خط $y = x$ قرار دارد، مگر تابع خطی با شیب -1 که خودش و وارونش برابر بوده و بی شمار نقطه تلاقی دارند.

در اینجا چون نقطه تلاقی $(-1, 7)$ است که روی خط $y = x$ نیست، نتیجه می گیریم این تابع خطی دارای شیب -1 بوده و در تمام نقاط واقع بر آن، از جمله در $(-1, 7)$ وارونش را قطع می کند. پس:

$$-1 \Rightarrow n+1 = -1 \Rightarrow n = -2$$

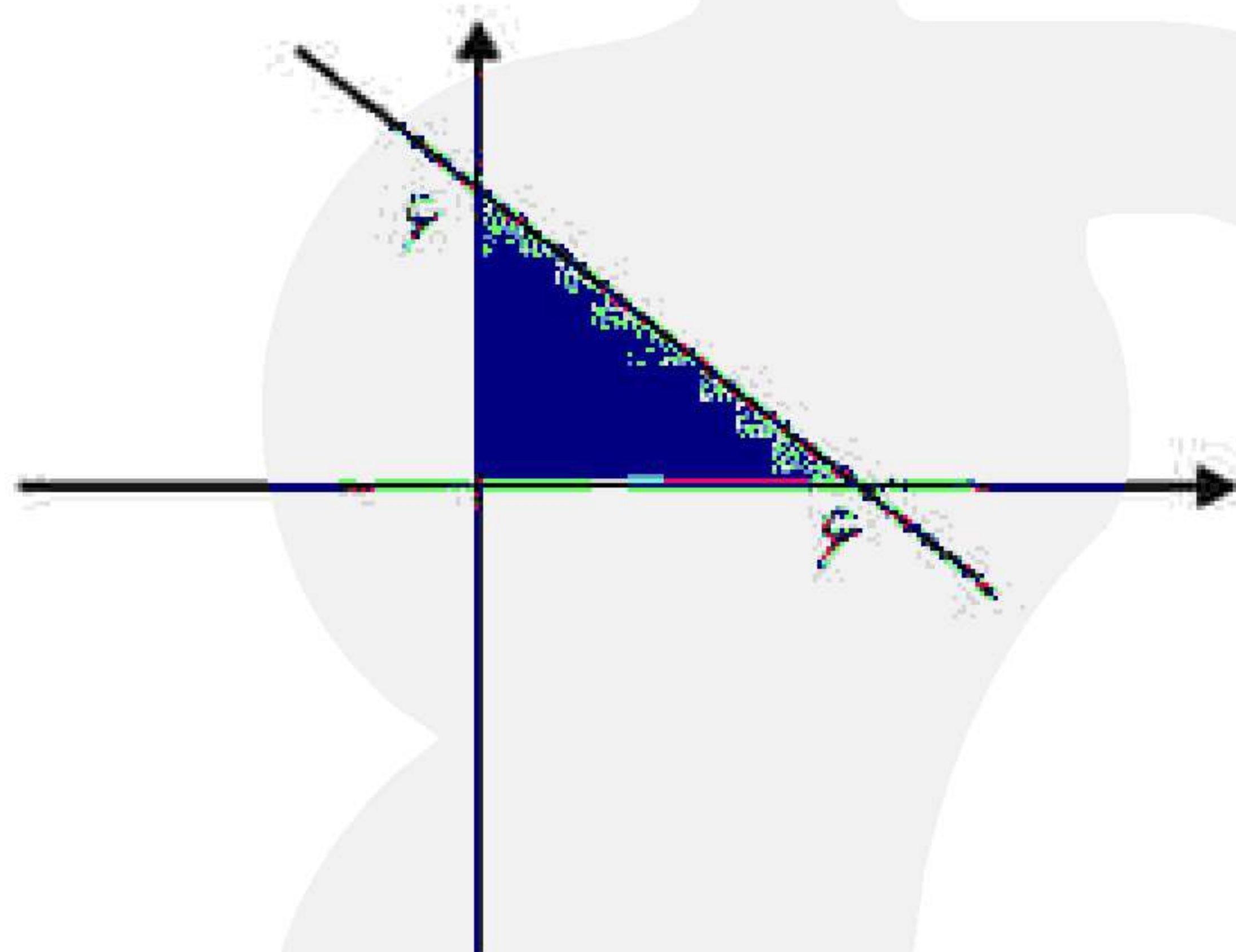
$$f(x) = (n+1)x - 4 - n + 2k \xrightarrow{n=-2} -x - 4 - (-2) + 2k \Rightarrow f(x) = -x - 2 + 2k$$

$$7 = -(-1) - 2 + 2k \Rightarrow 2k = 8 \Rightarrow k = 4$$

حالا نقطه $(-1, 7)$ را در آن صدق می دهیم:

$$f(x) = -x - 2 + 2k \xrightarrow{k=4} -x - 2 + 8 \Rightarrow f(x) = -x + 6$$

چون f و f^{-1} با هم برابرند، پس:



$$f^{-1}(x) = -x + 6$$

$$s = \frac{6 \times 6}{2} = 18$$



۳۸- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\begin{aligned} f'(x)g(x) + \frac{1}{g(x)} &= g'(x)f(x) + \frac{1}{f(x)} \xrightarrow{\text{مخرج مشترک}} \frac{f'(x)g'(x) + 1}{g(x)} \\ &= \frac{g'(x)f'(x) + 1}{f(x)} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} f''(x)g'(x) + f(x) = g''(x)f'(x) + g(x) \\ \Rightarrow f''(x)g'(x) - g''(x)f'(x) + f(x) - g(x) &= 0 \\ \Rightarrow f'(x)g'(x)(f(x) - g(x)) + (f(x) - g(x)) &= 0 \Rightarrow (f(x) - g(x))(f'(x)g'(x) + 1) = 0 \\ \Rightarrow \begin{cases} f(x) - g(x) = 0 \Rightarrow f(x) = g(x) \\ f'(x)g'(x) + 1 = 0 \Rightarrow (f(x)g(x))' = -1 \end{cases} \end{aligned}$$

پس توابع f و g باید برابر باشند.

از آنجا که نقطه مرکزی $g(x)$ ، $x = 2$ است، پس ریشه قدرمطلق $f(x)$ هم $x = 2$ و لذا $m = -2$ است پس:

$$f(x) = x + |x - 2| = \begin{cases} 2x - 2 & x \geq 2 \\ 2 & x < 2 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} \frac{ax^2 + bx - 4}{x + c} & x \geq 2 \\ dx + e & x < 2 \end{cases}$$

حالا از مقایسه این تابع با $g(x)$ داریم:

$$\text{اولا: } \frac{ax^2 + bx - 4}{x + c} = 2x - 2 \Rightarrow ax^2 + bx - 4 = 2x^2 + (2c - 2)x - 2c$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 2c - 2 \\ -4 = -2c \Rightarrow c = 2 \Rightarrow b = 2 \end{cases}$$

$$\text{ثانیا: } dx + e = 2 \Rightarrow \begin{cases} d = 0 \\ e = 2 \end{cases}$$

حالا باید طول پاره‌خطی که سهمی $h(x) = 2x^2 + 2x - 2$ بر روی محور x ها جدا می‌کند را به دست بیاوریم. منظور از آن، همان فاصله بین صفرهای تابع $h(x)$ یا در واقع همان تفاضل ریشه‌ها در معادله $h(x) = 0$ است:

$$\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = \frac{\sqrt{(2)^2 - 4(2)(-2)}}{2} = \frac{\sqrt{20}}{2} = \sqrt{5}$$

۳۹- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. از آنجا که در $x > 0$ نمودار g بالاتر از نمودار f قرار گرفته، پس:

از طرفی نمودار h یک نمودار نمایی کاهشی است ($0 < b < 1$) و از آنجا که قرینه نمودار $f(x) = 5^x$ نسبت به

$$a + b = a + \frac{1}{5} > 5 + \frac{1}{5}$$

محور y ها است، $h(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^x$ بوده و $b = \frac{1}{5}$ ، بنابراین:

تنها گزینه‌ای که در این شرط صدق می‌کند، گزینه ۴ است.



۴۰- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$(۱) (۱, ۱) \Rightarrow ۱ = \log_C (a + b)$$

$$(۲) (-۱, ۰) \Rightarrow ۰ = \log_C (-a + b) \quad c > ۰, c \neq ۱$$

$$(۳) ax + b > ۰ \xrightarrow{D_f = (-۲, +\infty)} x > -\frac{b}{a}, a > ۰ \Rightarrow \frac{-b}{a} = -۲ \Rightarrow b = ۲a$$

$$۱, ۳ \Rightarrow a + b = c \Rightarrow ۳a = c$$

$$۲, ۳ \Rightarrow -a + b = c \Rightarrow -a + ۲a = ۱ \Rightarrow a = ۱ \quad c = ۳ \quad b = ۲$$

$$f(x) = \log_3 (x + ۲)$$

$$f(۲۴۱) = \log_3 ۲۴۳ = ۵$$

۴۱- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\log_x ۳(۲x + ۹) = ۲ \Rightarrow x^2 = ۶x + ۲۷ \Rightarrow x^2 - ۶x - ۲۷ = ۰$$

$$(x - ۹)(x + ۳) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۹ \\ x = -۳ \end{cases}$$

$$\log_{\frac{1}{5}} (15x - ۷) = \log_{\frac{1}{5}} (138) = \log_{\frac{1}{5}} 3^5 = \frac{5}{\frac{1}{5}} \log_5 3 = \frac{5}{\frac{1}{5}} = ۲۵$$

«بانک سوال یاوران دانش»

۴۲- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\log_{\frac{۰}{۲}} (۲ - x) = (۰/۵)^{-۱} = ۲ \Rightarrow ۲ - x = (۰/۲)^2 \Rightarrow ۲ - x = ۰/۰۴ \Rightarrow x = ۱/۹۶$$

$$\log_{\sqrt[۳]{۳}} (۱۰۰x - ۱۶۹) = \log_{\sqrt[۳]{۳}} ۲۷ = \log_{\sqrt[۳]{۳}} 3^3 = \frac{3}{\frac{1}{3}} \log_3 3 = ۹$$

۴۳- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. نمودار تابع $y = a^x$ یک واحد به بالا حرکت کرده است.

$$a - ۱ = ۱ \Rightarrow a = ۲$$

$$(۰, ۲) \in f \Rightarrow ۲ = ۱ + ۲^{b-۰} \Rightarrow ۲^b = ۱ \Rightarrow b = ۰$$

$$a + b = ۲ + ۰ = ۲$$



۴۴- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\left. \begin{aligned} (0, 2) \in f &\Rightarrow 2 = a + 3^{b-0} \Rightarrow a + 3^b = 2 \\ (-1, 4) \in f &\Rightarrow 4 = a + 3^{b+1} \Rightarrow a + 3(3^b) = 4 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 2(3^b) = 2 \Rightarrow 3^b = 1 \Rightarrow b = 0$$

$$a = 2 - 1 = 1 \Rightarrow a + b = 1 + 0 = 1$$

$$S_{\triangle} = \frac{|f(2) + f(5)| \times (5 - 2)}{2} = 6$$

۴۵- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$|f(2) + f(5)| = 4 \xrightarrow[\substack{\text{مطابق نمودار} \\ f(5) < 0, f(2) < 0}}{f(2) + f(5) = -4}$$

$$\log_a 2 + \log_a 5 = -4 \Rightarrow \log_a 10 = -4 \Rightarrow a^{-4} = 10$$

$$a = 10^{-\frac{1}{4}} \Rightarrow f(0.001) = \log_a (0.001) = \log_{10^{-\frac{1}{4}}} 10^{-3} = 12$$

۴۶- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

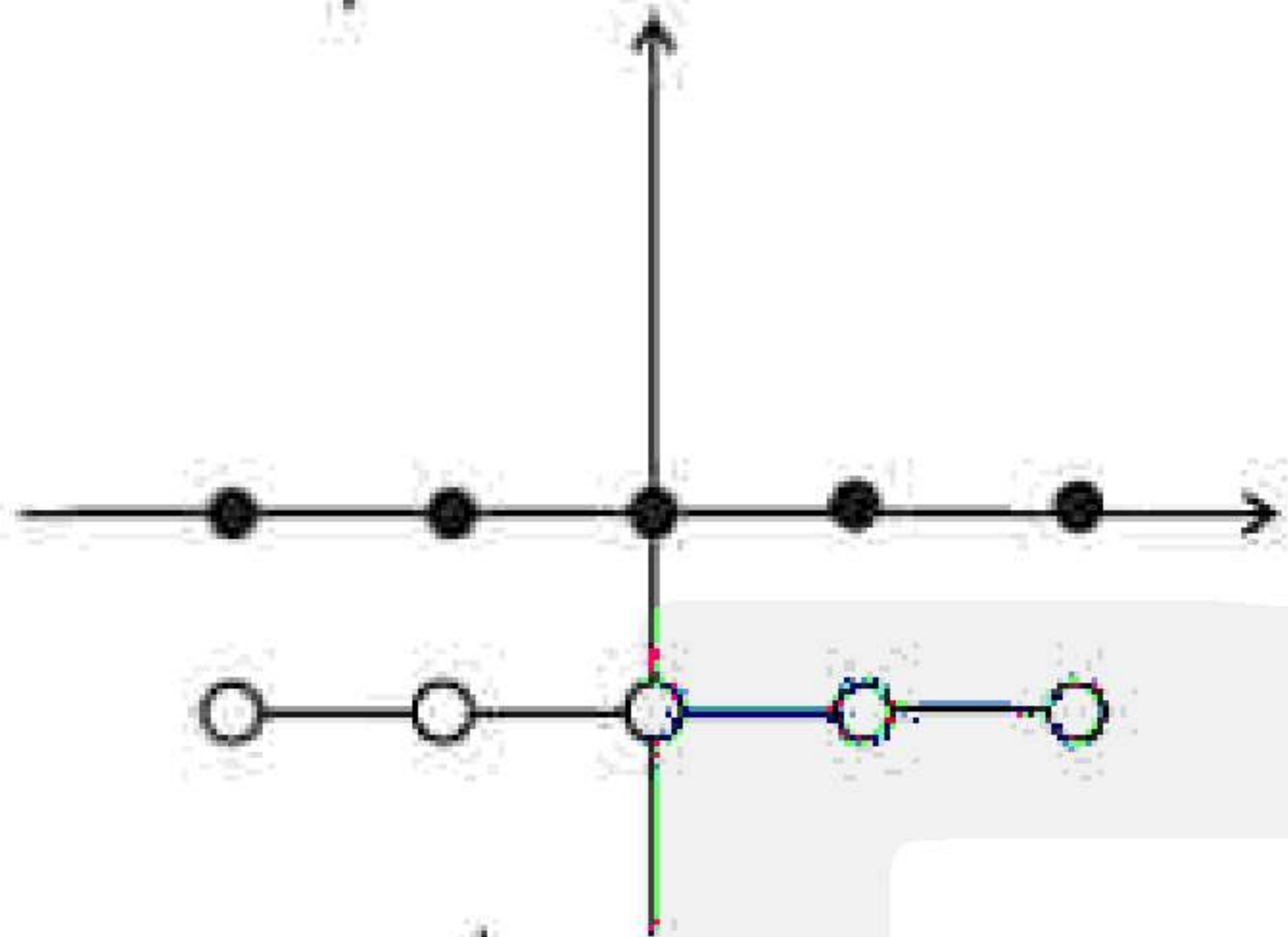
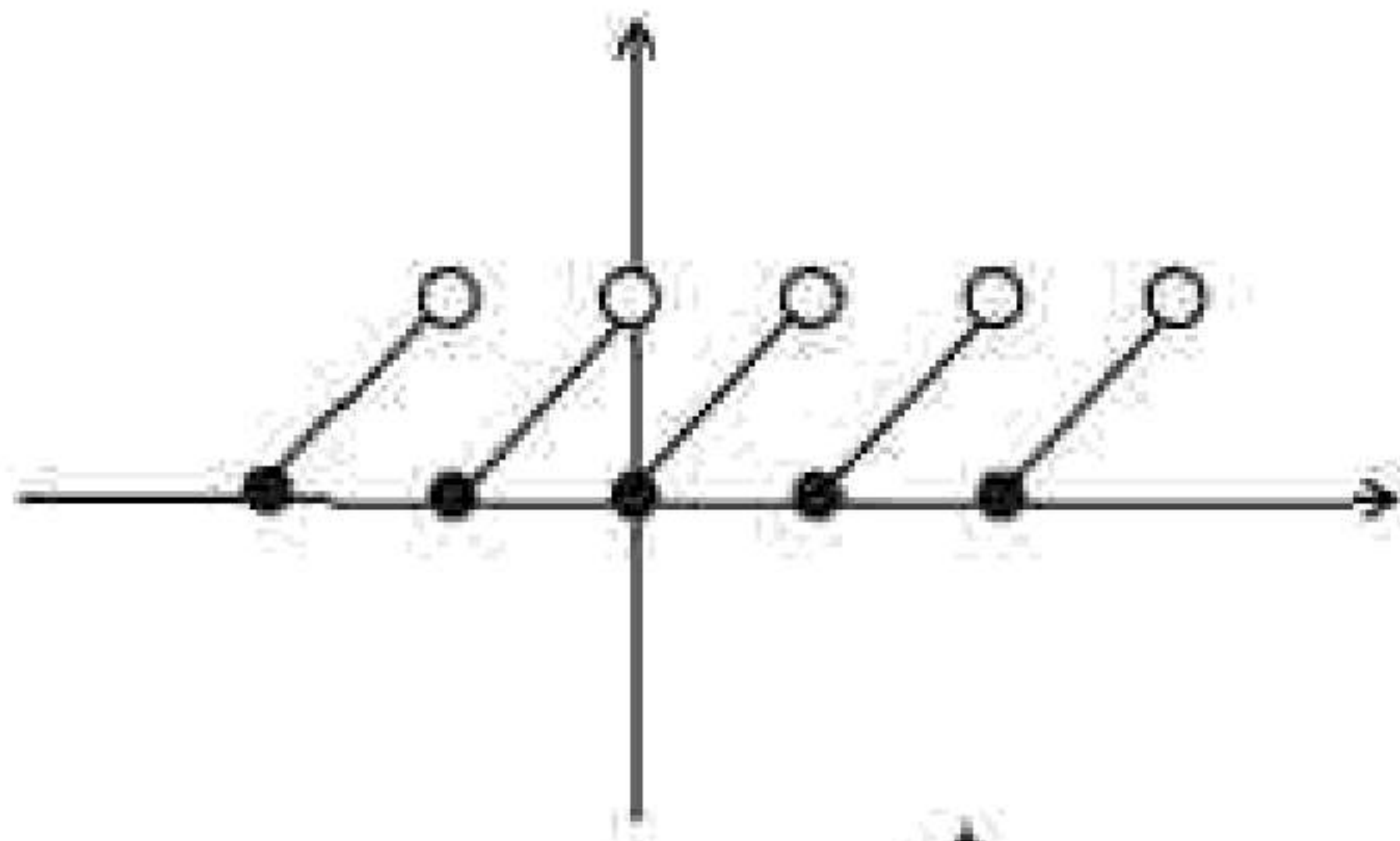
$$0 = 2^{a\left(-\frac{1}{3}\right) + b} - 4 \Rightarrow 2^{\frac{-a}{3} + b} = 2^2 \Rightarrow \frac{-a}{3} + b = 2 \Rightarrow -a + 3b = 6$$

$$-2 = 2^{a(0) + b} - 4 \Rightarrow 2 = 2^b \Rightarrow b = 1 \Rightarrow a = -3$$

$$f(x) = 2^{-3x+1} - 4 \Rightarrow f\left(-\frac{7}{3}\right) = 2^8 - 4 = 252$$



۴۷- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

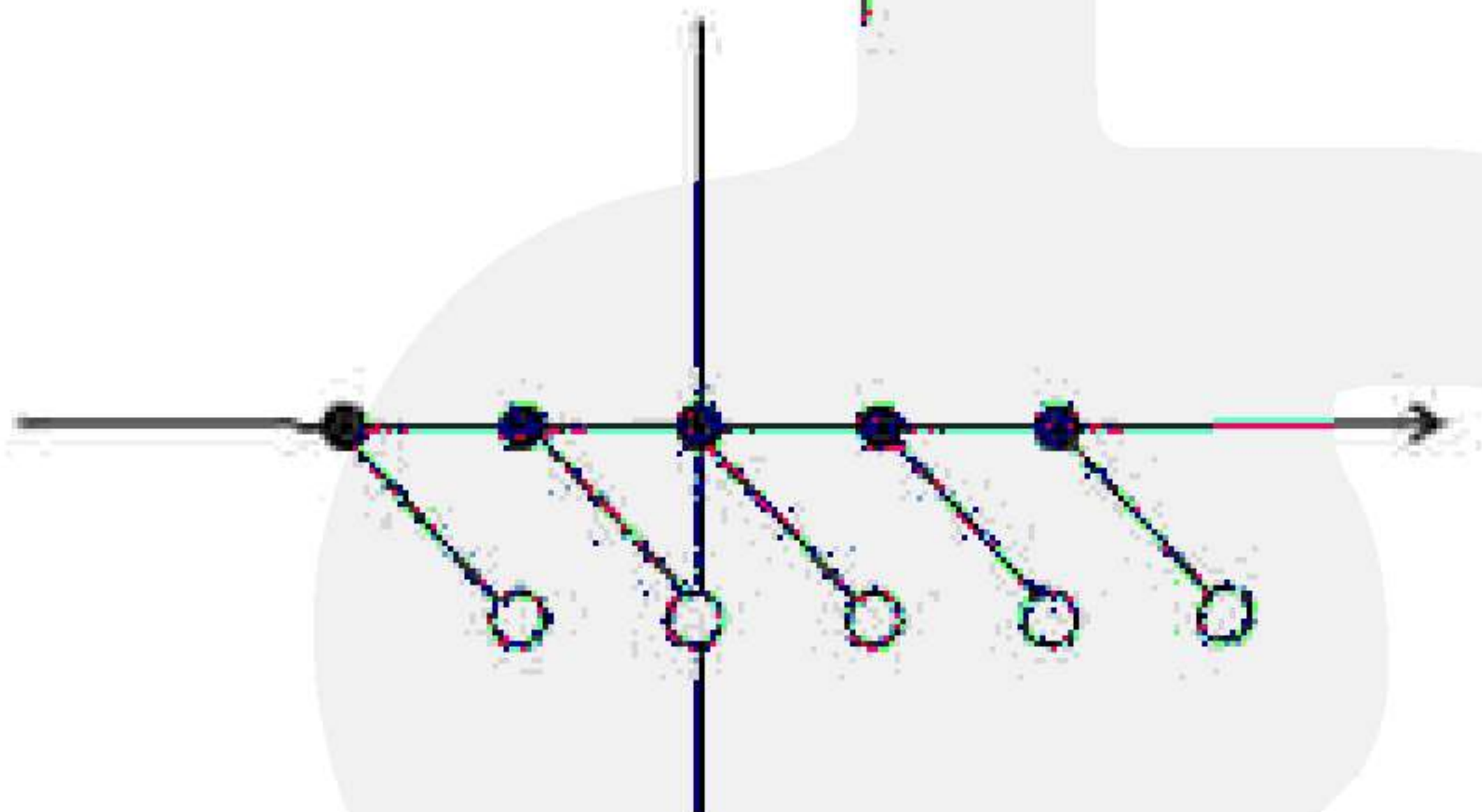


$$f(x) = x - [x] \Rightarrow \begin{cases} x - [x] = 0, & x \in \mathbb{Z} \\ 0 < x - [x] < 1, & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

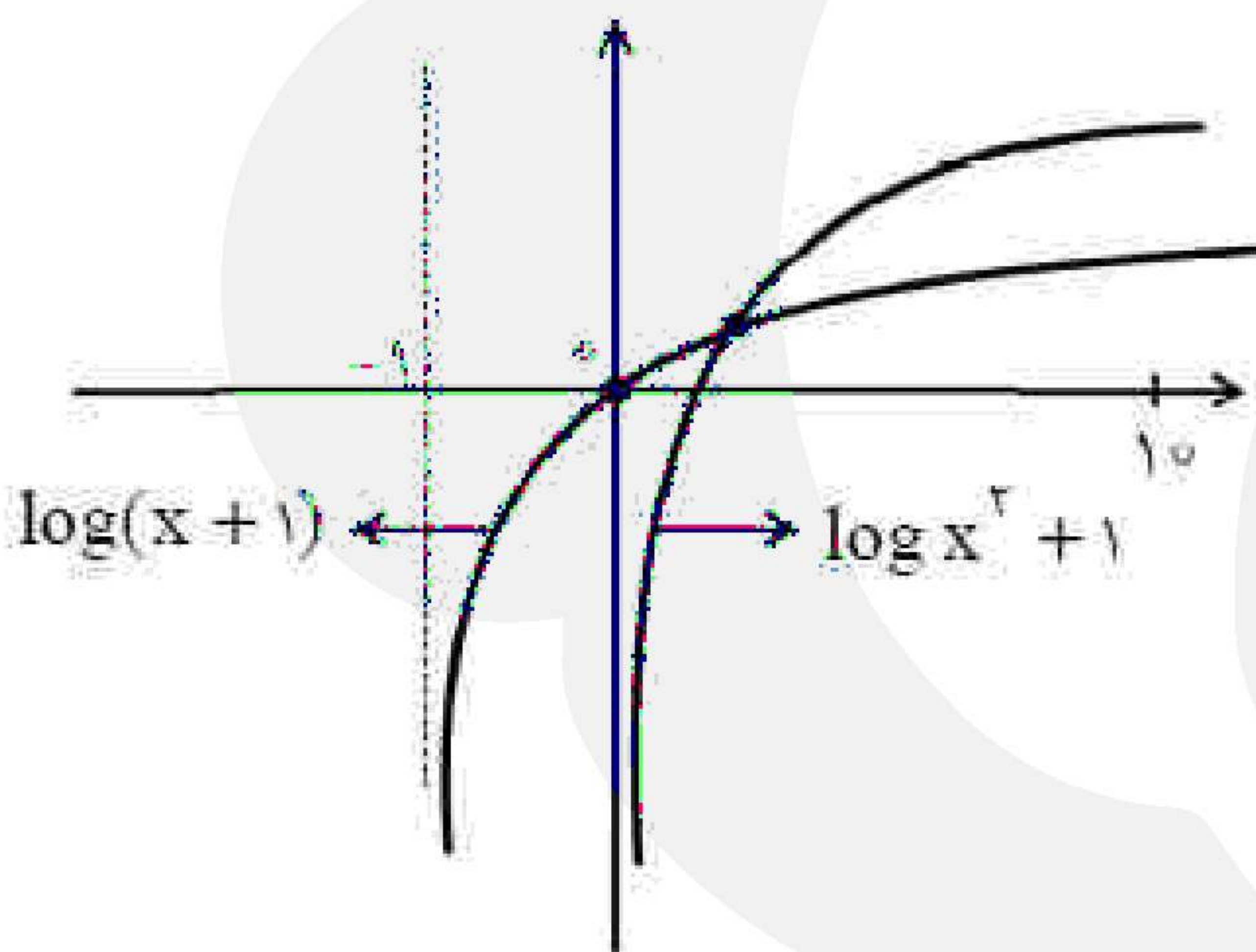
$$g(x) = [x] + [-x] \Rightarrow [x] + [-x] = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{Z} \\ -1, & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$(f - g)(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{Z} \\ -1 < [x] - x < 0, & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$(f \times g)(x) = [x] - x$$



۴۸- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.



$$f(x) = 2 \log x + 1$$

$$y = 10^x - 1 \Rightarrow 10^x = y + 1$$

$$x = \log_{10} (y + 1) \Rightarrow g^{-1}(x) = \log(x + 1)$$

$$\log_{\frac{1}{4}} a = 8 \Rightarrow \log_{\frac{1}{4}} a = \frac{1}{\frac{1}{8}} \Rightarrow \frac{1}{\frac{1}{4}} \log_{\frac{1}{4}} a = \frac{1}{\frac{1}{8}} \Rightarrow \log_{\frac{1}{4}} a = \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{\log_{\frac{1}{4}} (\log_{\frac{1}{4}} a)} = \frac{1}{\log_{\frac{1}{4}} \frac{1}{4}} = \frac{1}{2 \log_{\frac{1}{4}} \frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$$

۴۹- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.



۵۰- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$f(x) = \sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} = \sqrt{(1 + \sqrt{x-1})^2} = 1 + \sqrt{x-1}, x \geq 1$$

$$g(x) = \sqrt{x - 2\sqrt{x-1}} = \sqrt{(1 - \sqrt{x-1})^2} = 1 - \sqrt{x-1}$$

$$1 - \sqrt{x-1} \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x-1} \leq 1 \Rightarrow x-1 \leq 1 \Rightarrow x \leq 2$$

$$f(x) + g(x) = 1 + \sqrt{x-1} + 1 - \sqrt{x-1} = 2$$

