

گنجینه سوال رایگان  
+ پاسخ تشریحی

یاوران دانش



راه های ارتباطی با ما:

[www.Dyavari.com](http://www.Dyavari.com)

۰۲۱-۷۶۷۰۳۸۵۸

۰۹۱۲-۳۴ ۹۴ ۱۳۴





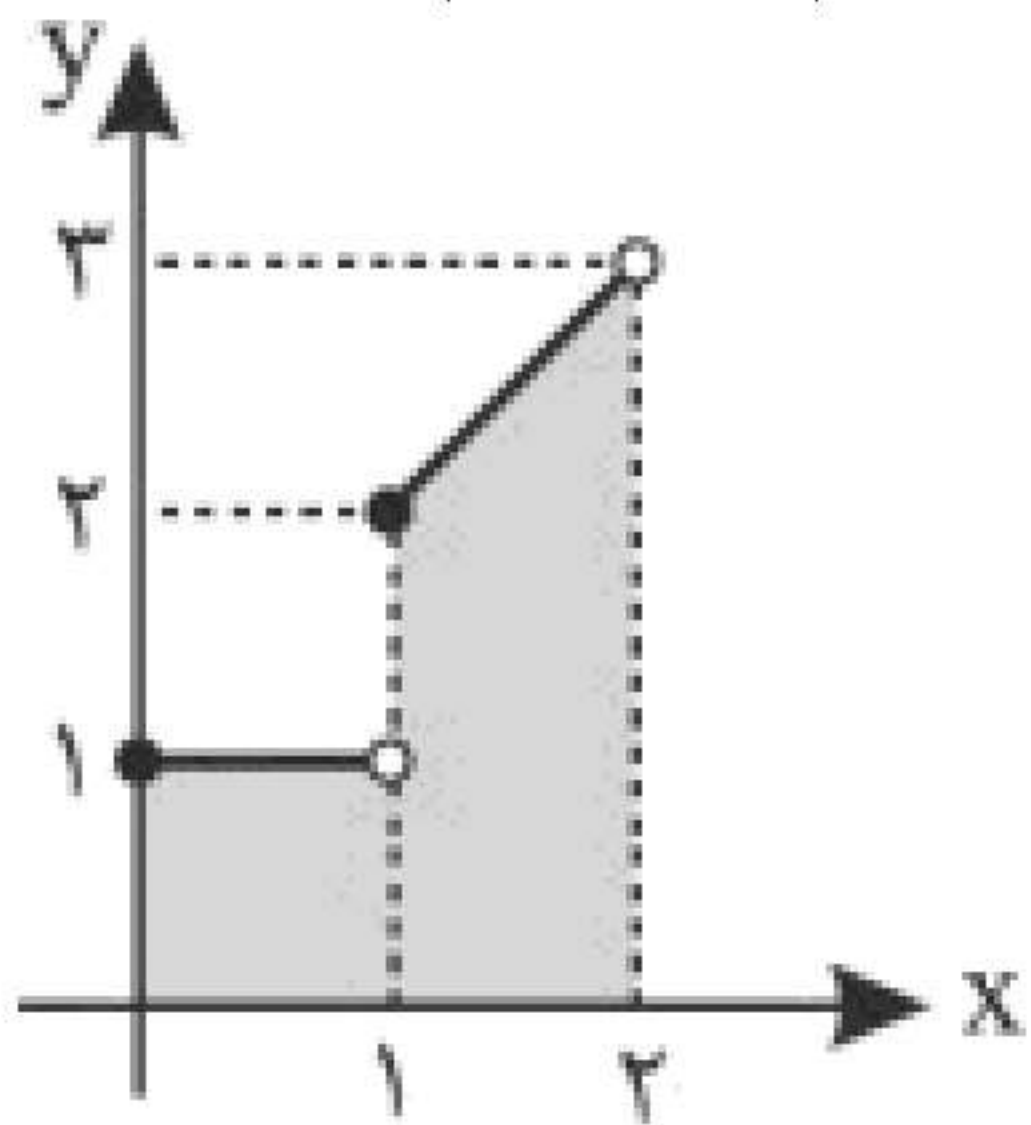
- |      | ۱                                   | ۲                                   | ۳                                   | ۴                                   |
|------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|
| ۱ -  | <input type="checkbox"/>            | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            |
| ۲ -  | <input type="checkbox"/>            | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            |
| ۳ -  | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            |
| ۴ -  | <input type="checkbox"/>            | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            |
| ۵ -  | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input checked="" type="checkbox"/> |
| ۶ -  | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            |
| ۷ -  | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            |
| ۸ -  | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            |
| ۹ -  | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input checked="" type="checkbox"/> |
| ۱۰ - | <input type="checkbox"/>            | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            |
| ۱۱ - | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input checked="" type="checkbox"/> |
| ۱۲ - | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            |
| ۱۳ - | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            |
| ۱۴ - | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            |
| ۱۵ - | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            |
| ۱۶ - | <input type="checkbox"/>            | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            |
| ۱۷ - | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            |
| ۱۸ - | <input type="checkbox"/>            | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            |
| ۱۹ - | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input checked="" type="checkbox"/> |
| ۲۰ - | <input type="checkbox"/>            | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            |
| ۲۱ - | <input type="checkbox"/>            | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            |
| ۲۲ - | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            |
| ۲۳ - | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            |
| ۲۴ - | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            |
| ۲۵ - | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input checked="" type="checkbox"/> |
| ۲۶ - | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            |
| ۲۷ - | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input checked="" type="checkbox"/> |
| ۲۸ - | <input type="checkbox"/>            | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            |
| ۲۹ - | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input checked="" type="checkbox"/> |
| ۳۰ - | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            |
| ۳۱ - | <input type="checkbox"/>            | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            |
| ۳۲ - | <input type="checkbox"/>            | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            |
| ۳۳ - | <input type="checkbox"/>            | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            |
| ۳۴ - | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input checked="" type="checkbox"/> |

- |      | ۱                                   | ۲                                   | ۳                                   | ۴                                   |
|------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|
| ۳۵ - | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            |
| ۳۶ - | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            |
| ۳۷ - | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            |
| ۳۸ - | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            |
| ۳۹ - | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input checked="" type="checkbox"/> |
| ۴۰ - | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            |
| ۴۱ - | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            |
| ۴۲ - | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input checked="" type="checkbox"/> |
| ۴۳ - | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input checked="" type="checkbox"/> |
| ۴۴ - | <input type="checkbox"/>            | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            |
| ۴۵ - | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            |
| ۴۶ - | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input checked="" type="checkbox"/> |
| ۴۷ - | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            |
| ۴۸ - | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            |
| ۴۹ - | <input type="checkbox"/>            | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            |
| ۵۰ - | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            |





۱- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. با در نظر گرفتن محدوده‌های زیر، تابع را ساده کرده و نمودار آن را رسم می‌کنیم.



$$f(x) = x[x] \quad 0 \leq x < 2$$

$$0 \leq x < 1 \Rightarrow f(x) = x \times 0 + 1 = 1$$

$$1 \leq x < 2 \Rightarrow f(x) = x \times 1 + 1 = x + 1$$

مساحت رنگ شده برابر است با:

$$S = 1 \times 1 + \frac{(2+3) \times 1}{2} = 1 + 2/5 = 3/5$$

۲- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. تابع  $f$  تابعی گویا است. با توجه به دامنه‌ی داده شده،  $x = 2$  تنها ریشه‌ی مخرج است،

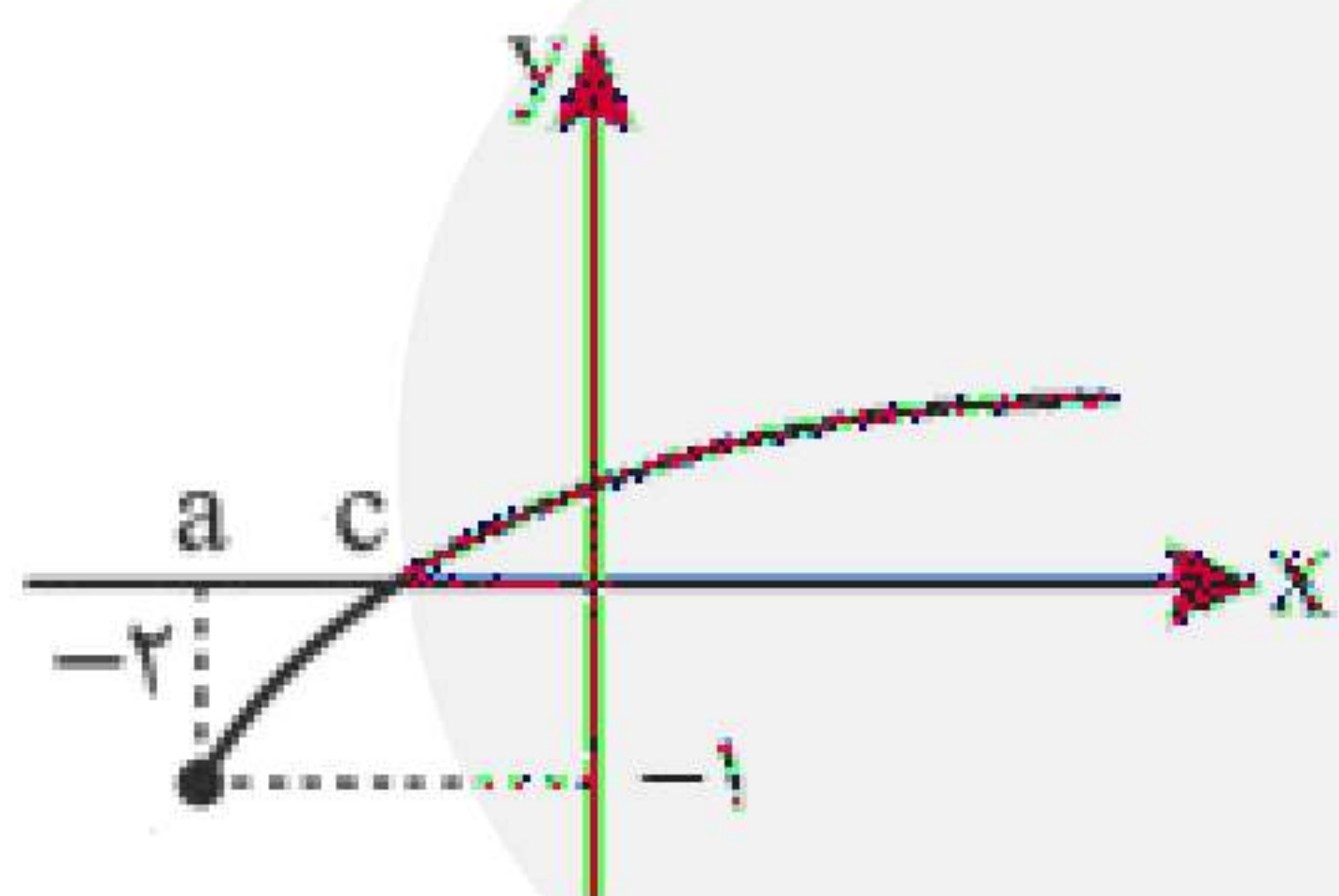
بنابراین مخرج تابع  $f$  به صورت  $a(x-2)^2$  می‌باشد و داریم:

$$ax^2 + bx + 8 = a(x-2)^2 = ax^2 - 4ax + 4a \Rightarrow \begin{cases} 4a = 8 \Rightarrow a = 2 \\ b = -4a \Rightarrow b = -8 \end{cases}$$

تابع  $g$  یک تابع رادیکالی با فرجه‌ی زوج است و باید عبارت داخل رادیکال نامنفی باشد.

$$g(x) = \sqrt{bx-3} \xrightarrow[b=-8]{a=2} g(x) = \sqrt{-8x-6}$$

$$\Rightarrow -8x-6 \geq 0 \Rightarrow -8x \geq 6 \Rightarrow x \leq -\frac{3}{4} \Rightarrow D_g = (-\infty, -\frac{3}{4}]$$



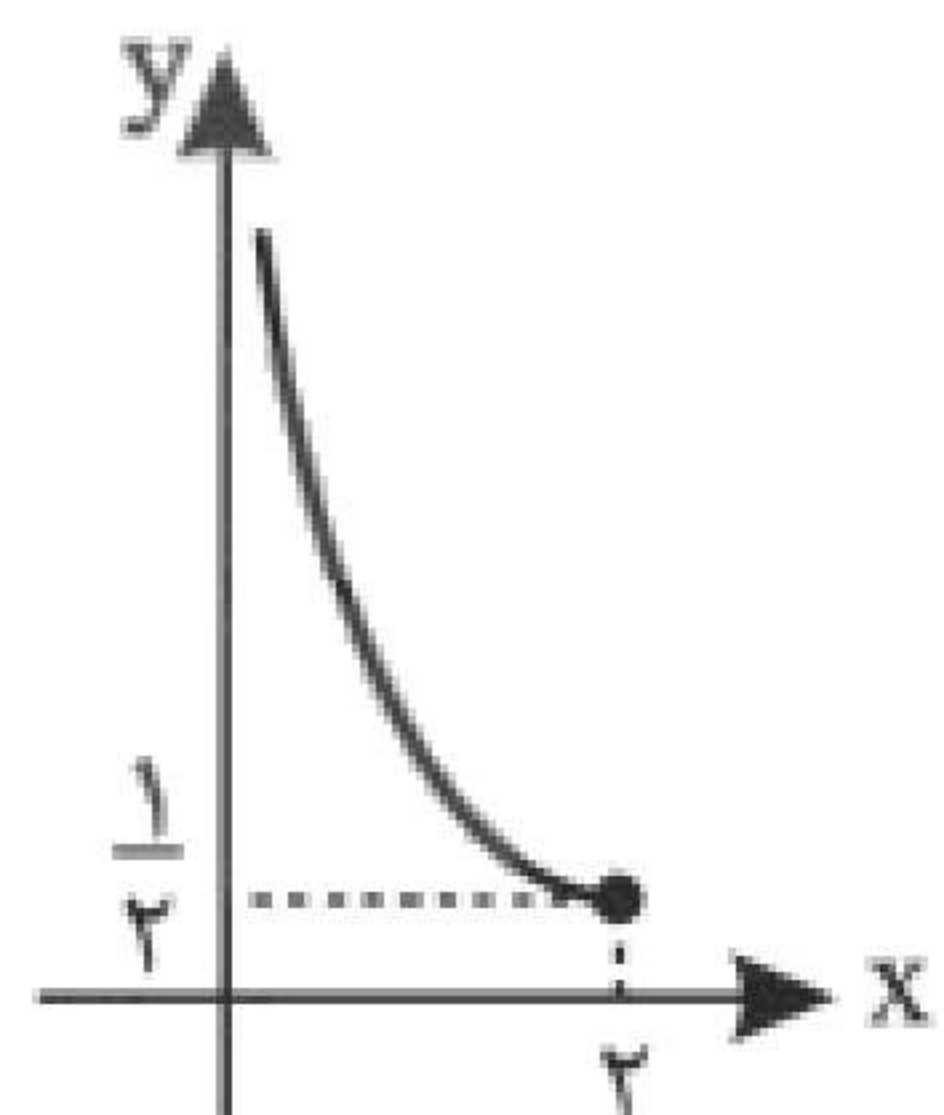
۳- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. نمودار تابع  $y = \sqrt{x}$ ، ۲ واحد به چپ و یک واحد به پایین انتقال یافته است.

$$f(x) = \sqrt{x+2} - b \Rightarrow a = -2, b = 1$$

برای یافتن  $c$ ، باید طول نقطه‌ی برخورد تابع با محور  $x$ ها را بیابیم، یعنی باید معادله‌ی  $f(x) = 0$  را حل کنیم.

$$\sqrt{x+2} - 1 = 0 \Rightarrow \sqrt{x+2} = 1 \xrightarrow{\text{توان ۲}} x+2 = 1 \Rightarrow x = -1$$

$$\Rightarrow c = -1 \Rightarrow abc = -2 \times 1 \times (-1) = 2$$



۴- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. نمودار تابع  $f(x) = \frac{1}{x}$  با دامنه‌ی  $D_f = (0, 2]$  به صورت

مقابل است:

پس برد تابع،  $R_f = [\frac{1}{2}, +\infty)$  است.



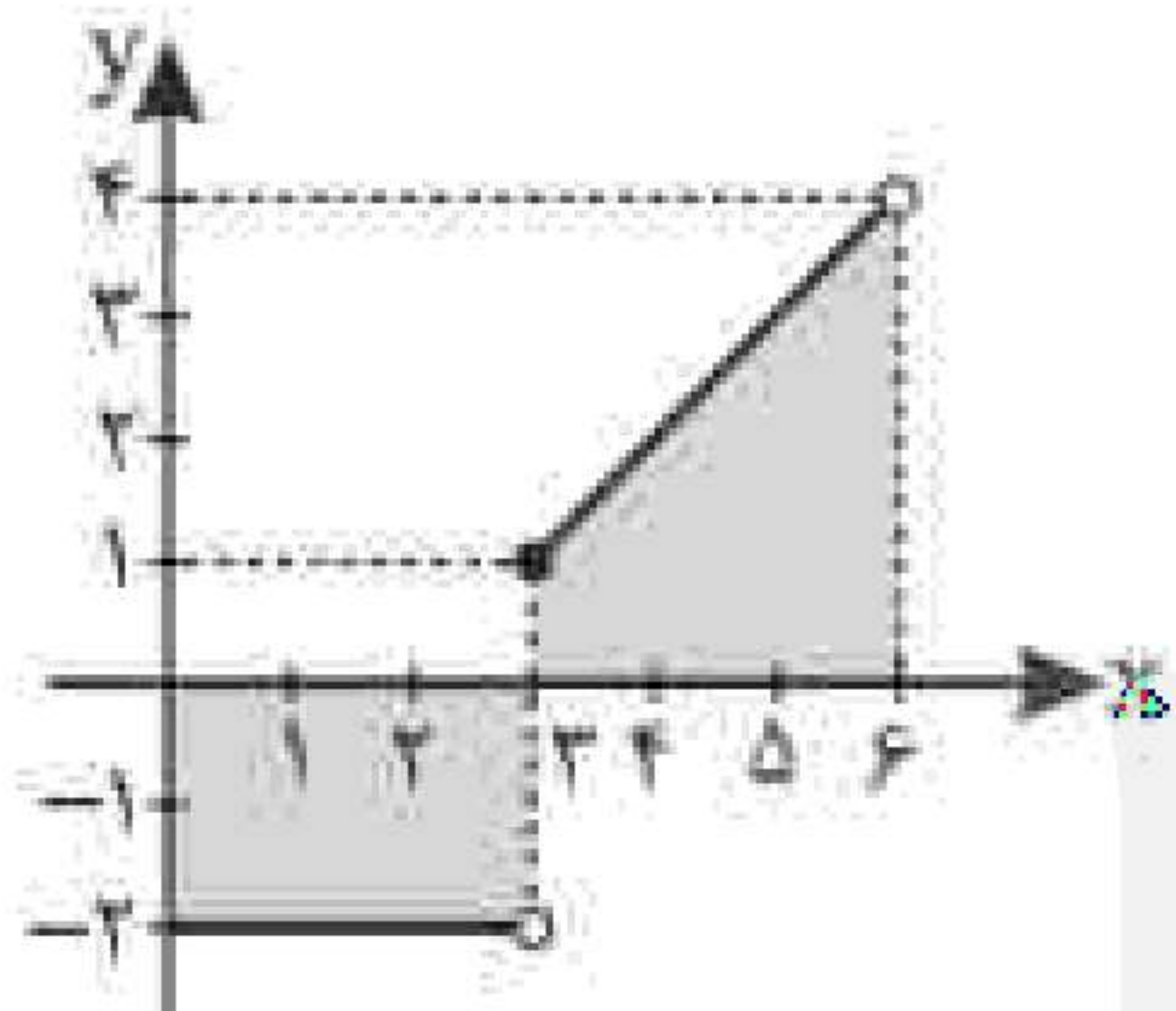


۵- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$y = x \left[ \frac{x}{3} \right] - 2, 0 \leq x < 6 \Rightarrow 0 \leq \frac{x}{3} < 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0 \leq \frac{x}{3} < 1 \Rightarrow y = x \times 0 - 2 = -2, 0 \leq x < 3 \\ 1 \leq \frac{x}{3} < 2 \Rightarrow y = x \times 1 - 2 = x - 2, 3 \leq x < 6 \end{cases}$$

x	3	6
y	1	4



$$مساحت: S = 3 \times 2 + \frac{(1 + 4) \times 3}{2} = 6 + \frac{15}{2} = \frac{27}{2}$$

۶- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

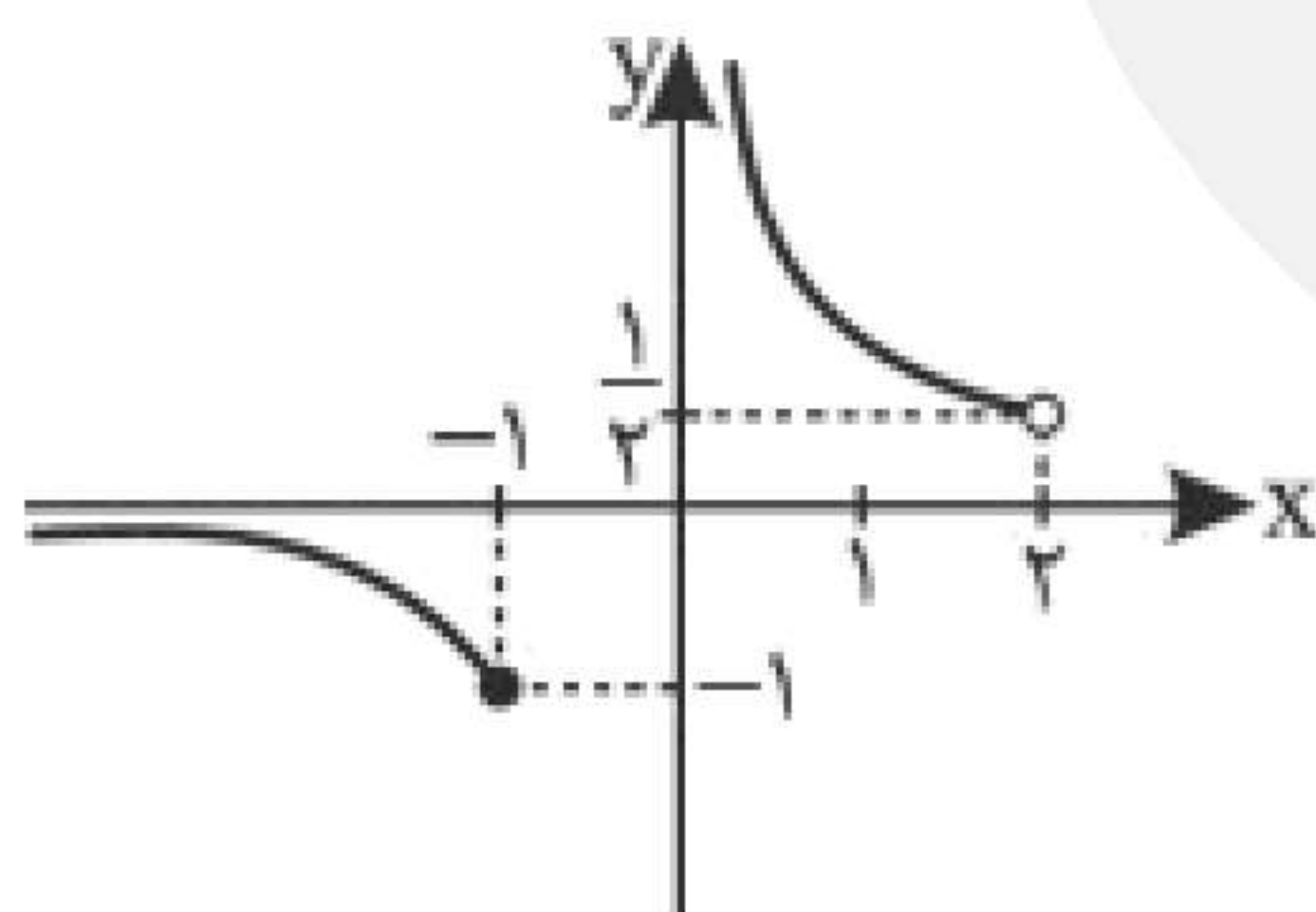
$$۱) \frac{x}{2} \in Z \Rightarrow \left[ \frac{x}{2} \right] + \left[ -\frac{x}{2} \right] = 0 \Rightarrow x^2 - 3x + 2 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 1 \Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{1}{2} \notin Z \text{ غ ق} \\ x = 2 \Rightarrow \frac{x}{2} = 1 \in Z \text{ ق ق} \end{cases}$$

$$۲) \frac{x}{2} \notin Z \Rightarrow \left[ \frac{x}{2} \right] + \left[ -\frac{x}{2} \right] = -1 \Rightarrow x^2 - 3x + 2 + 6(-1) = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 3x - 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \Rightarrow \frac{x}{2} = -\frac{1}{2} \notin Z \text{ ق ق} \\ x = 4 \Rightarrow \frac{x}{2} = 2 \in Z \text{ غ ق} \end{cases}$$

$$۱ = \text{مجموع} \Rightarrow \{-1, 2\} = \text{مجموعه ریشه‌ها}$$



۷- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. نمودار تابع  $f(x) = \frac{1}{x}$  با دامنه‌ی

$$D_f = (-\infty, -1] \cup (0, 2)$$

برد تابع  $R_f = [-1, 0) \cup (\frac{1}{2}, +\infty)$  است که آن را به صورت زیر نشان

می‌دهیم:

$$R_f = [-1, +\infty) - [0, \frac{1}{2}]$$

پس  $a = -1$ ,  $b = 0$  و  $c = \frac{1}{2}$  داریم:

$$[ac + b] = [-\frac{1}{2} + 0] = [-\frac{1}{2}] = -1$$





۸- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$D_f = [-6, +\infty) : -6a + b = 0 \Rightarrow b = 6a$$

$$f(-5) = 2 \Rightarrow \sqrt{-5a + b} = 2 \Rightarrow -5a + b = 4$$

$$\Rightarrow -5a + 6a = 4 \Rightarrow a = 4 \Rightarrow b = 24$$

$$a + b = 28$$

۹- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. در گزینه‌ی ۴،  $f(0) = 0$  و لی  $g(0)$  تعریف نمی‌شود، پس دو تابع برابر نمی‌باشند.

۱۰- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. با تعیین علامت عبارت‌های داخل قدرمطلق‌ها داریم:

x	①	②	③
x-1	-	-	+
x	-	+	+

$$۱) x < 0 \Rightarrow f(x) = \underbrace{|x|}_{\text{منفی}} + \underbrace{|x-1|}_{\text{منفی}} - 2 \Rightarrow f(x) = -x - x + 1 - 2 \Rightarrow f(x) = -2x - 1$$

$$۲) 0 \leq x \leq 1 \Rightarrow f(x) = \underbrace{|x|}_{\text{مثبت}} + \underbrace{|x-1|}_{\text{منفی}} - 2 \Rightarrow f(x) = x - x + 1 - 2 \Rightarrow f(x) = -1$$

$$۳) x > 1 \Rightarrow f(x) = \underbrace{|x|}_{\text{مثبت}} + \underbrace{|x-1|}_{\text{مثبت}} - 2 \Rightarrow f(x) = x + x - 1 - 2 \Rightarrow f(x) = 2x - 3$$

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} -2x - 1 & x < 0 \\ -1 & 0 \leq x \leq 1 \\ 2x - 3 & x > 1 \end{cases}$$

۱۱- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. تابع  $y = x^2 - 4x - 2$  را ۳ واحد به سمت چپ انتقال می‌دهیم. پس باید  $x$  را به  $x + 3$  تبدیل کنیم.

$$y = x^2 - 4x - 2 \xrightarrow{x \rightarrow x+3} y = (x+3)^2 - 4(x+3) - 2$$

$$y = x^2 + 6x + 9 - 4x - 12 - 2 \Rightarrow y = x^2 + 2x - 5$$

$$y = x^2 + 2x + 1 - 1 - 5 \Rightarrow y = (x+1)^2 - 6$$

سپس نمودار را ۴ واحد به سمت بالا انتقال می‌دهیم:

$$f(x) = (x+1)^2 - 6 + 4 \Rightarrow f(x) = (x+1)^2 - 2 \Rightarrow a = 1, b = -2$$

$$f(a) = f(1) = (1+1)^2 - 2 = 4 - 2 = 2$$

$$f(b) = f(-2) = (-2+1)^2 - 2 = 1 - 2 = -1$$

$$f(a) + f(b) = 2 + (-1) = 1$$





۱۲- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = -8 \xrightarrow{1 \leq \frac{3}{2} < 4} -2\left(\frac{3}{2}\right) + b = -8 \Rightarrow b = -5$$

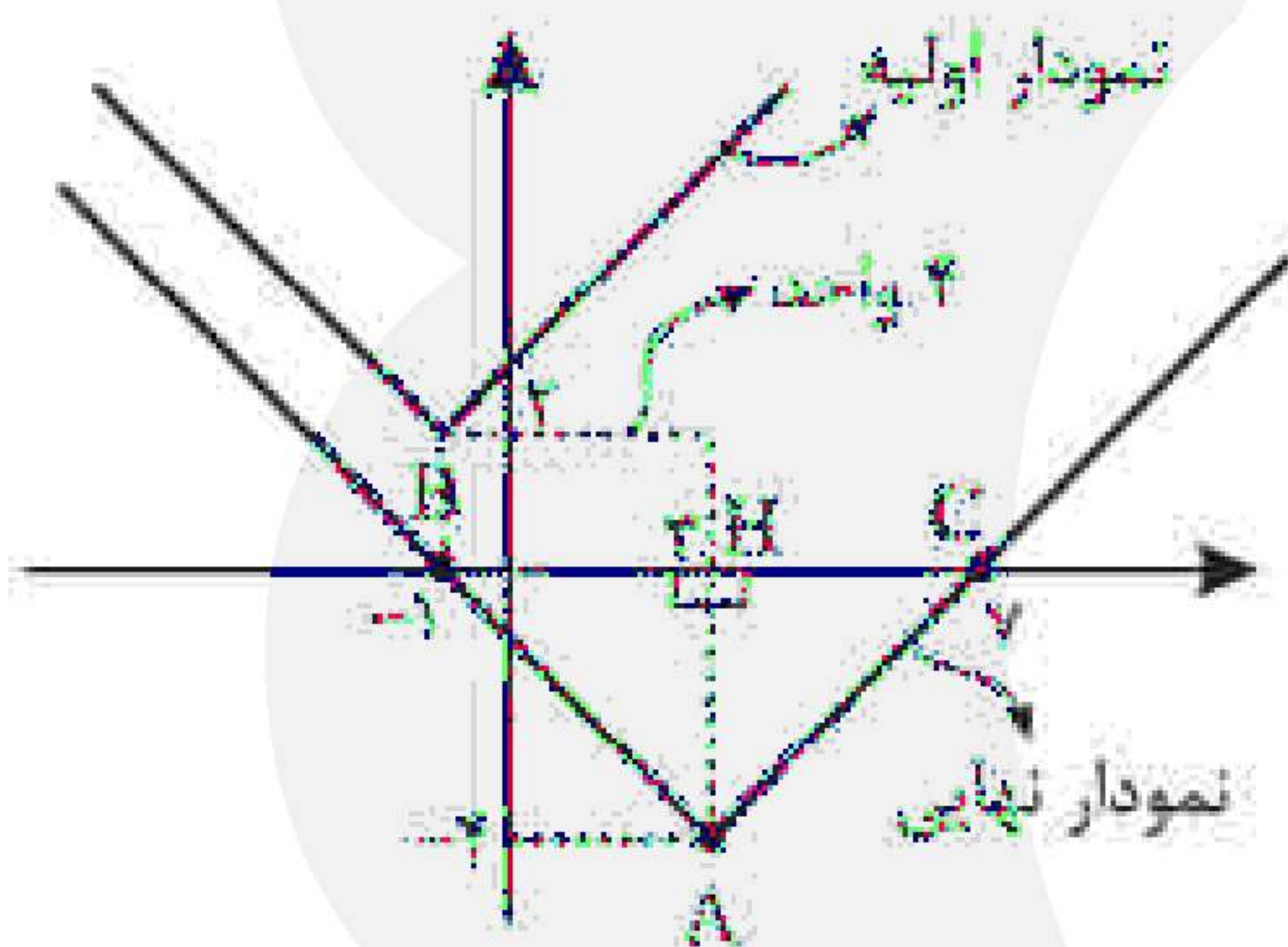
$$f(6) = -10 \xrightarrow{6 \geq 4} \frac{6}{2} - a + 2b = -10 \Rightarrow 3 - a + 2(-5) = -10 \Rightarrow a = 3$$

$$\begin{cases} f(-2) = (-2)^2 + a = 4 + a = 4 + 3 = 7 \\ f(8) = \frac{8}{2} - a + 2b = 4 - 3 + 2(-5) = -9 \\ f(3) = -2(3) + b = -6 - 5 = -11 \end{cases}$$

$$f(-2) + f(8) + f(3) = 7 + (-9) + (-11) = -13$$

۱۳- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. رابطه‌های  $y = x^2 - 1$  و  $y = 5x + k$  در محدوده‌های داده شده، تابع می‌باشند. (سه‌می و خطی غیرموازی با محور  $y$ ها ایجاد می‌کنند که همواره تابع هستند.)  
برای تابع بودن  $f$  کافی است به‌ازای  $x = 2$  مقدار  $x^2 - 1$  و  $5x + k$  برابر باشد:

$$x^2 - 1 = 5x + k \xrightarrow{x=2} 2^2 - 1 = 5 \times 2 + k \Rightarrow 3 = 10 + k \Rightarrow k = -7$$



۱۴- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. مساحت مثلث  $ABC$  برابر است با:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{AH \times BC}{2} = \frac{4 \times 8}{2} = 16$$

«بانک سوال یاوران دانش»

۱۵- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ضابطه‌ی تابع درجه دوم به صورت  $f(x) = ax^2 + bx + c$  می‌باشد.

$$f(0) = 5 \Rightarrow 0 + 0 + c = 5 = c = 5$$

$$f(1) = 3 \Rightarrow a + b + 5 = 3 \Rightarrow a + b = -2 \quad (1)$$

$$f(2) = 3 \Rightarrow 4a + 2b + 5 = 3 \Rightarrow 4a + 2b = -2 \xrightarrow{\div 2} 2a + b = -1 \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow \begin{cases} a + b = -2 \\ 2a + b = -1 \end{cases} \Rightarrow a = 1, b = -3$$

ضابطه‌ی تابع  $f$  با توجه به مقادیر  $a, b$  و  $c$  به صورت زیر خواهد بود:

$$f(x) = x^2 - 3x + 5 \Rightarrow f(4) = 4^2 - 3 \times 4 + 5 = 16 - 12 + 5 = 9$$





۱۶- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. چون تابع  $g$  ثابت است، پس برد آن یک عضو دارد در نتیجه:

$$n(B) = 1$$

$$n(A) + n(B) = m \xrightarrow{n(A) = K} K + 1 = m$$

$$mK = 30 \Rightarrow (K + 1)K = 30 \Rightarrow k^2 + k - 30 = 0$$

$$\Rightarrow (K - 5)(K + 6) = 0 \Rightarrow \begin{cases} K = 5 \\ K = -6 \end{cases} \text{ غ ق ق غ}$$

$$K + 1 = m \Rightarrow 5 + 1 = m \Rightarrow m = 6$$

$$K + \frac{m}{2} = 5 + \frac{6}{2} = 5 + 3 = 8$$

۱۷- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. در تابع همانی، در هر زوج مرتب، مؤلفه‌های اول و دوم با هم برابرند:

$$\begin{cases} 2a + b + 1 = 3b - c + 6 \\ 2b + c - 3 = -a - c + 4 \\ c + 2a - 6 = -c - 3b + 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a - 2b + c = 5 \\ a + 2b + 2c = 7 \\ 2a + 3b + 2c = 8 \end{cases}$$

$$\underline{5a + 5b + 5c = 20}$$

$$5(a + b + c) = 20 \Rightarrow a + b + c = 4$$

۱۸- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. با توجه به نمودار  $f$  داریم:

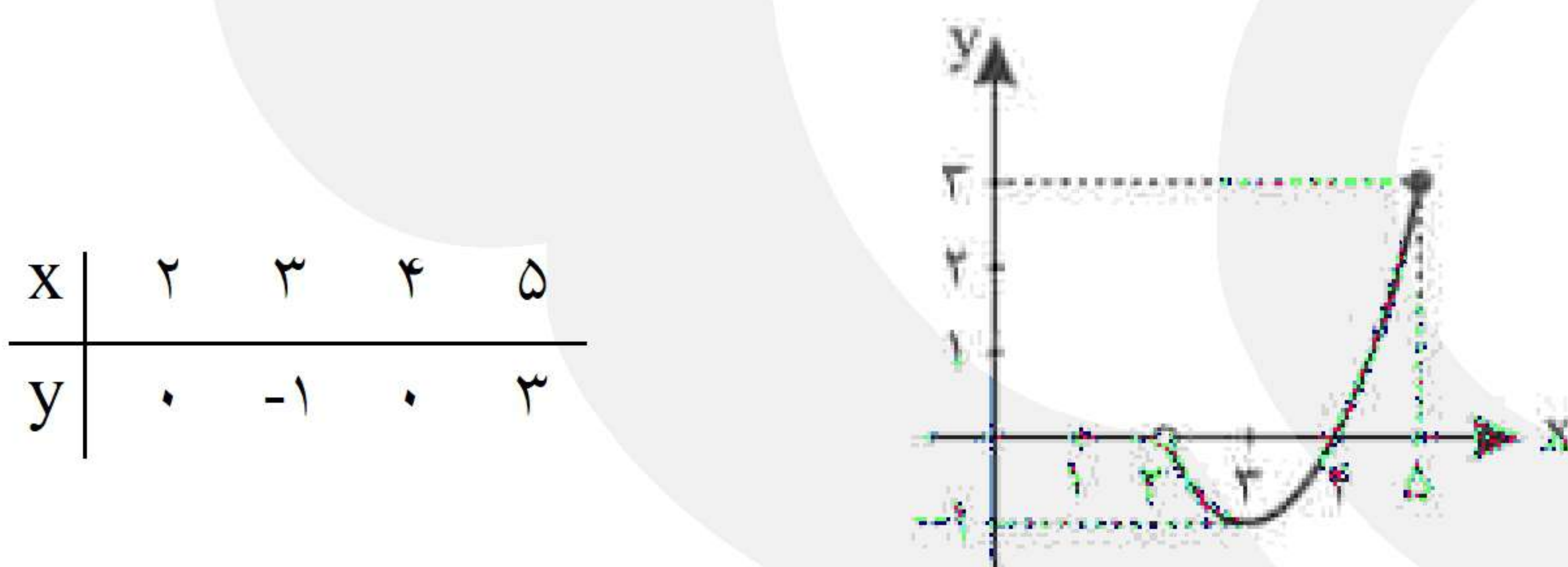
$$f(4) = 2$$

$$f(4) + g(3) = 11 \Rightarrow 2 + (2a - 1) = 11 \Rightarrow a = 5$$

$$f(a) = f(5) = 1$$

$$g(1) = a + 1 = 5 + 1 = 6 \Rightarrow f(a) + g(1) = 1 + 6 = 7$$

۱۹- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. رأس تابع  $f(x) = (x - 3)^2 - 1$  نقطه‌ی  $(3, -1)$  می‌باشد با استفاده از نقاط کمکی، نمودار تابع به صورت زیر خواهد بود:



۲۰- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. با توجه به تعریف تابع، اگر  $f$  تابعی از مجموعه‌ی  $A$  به مجموعه‌ی  $B$  باشد:

(۱) مجموعه‌ی  $A$  دامنه‌ی تابع  $f$  است.

(۲) برد تابع  $f$ ، زیرمجموعه‌ی  $B$  است.

$$n(A) \geq n(B) \quad (3)$$

با توجه به این ویژگی‌ها، گزینه‌ی ۲ صحیح است.





۲۱- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. در ضابطه‌ی تابع مقادیر  $-۱$ ،  $۲$  و  $۴$  را به ترتیب به جای  $f(x)$  قرار می‌دهیم و با حل معادله‌های حاصل، مقادیر  $x$  را که عضوهای دامنه‌ی تابع هستند، به دست می‌آوریم:

$$f(x) = \frac{x+5}{x-1} \xrightarrow{f(x)=-1} -1 = \frac{x+5}{x-1} \Rightarrow x+5 = -x+1 \Rightarrow x = -2$$

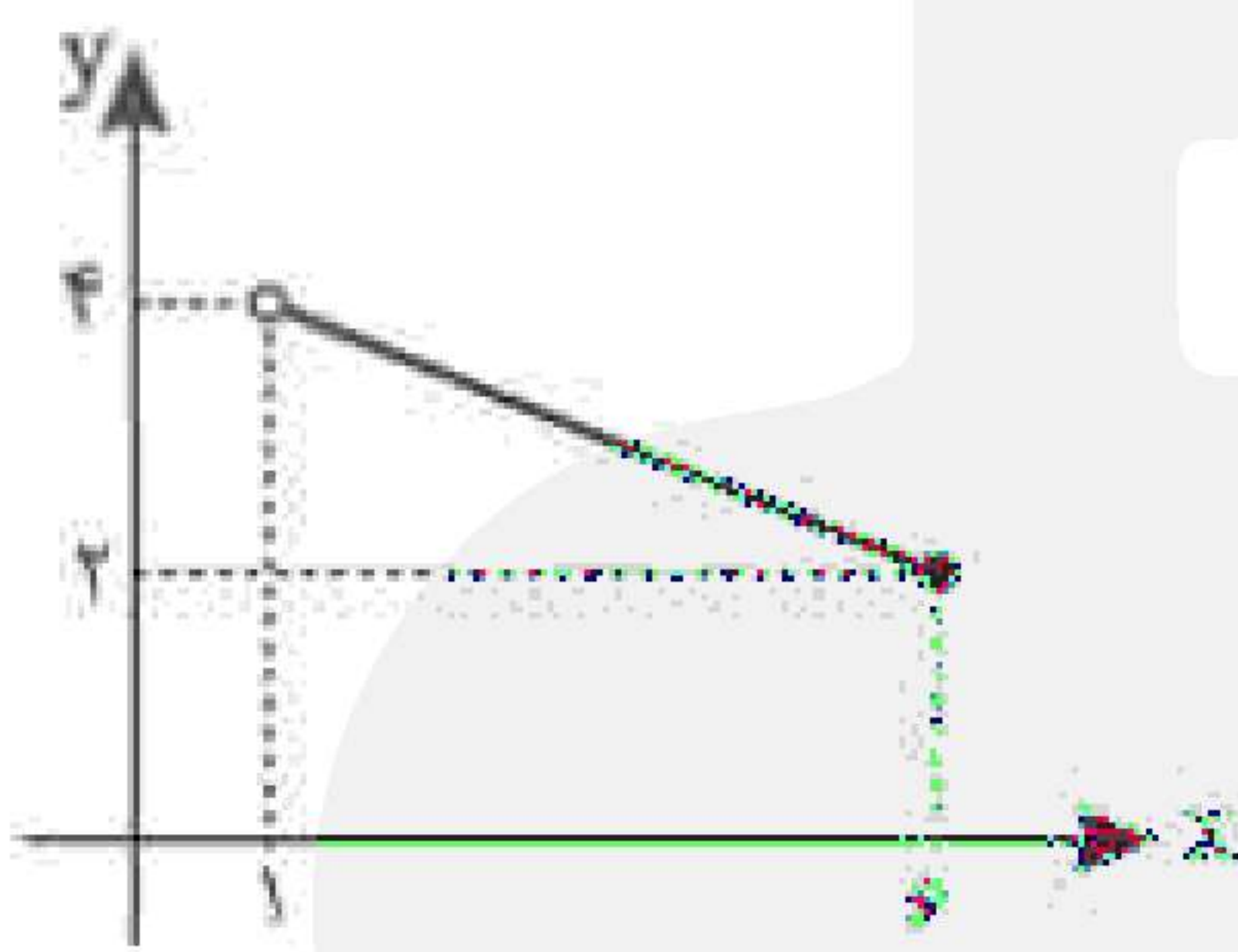
$$f(x) = \frac{x+5}{x-1} \xrightarrow{f(x)=2} 2 = \frac{x+5}{x-1} \Rightarrow 2x-2 = x+5 \Rightarrow x = 7$$

$$f(x) = \frac{x+5}{x-1} \xrightarrow{f(x)=4} 4 = \frac{x+5}{x-1} \Rightarrow 4x-4 = x+5 \Rightarrow x = 3$$

دامنه‌ی این تابع  $A = \{-2, 7, 3\}$  می‌باشد و مجموع عضوهای آن برابر است با:

$$-2 + 7 + 3 = 8$$

۲۲- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. با توجه به دامنه و برد تابع، نمودار آن به صورت مقابل می‌باشد:



این نمودار بخشی از خطی است که از نقاط  $\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$  و  $\begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix}$  می‌گذرد. معادله‌ی خط:

$$\left. \begin{array}{l} y = ax + b \xrightarrow{\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}} 4 = a + b \\ y = ax + b \xrightarrow{\begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix}} 2 = 6a + b \end{array} \right\} \Rightarrow 5a = -2 \Rightarrow a = -\frac{2}{5}$$

$$4 = a + b \Rightarrow 4 = -\frac{2}{5} + b \Rightarrow b = \frac{22}{5}$$

ضابطه‌ی تابع  $f$  به صورت زیر خواهد بود: (با توجه به دامنه)

$$y = -\frac{2}{5}x + \frac{22}{5} \quad 1 < x \leq 6$$

۲۳- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. دامنه‌ی تابع  $A = (-2, 5]$  و برد تابع  $B = (0, 4]$  در این صورت با توجه به محور اعداد حقیقی داریم:

$$A - B = (-2, 0] \cup (4, 5]$$



۲۴- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. اگر اندازه‌ی ارتفاع  $x$  باشد، قاعده‌ی کوچک  $\frac{x}{2}$  و قاعده‌ی بزرگ  $2x$  خواهد بود.

$$S(x) = \frac{\text{مجموع دو قاعده} \times \text{ارتفاع}}{2} = \frac{x \times (\frac{x}{2} + 2x)}{2} = \frac{x \times \frac{5x}{2}}{2} = \frac{5x^2}{4}$$





۲۵- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. با توجه به زوج‌های مرتب‌های  $(۴ - a, ۲b - ۵)$  و  $(۴ - a, b + ۱)$  داریم:  
 $۲b - ۵ = b + ۱ \Rightarrow b = ۶$

با توجه به مقدار  $b$  و زوج‌های مرتب‌های  $(a + ۶, ۳)$  و  $(a + b, a - b)$  داریم:  
 $\underbrace{a + ۶}_{a + ۶} \quad \underbrace{a - b}_{a - ۶}$

$$a - ۶ = ۳ \Rightarrow a = ۹$$

بنابراین حاصل  $۲a - b$  برابر خواهد بود با:

$$۲a - b = ۲ \times ۹ - ۶ = ۱۸ - ۶ = ۱۲$$

۲۶- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. فرض می‌کنیم  $y = \frac{x}{۲} - \frac{۱}{۲}$ ، پس:

$$۲y = x - ۱ \Rightarrow x = ۲y + ۱ \Rightarrow f(x) = ۲x + ۱$$

۲۷- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$f(x) = x^2 + (a - ۱)(x - ۵)(x - ۶) = ax^2 - ۱۱(a - ۱)x + ۳۰(a - ۱)$$

$$\Rightarrow \frac{c - b}{a - ۱} = \frac{۳۰(a - ۱) + ۱۱(a - ۱)}{a - ۱} = ۴۱$$

۲۸- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$۰ \leq x < \frac{1}{۲} \Rightarrow ۰ \leq ۲x < ۱ \Rightarrow [۲x] = ۰ \Rightarrow y = ۳x + [۲x] = ۳x$$

$$\Rightarrow ۰ \leq y < \frac{۳}{۲} \Rightarrow f(x) = ۰ \text{ یا } ۱$$

$$\frac{1}{۲} \leq x < ۱ \Rightarrow ۱ \leq ۲x < ۲ \Rightarrow [۲x] = ۱ \Rightarrow y = ۳x + [۲x] = ۳x + ۱$$

$$\Rightarrow \frac{۵}{۲} \leq y < ۴ \Rightarrow f(x) = ۲ \text{ یا } ۳$$

$$f(۱) = [۳ + ۲] = ۵ \Rightarrow R_f = \{۰, ۱, ۲, ۳, ۵\}$$

۲۹- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. نمودار تابع بخشی از سهمی است. کمترین مقدار تابع در رأس آن رخ می‌دهد:

$$y_s = -\frac{\Delta'}{a} = -\frac{۱۶ + ۵}{۱} = -۲۱$$

$x_s = ۴$ : پس بیشترین مقدار تابع به ازای  $x = -۲۰$  ایجاد می‌شود.

$$y_{\max} = y(-۲۰) = ۴۰۰ + ۱۶۰ - ۵ = ۵۵۵ \Rightarrow R_f = [-۲۱, ۵۵۵]$$

«بانک سوال یاوران دانش»

۳۰- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\Rightarrow \text{تابع خطی است} \quad \frac{f(۶) - f(۲)}{۶ - ۲} = \frac{f(۱۲) - f(۲)}{۱۲ - ۲} \Rightarrow \frac{۱۲}{۴} = \frac{f(۱۲) - f(۲)}{۱۰} \Rightarrow f(۱۲) - f(۲) = ۳۰$$





۳۱- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$y = x - 2 \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor - 2 + 6 = x - 2 \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + 4$$

$$y = 2 \left( \frac{x}{2} - \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor \right) + 4$$

$$0 \leq \frac{x}{2} - \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor < 1 \Rightarrow 4 \leq 2 \left( \frac{x}{2} - \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor \right) + 4 < 6$$

۳۲- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

به ازای  $x = 2$  باید مقدار  $f(2)$  یکتا باشد  $\Rightarrow f$  تابع است.  
 $f(2) = 2(2) + 3a = 4 + 3a$ ,  $f(2) = 4a - 1 \Rightarrow 4 + 3a = 4a - 1 \Rightarrow a = 5$   
 $a = 2k + 1 \Rightarrow k = 2$  تابع همانی است  $g$   
 برای اینکه تابع  $f$  تابعی ثابت باشد، باید در ضابطه‌ی آن ضریب  $x$  صفر شود پس:  
 $ka - m = 0 \Rightarrow 10 - m = 0 \Rightarrow m = 10$

۳۳- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$f(x) = \frac{|x-2||x-1|}{|x-2|} + x = |x-1|, x \neq 2$$

$$f(x) = \begin{cases} 2x-1 & x \geq 1, x \neq 2 \\ 1 & x < 1 \end{cases} \Rightarrow R_f = [1, +\infty)$$

$$a + b = 4$$

۳۴- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.  $a$  باید برابر صفر باشد:

$$\begin{matrix} x = -3 \\ y = 0 \end{matrix} \rightarrow b(-3) + 4 = 0 \Rightarrow -3b = -4 \Rightarrow b = \frac{4}{3}$$

۳۵- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\left. \begin{aligned} [-x] = 5 &\Rightarrow 5 \leq -x < 6 \Rightarrow -6 < x \leq -5 \\ [-y] = 8 &\Rightarrow 8 \leq -y < 9 \Rightarrow -9 < y \leq -8 \end{aligned} \right\} \xrightarrow{+} -15 < x + y \leq -13$$

بنابراین  $[x + y]$  می‌تواند یکی از مقادیر  $-13$ ,  $-14$ ,  $-15$  باشد.

۳۶- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. دامنه‌ی تابع  $R - \left\{ -\frac{b}{a} \right\}$  هست، پس  $c = \frac{-b}{a}$  و در نتیجه:

$$a \times b \times c = -b^2$$

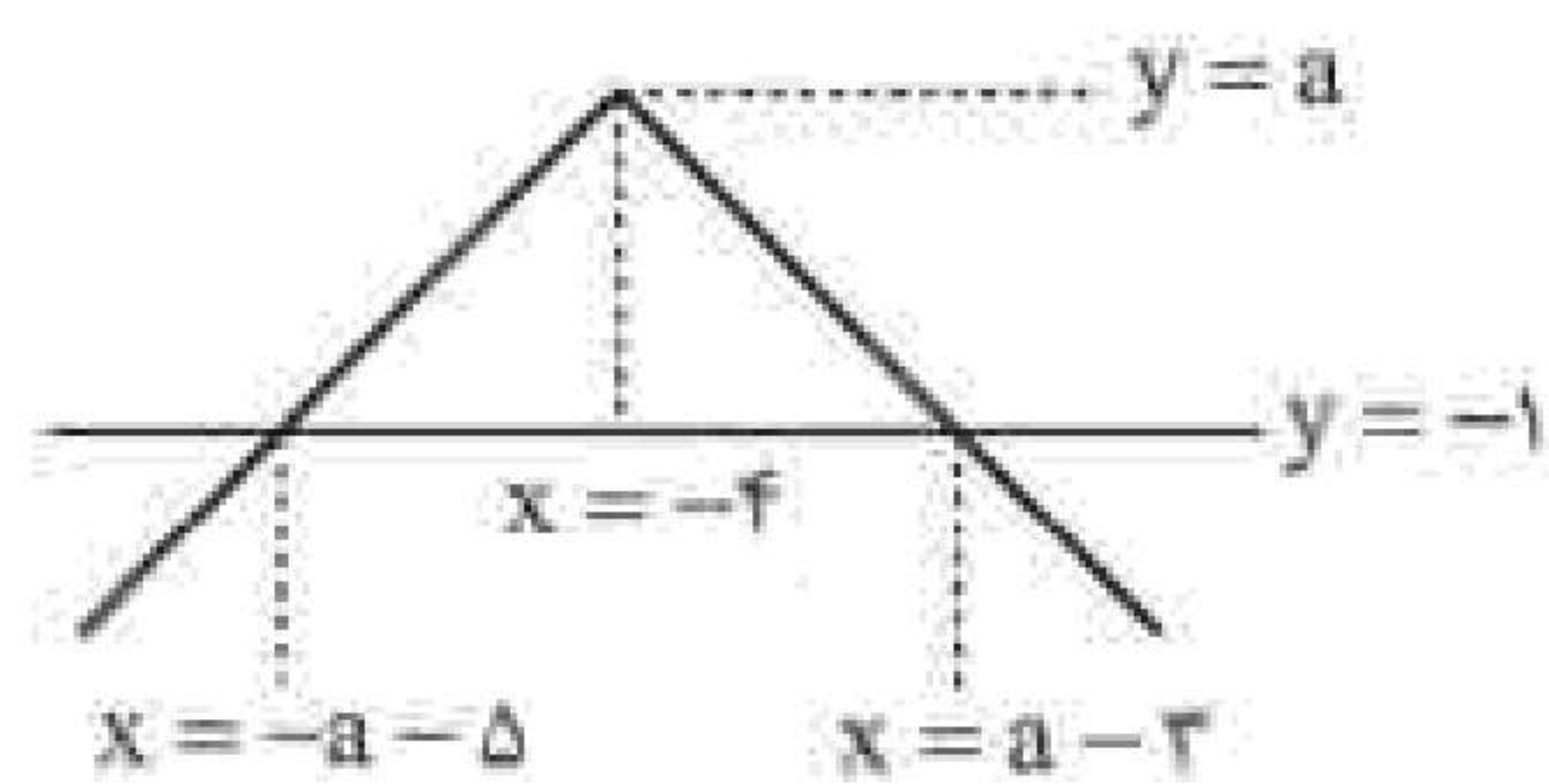
حال:  $f(x) = \frac{x(4x+15)}{ax+b}$  پس باید صورت و مخرج ساده شود و چاره‌ای نیست  $a = 4$  و  $b = 15$  باشد، در نتیجه:

$$abc = -(+15)^2 = -225$$





۳۷- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. طول نقاط برخورد خط  $y = -1$  و تابع  $f(x) = a - |x + 4|$  را می‌یابیم.  
 $a - |x + 4| = -1 \Rightarrow |x + 4| = a + 1 \Rightarrow x + 4 = \pm(a + 1)$   
 $\Rightarrow \begin{cases} x + 4 = a + 1 \Rightarrow x = a - 3 \\ x + 4 = -a - 1 \Rightarrow x = -a - 5 \end{cases}$



نمودار تابع  $f$  به طور تقریبی به صورت زیر است:  
 $f(x) = a - |x + 4|$   
 $x + 4 = 0 \Rightarrow x = -4 \Rightarrow f(-4) = a$   
 ارتفاع مثلث  $= a - (-1) = a + 1$   
 قاعده‌ی مثلث  $= a - 3 - (-a - 5) = 2a + 2$

$$S = \frac{1}{2}(2a + 2)(a + 1) = 16 \Rightarrow \frac{1}{2} \times 2(a + 1)(a + 1) = 16 \Rightarrow (a + 1)^2 = 16$$

$$\Rightarrow a + 1 = \pm 4 \Rightarrow \begin{cases} a = -5 & \text{غ ق ق} \\ a = 3 \end{cases}$$

حال صفرهای تابع را می‌یابیم:

$$f(x) = 0 \Rightarrow 3 - |x + 4| = 0 \Rightarrow |x + 4| = 3 \Rightarrow x + 4 = \pm 3 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = -7 \end{cases}$$

حاصل ضرب  $= (-1) \times (-7) = 7$

۳۸- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$f(x) = |x| - 2 \xrightarrow{f(x)=0} |x| - 2 = 0 \Rightarrow |x| = 2 \Rightarrow x = \pm 2$$

پس سهمی  $g$ ، محور  $y$ ها را در نقاط  $\pm 2$  قطع می‌کند، داریم:

$$g(x) = a(x - 2)(x + 2) = a(x^2 - 4)$$

رأس سهمی نقطه‌ی  $S(0, 6)$  است، پس:

$$g(0) = 6 \Rightarrow -4a = 6 \Rightarrow a = -\frac{3}{2} \Rightarrow g(x) = -\frac{3}{2}(x^2 - 4) \Rightarrow g(x) = -\frac{3}{2}x^2 + 6$$

$$\Rightarrow b = 0, c = 6$$

$$4a + b - c = 4\left(-\frac{3}{2}\right) + 0 - 6 - 6 = -12$$

۳۹- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$f(x) = \sqrt{(x - 1)^2} - \sqrt{(2x + 1)^2} = |x - 1| - |2x + 1|$$

$$-\frac{1}{2} < x < 1$$

$$\longrightarrow f(x) = -x + 1 - (2x + 1) = -3x \Rightarrow m = -3, n = 0 \Rightarrow m + n = -3$$

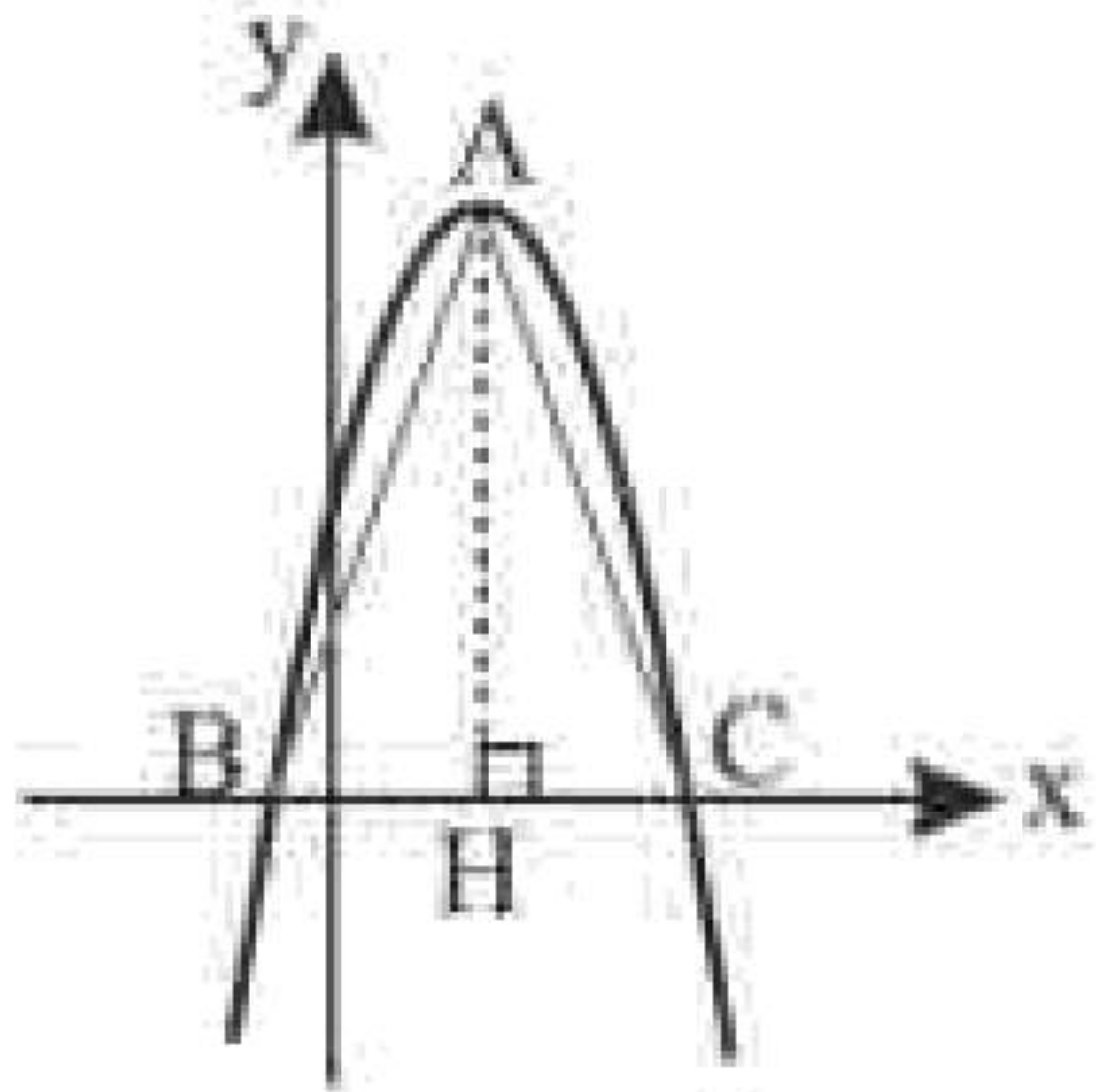




۴۰- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. طول رأس سهمی  $\frac{-b}{2a}$  و عرض آن  $-\frac{\Delta}{4a}$  است.

$$A\left(\frac{-4}{2a}, \frac{4a-16}{4a}\right) \xrightarrow{y=\frac{1}{x}} \frac{4a-16}{4a} = \frac{2a}{-4} \Rightarrow -4a+16=2a^2 \Rightarrow a^2+2a-8=0$$

$$\Rightarrow a=-4, a=2$$



رأس سهمی در ناحیه اول است و طول رأس سهمی باید مثبت باشد، پس  $a=-4$  قابل قبول است.

$$y = -x^2 + 4x + 1$$

$$A\left(\frac{1}{2}, 2\right)$$

قاعده‌ی مثلث ABC، برابر اختلاف ریشه‌هاست، پس داریم:

$$BC = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = \frac{\sqrt{32}}{4} = \sqrt{2}$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}(AH)(BC) = \frac{1}{2}(2)(\sqrt{2}) = \sqrt{2}$$

۴۱- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\alpha, \beta > 0$$

راه ۱:

$$(\alpha = \beta \text{ حالت تساوی}) \quad \alpha + \beta \geq 2\sqrt{\alpha\beta}$$

$$(x^2 + 2) + \frac{9}{x^2 + 2} \geq 6 \Rightarrow y \geq 4 \Rightarrow f(k) = f(4) = 16/5$$

راه ۲:

$$x^2 + 2 = t; t \geq 2$$

$$y = t - 2 + \frac{9}{t} \Rightarrow t^2 - (2+y)t + 9 = 0$$

$$\Delta \geq 0 \Rightarrow (2+y)^2 - 36 \geq 0 \xrightarrow{y+2>0} 2+y \geq 6 \Rightarrow y \geq 4 \Rightarrow f(4) = 16/5$$

(در حالت  $x^2 + 2 = 3$  حالت  $y = 4$  برقرار است.)

۴۲- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. فرض کنید  $f(x) = 2ax + b$  و  $g(x) = -ax + b'$  باشد.

$$(f + 2g)(x) = (2ax + b) + 2(-ax + b') = b + 2b' \text{ ثابت}$$

$$g(x) + f(2x) = -ax + b' + 4ax + b \text{ همانی}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3a = 1 \\ b + b' = 0 \end{cases}$$

$$(f + g)(x) = ax + b + b' = ax = \frac{1}{3}x \Rightarrow (f + g)(-6) = -2$$





۴۳- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$f(x) = x \Rightarrow 1 + \sqrt{x-1} = x \Rightarrow \sqrt{x-1} = x-1 \Rightarrow (x-1=0 \text{ یا } 1) \Rightarrow x=1 \text{ یا } 2$$

$$g(x) = x \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x=1 \Rightarrow \sqrt{a-1}=1 \Rightarrow a=2 \\ x=2 \Rightarrow \sqrt{a-2}=2 \Rightarrow a=6 \end{array} \right\} \Rightarrow a = 8 = \text{مجموع مقادیر ممکن } a$$

«بانک سوال یاوران دانش»

۴۴- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\begin{cases} 2x^2 + 9x - 5 < 0 \Rightarrow -5 < x < \frac{1}{2} \\ \left| x + \frac{1}{2} \right| < \frac{3}{2} \Rightarrow -\frac{3}{2} < x + \frac{1}{2} < \frac{3}{2} \Rightarrow -2 < x < 1 \end{cases} \Rightarrow -2 < x < \frac{1}{2}$$

$$\max\left(\frac{3b-a}{2}\right) = \frac{\frac{3}{2}+2}{2} = \frac{7}{4} \Rightarrow \max\left[\frac{3b-a}{2}\right] = 1$$

۴۵- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

هندسی  $\alpha, \beta, \gamma$

حسابی  $a\alpha + b, a\beta + b, a\gamma + b$

$\Rightarrow a\alpha, a\beta, a\gamma$  حسابی

چون دنباله‌ی اخیر هندسی نیز است پس یک دنباله‌ی ثابت است.

$$\Rightarrow a\alpha = a\beta = a\gamma \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma$$

پس در دنباله‌ی هندسی قدر نسبت برابر یک و در دنباله‌ی حسابی قدر نسبت برابر صفر است.

۴۶- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$f$  تابعی خطی است، پس  $f(x) = ax + b$

$$\begin{array}{l} f(-3) = -3a + b = 4 \\ f(2) = 2a + b = 5 \end{array} \xrightarrow{\text{کم می کنیم}} 5a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{5}$$

$$b = 4 + \frac{3}{5} = \frac{23}{5}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{5}x + \frac{23}{5}$$

$$g(3-m) = 5 \xrightarrow{\text{همانی}} 3-m = 5 \Rightarrow m = -2$$

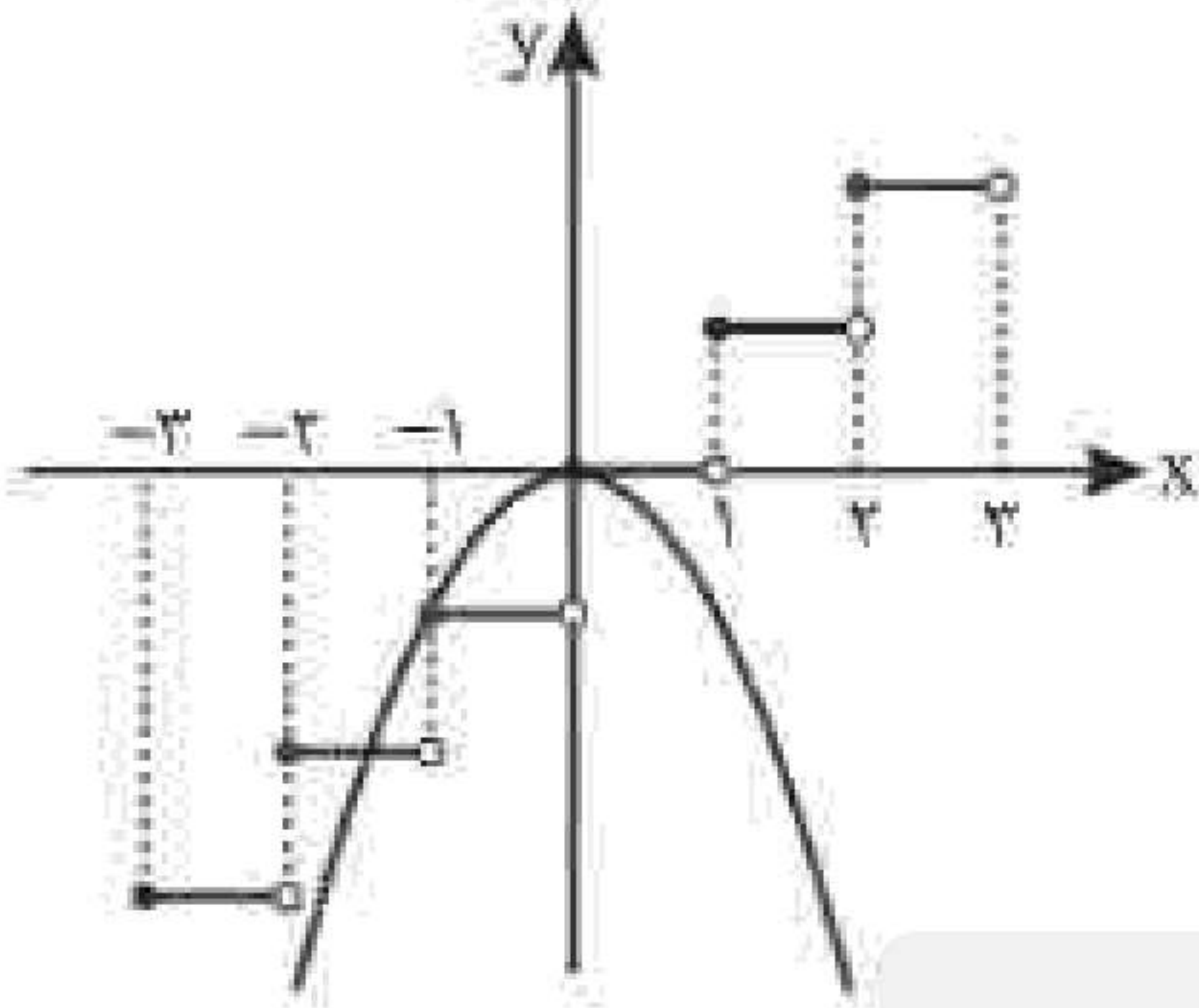
$$\Rightarrow f(m^3) = f(-8) = -\frac{8}{5} + \frac{23}{5} = 3$$





۴۷- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

می‌توان تعداد جواب‌های معادله  $x^2 + [x] = 0$  یا  $[x] = -x^2$  را از طریق تقاطع نمودارهای توابع  $f(x) = [x]$  و  $g(x) = -x^2$  به دست آورد:



طبق شکل، تعداد نقاط تلاقی دو نمودار برابر سه نقطه است، پس تعداد جواب‌های معادله نیز برابر ۳ است.

۴۸- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$ax - a^3 = 0 \Rightarrow ax = a^3 \Rightarrow x = a^2 = 4 \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ a = -2 \end{cases}$$

چون مقادیر کوچک‌تر از ریشه‌ی جواب است پس  $a < 0$

۴۹- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$-2 \leq 2 < 3 \Rightarrow f(2) = -(2)^2 = -4$$

$$4 > 3 \Rightarrow f(4) = \frac{4}{2} - 3 = -1$$

$$-5 < -2 \Rightarrow f(-5) = 3(-5) + 1 = -14$$

$$\Rightarrow f(2) \times f(4) - f(-5) = (-4) \times (-1) - (-14) = 4 + 14 = 18$$

۵۰- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$f(x) = 3x^2 + (ax^2 - 3x + abx - 3b) = (3 + a)x^2 + (ab - 3)x - 3b$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3 + a = 0 \\ ab - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b = -1 \end{cases} \Rightarrow f(x) = -3b = 3$$

پس:  $f(2) = 3$