

گنجینه سوال رایگان
+ پاسخ تشریحی

یاوران دانش



راه های ارتباطی با ما:

www.Dyavari.com

۰۲۱-۷۶۷۰۳۸۵۸

۰۹۱۲-۳۴ ۹۴ ۱۳۴



	۱	۲	۳	۴
۱ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۴ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۵ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۶ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۷ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۸ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۹ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۰ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۱ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۱۲ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۳ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۴ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۵ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۶ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۷ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۸ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۹ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۰ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۱ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۲ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۳ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۲۴ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۵ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۲۶ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۷ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۸ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۹ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۰ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۳۱ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۲ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۳ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۴ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

	۱	۲	۳	۴
۳۵ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۶ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۷ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۸ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۹ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۴۰ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۴۱ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۴۲ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۴۳ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۴۴ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۴۵ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۴۶ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۴۷ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۴۸ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۴۹ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۵۰ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>



۱- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. شرط تساوی دو تابع f و g :

$$D_f = R - \{6\} = D_g$$

$$x^2 + px + q = (x - 6)^2 = x^2 - 12x + 36 \begin{cases} p = -12 \\ q = 36 \end{cases}$$

از طرف دیگر باید ضابطه‌های f و g مساوی باشند:

$$\frac{m}{x-6} = \frac{3x+n}{(x-6)^2} \Rightarrow \frac{m(x-6)}{(x-6)^2} = \frac{3x+n}{(x-6)^2} \Rightarrow mx - 6m = 3x + n$$

$$\begin{cases} m = 3 \\ -6(3) = n \Rightarrow n = -18 \end{cases}$$

$$\frac{p-q}{n+4m} = \frac{-12-36}{-18+4(3)} = \frac{-48}{-6} = 8$$

۲- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. اعضای مجموعه به صورت زیر است:

$$\{(0,5), (0,-5), (3,4), (3,-4), (-3,4), (-3,-4), (4,3), (4,-3), (-4,3), (-4,-3), (5,0), (-5,0)\}$$

که با حذف کردن ۵ زوج مرتب تبدیل به تابع می‌شود.

۳- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

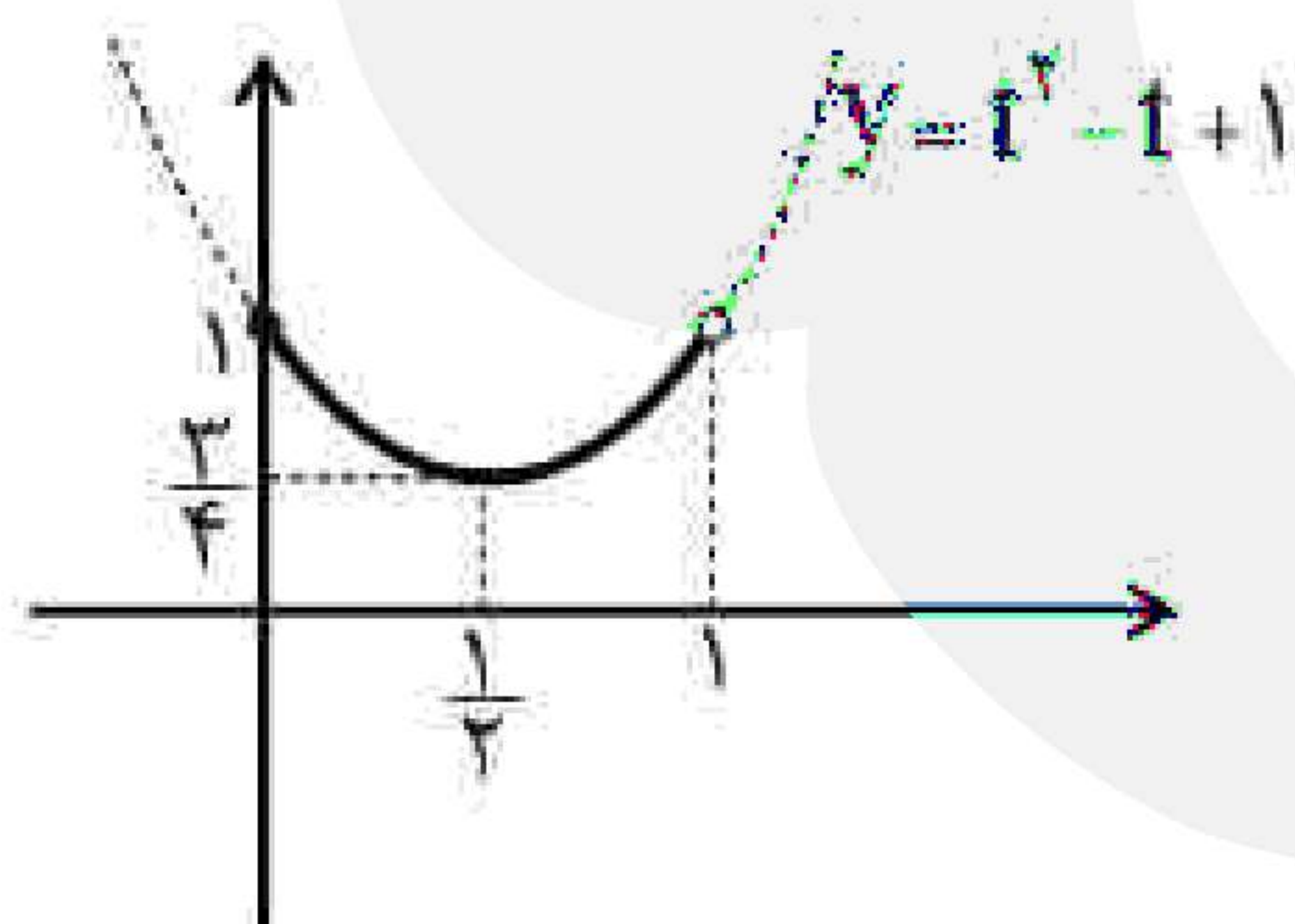
گزینه ۳ با حذف یکی از نقاط توپیر یک تابع می‌شود ولی خود نمودار یک تابع نیست.

۴- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$-2 - 1 - 1 - 1 + 2 = -3$$

$$\left| \frac{1}{2} \right| < 1, \quad |-2| > 1 \text{ و } |-1| = 1, \text{ پس داریم:}$$

۵- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. با تغییر متغیر $X - [X]$ به t نمودار تابع $y = t^2 - t + 1$ را در دامنه $0 \leq t < 1$ رسم می‌کنیم.



$$x_s = -\frac{b}{2a} = -\frac{-1}{2(1)} = \frac{1}{2} \Rightarrow y_s = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right) + 1 = \frac{3}{4}$$

برد تابع، بازه $\left[\frac{3}{4}, 1\right]$ است.



۶- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\begin{cases} f(x) = ax \\ f(x_0) = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ax = 6 \\ ax + a = 8 \end{cases} \Rightarrow a = 8 - 6 = 2$$

$$f(x_0 + 1) = a(x_0 + 1) = 8$$

$$f(x) = 2x$$

$$f(-1/5) = 2(-1/5) = -3/5$$

$$f(2/5) = 2(2/5) = 4/5$$

$$f(-1/5) + f(2/5) = -3/5 + 4/5 = 1/5$$

۷- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$1 < x < 2$$

$$|x - 2| = \begin{cases} x - 2 & x \geq 2 \\ -(x - 2) & x < 2 \end{cases}$$

$$|x - 1| = \begin{cases} x - 1 & x \geq 1 \\ -(x - 1) & x < 1 \end{cases}$$

$$|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

$$|x + 3| = \begin{cases} x + 3 & x \geq -3 \\ -(x + 3) & x < -3 \end{cases}$$

$$|x - 2| + |x - 1| + |x| - |x + 3| \stackrel{1 < x < 2}{=} -x + 2 + x - 1 + x - x - 3 = -2$$

۸- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$g(x) \Rightarrow \begin{cases} 3 - a = 0 \Rightarrow a = 3 \\ g(x) = K \end{cases}$$

$$f(x) = mx + n \Rightarrow \begin{cases} 6 = -2m + n \\ -3 = 4m + n \end{cases} \Rightarrow m = -\frac{3}{2}, n = 3 \Rightarrow f(x) = -\frac{3}{2}x + 3$$

$$\frac{f(14) \times g(-7)}{a^2} = \frac{(-18) \times (-9)}{9} = 18$$



۹- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. چون f همان است، پس $f(0) = 0$ ، یعنی:

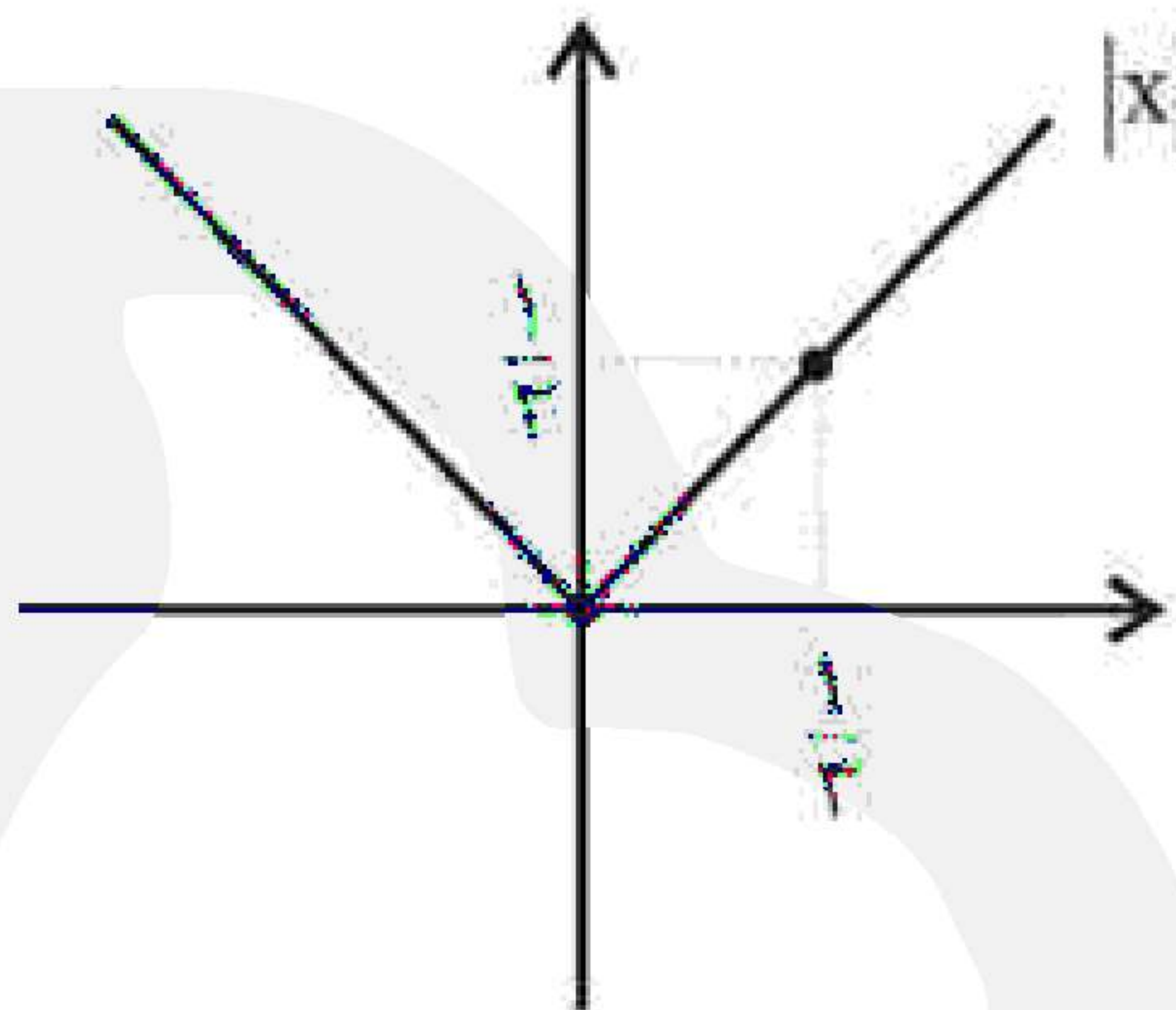
$$3x^2 - [x] = [-x] + 4x \Rightarrow 3x^2 - 4x = [x] + [-x]$$

تابع $y = [x] + [-x]$ تابع معروفی است که به ازای اعداد صحیح، خروجی صفر و به ازای اعداد غیر صحیح، خروجی ۱- می دهد. پس دو حالت زیر را در نظر می گیریم:

$$x \in \mathbb{Z}: 3x^2 - 4x = 0 \Rightarrow x(3x - 4) = 0 \Rightarrow x = \begin{cases} 0 \\ \frac{4}{3} \end{cases} \text{ غ ق ق}$$

$$x \notin \mathbb{Z}: 3x^2 - 4x = -1 \Rightarrow 3x^2 - 4x + 1 = 0 \Rightarrow x = \begin{cases} 1 \\ \frac{1}{3} \end{cases} \text{ غ ق ق}$$

در واقع تابع f ، یک تابع همانی دو عضوی به صورت $f = \left\{ (0, 0), \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) \right\}$ است و با توجه به نمودارهای زیر، دو تلاقی در همین دو نقطه با نمودار $g(x) = |x|$ دارد:



۱۰- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. چون سهمی دارای مینیمم مطلق است پس دهانه سهمی رو به بالا و به صورت \cup می باشد یعنی:

از طرفی مختصات رأس سهمی:

$$x_{\text{راس}} = \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{2(k-1)} < 0, \quad (\Delta = b^2 - 4ac > 0 \leftarrow ac < 0)$$

$$y_{\text{راس}} = -\frac{\Delta}{4a} = \frac{-\Delta}{4(k-1)} < 0.$$

بنابراین رأس سهمی در ناحیه سوم محورهای مختصات است.

«بانک سوال یاوران دانش»

۱۱- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. نمودار تابع یک سهمی رو به پایین است، بنابراین $x = -4$ و $x = 1$ صفرهای تابع هستند:

$$f(x) = -3(x-1)(x+4) = -3x^2 - 9x + 12$$

$$\downarrow \quad \downarrow$$

$$a = -9 \quad b = 12$$

$$b - a = 12 - (-9) = 21$$



۱۲- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. با داشتن ریشه‌های X_1 و X_2 یعنی صفرهای تابع درجه ۲ می‌توان معادله سهمی را به صورت $f(x) = k(x - X_1)(x - X_2)$ در نظر گرفت:

از طرفی با توجه به تقارن نمودار سهمی، طول ماکزیمم تابع وسط دو ریشه را $X_{\max} = \frac{-3 + 5}{2} = 1$ در نظر بگیریم.

با توجه به صورت تست: $f(1) = 32 \Rightarrow 32 = k(1 + 3)(1 - 5) \Rightarrow k = -2$

بنابراین ضابطه‌ی تابع $f(x) = -2(x + 3)(x - 5)$ یا به طور خلاصه $f(x) = -2x^2 + 4x + 30$ می‌شود و $a = -2$ و $b = 4$ و $c = 30$ و در نهایت حاصل $a + 2b + 3c$ برابر ۹۶ خواهد شد.

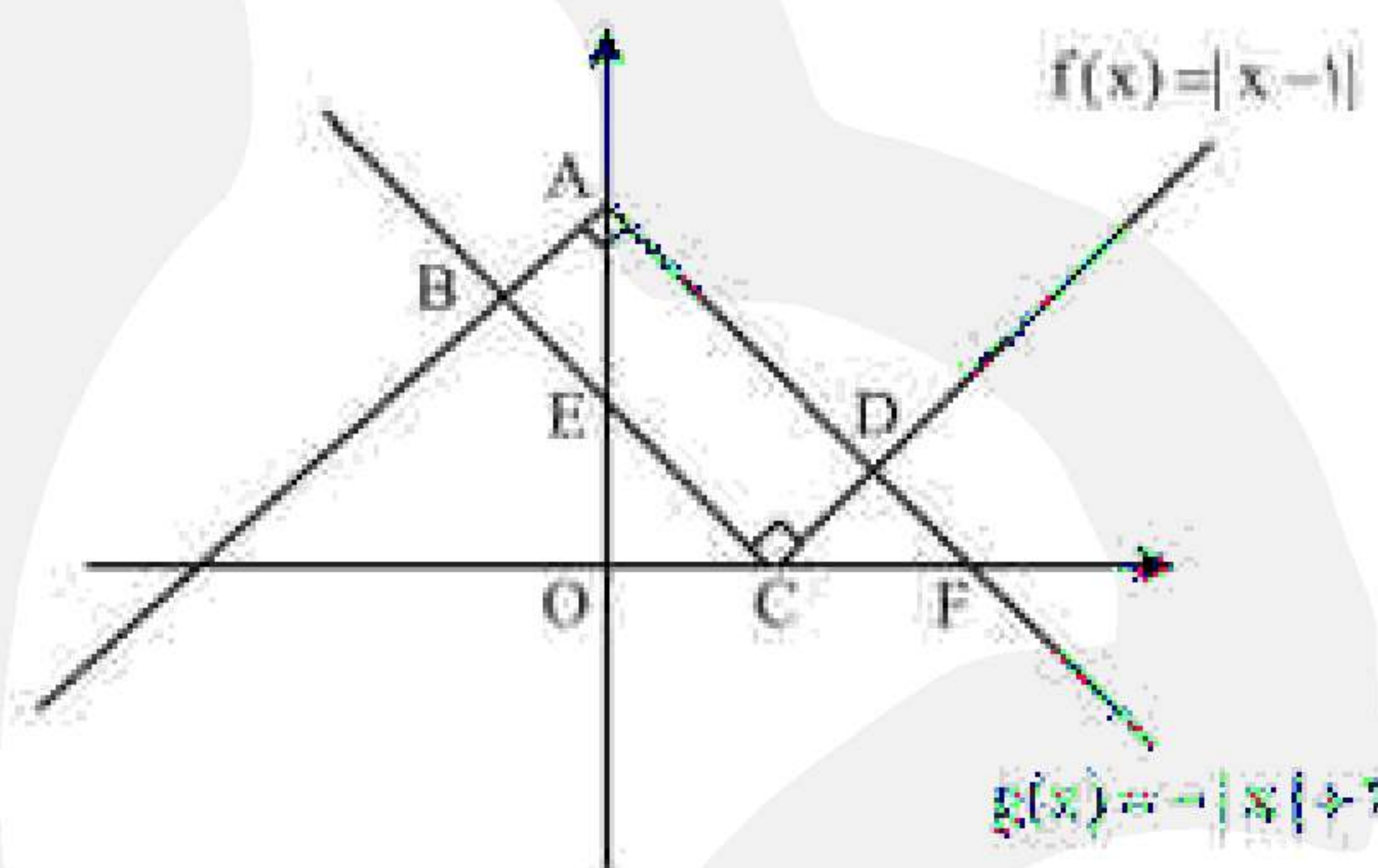
۱۳- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{-2b}{2} = -b = 0 \Rightarrow b = 0$$

$$f(x) = x^2 - 2 \Rightarrow x^2 - 2 = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$$

$$\text{اختلاف ۲ ریشه} = \sqrt{2} - (-\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}$$

۱۴- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.



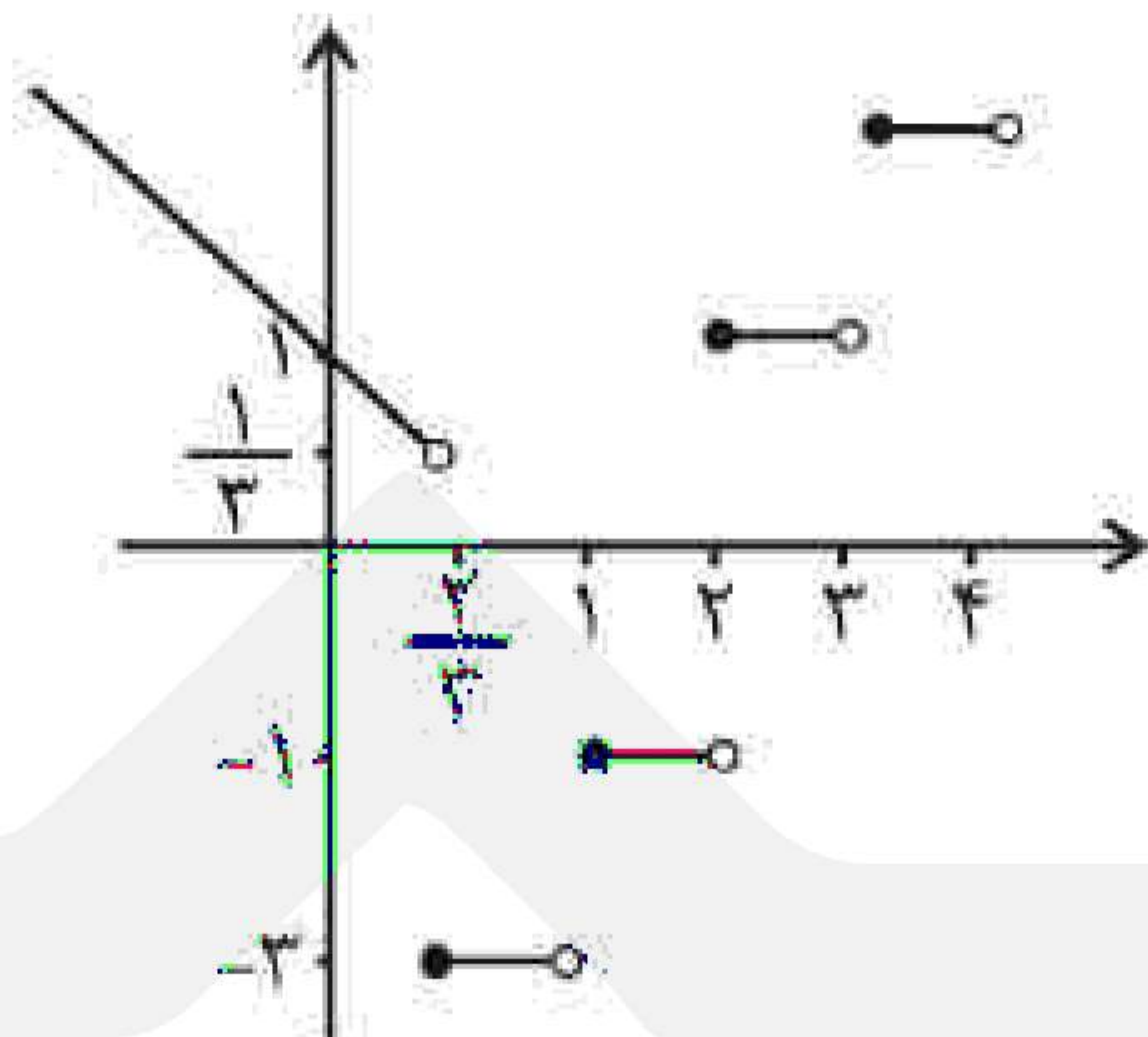
با توجه به شکل و برابری مساحت مثلث‌های $\triangle ABE$ ، $\triangle OEC$ و $\triangle CDF$:

$$\text{مساحت مستطیل } ABCD = S_{\triangle OAF} - S_{\triangle OCE} = \frac{2 \times 2}{2} - \frac{1 \times 1}{2} = \frac{3}{2}$$



۱۵- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ابتدا توجه کنید که $[3X] > 1$ معادل با $3X \geq 2$ یا همان $X \geq \frac{2}{3}$ است و البته $[3X] \leq 1$ معادل با $X < \frac{2}{3}$ است. پس داریم:

$$f(x) = \begin{cases} 2[X] - 3 & x \geq \frac{2}{3} \\ 1 - x & x < \frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow \{-3, -1, 1, 2, 3, \dots\} \in f$$



۱۶- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. تابع \sqrt{x} و $-\sqrt{-x}$ صعودی هستند، پس $f(x)$ نیز تابعی صعودی و چون دارای دامنه $-5 \leq x \leq 4$ می باشد، داریم:

$$f(-5) \leq f(x) \leq f(4) \Rightarrow R_f = [-3, 3]$$

$$\frac{x^2 + 2}{x^2 + 3} = \frac{x^3 + 3 - 1}{x^2 + 3} = 1 - \frac{1}{x^2 + 3}$$

$$0 < \frac{1}{x^2 + 3} < 1 \Rightarrow 0 < 1 - \frac{1}{x^2 + 3} < 1 \Rightarrow \left[\frac{x^2 + 2}{x^2 + 3} \right] = 0$$

$$f(x) = 0, \quad D_f = \mathbb{R}$$

$$g(x) = 0, \quad D_g = \mathbb{R} \Rightarrow f(x) = g(x)$$

۱۷- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

۱۸- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$f(x) + g(x) = (f + g)(x) = 3[X] - 2x + 1 + 3x - 4[X] - 3 = -[X] + x - 2$$

$$(f + g)(x) = -[X] + x - 2 = x \Rightarrow [X] = -2 \Rightarrow -2 \leq x < -1$$

$$[a, b) = [-2, -1) \Rightarrow a = -2, b = -1$$

$$a + b = -3$$



«بانک سوال یاوران دانش»

۱۹- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. رابطه صورت سؤال را یکبار به توان ۲ و یکبار به توان ۳ می‌رسانیم.

$$x + \frac{1}{x} = \sqrt{5} \xrightarrow{\text{به توان ۲}} x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 = 5 \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = 3$$

$$x + \frac{1}{x} = \sqrt{5} \xrightarrow{\text{به توان ۳}} x^3 + \frac{1}{x^3} + 3x \times \frac{1}{x} \left(x + \frac{1}{x} \right) = \sqrt{5}^3$$

$$\Rightarrow x^3 + \frac{1}{x^3} + 3\sqrt{5} = 5\sqrt{5} \Rightarrow x^3 + \frac{1}{x^3} = 2\sqrt{5}$$

حالا در هم ضرب می‌کنیم:

$$\begin{cases} x^2 + \frac{1}{x^2} = 3 \\ x^3 + \frac{1}{x^3} = 2\sqrt{5} \end{cases} \xrightarrow{\times} x^5 + \frac{1}{x^5} + x + \frac{1}{x} = 6\sqrt{5} \Rightarrow x^5 + \frac{1}{x^5} = 5\sqrt{5} = \sqrt{125}$$

که جزء صحیح آن می‌شود ۱۱ زیرا:

$$11 < \sqrt{125} < 12$$

ثانیه اول

ثانیه دوم

.

.

.

ثانیه nام

$$D : \{1, 2, 3, \dots, n\} \subset \mathbb{N}$$

۲۰- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

۲۱- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. تابع $f(x)$ به دلیل زیر تابعی درجه ۲ است.

$$f(x+2) - f(x) = 8x - 2$$

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

$$f(x+2) - f(x) = 4ax + 4a + 2b = 8x - 2$$

$$\Rightarrow a = 2, b = -5, f(0) = c = -1 \Rightarrow f(5) = 2(5)^2 - 5(5) - 1 = 24$$



۲۲- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

یادآوری:

$$[x] + [-x] = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Z} \\ -1 & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$x \notin \mathbb{Z} \Rightarrow [x] + [-x] = -1$$

$$[x + 2[-x]] + [x] + 1 - 2 = [x] + 2[-x] + [x] - 1 = 2[x] + 2[-x] - 1 = 2([x] + [-x]) - 1$$

$$2(-1) - 1 = -3$$

۲۳- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

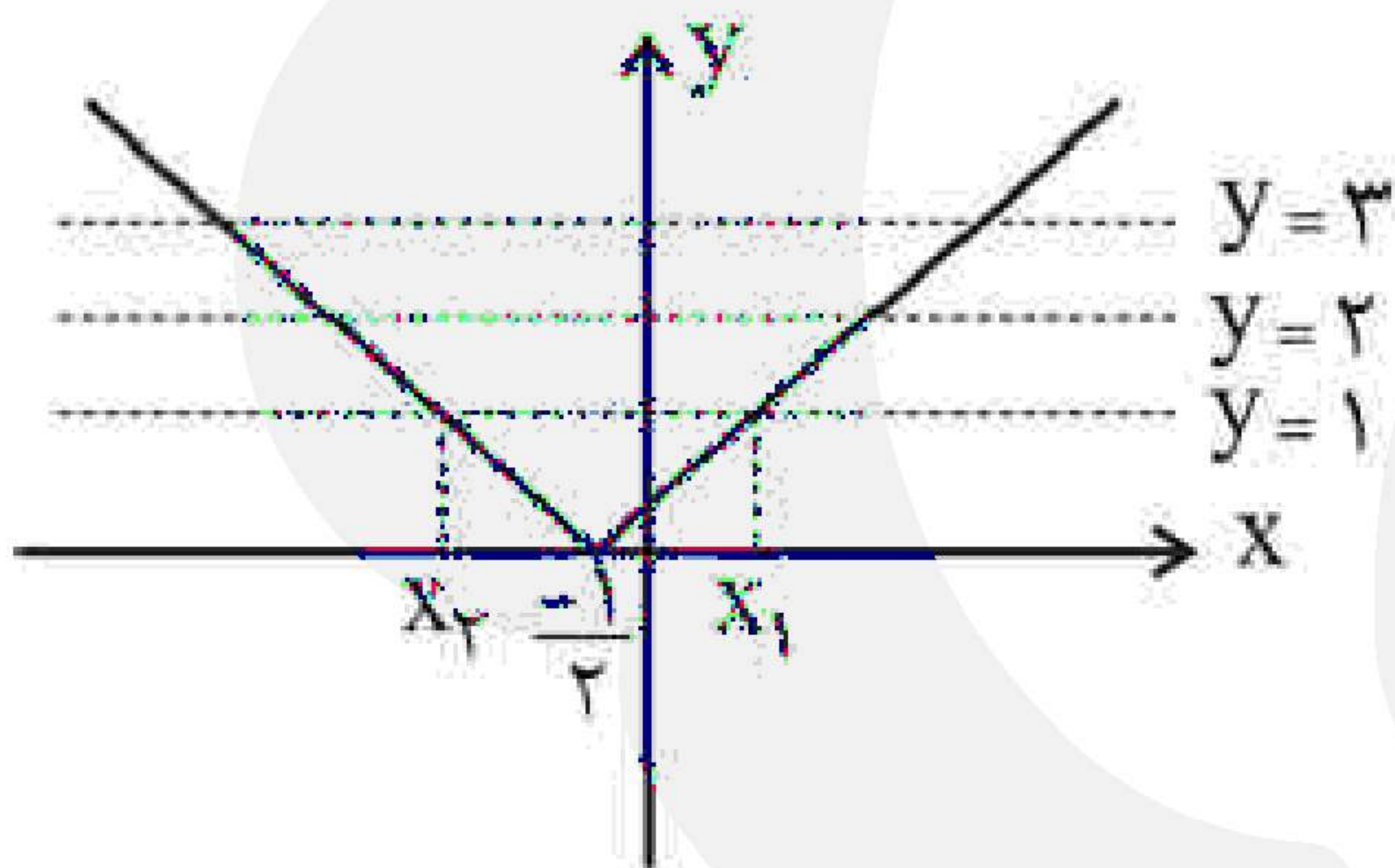
$$\begin{aligned} x+1 \leq 5-x < 2x+3 \\ \downarrow \qquad \qquad \downarrow \\ 2x \leq 4 \qquad 5-3 < 2x+x \\ \downarrow \qquad \qquad \downarrow \\ x \leq 2 \quad (1) \qquad 2 < 3x \\ \qquad \qquad \downarrow \\ \qquad \qquad x > \frac{2}{3} \quad (2) \end{aligned}$$

اشتراک $1, 2 \rightarrow$ مجموعه جواب $= (\frac{2}{3}, 2]$

$$y = \frac{|3x-2|}{+} + \frac{|x-3|}{-} + \frac{|4-2x|}{+}$$

$$y = 3x - 2 - x + 3 + 4 - 2x \Rightarrow y = 5$$

با تعیین علامت هریک از عبارات داخل قدرمطلق در بازه بالا:



۲۴- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. تابع هریک از مقادیر ۱ و ۲ و

۳ را دو بار می گیرد. پس مثلاً برای وجود ۱ در برد وجود

x_1 یا x_2 یا هر دو در دامنه لازم است.

۳ حالت \Rightarrow هر دو یا x_2 یا x_1

پس $3 \times 3 \times 3$ حالت برای دامنه داریم. یعنی A دارای ۲۷

حالت است.

$$f(x) = \frac{[x] - x + 1}{\sqrt{[x] - x + 1}} = \sqrt{[x] - x + 1}$$

۲۵- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$-1 < [x] - x \leq 0 \Rightarrow 0 < [x] - x + 1 \leq 1 \Rightarrow D_f = \mathbb{R}$$

$$\begin{cases} [x] - x = 0, & x \in \mathbb{Z} \\ -1 < [x] - x < 0, & x \notin \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} [x] - x + 1 = 1 & x \in \mathbb{Z} \\ 0 < [x] - x + 1 < 1 & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

در نتیجه:



$$f(x) = \frac{x^2 + 2 + 1}{\sqrt{x^2 + 2}} = \sqrt{x^2 + 2} + \frac{1}{\sqrt{x^2 + 2}} > 2$$

۲۶- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$x^2 = 0 \Rightarrow \sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} \Rightarrow R_f = \left[\frac{3\sqrt{2}}{2}, +\infty \right)$$

۲۷- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. تابع خطی f را به صورت $f(x) = mx + h$ در نظر می‌گیریم:

$$f(0) = 0 \Rightarrow 0 + h \Rightarrow h = 0$$

$$f(x) = mx \Rightarrow f(-1) = -m + a \Rightarrow a = -m$$

$$f(1) = m = b$$

$$g(x) = \frac{ax + b}{bx + 1} = \frac{-mx + m}{mx + 1} = \frac{-m(x - 1)}{m\left(x + \frac{1}{m}\right)}$$

$$a^2 + b^2 = 1 + 1 = 2$$

باید $x - 1 = x + \frac{1}{m}$ باشد، پس $m = -1$ و در نتیجه:

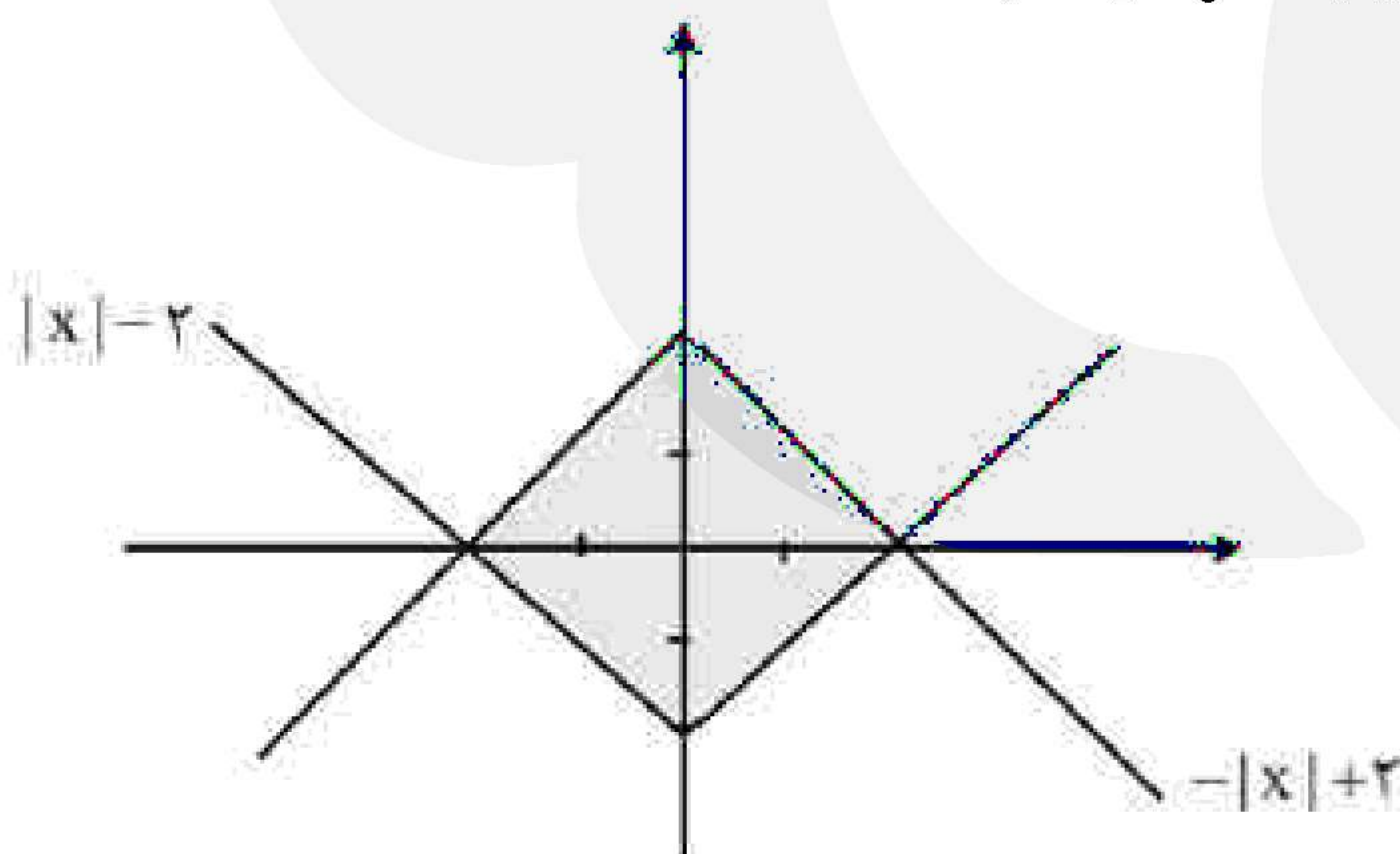
۲۸- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. در تابع همانی $f(x) = x$ باید باشد

$$\frac{bx^2 + ax - c + 1}{x + 2} = x \Rightarrow bx^2 + ax - c + 1 = x^2 + 2x$$

با مقایسه نظیر به نظیر: $b = 1, a = 2, c = 1 \leftarrow -c + 1 = 0$

$$a^2 + b^2 + c^2 = 4 + 1 + 1 = 6$$

۲۹- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ناحیه بین دو نمودار یک لوزی به قطرهای ۴ و ۴ است.



$$\text{مساحت لوزی} = \frac{4 \times 4}{2} = 8$$



«بانک سوال یاوران دانش»

۳۰- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. تساوی دو تابع f و g فقط در گزینه‌ی ۴ درست است، زیرا:

$$f(x) = \sqrt{x} \times \sqrt{1-x}$$

$$x \geq 0 \text{ اشتراک } x \leq 1 \Rightarrow D_f = [0, 1] = D_g$$

$$g(x) = \sqrt{x(1-x)} \Rightarrow x(1-x) \geq 0 \Rightarrow \text{بردها هم یکسان است چون ضرب رادیکال‌ها است.}$$

بررسی سایر گزینه‌ها:

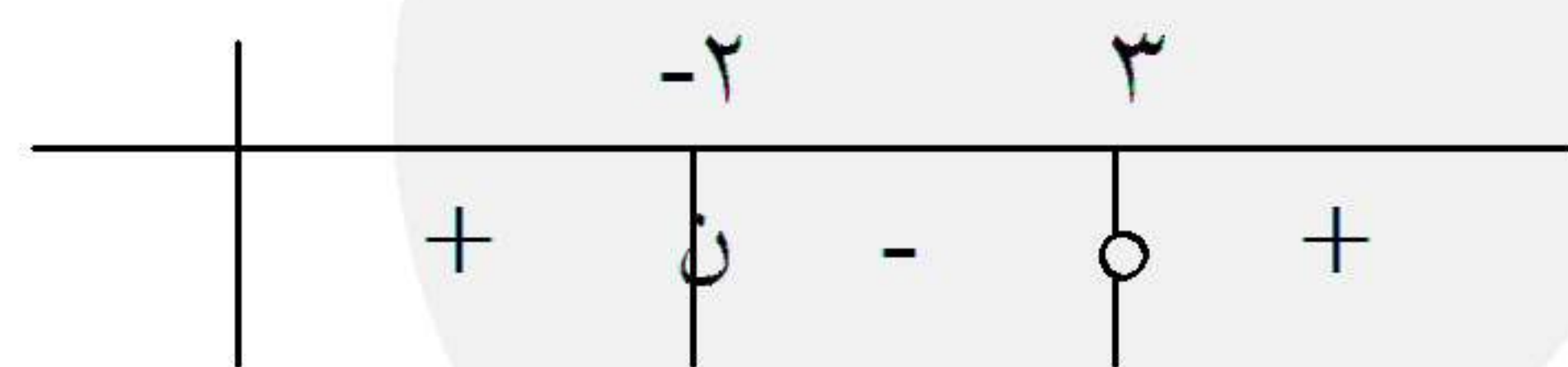
$$\text{گزینه ۱: } D_g = (0, +\infty) \neq D_f = \mathbb{R} - \{0\} \text{ هر چند: } R_f = R_g = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$$

$$\text{گزینه ۲: } D_g = \mathbb{R} - \{0\} \neq D_f = \mathbb{R} \text{ ضمناً: } R_f = \{1\} \neq R_g = \{-1, 1\}$$

$$\text{گزینه ۳: } D_g = \mathbb{R} - \{1\} \neq D_f = \mathbb{R}; R_f = R_g = \{1\}$$

۳۱- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\frac{(x-a)^4(x-b)}{x-c} \geq 0 \quad \text{برای تعیین دامنه تابع } f(x) = \sqrt{\frac{(x-a)^4(x-b)}{x-c}} \text{ داریم:}$$



می‌دانیم که مجموعه جواب این تعیین علامت به صورت زیر درآمده است:

چون $(x-a)^4$ همواره نامنفی است، حتماً ریشه $x=3$ مربوط به پرانتز $(x-b)$ در صورت است، ریشه $x=-2$ نیز مربوط به پرانتز $(x-c)$ در مخرج است. یعنی:

$$\begin{cases} b=3 \\ c=-2 \end{cases}$$

از طرفی ریشه $x=a$ باید به این مجموعه جواب اضافه شود، یعنی مثلاً اگر $a=1$ باشد، مجموعه جواب به صورت $\{1\} \cup [3, +\infty) \cup (-\infty, -2)$ می‌شود، از آنجا که چنین اتفاقی رخ نداده، $x=a$ یا ریشه مخرج است یا در مجموعه جواب داده شده موجود بوده و نیازی به اضافه کردن آن نبوده، یعنی:

$$a \leq -2 \text{ یا } 3 \leq a$$

پس a ، مقدار صحیح -1 و 0 و 1 و 2 را نمی‌تواند اختیار کند.

۳۲- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$m + 2n = 2, m^2 + n^2 = \frac{5}{4}, 2m^2 + n^2 = \frac{9}{4}$$

$$\Rightarrow m^2 = \frac{9}{4} - \frac{5}{4} = 1 \Rightarrow n^2 = \frac{1}{4}, m = \pm 1$$

پس $n = \pm \frac{1}{2}$ ، چون $m + 2n = 2$ ، مقادیر دیگر n و m نادرست هستند و در نتیجه $2m - 2n = 1$ می‌شود.



۳۳- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

دو شرط برای همواره نامثبت بودن عبارت درجه ۲

$$-3x^2 + 2x \leq mx + 3 \Rightarrow -3x^2 + (2-m)x - 3 \leq 0$$

$$\begin{cases} a < 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3 < 0 \\ (2-m)^2 - 4(-3)(-3) \leq 0 \Rightarrow (2-m)^2 \leq 36 \end{cases}$$

$$-6 \leq 2-m \leq 6$$

$$\downarrow (-2)$$

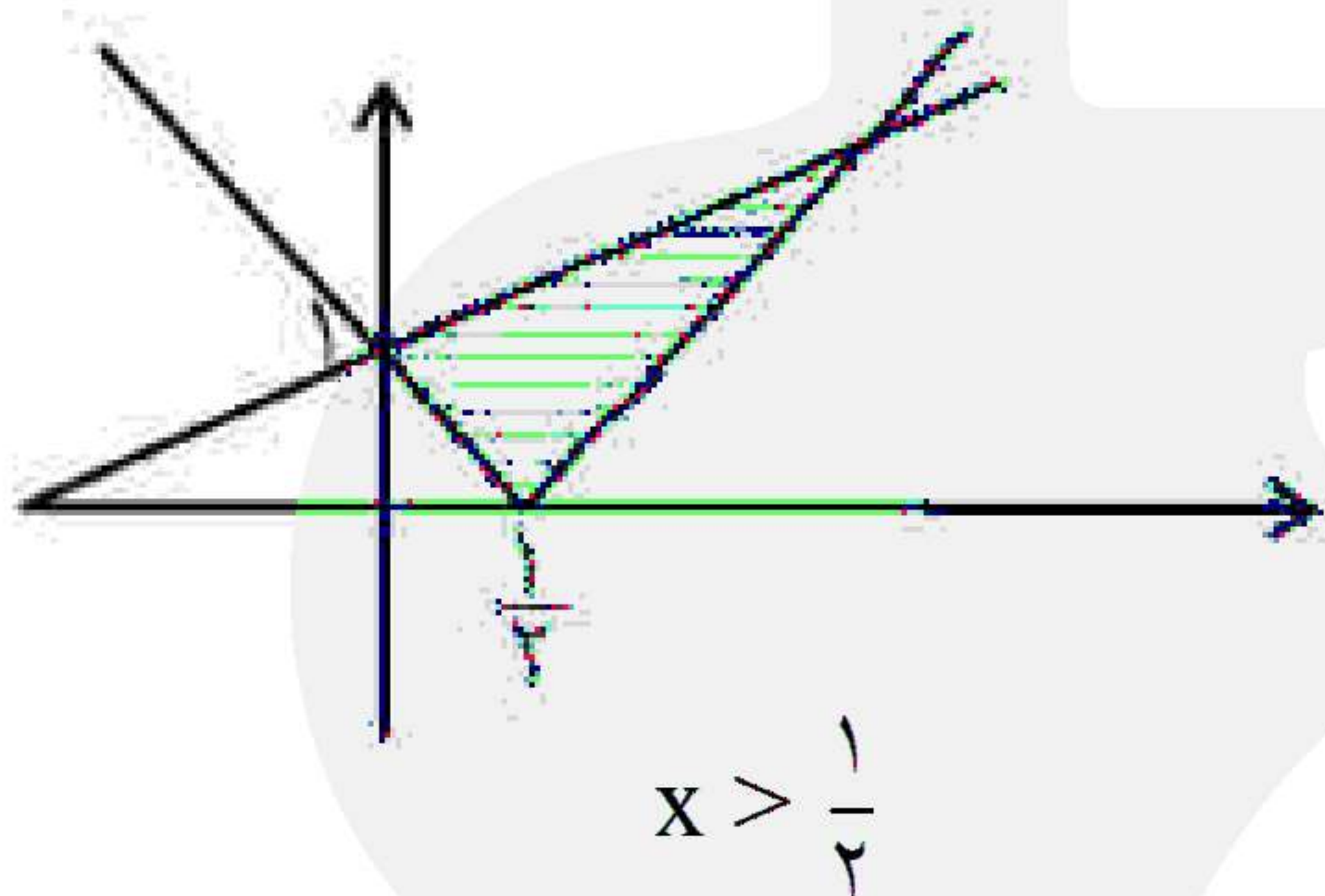
$$-8 \leq -m \leq 4$$

$$\downarrow \times (-1)$$

$$-4 \leq m \leq 8$$

$$\downarrow m \in \mathbb{Z}$$

مقادیر m شامل ۱۳ عدد صحیح است $m = \{-4, -3, \dots, 7, 8\}$



۳۴- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. نمودارهای دو تابع را رسم می‌کنیم.

ناحیه بین دو نمودار به شکل مثلثی با دو رأس $(\frac{1}{2}, 0)$ و

$(0, 1)$ است. برای یافتن مختصات رأس سوم باید ضابطه دو

تابع را مساوی بگذاریم:

$$|2x - 1| = x + 1 \xrightarrow{x > \frac{1}{2}} 2x - 1 = x + 1 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow y = 3$$

مساحت مثلثی به رأس‌های $(\frac{1}{2}, 0)$ ، $(0, 1)$ ، $(2, 3)$ را به روش زیر می‌یابیم:

$$S = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \left((0 \times 3 + 2 \times 0 + \frac{1}{2} \times 1) - (2 \times 1 + \frac{1}{2} \times 3 + 0 \times 0) \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{7}{2} \right) = -\frac{3}{2}$$

با توجه به مثبت بودن مقدار مساحت $S = \frac{3}{2}$ درست است.

$$2x - 3 = 5 \Rightarrow x = 4 \Rightarrow 2(4)^2 - 4 \times 4 + 5 = 21$$

$$2x - 3 = -1 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow 2(1)^2 - 4(1) + 5 = 3$$

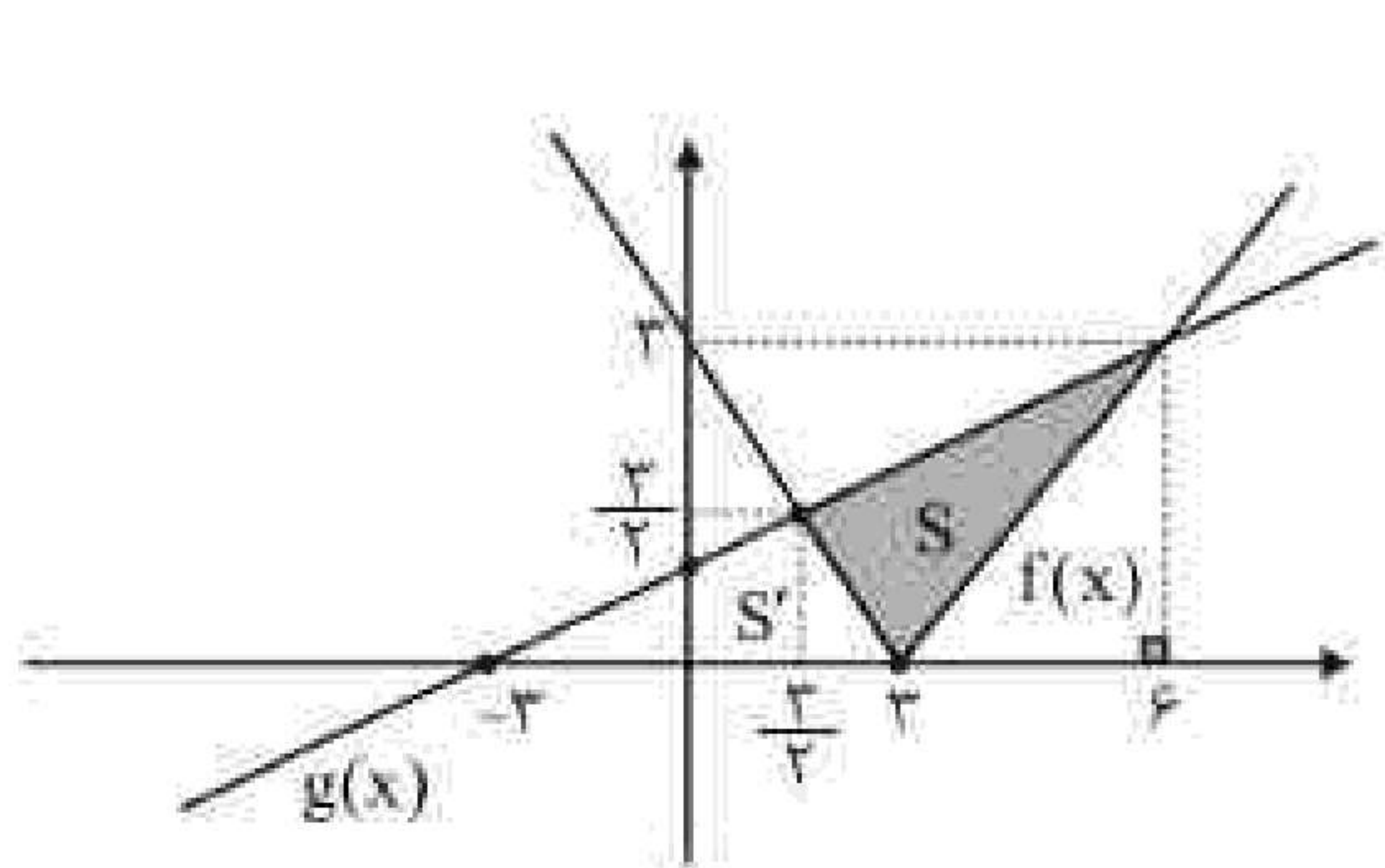
$$f(5) = 21, f(-1) = 3$$

$$f(5) - f(-1) = 21 - 3 = 18$$

۳۵- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.



۳۶- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

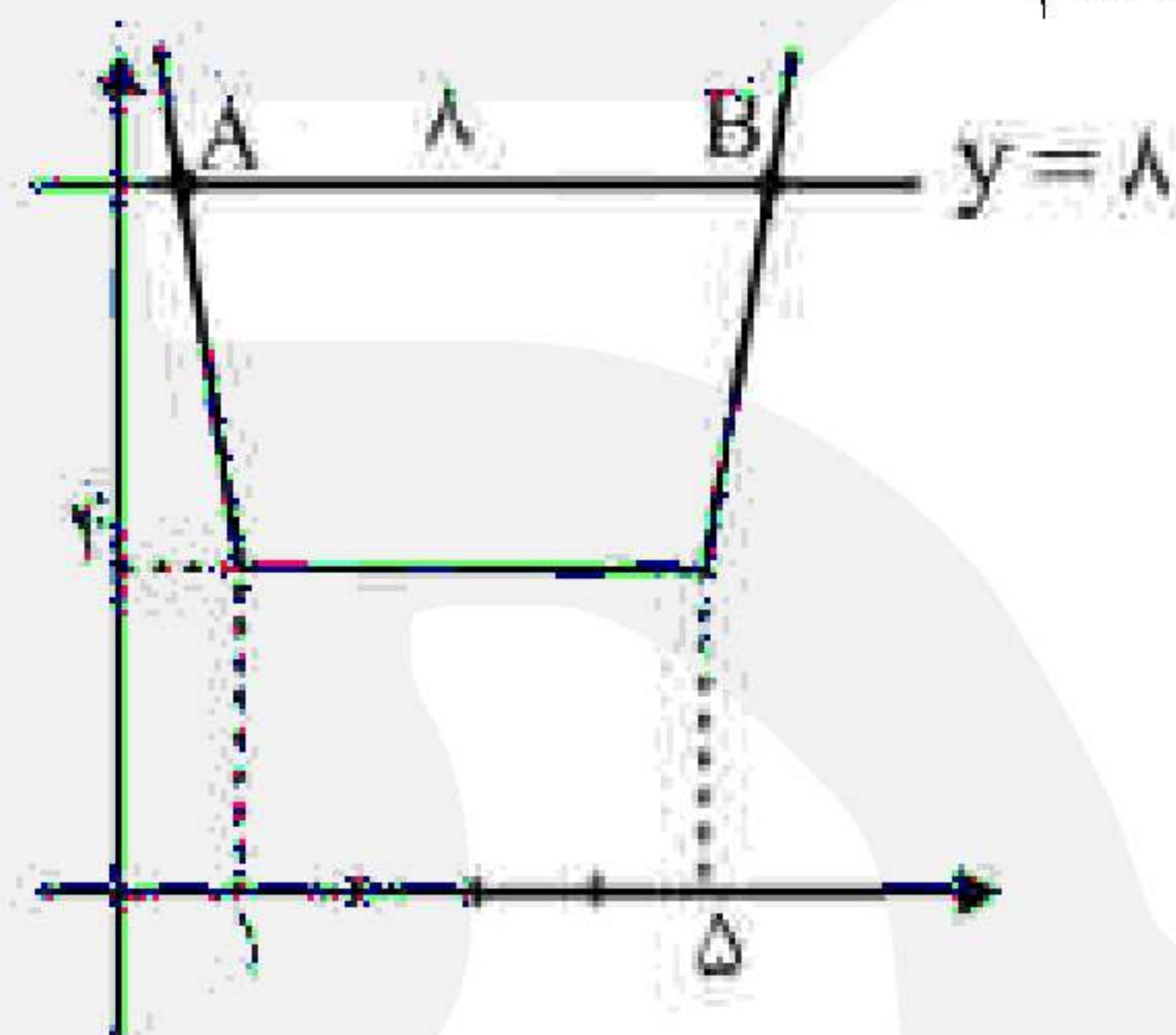


$$f(x) = \sqrt{(x-3)^2} = |x-3|$$

$$|x-3| = \frac{1}{3}x + 1 \quad \begin{cases} x=6, y=3 \\ x=\frac{3}{2}, y=\frac{3}{2} \end{cases}$$

$$S = \frac{6 \times 3}{2} - \frac{6 \times \frac{3}{2}}{2} = \frac{18}{4} = 4.5$$

۳۷- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. به جای محاسبه‌ی مساحت محدود بین دو نمودار داده شده می‌توانیم مساحت محدود به توابع $y = 8$ و $y = |x-1| + |x-5|$ را به دست آوریم:



$$|x-1| + |x-5| = 8 \Rightarrow S = \frac{1}{2}(8+4) \times 4 = 24$$

$$x = \frac{-b}{2a} = 2 \Rightarrow b = -4a \quad (1)$$

صدق در ضابطه $(2, 0) \rightarrow 0 = 4a + 2b + c \quad (2)$

محور y ها $(0, 4) = 0 + 0 + c \Rightarrow c = 4 \quad (3)$

$1, 2, 3 \Rightarrow 0 = 4a + 2(-4a) + 4 \Rightarrow a = 1, b = -4$

$$f(x) = x^2 - 4x + 4$$

$$f(a+b+c-4) = f(1-4+4-4) = f(-3) = (-3)^2 - 4(-3) + 4 = 25$$

«بانک سوال یاوران دانش»

۳۹- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. برای آنکه نمودار سهمی بر نیمساز ناحیه سوم (خط $y = x$ با شرط $x < 0$ و $y < 0$) مماس باشد، باید معادله برخوردشان ریشه مضاعف ($\Delta = 0$) داشته باشد:

$$2x^2 + (m+1)x + m+6 = x \Rightarrow 2x^2 + mx + m+6 = 0 \quad \Delta = 0$$

$$m^2 - 4(2)(m+6) = 0 \Rightarrow m^2 - 8m - 48 = 0$$

$$(m-12)(m+4) = 0 \quad \begin{cases} m=12 \Rightarrow 2x^2 + 12x + 18 = 0 \Rightarrow x = -3 \\ m=-4 \Rightarrow 2x^2 - 4x + 2 = 0 \Rightarrow x = 1 \end{cases}$$

بنابراین با شرایط مسئله فقط $m = 12$ است.



۴۰- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. طول نقطه رأس $2 = \frac{-1+5}{2} = -\frac{b}{2a}$ و در نتیجه دو نقطه برخورد با محور x ها به ترتیب $\alpha = 3$ و $\beta = 2 \times 2 - 3 = 1$ قطع کرده و ضابطه تابع $f(x) = a(x-1)(x-3)$ و $f(0) = 1$ است.

$$a(-1)(-3) = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{3} \Rightarrow f(4) = 1$$

۴۱- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$f(x) = 2(x^2 - 4x + 4) + 4x - 3 = 2x^2 - 8x + 8 + 4x - 3$$

$$f(x) = 2x^2 - 4x + 5 = 2(x^2 - 2x + 1) + 3 = 2(x-1)^2 + 3 \geq 3$$

$$R_f = [3, +\infty)$$

۴۲- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$x - \sqrt{x+2} = 0 \Rightarrow x^2 = x + 2 \Rightarrow x = 2$$

$$x - \sqrt{x+2} = -2 \Rightarrow x + 2 = \sqrt{x+2} \Rightarrow x + 2 = 0 \text{ یا } 1 \Rightarrow x = -2, -1$$

$$x - \sqrt{x+2} = 4 \Rightarrow x - 4 = \sqrt{x+2} \Rightarrow x = 7$$

تمام زیرمجموعه‌های $\{2, -1, -2, 7\}$ می‌تواند دامنه باشند، پس ۱۶ مجموعه وجود دارد.

۴۳- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. باید دامنه تابع $f(x) = \sqrt{ax^2 + 8x + c} + d$ به صورت $\{2\}$ باشد، پس حتماً زیر

رادیکال $(x-2)^2$ با ضریب منفی داریم:

$$ax^2 + 8x + c = k(x^2 - 4x + 4) \Rightarrow k = -2 \Rightarrow a = -2, c = -8$$

$$d = 1 \quad \text{پس } f(x) = \sqrt{-2(x-2)^2} + d \text{ و باید } f(2) = g(2) = 1 \text{ باشد، پس } d = 1 \text{ و داریم:}$$

$$d - c - a = 11 \quad \text{و بنابراین:}$$

۴۴- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. f تابع همانی است پس $f(x) = x$:

$$b = 1, 2a + 3 = -1 \Rightarrow a = -2$$

$$b + 1 = c \Rightarrow c = 2$$

از طرف دیگر $g(x) = (1+e)x^2 + (c-2)x + b+1$ یک تابع ثابت است، پس:

$$1+e=0, c-2=0$$

$$\boxed{e = -1} \quad \boxed{c = 2} \xrightarrow{b=1} \boxed{g(x) = 2}$$

بیشترین مقدار تابع قدرمطلق $h(x)$ مطابق برد داده شده و با شرط $n > 0$ در $x = 2$ اتفاق می‌افتد که برابر ۴ است:

$$h(2) = 4 \Rightarrow m = 4$$

$$h(2) = 4 \Rightarrow m = 4 \quad \text{محل برخورد با محور } y \text{ ها: } (0, -6) \Rightarrow -6 = 4 - 2n \Rightarrow n = 5 \Rightarrow h(x) = 4 - 5|2 - x|$$

$$g(mc + n) - h(a - b + e) = g(13) - h(-4) = 2 - (-26) = 28$$



۴۵- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. با فرض $S(h, k)$ به عنوان رأس سهمی، معادله آن به صورت $f(x) = a(x - h)^2 + k$ است:

$$f(x) = a(x + 1)^2 + 5 \xrightarrow{f(1) = 13} 13 = a(2)^2 + 5 \Rightarrow a = 2$$

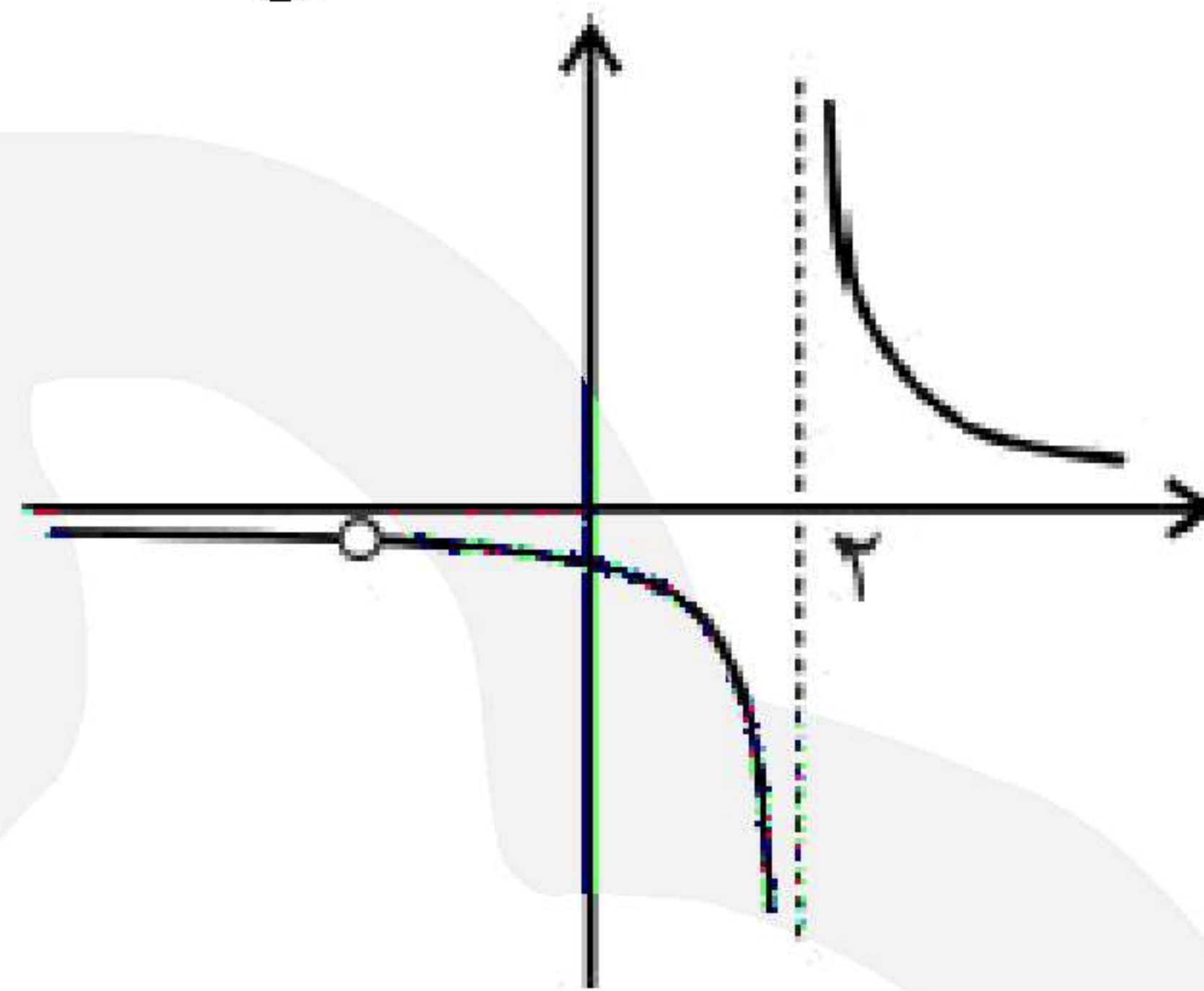
$$f(x) = 2(x + 1)^2 + 5 = 2x^2 + 4x + 7 \Rightarrow b = 4, c = 7$$

$$f(a + b + c) = f(2 + 4 + 7) = f(13) = 5$$

۴۶- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ضابطه $g(x)$ را می‌یابیم:

$$\begin{aligned} f(x) - g(x) &= \frac{2}{x+1} \Rightarrow g(x) = f(x) - \frac{2}{x+1} = \frac{3x-3}{(x-2)(x+1)} - \frac{2}{x+1} \\ &= \frac{3x-3}{(x-2)(x+1)} - \frac{2(x-2)}{(x-2)(x+1)} = \frac{3x-3-2x+4}{(x-2)(x+1)} = \frac{x+1}{(x-2)(x+1)} = \frac{1}{x-2} \end{aligned}$$

بزرگ‌ترین دامنه تابع $g(x)$ مجموعه $R - \{-1, 2\}$ است. نمودار تابع را در این مجموعه رسم می‌کنیم.



۴۷- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. فقط دامنه‌ی تعداد درختان کاشته شده در کشور، مجموعه‌ی اعداد طبیعی است که با نظیر کردن درختان با مجموعه‌ی اعداد طبیعی، تعدادشان به دست می‌آید.

«بانک سوال یاوران دانش»

$$n = 5 \Rightarrow f(5) = 5 + x(n - 5) = 5 + 0 = 5$$

$$n = 6 \Rightarrow f(6) = 5 + x(6 - 5) = 25 \Rightarrow 5 + x = 25 \Rightarrow x = 20$$

$$x = 20 \Rightarrow 2 + 0 = 2$$

۴۸- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.



$$2|2x-1|^2 - 5|2x-1| + 2 = 0 \Rightarrow |2x-1| = A$$

$$2A^2 - 5A + 2 = 0 \Rightarrow A = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{4} = \frac{5 \pm 3}{4} = \begin{cases} 2 \\ \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$|2x-1| = 2 \Rightarrow \begin{cases} 2x-1 = 2 \Rightarrow x_1 = \frac{3}{2} \\ 2x-1 = -2 \Rightarrow x_2 = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$|2x-1| = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} 2x-1 = \frac{1}{2} \Rightarrow x_3 = \frac{3}{4} \\ 2x-1 = -\frac{1}{2} \Rightarrow x_4 = \frac{1}{4} \end{cases}$$

$$\text{حاصل جمع ریشه‌ها} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 2$$

$$a_n \text{ جملات دنباله: } 0, 1, 0, 1, 0, 1, \dots$$

$$b_n \text{ جملات دنباله: } 2, 0, 1, 0, 1, 0, \dots$$

$$a_1 + b_1 = 0 + 2 = 2$$

$$a_2 + b_2 = 1 + 0 = 1$$

$$a_3 + b_3 = 0 + 1 = 1$$

.

.

.

$$a_n + b_n = 1$$

$$2 + (n-1)(1) = 100 \Rightarrow n = 99$$

۴۹- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

۵۰- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.