

# گنجینه سوال رایگان

+ پاسخ تشریحی

## یاوران دانش



راه های ارتباطی با ما:

[www.Dyavari.com](http://www.Dyavari.com)

۰۲۱-۷۶۷۰۳۸۵۸

۰۹۱۲-۳۴ ۹۴ ۱۳۴





- |      | ۱                                   | ۲                                   | ۳                                   | ۴                                   |
|------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|
| ۱ -  | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            |
| ۲ -  | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input checked="" type="checkbox"/> |
| ۳ -  | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            |
| ۴ -  | <input type="checkbox"/>            | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            |
| ۵ -  | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input checked="" type="checkbox"/> |
| ۶ -  | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            |
| ۷ -  | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            |
| ۸ -  | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            |
| ۹ -  | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            |
| ۱۰ - | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            |
| ۱۱ - | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input checked="" type="checkbox"/> |
| ۱۲ - | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            |
| ۱۳ - | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            |
| ۱۴ - | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input checked="" type="checkbox"/> |
| ۱۵ - | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            |
| ۱۶ - | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input checked="" type="checkbox"/> |
| ۱۷ - | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            |
| ۱۸ - | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            |
| ۱۹ - | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            |
| ۲۰ - | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            |
| ۲۱ - | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input checked="" type="checkbox"/> |
| ۲۲ - | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            |
| ۲۳ - | <input type="checkbox"/>            | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            |
| ۲۴ - | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            |
| ۲۵ - | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            |
| ۲۶ - | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input checked="" type="checkbox"/> |
| ۲۷ - | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            |
| ۲۸ - | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            |
| ۲۹ - | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input checked="" type="checkbox"/> |
| ۳۰ - | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            |
| ۳۱ - | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            |
| ۳۲ - | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input checked="" type="checkbox"/> |
| ۳۳ - | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input checked="" type="checkbox"/> |
| ۳۴ - | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input checked="" type="checkbox"/> |

- |      | ۱                        | ۲                        | ۳                                   | ۴                                   |
|------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|
| ۳۵ - | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            |
| ۳۶ - | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            | <input checked="" type="checkbox"/> |
| ۳۷ - | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            | <input checked="" type="checkbox"/> |
| ۳۸ - | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            |





۱- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$f(x) = \sqrt{ax - 1} \Rightarrow \text{شیب خط مماس } f'(x) = \frac{a}{2\sqrt{ax - 1}}$$

$$m = \frac{2-1}{2+1} = \frac{1}{3} \quad \text{شیب خط گذرنده از دو نقطه}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{2\sqrt{ax - 1}} = \frac{1}{3} \Rightarrow 3a = 2\sqrt{ax - 1} \quad (1)$$

$$y = \frac{1}{3}x + \frac{4}{3} \Rightarrow 3y = x + 4 \Rightarrow x + 4 = 2\sqrt{ax - 1} \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow x + 4 = 2\left(\frac{3a}{2}\right) = 3a \Rightarrow x = 3a - 4$$

$$2 \Rightarrow 3a - 4 + 4 = 2\sqrt{a(3a - 4) - 1} \Rightarrow 9a^2 - 16a - 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ a = -\frac{2}{9} \end{cases}$$

$$f(5) = \sqrt{2 \times 5 - 1} = \sqrt{9} = 3$$

راه دوم:

$$B(-1, 1) \Rightarrow \text{معادله خط مماس } y = \frac{x + 4}{3}$$

پس اگر خط مماس را با تابع قطع دهیم باید ریشه مضاعف داشته باشد:

$$\frac{x + 4}{3} = \sqrt{ax - 1} \Rightarrow x + 4 = 3\sqrt{ax - 1} \Rightarrow x^2 + 8x + 16 = 9ax - 9$$

$$x^2 + (8 - 9a)x + 25 = 0 \xrightarrow{\Delta = 0} \begin{cases} 8 - 9a = 10 \Rightarrow a = -\frac{2}{9} \\ 8 - 9a = -10 \Rightarrow a = 2 \end{cases}$$

$$f(x) = \sqrt{2x - 1} \Rightarrow f(5) = \sqrt{9} = 3$$

۲- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. چون تابع در  $x < a$ ,  $x \geq a$  مشتق پذیر است، پس نقطه گوشه  $x = a$  است.

$$x = a \Rightarrow f(x) \quad \checkmark \text{ پیوسته}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ m(x - a)^{m-1} & x > a \end{cases}$$

$$f'_-(a) = 0 \Rightarrow f'_+(a) \neq 0 \Rightarrow m(a - a)^{m-1} \neq 0 \Rightarrow m = 1$$

۳- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\frac{f(-1) - f(0)}{-1} = \frac{f(-a+1) - 1}{-1} = -11 \Rightarrow -8a + 7 = 11 \Rightarrow -8a = 4 \Rightarrow a = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow f'(x) = 3(x^2 + 1)^2(2x)(ax + 1) + a(x^2 + 1)^3 \xrightarrow{x=1} f'(1) = 8$$





۴- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\sqrt{y} - x = 5 \Rightarrow y = \frac{1}{\sqrt{y}}(x + 5)$$

$$\frac{ax - 1}{3x + 1} = \frac{1}{\sqrt{y}}(x + 5) \Rightarrow (3x + 1)(x + 5) = \sqrt{y}(ax - 1) \Rightarrow 3x^2 + 16x + 5 = \sqrt{y}ax - \sqrt{y}$$

$$\Rightarrow 3x^2 + x(16 - \sqrt{y}a) + 12 = 0 \xrightarrow{\Delta = 0} \Delta = (16 - \sqrt{y}a)^2 - (12)^2 = 0 \Rightarrow (16 - \sqrt{y}a) = \pm 12$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 16 - \sqrt{y}a = 12 \Rightarrow a = \frac{4}{\sqrt{y}} \Rightarrow \text{نقطه تماس: } A\left(-2, \frac{3}{\sqrt{y}}\right) \in \text{ ناحیه دوم} \\ 16 - \sqrt{y}a = -12 \Rightarrow a = 4 \Rightarrow A(2, 1) \in \text{ ناحیه اول} \end{cases}$$

۵- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. تابع باید در  $x = a$  نیز مشتق پذیر باشد. پس در این نقطه در ابتدا باید پیوسته باشد.

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = ab + c, \quad \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \frac{1}{a} = f(a) \xrightarrow{\text{پیوستگی}} ab + c = \frac{1}{a} \quad (*)$$

تابع مشتق را به دست می آوریم:

$$f'(x) = \begin{cases} b & ; x < a \\ -\frac{1}{x^2} & ; x > a \end{cases} \Rightarrow f'_-(a) = b, \quad f'_+(a) = -\frac{1}{a^2}$$

مشتق های چپ و راست نیز باید با هم برابر باشند:

$$b = -\frac{1}{a^2} \xrightarrow{(*)} a\left(-\frac{1}{a^2}\right) + c = \frac{1}{a} \Rightarrow c = \frac{2}{a} \Rightarrow ac = 2$$

«بانک سوال یاوران دانش»

۶- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$g(x) = \frac{\sqrt{x+8} - \sqrt{x}}{8} = \frac{1}{8}f(x) \Rightarrow \frac{f(x)}{g(x)} = 8 \Rightarrow \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = 0$$

$$\Rightarrow \frac{f'(x) \cdot g(x) - g'(x) \cdot f(x)}{(g(x))^2} = 0 \xrightarrow{x=1} f'(1) \cdot g(1) - g'(1)f(1) = 0$$

$$g'(\sqrt[5]{3}) \cdot f'(g(\sqrt[5]{3})) = (fog)'(\sqrt[5]{3})$$

۷- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$x = \sqrt[5]{3} > 0 \Rightarrow f(x) = -\frac{1}{\sqrt[5]{2x}}, \quad g(x) = \frac{1}{2x^5}$$

$$(fog)(x) = -\frac{1}{\sqrt[5]{2\left(\frac{1}{2x^5}\right)}} = -x \Rightarrow (fog)'(x) = -1$$





۸- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$y = x^2 - 1$$

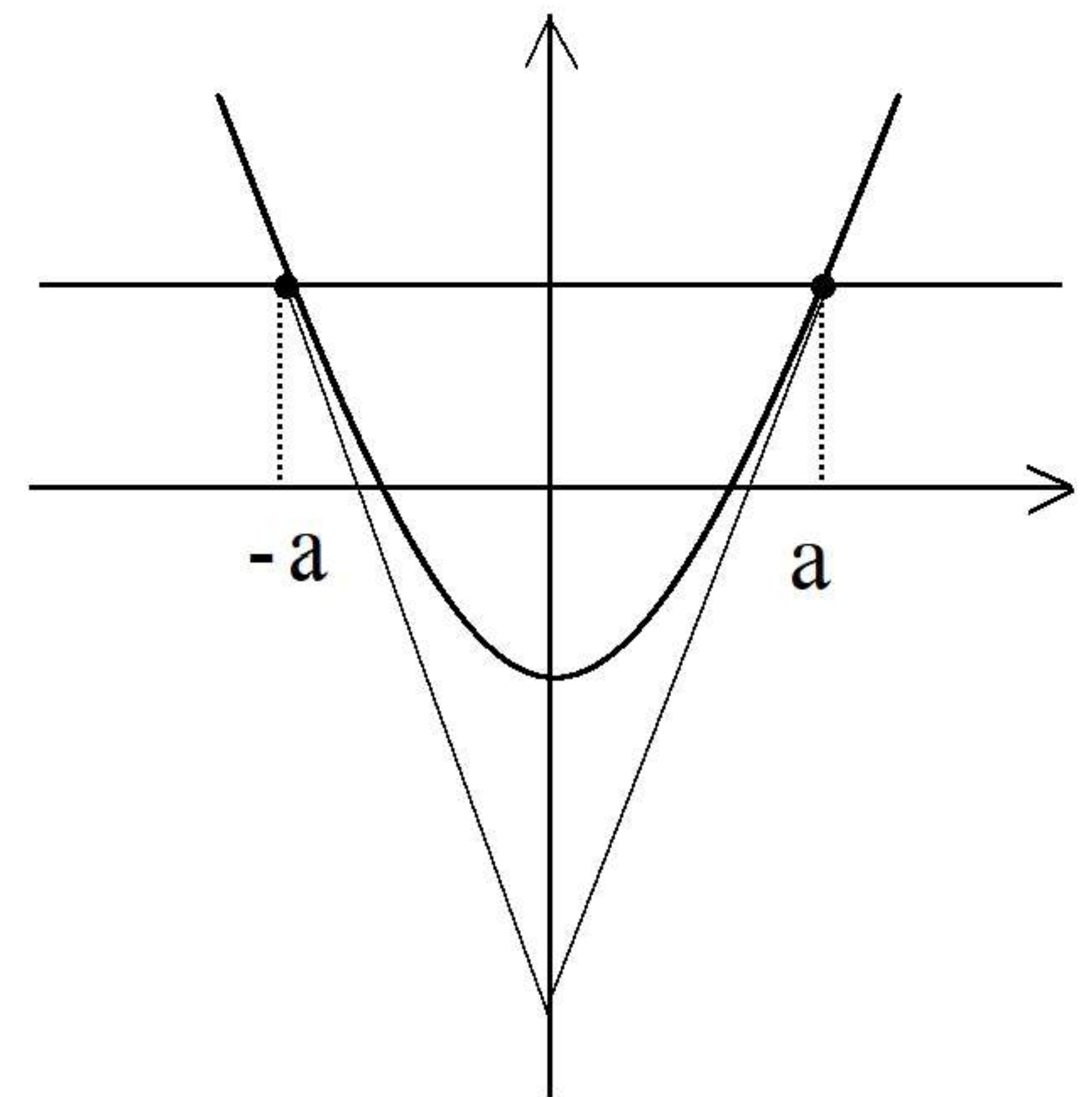
$$y' = 2x \begin{cases} 2a \\ -2a \end{cases}$$

$$2a \times (-2a) = -1$$

$$2a^2 = 1 \Rightarrow a = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\begin{aligned} a = +\frac{1}{\sqrt{2}} &\rightarrow y = \left(+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - 1 = -\frac{3}{4} \\ a = -\frac{1}{\sqrt{2}} &\rightarrow y = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - 1 = -\frac{3}{4} \end{aligned}$$

$$\text{مجموع} = -\frac{3}{2}$$

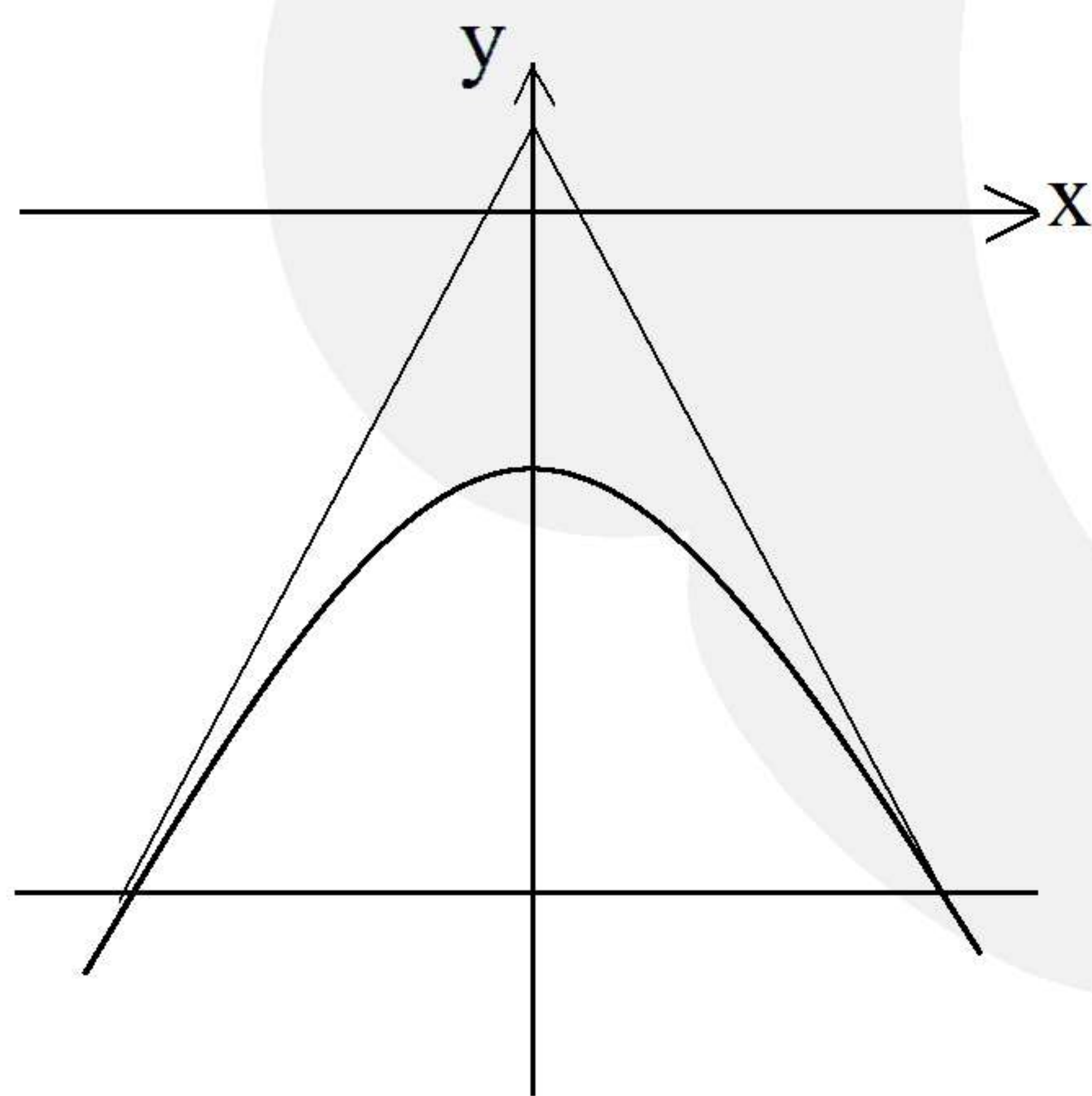


۹- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$g'(-\sqrt[3]{2}) f'(g(-\sqrt[3]{2})) \Rightarrow (f \circ g)'(-\sqrt[3]{2})$$

$$D_g = (-\infty, \infty) : g(x) = \frac{1}{2x^3} \xrightarrow{g \leq 0} f(g(x)) = \frac{1}{\sqrt[3]{\frac{1}{2x^3} + \frac{1}{2x^3}}} = \sqrt[3]{x} = x$$

$$\Rightarrow (f \circ g)'(x) = 1$$



۱۰- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. خط  $d$  سهمی  $y = -x^2 - 1$  را در دو نقطه قطع کرده است.

برای اینکه دو خط مماس بر هم عمود باشند، لازم است که شیب‌های آنها  $+1$  و  $-1$  باشند، زیرا نسبت به خط  $x = 0$  متقارن هستند، پس مشتق تابع را برابر  $\pm 1$  قرار می‌دهیم تا طول نقطه برخورد حاصل شود:

$$y' = -2x = -1 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \xrightarrow{y = -x^2 - 1} y = -\frac{1}{4} - 1 = -\frac{5}{4}$$

این همان عرض خط  $d$  است و فاصله آن از مبدأ مختصات برابر  $1/25$  است.

۱۱- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$f'(x) = \frac{1 \times \sqrt{2x+1} - \frac{2}{2\sqrt{2x+1}} \times x}{2x+1} \Rightarrow f'(4) = \frac{3 - \frac{4}{3}}{9} \Rightarrow f'(4) = \frac{5}{27}$$





«بانک سوال یاوران دانش»

۱۲- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$y = \sqrt{x} - 2 \Rightarrow m = \sqrt{x} \xrightarrow{m \times m' = -1} m' = -\frac{1}{\sqrt{x}}; y' = \frac{-5(1+2x) - 2(1-5x)}{(1+2x)^2} = \frac{-7}{(1+2x)^2}$$

$$y'(x_0) = -\frac{1}{\sqrt{x}} \Rightarrow \frac{-7}{(1+2x)^2} = -\frac{1}{\sqrt{x}} \Rightarrow (1+2x)^2 = 49$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x+1 = 7 \Rightarrow x = 3 \Rightarrow A(3, -2) \\ 2x+1 = -7 \Rightarrow x = -4 \Rightarrow B(-4, -3) \end{cases}$$

$$AB = \sqrt{(3 - (-4))^2 + (-2 - (-3))^2} = \sqrt{50} \Rightarrow AB = 5\sqrt{2}$$

۱۳- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \sqrt{8+x} = 3, \lim_{x \rightarrow 2^-} 4a+2b \Rightarrow 4a+2b = 3$$

$$f'_+(2) = \frac{4}{2\sqrt{4(2)+1}} = \frac{2}{3}, f'_-(2) = 4a+b \Rightarrow 4a+b = \frac{2}{3} \quad \left. \vphantom{\lim_{x \rightarrow 2^+} \sqrt{8+x} = 3} \right\} b = 3 - \frac{2}{3} = \frac{7}{3}$$

۱۴- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$h'(x) = f'\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + 2f'\left(2x - \frac{23\pi}{24}\right) \Rightarrow h'\left(\frac{\pi}{2}\right) = f'\left(\frac{\pi}{6}\right) + 2f'\left(\frac{\pi}{24}\right)$$

$$\stackrel{\otimes}{\rightarrow} h'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = 3 \times \frac{-1}{\sqrt{3}} = -\sqrt{3}$$

$$f'\left(\frac{\pi}{24}\right) = f'\left(\frac{\pi}{24} + \frac{\pi}{8}\right) = f'\left(\frac{\pi}{6}\right) \otimes$$

۱۵- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$g(x) = f(x) \Rightarrow \sqrt[3]{x^2} - 2 = -\sqrt[3]{x} \Rightarrow \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sqrt[3]{x} = 1 \Rightarrow x = 1 \text{ ناحیه چهارم} \\ \sqrt[3]{x} = -2 \Rightarrow x = -8 \text{ ناحیه دوم} \end{cases}$$

$$g'(x) = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} \Rightarrow m = g'(-8) = \frac{2}{3}(-8)^{-\frac{1}{3}} = -\frac{1}{3}, y - 2 = -\frac{1}{3}(x + 8) \xrightarrow{x=0}$$

$$y = -\frac{2}{3} \Rightarrow |y| = \frac{2}{3}$$





۱۶- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.  $f(-1) = 5, f'(-1) = -\frac{1}{2}$

$$g(x) = \sqrt[3]{x} f(x) \Rightarrow g'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} f(x) + \sqrt[3]{x} f'(x) \Rightarrow g'(-1) = \frac{1}{3} f(-1) - f'(-1)$$

$$= \frac{1}{3}(5) - \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{3} + \frac{1}{2} = \frac{13}{6}$$

۱۷- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$f(x) = 4\sqrt{ax} \left| x - \frac{3}{4} \right| \Rightarrow \begin{cases} f'_+\left(\frac{3}{4}\right) = 4\sqrt{a\left(\frac{3}{4}\right)} = 2\sqrt{3a} \\ f'_-\left(\frac{3}{4}\right) = -4\sqrt{a\left(\frac{3}{4}\right)} = -2\sqrt{3a} \end{cases}$$

$$f'_+\left(\frac{3}{4}\right) - f'_-\left(\frac{3}{4}\right) = 4\sqrt{3a} = 2\sqrt{6} \xrightarrow{\text{توان ۲}} ۱۶ \times ۳a = ۴ \times ۶ \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

$$\left. \begin{aligned} x=1 &\Rightarrow y=b+2 \\ x=1 &\Rightarrow y=\frac{a+1}{a+1}=1 \end{aligned} \right\} b+2=1 \Rightarrow b=-1$$

۱۸- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$y'_{(1)} = 2 \Rightarrow \frac{1-a^2}{(a+1)^2} = 2 \Rightarrow \frac{1-a}{1+a} = 2 \Rightarrow a = \frac{-1}{3} \Rightarrow a-b = \frac{-1}{3} + 1 = \frac{2}{3}$$

$$a = \frac{-1 - 0}{\frac{\pi}{4}} = -\frac{4}{\pi}$$

۱۹- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. آهنگ متوسط تابع اول:

آهنگ متوسط تابع دوم:

$$y = \sin^4 x - \cos^4 x = \sin^2 x - \cos^2 x = -\cos 2x$$

$$b = \frac{1-0}{\frac{\pi}{4}} = \frac{4}{\pi} \Rightarrow \frac{a}{b} = -1$$

«بانک سوال یاوران دانش»

۲۰- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. شیب خط  $y - 3x = 1$  برابر  $\frac{1}{3}$  است، پس در نقطه مطلوب، شیب خط مماس باید برابر

$$\Rightarrow y' = 2x - 4 = -2 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow y = 2$$

۲- باشد.

نقطه مطلوب (۱، ۲) است.





۲۱- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$y'(1) = \frac{(2+m)(4) - (2+m)}{16} = \frac{3(2+m)}{16} = \frac{3}{4} \Rightarrow m = 2 \quad \Leftrightarrow \text{نقطه مورد نظر } \left(1, \frac{2+m}{4}\right)$$

$$y = \frac{3}{4}x + \frac{n}{4} \Rightarrow \frac{3}{4} + \frac{n}{4} = \frac{2+m}{4} \Rightarrow m - n = 1 \xrightarrow{m=2} n = 1$$

۲۲- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \left( \sqrt[3]{\frac{2x+1}{5x+9}} \right)^3}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \sqrt[3]{\frac{2x+1}{5x+9}} \right)^3 = \frac{1}{25}$$

۲۳- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ابتدا مشتق را بدست آورید:

$$f(x) = (x-4)\sqrt[3]{x+3} \Rightarrow f'(x) = \sqrt[3]{x+3} + (x-4) \times \frac{1}{3(\sqrt[3]{x+3})^2}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f''(\omega-h) - 3f'(\omega-h) + 2}{h(\omega-h)} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{f(\omega-h)-1}{\omega-h} \right) \times \left( -\frac{f(\omega-h)-2}{-h} \right) \\ &= \left( \frac{f(\omega)-1}{\omega} \right) (-f'(\omega)) = \frac{1}{\omega} \times \frac{-25}{12} = \frac{-5}{12} \end{aligned}$$

تذکر: این مسأله با قاعده‌ی هوییتال نیز قابل حل است.

۲۴- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\begin{aligned} g(x) &= f(x+1) + f(3x+10) \Rightarrow g'(x) = f'(x+1) + 3f'(3x+10) \\ g'(-2) &= f'(-1) + 3f'(4) \end{aligned}$$

چون دوره تناوب ۵ است پس:

$$\begin{aligned} f(x+5) &= f(x) \Rightarrow f'(x+5) = f'(x) \xrightarrow{x=-1} f'(4) = f'(-1) \\ g'(-2) &= \frac{3}{2} + 3\left(\frac{3}{2}\right) = 6 \end{aligned}$$





۲۵- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + 5x + b & x \leq 2 \\ 2ax + 5 & x > 2 \end{cases}$$

شرط پیوستگی:  $\frac{4}{3}a + 10 + b = \frac{4}{3}a + 5 \Rightarrow b = -5$

شرط مشتق های راست و چپ:  $2ax + 5 = 2a \Rightarrow 4a + 5 = 2a \Rightarrow 2a = -5 \Rightarrow a = -\frac{5}{2}$

$$\Rightarrow -5 + \left(\frac{-5}{2}\right) = \frac{-15}{2}$$

۲۶- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\left( \log \left( \frac{\sqrt{5}}{5} \right) \right)' = g' \left( \frac{\sqrt{5}}{2} \right) \times f' \left( g \left( \frac{\sqrt{5}}{2} \right) \right)$$

$$g(x) = (x^2 - 1)^{\frac{-1}{2}} \Rightarrow g'(x) = \frac{-1}{2} (x^2 - 1)^{\frac{-3}{2}} \times 2x$$

$$\Rightarrow g' \left( \frac{\sqrt{5}}{2} \right) = \frac{-1}{2} \times \underbrace{\left( \frac{5}{4} - 1 \right)^{\frac{-3}{2}}}_{2^{-2}} \times \sqrt{5} = \frac{-1}{2} \times 4 \times \sqrt{5} = -2\sqrt{5}$$

$$g \left( \frac{\sqrt{5}}{2} \right) = \frac{1}{\sqrt{\frac{5}{4} - 1}} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2}} = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)} = 2^+$$

$$f'(2^+) \Rightarrow ((2x)^3)' = (8x^3)' = 24x^2 = 24 \times 4 \Rightarrow \frac{24 \times 4 \times 4 \sqrt{5}}{-48 \sqrt{5}} = 8$$





۲۷- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$f(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}} \Rightarrow \sqrt{xy} - y = \sqrt{x+1} \Rightarrow \sqrt{xy} - \sqrt{x} = 1 + y \Rightarrow \sqrt{x}(y-1) = y+1$$

$$\Rightarrow \sqrt{x} = \frac{y+1}{y-1} \Rightarrow x = \left(\frac{y+1}{y-1}\right)^2$$

$$f^{-1}(x) = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2 \Rightarrow (f^{-1}(x))' = 2\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \times \frac{-2}{(x-1)^2}$$

$$\Rightarrow (f^{-1}(2))' = 2 \times 3 \times -2 = -12$$

«بانک سوال یاوران دانش»

۲۸- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + c & x \geq k \\ 2ax + b & x < k \end{cases}$$

شرط پیوستگی:  $ak^2 + bk + c = 2ak + b$

شرط مشتق پذیری:  $2ak + b = 2a \Rightarrow b = 2a - 2ak$

$$a = b + c \Rightarrow c = -a + 2ak \Rightarrow ak^2 + (2a - 2ak)k + c - 2a = 0$$

$$k^2 + 2k - 2k^2 - 3 + 2k = 0 \Rightarrow k^2 - 4k + 3 = 0 \Rightarrow k = 1, k = 3 \text{ max}$$





۲۹- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$(fog)' \left( \frac{3}{\sqrt{8}} \right) = g' \left( \frac{3}{\sqrt{8}} \right) f' \left( g \left( \frac{3}{\sqrt{8}} \right) \right)$$

$$g'(x) = \frac{-1}{3} (2x) (x^2 - 1)^{-\frac{4}{3}} = \frac{-2x}{3 \sqrt[3]{(x^2 - 1)^4}} \Rightarrow g' \left( \frac{3}{\sqrt{8}} \right) = \frac{-2 \frac{1}{\sqrt{8}}}{\frac{1}{16}} = -\frac{32}{\sqrt{8}} = -8\sqrt{2}$$

$$f(x) = 16x^2 + 1 \Rightarrow f'(x) = 32x \Rightarrow f'(2) = 64$$

$$\Rightarrow (fog)' \left( \frac{3}{\sqrt{8}} \right) = -8\sqrt{2} \times f'(2) = -8\sqrt{2} \times 64 = -512\sqrt{2}$$

که حاصل چهار برابر  $-128\sqrt{2}$  است.

$$\frac{-512\sqrt{2}}{-128\sqrt{2}} = 4$$

$$P(x) = ax^2 + bx + c$$

$$P'(x) = 2ax + b$$

$$ax^2 + bx + c = (2ax + b) \left( \frac{1}{2}x + 1 \right) - 2 \Rightarrow ax^2 + bx + c = ax^2 + 2ax + \frac{1}{2}bx + b - 2$$

$$\Rightarrow ax^2 + bx + c = ax^2 + \left( 2a + \frac{1}{2}b \right)x + b - 2 \Rightarrow b = 2a + \frac{1}{2}b \Rightarrow 2a = \frac{1}{2}b \Rightarrow 4a = b$$

$$\left. \begin{array}{l} c = b - 2 \\ b = 4a \end{array} \right\} \Rightarrow c = 4a - 2 \Rightarrow p(x) = ax^2 + 4ax + 4a - 2 \Rightarrow p(1) = 9a - 2 \xrightarrow{a \in \mathbb{N}} \min = 7$$

۳۱- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$f'(x) = \frac{2x + 6}{2\sqrt{x^2 + 6x}} \Rightarrow f'(2) = \frac{5}{4}$$

$$\left[ \frac{5}{4} \right] = 1 \Rightarrow f'(x) = 2x - 9 \Rightarrow f'(5) = 1$$

$$f'(2) - f'(5) = \frac{5}{4} - 1 = \frac{1}{4}$$





۳۲- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.  $x$  را در تابع  $y = x\sqrt{x}$  قرار داده و  $y$  را حساب می‌کنیم.

$$y = 4\sqrt{4} \Rightarrow y = 8 \Rightarrow A(4, 8)$$

در نقطه  $A$ ،  $y$  ها و همچنین  $y'$  ها برابر هستند.

$$A(4, 8) \Rightarrow \begin{cases} 16 + 4a + b = 8 \Rightarrow 4a + b = -8 \\ 2x + a = \frac{3}{2}\sqrt{x} \Rightarrow 8 + a = 3 \Rightarrow a = -5 \Rightarrow -20 + b = -8 \Rightarrow b = 12 \end{cases}$$

۳۳- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\begin{aligned} f(x) &= \left( \frac{2x - x^2}{3x + 5} \right)^{\frac{2}{3}} \\ \Rightarrow f'(x) &= \frac{2}{3} \left( \frac{2x - x^2}{3x + 5} \right)^{-\frac{1}{3}} \left( \frac{(2 - 2x)(3x + 5) - 3(2x - x^2)}{(3x + 5)^2} \right) \\ \Rightarrow f'(-2) &= \frac{2}{3} \left( \frac{-4 - 4}{-1} \right)^{-\frac{1}{3}} \left( \frac{6 \times (-1) - 3(-8)}{(-1)^2} \right) = \frac{2}{3} \times (8)^{-\frac{1}{3}} \times 18 = 12 \times \frac{1}{2} = 6 \end{aligned}$$

۳۴- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{-3}{(x-1)^2}, \quad g'(x) = 2ax + b \\ f(2) &= g(2) \Rightarrow 4 = 4a + 2b \Rightarrow 2a + b = 2 \\ f'(2) &= g'(2) \Rightarrow -3 = 4a + b \\ \begin{cases} 2a + b = 2 \\ 4a + b = -3 \end{cases} &\Rightarrow a = -\frac{5}{2} \Rightarrow b = 7 \end{aligned}$$

«بانک سوال یاوران دانش»

$$x_0 = 4 \Rightarrow y_0 = 8$$

۳۵- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$f'(x) = \frac{5\sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}}(5x - 4)}{(\sqrt{x})^2} \Rightarrow m = \frac{3}{2}$$

$$y - 8 = \frac{3}{2}(x - 4) \xrightarrow{x=0} y = 2$$





۳۶- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\frac{f(6) - f(5)}{6 - 5} = f'(x) \Rightarrow -1 = \frac{-2x + 4}{2\sqrt{21 - x^2 + 4x}} \Rightarrow \sqrt{21 - x^2 + 4x} = x - 2$$

$$\Rightarrow 2x^2 - 8x - 17 = 0$$

$$\Delta' = 50$$

$$x = \frac{4 + 5\sqrt{2}}{2}, x = \frac{4 - 5\sqrt{2}}{2} \otimes$$

۳۷- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ابتدا ساده می کنیم.

$$f(x) = \left( \frac{\sqrt[3]{x^2 + 2x}}{x^2 - x} \right)^3 = \frac{x^2 + 2x}{(x^2 - x)^3}$$

$$f'(x) = \frac{(2x + 2)(x^2 - x)^3 - 3(x^2 - x)^2(2x - 1)(x^2 + 2x)}{(x^2 - x)^6}$$

$$= \frac{(x^2 - x)^2((2x + 2)(x^2 - x) - 3(x - 1)(x^2 + 2x))}{(x^2 - x)^6} = \frac{4(6 \times 2 - 3 \times 3 \times 8)}{2^6}$$

$$= \frac{4(12 - 72)}{64} = \frac{-60}{16} = -\frac{15}{4}$$

۳۸- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ابتدا پیوستگی آن را بررسی می کنیم و سپس مشتق پذیری را حساب می کنیم.

$$\Rightarrow \sqrt{5 - 2(-2)} = -\frac{1}{4}(-2)^2 - 2b + c \Rightarrow 3 = -2 - 2b + c$$

$$\Rightarrow -2b + c = 5$$

$$\Rightarrow \frac{-2}{2\sqrt{5 - 2x}} = -x + b \xrightarrow{x = -2} \frac{-2}{6} = 2 + b \Rightarrow b = -\frac{7}{3}$$

$$-2b + c = 5 \Rightarrow \frac{14}{3} + c = 5 \Rightarrow c = \frac{1}{3}$$