گنجینه سوال رایـگان

+پاسخ تشریحی

یاوران دانش

راه های ارتباطی با ما:

www.Dyavari.com

۰۲۱-۷۶۷۰۳۸۵۸

۰۹۱۲-۳۴ ۹۴ ۱۳۴

پاسخ کلیدی سوالات تستی (آزمایشی)

ریاضی - مشتق

	۱	۲	۳	۴
۱ -	□	□	□	■
۲ -	□	■	□	□
۳ -	□	□	■	□
۴ -	□	□	□	■
۵ -	□	□	□	■
۶ -	□	■	□	□
۷ -	□	□	□	■
۸ -	□	□	□	■
۹ -	□	■	□	□
۱۰ -	□	□	□	■
۱۱ -	□	□	■	□
۱۲ -	□	□	□	■
۱۳ -	□	■	□	□
۱۴ -	■	□	□	□
۱۵ -	□	□	■	□
۱۶ -	■	□	□	□
۱۷ -	□	■	□	□
۱۸ -	□	□	■	□
۱۹ -	□	□	■	□
۲۰ -	□	□	□	■
۲۱ -	□	□	■	□
۲۲ -	□	■	□	□
۲۳ -	□	□	□	■
۲۴ -	□	□	□	■
۲۵ -	■	□	□	□
۲۶ -	□	□	■	□
۲۷ -	□	□	□	■
۲۸ -	■	□	□	□
۲۹ -	■	□	□	□
۳۰ -	□	■	□	□
۳۱ -	□	□	■	□
۳۲ -	□	■	□	□
۳۳ -	■	□	□	□
۳۴ -	■	□	□	□

	۱	۲	۳	۴
۳۵ -	□	□	■	□
۳۶ -	□	□	■	□
۳۷ -	□	■	□	□
۳۸ -	■	□	□	□
۳۹ -	□	■	□	□
۴۰ -	□	□	□	■
۴۱ -	□	□	□	■
۴۲ -	□	□	■	□
۴۳ -	□	□	■	□
۴۴ -	■	□	□	□
۴۵ -	□	■	□	□
۴۶ -	□	□	■	□
۴۷ -	□	□	■	□
۴۸ -	□	□	■	□
۴۹ -	□	□	■	□
۵۰ -	□	■	□	□

۱- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. $g(x)=\left|\frac{x}{۲}\right|\sqrt[۳]{۱۰+x}\,,\ f(x)=\left[\frac{-۲}{x}\right](x^۲-۴)$

$g(x)$ پیوسته است و $g(-۲)=۲$ و تابع f در $x=۲$ پیوسته است. (عامل صفرشونده در جزء صحیح ضرب شده است). برای مشتق fog داریم: $(fog)'(-۲)=g'(-۲)f'(g(-۲))$

$$x<۰\Rightarrow g(x)=\frac{-x}{۲}\sqrt[۳]{۱۰+x}\Rightarrow g'(x)=\frac{-۱}{۲}\sqrt[۳]{۱۰+x}-\frac{x}{۲}\,\frac{۱}{۳\sqrt[۳]{(۱۰+x)^۲}}$$

$$\Rightarrow g'(-۲)=-\frac{۱}{۲}(۲)-\frac{-۲}{۲}\,\frac{۱}{۳(۲)^۲}=-۱+\frac{۱}{۱۲}=\frac{-۱۱}{۱۲}$$

در سمت چپ $x=-۲$، چون g نزولی است مقدار $g(-۲)$ می‌شود ۲^+ پس $f'(g(-۲))$ می‌شود $f'\left(۲^+\right)$ که برابر است با:

$$x>۲\Rightarrow\left[\frac{-۲}{x}\right]=-۱\Rightarrow f(x)=۴-x^۲\Rightarrow f'(x)=-۲x\Rightarrow f'_+(۲)=-۴$$

و جواب می‌شود $\frac{۱۱}{۳}=\frac{-۱۱}{۱۲}\times(-۴)$ که به اندازه $\frac{۱}{۳}$ از ۴ کمتر است.

۲- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{h\to ۰}\frac{f(-۱+h)-f(-۱)}{h}=f'(-۱)=\lim_{x\to(-۱)}\frac{f(x)-f(-۱)}{x+۱}=\lim_{x\to(-۱)}\frac{\cancel{(x+۱)}(x-۲)\sqrt[۵]{x^۳-۳۳x}}{\cancel{x+۱}}$$

$$=\lim_{x\to(-۱)}(x-۲)\sqrt[۵]{x^۳-۳۳x}=(-۳)\times(۲)=-۶$$

۳- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$۵x-y-۷=۰\Rightarrow x=۳$ خط مماس در $\begin{cases}f'(۳)=۵ & (۱)\\ ۵(۳)-y-۷=۰\Rightarrow y=۸\Rightarrow f(۳)=۸ & (۲)\end{cases}$

$$\underbrace{\lim_{x\to ۸}\left(\frac{g(x)-g(۸)}{x-۸}\right.}\times\left.\frac{۱}{x+۷}\right)=\frac{۳۷}{۱۵۰}$$

مطابق تعریف مشتق $g'(x)\times\frac{۱}{۱۵}=\frac{۳۷}{۱۵۰}\Rightarrow\boxed{g'(۸)=\frac{۳۷}{۱۰}}\quad(۳)$

طبق ۳

$$(gof)'(۳)=g'(f(۳))\times f'(۳)=g'(۸)\times f'(۳)=\frac{۳۷}{۱۰}\times ۵=۱۸/۵$$

طبق ۲ طبق ۱

۴- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. عبارت داخل قدرمطلق در همسایگی $x = 2$ از نظر علامت، منفی است. بنابراین:

$|3 - x^2| = x^2 - 3$ و در نتیجه: $f(x) = x^3 - 3x \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 3 \Rightarrow f'(2) = 9$

از طرف دیگر آهنگ تغییر متوسط برابر است با: $\frac{f(2) - f(-3)}{2 - (-3)} = \frac{2 - (-18)}{5} = \frac{20}{5} = 4$

مجموع مقادیر متوسط و لحظه‌ای آهنگ تغییر $= 9 + 4 = 13$

۵- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. با استفاده از مزدوج، زیر رادیکال را عوض می‌کنیم:

$$1 - \sqrt{6x - x^2 - 8} \times \frac{1 + \sqrt{6x - x^2 - 8}}{1 + \sqrt{6x - x^2 - 8}} = \frac{1^2 - \sqrt{(6x - x^2 - 8)^2}}{1 + \sqrt{6x - x^2 - 8}}$$

$$= \frac{1 - (6x - x^2 - 8)}{1 + \sqrt{6x - x^2 - 8}} = \frac{x^2 - 6x + 9}{1 + \sqrt{6x - x^2 - 8}} = \frac{(x - 3)^2}{1 + \sqrt{6x - x^2 - 8}}$$

پس: $f(x) = \frac{|x - 3|}{\sqrt{1 + \sqrt{6x - x^2 - 8}}}$ و برای محاسبه $f'_+(3)$ و $f'_-(3)$ قدرمطلق را با $\oplus$ و $\ominus$ برمی‌داریم

و داریم:

$$x > 3 : f(x) = \frac{x - 3}{\sqrt{1 + \sqrt{6x - x^2 - 8}}} \Rightarrow f'_+(3) = \frac{1}{\sqrt{1 + 1}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$x < 3 : f(x) = \frac{-(x - 3)}{\sqrt{1 + \sqrt{6x - x^2 - 8}}} \Rightarrow f'_-(3) = \frac{-1}{\sqrt{1 + 1}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

حال با قاعده هوپیتال یا اضافه و کم کردن $f(3)$ داریم:

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(3 - h) - f(3 + 2h)}{h} = -f'_+(3) - 2f'_-(3) = -\frac{\sqrt{2}}{2} + 2\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

۶- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$f(x)=\frac{(x-۱)^{۳}+x^{\frac{۲۲}{۵}}}{x^{\frac{۳}{۲}}}\xrightarrow{\text{تفکیک}} f(x)=\underbrace{(x-۱)^{۳}.x^{-\frac{۳}{۲}}}_{\text{مشتق دوم برای این بخش به خاطر عامل صفرساز } (x-۱)^{۳} \text{ در } x=۱ \text{ صفر است و نیاز به محاسبه نیست}}+\underbrace{x^{\frac{۲۹}{۱۰}}}_{g(x)}$$

$$g'(x)=\frac{۲۹}{۱۰}x^{\frac{۱۹}{۱۰}}\Rightarrow g''(x)=\frac{۲۹}{۱۰}\times\frac{۱۹}{۱۰}x^{\frac{۹}{۱۰}}$$

$$f''(۱)=۰+g''(۱)=\frac{۲۹}{۱۰}\times\frac{۱۹}{۱۰}\times۱=۵/۵۱$$

۷- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$x=۸\xrightarrow[\text{خط مماس}]{\text{جاگذاری در ضابطه}} y=۲۸\Rightarrow f(۸)=۲۸$$

$$\text{شیب خط مماس}=۳\Rightarrow f'(۸)=۳$$

$$g'(x)=۲x.f\left(۱۷-x^{۲}\right)+x^{۲}\left(-۲x\times f'\left(۱۷-x^{۲}\right)\right)$$

$$g'(۳)=۲(۳)f(۸)+۹(-۶\times f'(۸))\Rightarrow g'(۳)=۶f(۸)-۵۴f'(۸)$$

$$\Rightarrow g'(۳)=۶\times۲۸-۵۴\times۳\Rightarrow g'(۳)=۶ \qquad \text{(۱) شیب خط مماس بر } g(x)$$

$$g(۳)=۳^{۲}\times f(۸)=۹\times۲۸=۲۵۲\Rightarrow A(۳\,,\,۲۵۲)\qquad(۲)$$

$$۲\,,\,۱\xrightarrow{\text{معادله خط مماس}} y-۲۵۲=۶(x-۳)$$

$$y=\underbrace{۶}_{\text{شیب}}x+\underbrace{۲۳۴}_{\text{عرض از مبدا}}$$

۸- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$h'(x)=(۶x-۲)f\left(۳\sqrt{x}\right)+\left(۳x^{۲}-۲x+۴\right)\times f'\left(۳\sqrt{x}\right)\times\frac{۳}{۲\sqrt{x}}$$

$$h'(۱)=۴f(۳)+۵f'(۳)\times\frac{۳}{۲}$$

$$h'(۱)=۴\left(\frac{۷}{۸}\right)+۵\left(\frac{۷}{۸}\right)\times\frac{۳}{۲}=۱۴$$

$$h(۱)=۵\times f(۳)=۵\left(\frac{۷}{۸}\right)=\frac{۳۵}{۸}$$

$$\text{عبارت موردنظر سؤال}=۸h(۱)\times h'(۱)=۸\times\frac{۳۵}{۸}\times۱۴=۴۹۰$$

۹- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$f'(x) = ۱ - \frac{۱}{x^۲} \Rightarrow f'\left(\frac{\sqrt{۵}}{۱۰}\right) = ۱ - \frac{۱}{\left(\frac{\sqrt{۵}}{۱۰}\right)^۲} = ۱ - ۲۰ = -۱۹$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f\left(\frac{۱}{۴}\right) - f\left(\frac{۱}{۵}\right)}{\frac{۱}{۴} - \frac{۱}{۵}} = \frac{\left(\frac{۱}{۴} + ۴\right) - \left(\frac{۱}{۵} + ۵\right)}{\frac{۱}{۲۰}} = \frac{\frac{-۱۹}{۲۰}}{\frac{۱}{۲۰}} = -۱۹$$

بنابراین آهنگ لحظه‌ای و متوسط خواسته شده یکسان و نسبت آن‌ها یک است.

«بانک سوال یاوران دانش»

۱۰- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. چون $\lim\limits_{x \to ۳} \frac{x-۱}{f(x)} = +\infty$ پس $f(x)$ حتماً دارای ریشه مکرر از مرتبه زوج $x = ۳$ است،

یعنی این تابع به صورت زیر است: $f(x) = (x-۳)^۲ h(x)$

از آن‌جا که $f(x)$ یک چندجمله‌ای از درجه ۵ است، $h(x)$ یک چندجمله‌ای از درجه ۳ است و برای آن حالات زیر متصور است:

حالت ۱: $h(x)$ دارای یک ریشه ساده باشد ← $f(x)$ دارای یک ریشه مضاعف $x = ۳$ و یک ریشه ساده است.

حالت ۲: $h(x)$ دارای سه ریشه ساده باشد ← $f(x)$ دارای یک ریشه مضاعف $x = ۳$ و سه ریشه ساده است.

حالت ۳: $h(x)$ دارای یک ریشه مضاعف و یک ریشه ساده باشد ← $f(x)$ دارای دو ریشه مضاعف $x = ۳$ و $x = \alpha$ و یک ریشه ساده است.

حالا به تابع $g(x) = f(x)\left[\frac{x}{۳}\right]$ دقت کنید.

در حالت کلی این تابع در نقاطی که داخل براکت را عدد صحیح می‌کنند، مشتق‌ناپذیر است $(x = ۳,۶,۹)$ ولی اگر نقطه موردنظر، ریشه مکرر پشت براکت یعنی تابع $f(x)$ باشد، به جمع نقاط مشتق‌پذیر برمی‌گردد.

پس تا اینجا تابع g حتماً در نقاط صحیح $x = ۱,۲,۴,۵,۷,۸$ (۶ نقطه) مشتق‌پذیر است و از آن‌جا که در تمام حالات بررسی شده، $x = ۳$ ریشه مضاعف تابع f است، این نقطه نیز به جمع نقاط مشتق‌پذیر برگشته و کلاً ۷ نقطه صحیح مشتق‌پذیر قطعی داریم.

امّا در مورد نقاط $x = ۶$ و $x = ۹$ به حالات درنظر گرفته شده برای توابع h و f دقت کنید:

در حالت‌های ۱ و ۲ دیدیم که تابع f فقط دارای یک ریشه مضاعف $x = ۳$ است و لذا $x = ۶,۹$ مشتق‌ناپذیراند و همان ۷ نقطه صحیح مشتق‌پذیر را داریم.

در حالت ۳، تابع f علاوه بر $x = ۳$، دارای ریشه مضاعف در $x = \alpha$ است، اگر $\alpha \neq ۶,۹$ باشد. همچنان $x = ۶,۹$ مشتق‌ناپذیر بوده و باز هم ۷ نقطه صحیح مشتق‌پذیر داریم. امّا اگر $\alpha = ۶$ یا ۹ باشد، علاوه بر $x = ۳$، ۹ یا $x = ۶$ هم به جمع نقاط مشتق‌پذیر برمی‌گردد و تعداد نقاط صحیح مشتق‌پذیر ۸ می‌شود که این عدد، ماکزیمم تعداد آن‌ها است.

ضمناً تابع f می‌تواند به صورت $f(x) = (x-۳)^۴ h(x)$ نیز باشد که در این صورت $h(x)$ از درجه ۱ بوده و دارای یک ریشهٔ ساده است و مانند حالت ۱ در بالا خواهد شد.

۱۱- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. تابع را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$f(x) = (x-۲)(x-۳)(x+۲)^۲\left[\frac{x}{۲}\right]$$

در بازهٔ (۳ , ۵-) فاصله صحیح ۲ , ۰ , ۲- , ۴- = x نقاطی هستند که داخل براکت را صحیح می‌کنند و کاندیدای ناپیوستگی و مشتق‌ناپذیری هستند و از بین این نقاط:

- ۰ , ۴- = x چون هیچ عامل صفرشونده‌ای در پشت براکت ندارند، ناپیوسته و مشتق‌ناپذیر باقی می‌مانند.
- ۲ = x چون ریشهٔ ساده پشت براکت است، پیوسته می‌شود ولی همچنان مشتق‌ناپذیر است.
- ۲- = x چون ریشهٔ مکرر پشت براکت است، به جمع نقاط پیوسته و مشتق‌پذیر برمی‌گردد.

دقت کنید! علاوه بر این نقطه، نقاط صحیح ۱ , ۱- , ۳- = x اساساً داخل براکت را صحیح نمی‌کنند و پیوسته و مشتق‌پذیرند. پس این تابع در یک نقطهٔ صحیح ۲ = x پیوسته و مشتق‌ناپذیر است $\leftarrow n = ۱$

و در چهار نقطهٔ صحیح ۱ , ۱- , ۲- , ۳- = x پیوسته و مشتق‌پذیر است $\leftarrow m = ۴$

$$m - n = ۴ - ۱ = ۳$$

۱۲- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. حاصل کسر داده شده برابر مشتق $\frac{-g}{f'}$ است.

$$f' = \frac{-۱}{(۵x+۱)^۲} \Rightarrow -\frac{g}{f'} = \frac{\dfrac{x-\sqrt{x}}{(۵x+۱)^۲}}{\dfrac{-۱}{(۵x+۱)^۲}} = x - \sqrt{x} \Rightarrow \left(-\frac{g}{f'}\right)' = ۱ - \frac{۱}{۲\sqrt{x}}$$

به ازای ۴ = x جواب برابر $\frac{۳}{۴}$ است.

۱۳- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. تابع f(x) به خاطر وجود [x] در مخرج کسر، در ۱ = x پیوستگی چپ و مشتق چپ ندارد، مگر به ازای ۱ = x مقدار صورت کسر صفر شود.

$$x = ۱ \Rightarrow (۱)^۲ + a(۱) + ۲ = ۰ \Rightarrow a + ۳ = ۰ \Rightarrow a = -۳$$

حال مقدار مشتق چپ تابع در ۱ = x را محاسبه می‌کنیم:

$$f'_-(۱) = \lim_{x \to ۱^-} \frac{f(x) - f(۱)}{x-۱} = \lim_{x \to ۱^-} \frac{\dfrac{x^۲ - ۳x + ۲}{bx + [x]} - ۰}{x-۱} = \lim_{x \to ۱^-} \frac{x-۲}{bx+[x]} = \frac{-۱}{b+۰} = -\frac{۱}{۳} \Rightarrow b = ۳$$

برای محاسبهٔ مشتق راست تابع در ۱ = x، از تعریف آن استفاده می‌کنیم.

$$f'_+(۱) = \lim_{x \to ۱^+} \frac{f(x) - f(۱)}{x-۱} = \lim_{x \to ۱^+} \frac{\dfrac{x^۲ - ۳x + ۲}{۳x + [x]} - ۰}{x-۱} = \lim_{x \to ۱} \frac{\dfrac{(x-۱)(x-۲)}{۳x+[x]}}{x-۱}$$

$$= \lim_{x \to ۱^+} \frac{x-۲}{۳x+[x]} = \frac{-۱}{۳+۱} = -\frac{۱}{۴}$$

۱۴- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. در نقطه تماس خط با نمودار f، شیب خط مماس همان مشتق تابع f در نقطه تماس است و عرض خط و تابع f یکسان است:

$$x=-۳\begin{cases}\xrightarrow{\text{جاگذاری در خط}} f(-۳)=۵\\ f'(-۳)=m_{\text{شیب خط}}=-۲\end{cases}$$

$$\lim_{x\to(-۳)}\frac{۲۵-f^{۲}(x)}{x^{۳}+۲۷}=\lim_{x\to(-۳)}\frac{-(f(x)-۵)(f(x)+۵)}{(x+۳)\left(x^{۲}-۳x+۹\right)}$$

$$=\lim_{x\to(-۳)}\frac{f(x)-f(-۳)}{x+۳}\times\lim_{x\to(-۳)}\frac{-(f(x)+۵)}{x^{۲}-۳x+۹}=f'(-۳)\times\frac{-۱۰}{۲۷}=-۲\times\frac{-۱۰}{۲۷}=\frac{۲۰}{۲۷}$$

۱۵- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ابتدا پیوستگی g در f(۴) یعنی در x = ۲ را بررسی می‌کنیم.

$$\lim_{x\to۲}g(x)=g(۲)\Rightarrow\frac{k-۱}{۲}+m=-\sqrt{۲+k}$$

حال مشتق چپ و راست gof را در x = ۴ بررسی می‌کنیم.

$$۵f'(۵x-۱)=۱+\frac{۱}{۲\sqrt{x}}\xrightarrow{x=۱}f'(۴)=\frac{۳}{۱۰}$$

$$g'(x)=\begin{cases}\frac{-(k-۱)}{x^{۲}} & x\ge۲\\ \frac{-۱}{۲\sqrt{x+k}} & x<۲\end{cases}$$

$$(gof)'_{+}(۴)=f'(۴)\times g'_{+}(f(۴))=f'(۴)\times g'_{+}(۲)=\frac{۳}{۱۰}\times\frac{-(k-۱)}{۴}=\frac{-(۳k-۳)}{۴۰}$$

$$(gof)'_{-}(۴)=f'(۴)\times g'_{-}(f(۴))=f'(۴)\times g'_{-}(۲)=\frac{۳}{۱۰}\times\frac{-۱}{۲\sqrt{۲+k}}=\frac{-۳}{۲۰\sqrt{۲+k}}$$

$$\Rightarrow\frac{-۳۰(k-۱)}{۴۰}=\frac{-۳}{۲۰\sqrt{۲+k}}\Rightarrow(k-۱)\sqrt{۲+k}=۲\Rightarrow k=۲\Rightarrow m=-۲/۵$$

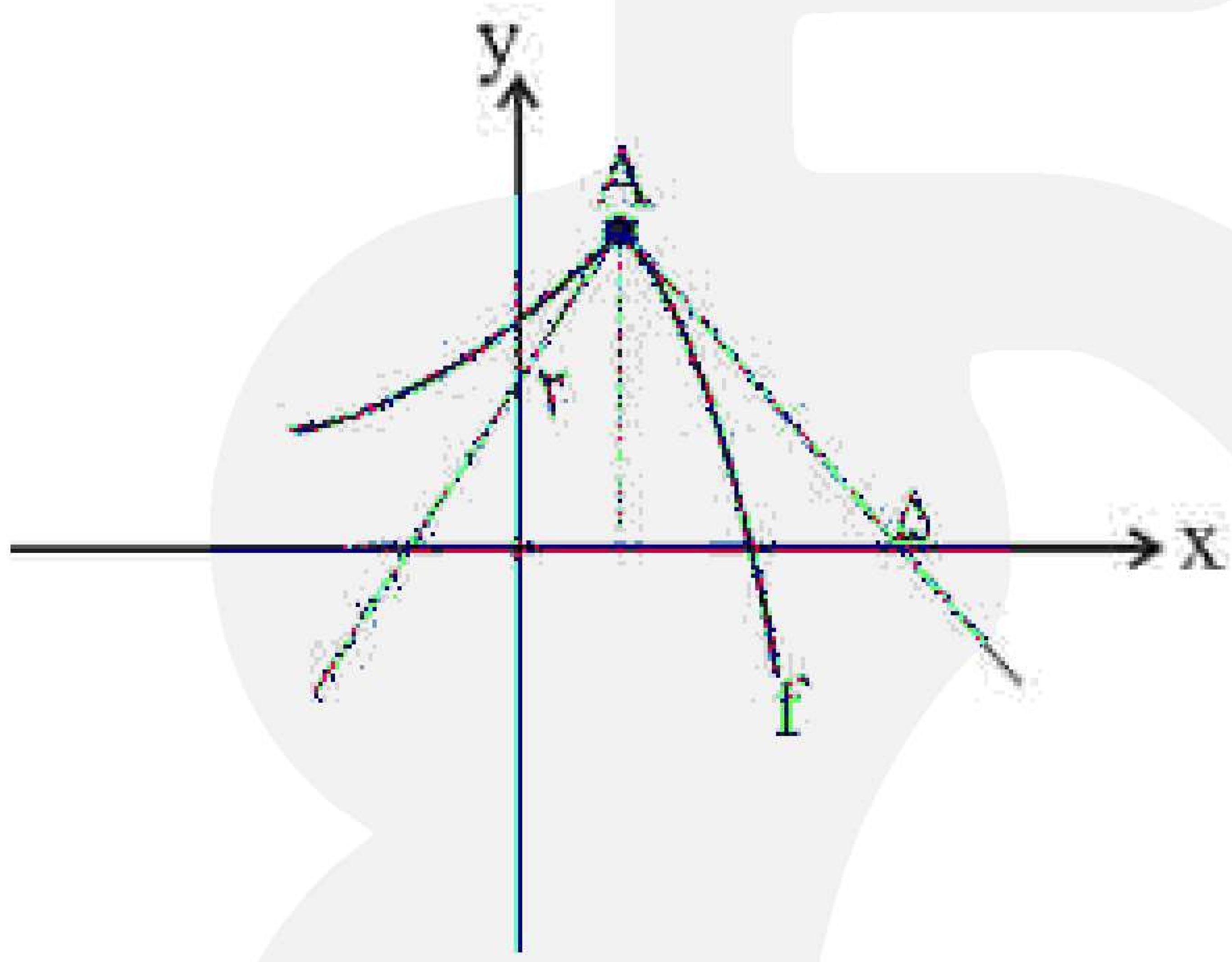
۱۶- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ابتدا شرط پیوستگی در $x = ۲$ را بررسی می‌کنیم:

$$\lim_{x \to ۲^+} \sqrt{۱ + ۴x} = ۳ \,,\; f(۲) = ۳ \,,\; \lim_{x \to ۲^-} f(x) = ۴a + ۲b + ۲$$

$$۴a + ۲b + ۲ = ۳ \Rightarrow ۴a + ۲b = ۱$$

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{۴}{۲\sqrt{۱ + ۴x}} & ; x > ۲ \\ ۲ax + b & ; x < ۲ \end{cases} \xrightarrow{\text{مشتق پذیر}} f'_+(۲) = f'(۲) \Rightarrow \frac{۲}{۳} = ۴a + b$$

$$\begin{cases} ۴a + ۲b = ۱ \\ ۴a + b = \dfrac{۲}{۳} \end{cases} \quad \begin{cases} b = \dfrac{۱}{۳} \\ a = \dfrac{۱}{۱۲} \end{cases} \Rightarrow ۲۴(b - a) = ۲۴\left(\frac{۱}{۳} - \frac{۱}{۱۲}\right) = ۸ - ۲ = ۶$$



۱۷- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. نیم‌مماس راست از $A(۱\,,\,۴)$ و $(۵\,,\,۰)$ می‌گذرد. پس شیب آن $\frac{۴ - ۰}{۱ - ۵}$ یعنی ۱- است، پس:

$$f'_+(۱) = -۱$$

شیب نیم‌مماس چپ با دو نقطه $A(۱\,,\,۴)$ و $(۰\,,\,۲)$ برابر $\frac{۲ - ۴}{۰ - ۱} = ۲$ به دست می‌آید پس $f'_-(۱) = ۲$ حالا $\lim_{h \to ۰^+} \frac{f(۱ - ۲h) - f(۱ + ۳h)}{h}$ با قاعده هوپیتال برابر $-۲f'_-(۱) - ۳f'_+(۱)$ است که می‌شود $-۲(۲) - ۳(-۱)$ یعنی ۱- حد چپ هم برابر $-۲f'_+(۱) - ۳f'_-(۱)$ است، یعنی $-۲(-۱) - ۳(۲)$ که برابر ۴- است. پس مجموعشان می‌شود ۵-.

۱۸- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

از $f(۲x+۱)=\frac{x+\sqrt{x}}{۲}$ نتیجه می‌شود: $f^{-۱}\left(x+\frac{\sqrt{x}}{۲}\right)=۲x+۱$

با مشتق گرفتن از طرفین این رابطه داریم:

$$\left(x+\frac{\sqrt{x}}{۲}\right)'\left(f^{-۱}\left(\frac{x+\sqrt{x}}{۲}\right)\right)'=۲\Rightarrow\left(\frac{۱+\frac{۱}{۲\sqrt{x}}}{۲}\right)\left(f^{-۱}\left(\frac{x+\sqrt{x}}{۲}\right)\right)'=۲$$

می‌دانیم که آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع $f^{-۱}(x)$ در نقطه $x=۳$، همان $(f^{-۱})'(۳)$ است، پس لازم است که در تساوی بالا: $\frac{x+\sqrt{x}}{۲}=۳\Rightarrow x+\sqrt{x}=۶\Rightarrow x=۴$

با جایگذاری $x=۴$ در رابطه آخر داریم:

$$\left(\frac{۱+\frac{۱}{۴}}{۲}\right)(f^{-۱})'(۳)=۲\Rightarrow\frac{۵}{۸}(f^{-۱})'(۳)=۲\Rightarrow(f^{-۱})'(۳)=\frac{۱۶}{۵}=۳/۲$$

«بانک سوال یاوران دانش»

۱۹- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x\to۲}\frac{(f(x)-۳)(f(x)+۳)}{(x-۲)(x+۱)}=\lim_{x\to۲}\frac{f(x)-f(۲)}{x-۲}\times\lim_{x\to۲}\frac{f(x)+۳}{x+۱}$$
$$=f'(۲)\times\frac{f(۲)+۳}{۲+۱}=۴\times\frac{۳+۳}{۳}=۴\times۲=۸$$

۲۰- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. مقادیر f و f' در نقاط A و B و C و D و E به طور خلاصه در جدول زیر آمده است:

x	A	B	C	D	E
f(x)	۰	-	۰	+	۰
f'(x)	-	۰	+	۰	۰

فقط در نقاط A و D رابطه $f>f'$ برقرار است.

۲۱- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. تابع به صورت $f(x)=x|(x-۱)(x-۲)|$ است، بنابراین نقاط $x=۱$ و $x=۲$ نقاط گوشه این تابع هستند. مشتق راست و چپ در این نقاط قرینه هستند. برای این نقاط داریم:

$$x=۲ \Rightarrow f'_+(x)=\left(x^۳-۳x^۲+۲x\right)'=۳x^۲-۶x+۲ \xrightarrow{x=۲} f'_+(۲)=۱۲-۱۲+۲=۲$$
$$\Rightarrow f'_-(۲)=-۲ \Rightarrow \text{اختلاف}=۴$$

$$x=۱ \Rightarrow f'_+(x)=\left(-x^۳+۳x^۲-۲x\right)'=-۳x^۲+۶x-۲ \xrightarrow{x=۱} f'_+(۱)=-۳+۶-۲=-۱$$
$$\Rightarrow f'_-(۱)=۱ \Rightarrow \text{اختلاف}=۲$$

بنابراین مجموع اختلاف‌ها برابر ۶ است.

۲۲- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\text{آهنگ تغییر متوسط}=\frac{f(K+۱)-f(K)}{(K+۱)-K}=\frac{\left(\frac{۱}{K+۱}+\frac{۱}{\sqrt{۵}}\right)-\left(\frac{۱}{K}+\frac{۱}{\sqrt{۵}}\right)}{۱}=\frac{-۱}{K(K+۱)}$$

تابع f در بازهٔ $[K,K+۱]$

$$f(x)=\frac{۱}{x}+\frac{۱}{\sqrt{۵}} \Rightarrow f'(x)=\frac{-۱}{x^۲} \Rightarrow f'\left(۲\sqrt{۵}\right)=\frac{-۱}{۲۰} \quad \text{آهنگ لحظه‌ای}$$

$$\text{مطابق فرض سؤال}=\frac{۱}{K(K+۱)}=\frac{-۱}{۲۰} \Rightarrow K^۲+K-۲۰=۰$$
$$(K+۵)(K-۴)=۰$$
$$K_۱=-۵,\ K_۲=۴$$
$$K \text{ اختلاف دو مقدار}=۹$$

۲۳- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$g(x)=f\left(۲-x^۳\right) \Rightarrow g'(x)=-۳x^۲f'\left(۲-x^۳\right)$$

از طرف دیگر:

$$f(x)=\frac{x-۱}{x-۲} \Rightarrow f'(x)=\frac{-۱}{(x-۲)^۲} \Rightarrow f'\left(۲-x^۳\right)=\frac{-۱}{\left(\left(۲-x^۳\right)-۲\right)^۲}=\frac{-۱}{x^۶}$$

پس داریم:

$$g'(x)=-۳x^۲f'\left(۲-x^۳\right) \Rightarrow g'(x)=-۳x^۲\times\frac{-۱}{x^۶}=\frac{۳}{x^۴}=۳x^{-۴}$$

$$g''(x)=۳(-۴)x^{-۵}=\frac{-۱۲}{x^۵} \Rightarrow g''(x-۱)=\frac{-۱۲}{(x-۱)^۵}$$

$$\begin{cases} x\to ۱^+: & \frac{-۱۲}{۰^+}=-\infty \\ x\to ۱^-: & \frac{-۱۲}{۰^-}=+\infty \end{cases}$$

۲۴- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. با توجه به شکل و اینکه $\tan ۲\alpha = \frac{۲\tan\alpha}{۱ - \tan^{۲}\alpha}$ می‌توانیم بنویسیم:

$$\tan ۲\alpha = \frac{۲\tan\alpha}{۱ - \tan^{۲}\alpha} \Rightarrow \frac{y + x}{۳} = \frac{۲\left(\frac{x}{۳}\right)}{۱ - \left(\frac{x}{۳}\right)^{۲}} \xrightarrow{\times ۳} y + x = \frac{۲x}{۱ - \frac{x^{۲}}{۹}} \Rightarrow y + x = \frac{۱۸x}{۹ - x^{۲}}$$

$$\Rightarrow y = \frac{۱۸x}{۹ - x^{۲}} - x$$

کافی است از y برحسب x مشتق بگیریم:

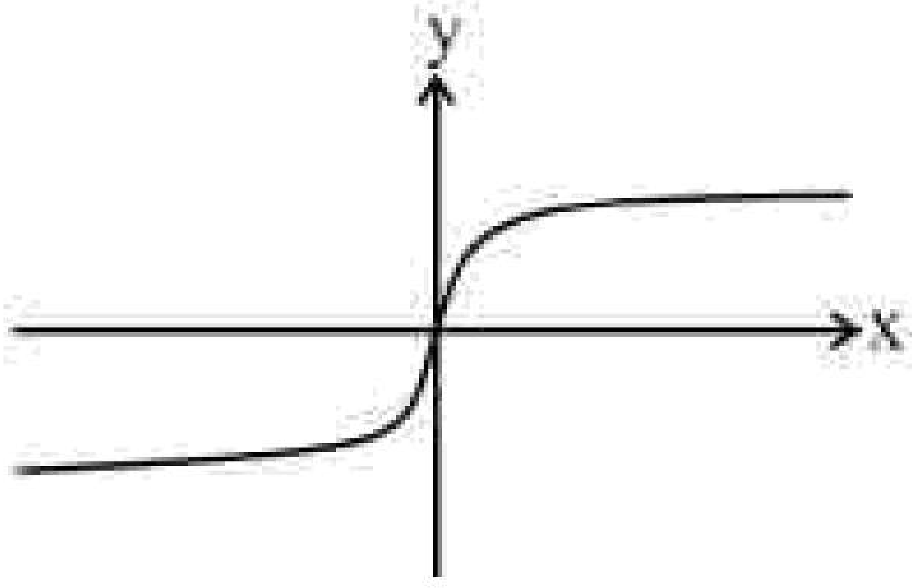
$$y' = \frac{۱۸\left(۹ - x^{۲}\right) - (-۲x)۱۸x}{\left(۹ - x^{۲}\right)^{۲}} - ۱ = \frac{۱۶۲ - ۱۸x^{۲} + ۳۶x^{۲}}{\left(۹ - x^{۲}\right)^{۲}} - ۱ \Rightarrow y' = \frac{۱۸x^{۲} + ۱۶۲}{\left(۹ - x^{۲}\right)^{۲}} - ۱$$

به جای x مقدار یک جایگذاری می‌کنیم:

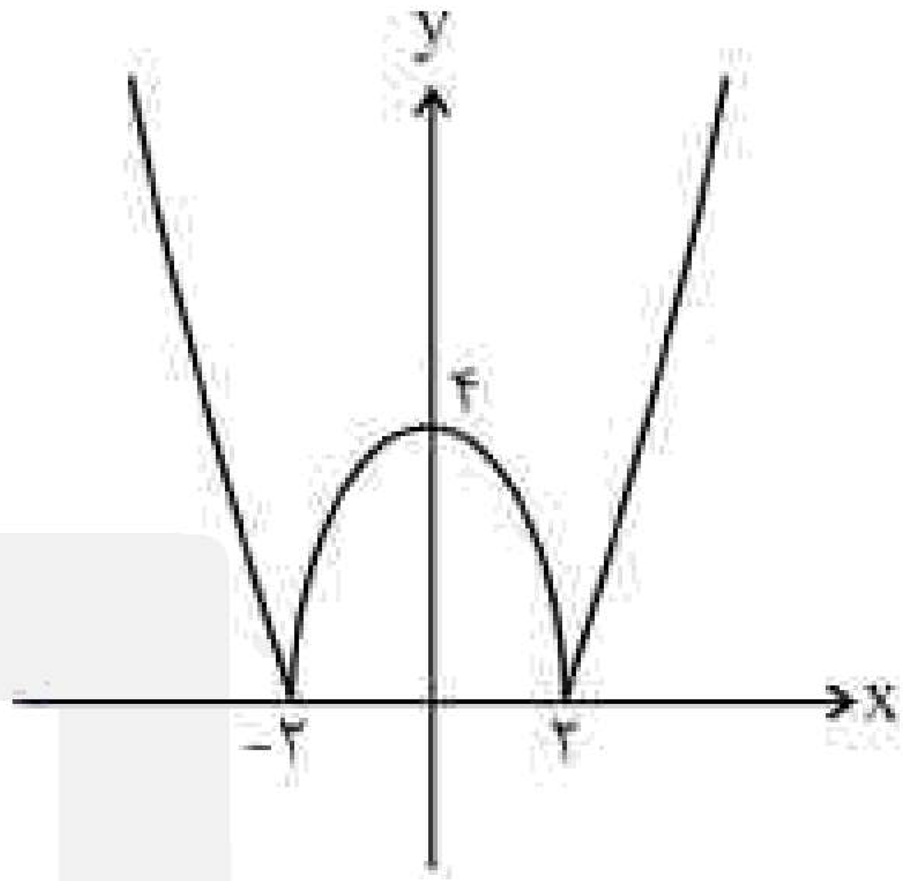
$$y' = \frac{۱۸ + ۱۶۲}{۸^{۲}} - ۱ = \frac{۱۸۰}{۶۴} - ۱ = \frac{۲۹}{۱۶}$$

۲۵- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

نمودار تابع $y=\sqrt[۳]{x}$ به صورت

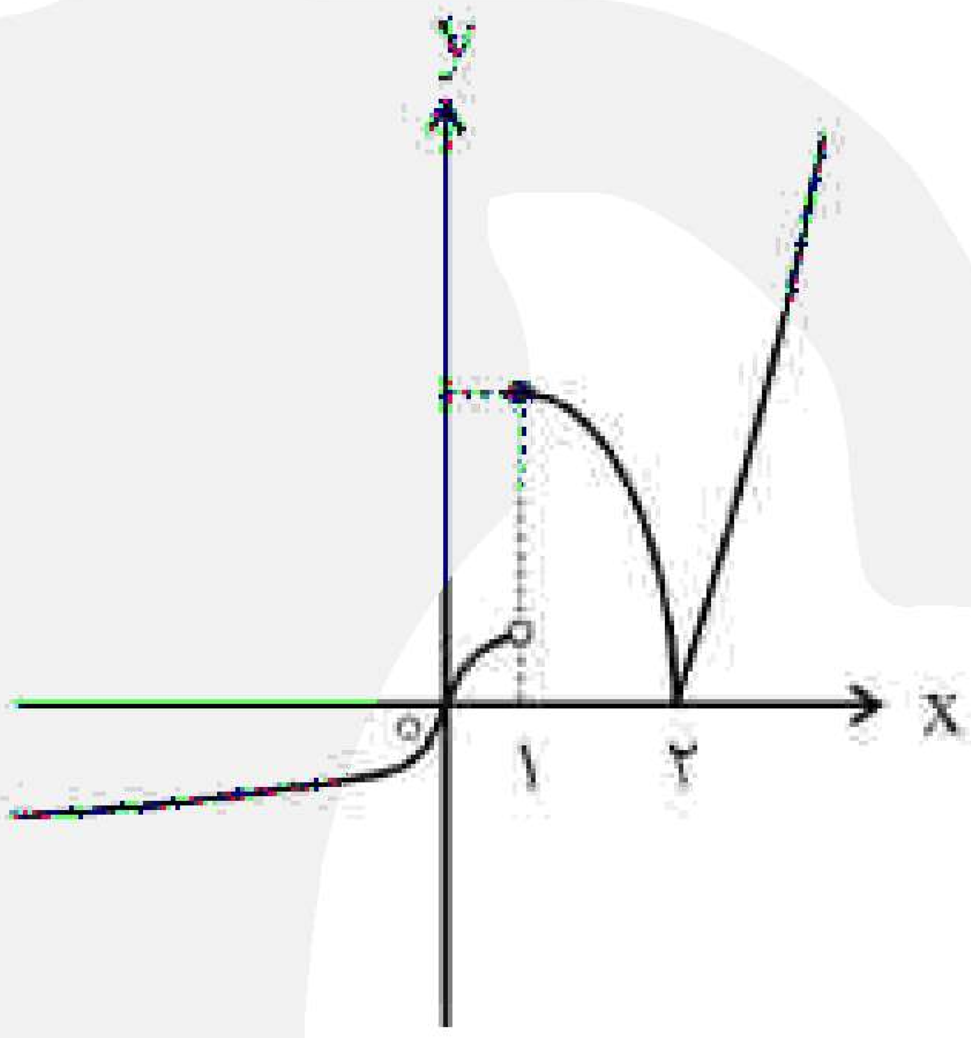


و نمودار تابع $y=|x^{۲}-۴|$ به صورت



است.

با ترکیب این دو نمودار با توجه به ضابطهٔ $f(x)$:



✓ در $x=۲$ نقطه گوشه‌ای و $f'_{+}(۲)\neq f'_{-}(۲)$ است، بنابراین در $x=۲$ مشتق و خط مماس وجود ندارد.

✓ در $x=۱$ به دلیل عدم پیوستگی، مشتق و خط مماس وجود ندارد.

✓ در $x=۰$ خط مماس عمودی داریم. $(f'(۰)=+\infty)$ پس مشتق ندارد، اما مماس دارد. بنابراین تابع f در ۳ نقطه مشتق ندارد و در ۲ نقطه هم خط مماس ندارد.

۲۶- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$f'(x)=۱\times\sqrt{۲x-۱}+\frac{۲}{۲\sqrt{۲x-۱}}\times x+\frac{۸}{x^{۲}}$$

$$f'(۱)=۱۰$$

$$y'=۳x^{۲}.f\left(\frac{۲}{x}\right)+x^{۳}\times\left(\frac{-۲}{x^{۲}}\times f'\left(\frac{۲}{x}\right)\right)$$

$$y'(x=۲)=۱۲f(۱)+۸\times\left(-\frac{۱}{۲}\times f'(۱)\right)\Rightarrow y'(x=۲)=۱۲f(۱)-۴f'(۱)$$

$$=۱۲(-۷)-۴(۱۰)=-۱۲۴$$

۲۷- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

شیب خط مماس $= f'(۱) = ۲$

$x = ۱ \Rightarrow y = ۲(۱) + ۳ = ۵ \Rightarrow f(۱) = ۵$

با استفاده از اتحاد چاق و لاغر:

$$\lim_{x \to ۱} \frac{(f(x) - f(۱))\left(f^۲(x) + f(x) \times f(۱) + f^۲(۱)\right)}{(x - ۱)\left(x^۲ + x + ۱\right)}$$

$$= \lim_{x \to ۱} \frac{f(x) - f(۱)}{x - ۱} \times \frac{f^۲(۱) + f(۱) \times f(۱) + f^۲(۱)}{(۱ + ۱ + ۱)} = f'(۱) \times \frac{\cancel{۳} f^۲(۱)}{\cancel{۳}} = ۲ \times ۵^۲ = ۵۰$$

۲۸- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. می‌دانیم $f'(x) = \lim_{h \to ۰} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$. بنابراین کافی است در صورت کسر $f(x)$ را کم و اضافه کنیم:

$$\lim_{h \to ۰} \frac{f(x + ۳h) - f(x) + f(x) - f(x - ۳h)}{۵h} = \frac{۲۷x}{\sqrt{x^۲ + ۵}}$$

$$\frac{۳}{۵}\lim_{h \to ۰} \frac{f(x + ۳h) - f(x)}{۳h} + \frac{۳}{۵}\lim_{h \to ۰} \frac{f(x - ۳h) - f(x)}{(-۳h)} = \frac{۲۷x}{\sqrt{x^۲ + ۵}}$$

$$\frac{۳}{۵}f'(x) + \frac{۳}{۵}f'(x) = \frac{۲۷x}{\sqrt{x^۲ + ۵}} \Rightarrow \frac{۶}{۵}f'(x) = \frac{۲۷x}{\sqrt{x^۲ + ۵}}$$

$$f'(x) = \frac{۵}{۶} \times \frac{۲۷x}{\sqrt{x^۲ + ۵}} \xrightarrow{x = ۲} f'(۲) = \frac{۵ \times ۵۴}{۶ \times ۳} \Rightarrow f'(۲) = ۱۵$$

روش دوم: استفاده از قاعده هوپیتال چون حد $\div$ است.

۲۹- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$f'(x)=\frac{۲}{۳\sqrt[۳]{x}}\ ,\ f''(x)=\frac{-۲}{۹x\sqrt[۳]{x}}$$

$$f'(x)=f''(x)\Rightarrow\frac{۲}{۳\sqrt[۳]{x}}=\frac{-۲}{۹x.\sqrt[۳]{x}}\Rightarrow\sqrt[۳]{x}=-۳x.\sqrt[۳]{x}$$

$$\Rightarrow\sqrt[۳]{x}(۱+۳x)=۰\ \begin{cases}x=۰ & \text{غ ق ق}\\ x=\frac{-۱}{۳}\Rightarrow A\left(-\frac{۱}{۳},\frac{۱}{\sqrt[۳]{۹}}\right)\end{cases}$$

(برای $x=۰$:) f' و f'' هر دو در $x=۰$ نامتناهی هستند، یعنی موجود نیستند غ ق ق

(برای $x=-\frac{۱}{۳}$:) نقطه موردنظر سوال

$$m_{\text{مماس}}=f'\left(-\frac{۱}{۳}\right)=\frac{-۲\sqrt[۳]{۳}}{۳}$$

معادله خط مماس

$$y-y_۱=m(x-x_۱)\Rightarrow y-\frac{۱}{\sqrt[۳]{۹}}=\frac{-۲\sqrt[۳]{۳}}{۳}\left(x+\frac{۱}{۳}\right)\xrightarrow{\times۳\sqrt[۳]{۹}}$$

$$۳\sqrt[۳]{۹}y-۳=-۶\left(x+\frac{۱}{۳}\right)\Rightarrow۳\sqrt[۳]{۹}y-۳=-۶x-۲\Rightarrow۶x+۳\sqrt[۳]{۹}y-۱=۰$$

$$\begin{cases}a=۶\\ b=۳\sqrt[۳]{۹}\\ c=-۱\end{cases}\Rightarrow a^۳+b^۳+c^۳=۲۱۶+۲۴۳-۱=۴۵۸$$

۳۰- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. مقادیر f و f' در نقاط A و B و C و D و E به طور خلاصه در جدول زیر آمده است:

x	A	B	C	D	E
f(x)	۰	-	۰	+	۰
f'(x)	-	۰	+	۰	۰

فقط در نقاط B و C رابطه $f<f'$ برقرار است.

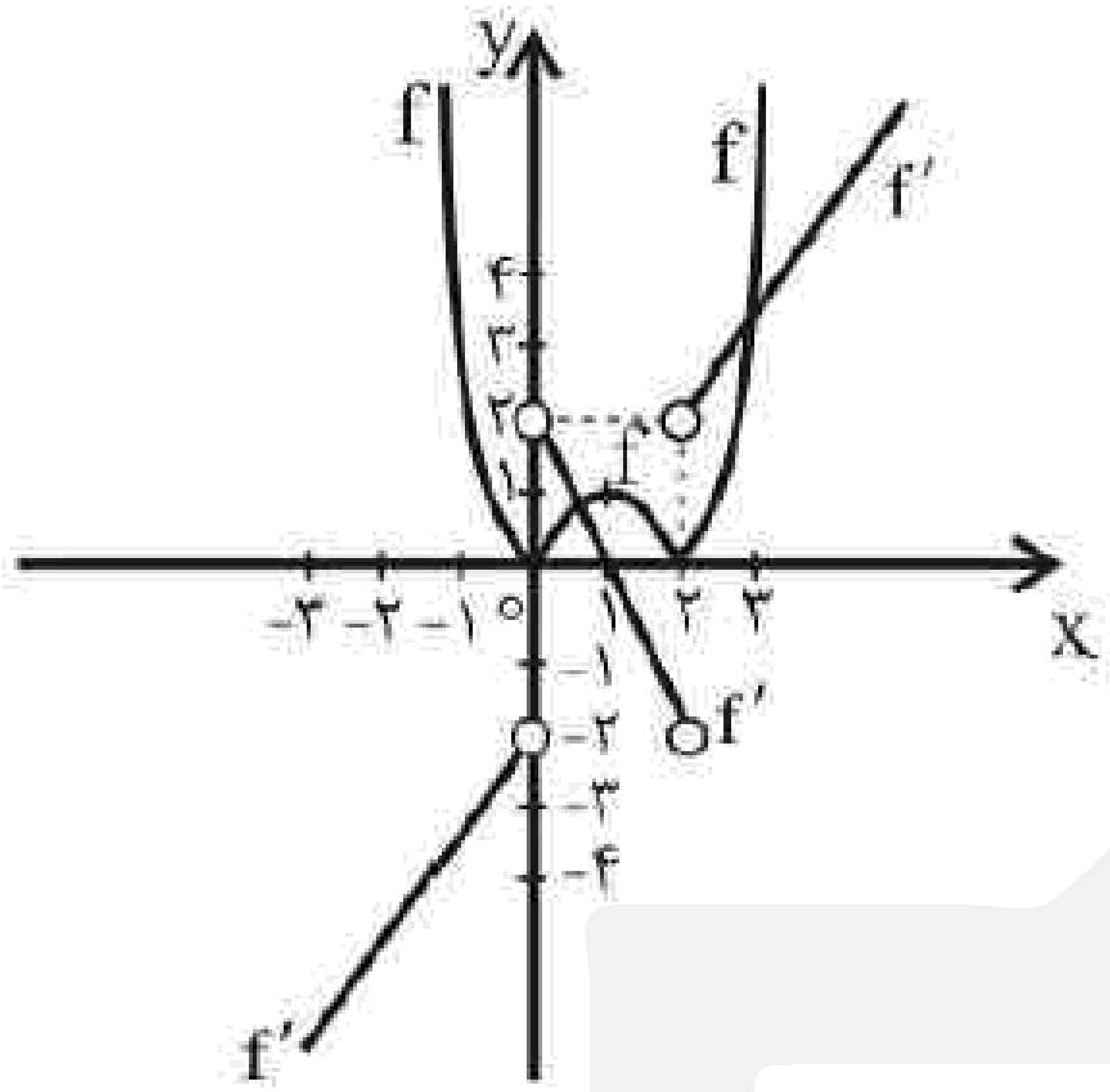
۳۱- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x\to۴}\frac{f(x)-f(۴)}{(x-۴)(x+۸)}=۲\Rightarrow f'(۴)\times\lim_{x\to۴}\frac{۱}{x+۸}=۲\Rightarrow f'(۴)=۲۴$$

$$\lim_{h\to۰}\frac{f(۴+۳h)-f(۴-۳h)}{h\left(h^۲+۳\right)}=\lim_{h\to۰}\frac{۱}{h^۲+۳}\times\left[\lim_{h\to۰}\frac{f(۴+۳h)-f(۴)}{\frac{۱}{۳}\times(۳h)}-\lim_{h\to۰}\frac{f(۴-۳h)-f(۴)}{-\frac{۱}{۳}(-۳h)}\right]$$

$$=\frac{۱}{۳}\times[۳f'(۴)+۳f'(۴)]=۲f'(۴)=۲\times۲۴=۴۸$$

۳۲- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.



$$f(x) = \begin{cases} x^{۲} - ۲x & ; \ x \le ۰ \ \text{یا} \ x \ge ۲ \\ ۲x - x^{۲} & ; \ ۰ < x < ۲ \end{cases}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \begin{cases} ۲x - ۲ & ; \ x < ۰ \ \text{یا} \ x > ۲ \\ \text{وجود ندارد} & ; \ x = ۰ \ \text{یا} \ x = ۲ \\ ۲ - ۲x & ; \ ۰ < x < ۲ \end{cases}$$

$\Rightarrow$ محل برخورد f و f' در بازه $۰ < x < ۲$

$$۲x - x^{۲} = ۲ - ۲x \Rightarrow x^{۲} - ۴x + ۲ = ۰ \begin{cases} x = ۲ - \sqrt{۲} \\ x = ۲ + \sqrt{۲} \end{cases}$$

غ ق ق (چون خارج از بازهٔ $۰ < x < ۲$ است)

$$x > ۲ \ \text{در بازه} \ f', f \ \text{محل برخورد} \Rightarrow x^{۲} - ۲x = ۲x - ۲ \Rightarrow x^{۲} - ۴x + ۲ = ۰ \begin{cases} x = ۲ + \sqrt{۲} \\ x = ۲ - \sqrt{۲} \end{cases}$$

غ ق ق (چون خارج از بازهٔ $x > ۲$ است)

$$f' \ \text{با} \ f \ \text{مجموع طول‌های برخورد} = \left(۲ - \sqrt{۲}\right) + \left(۲ + \sqrt{۲}\right) = ۴$$

۳۳- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. با اضافه و کم کردن عبارت $f(۱)$ در صورت و استفاده از تعریف مشتق داریم:

$$\lim_{x \to ۰^{+}} \frac{f(۱ + ۴h) - f(۱ - h)}{۲h} = \lim_{h \to ۰^{+}} \frac{f(۱ + ۴h) - \overbrace{f(۱ - h) + f(۱)}^{-(f(۱ - h) - f(۱))}}{۲h}$$

$$= \lim_{h \to ۰^{+}} \frac{f(۱ + ۴h) - f(۱)}{۴h} \times ۲ - \lim_{h \to ۰^{+}} \frac{f(۱ - h) - f(۱)}{h} \times \frac{۱}{۲} = ۲f'_{+}(۱) + \frac{۱}{۲}f'_{-}(۱)$$

با توجه به نمودار $f'_{+}(۱) = \tan ۶۰^\circ = \sqrt{۳}$ و $f'_{-}(۱) = -\tan ۳۰^\circ$، پس داریم:

$$۲f'_{+}(۱) + \frac{۱}{۲}f'_{-}(۱) = ۲\sqrt{۳} - \frac{\sqrt{۳}}{۶} = \frac{۱۱\sqrt{۳}}{۶}$$

«بانک سوال یاوران دانش»

۳۴- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$f(x) = (1-3x)^{\frac{2}{3}} \Rightarrow f'(x) = \frac{2}{3}(1-3x)^{-\frac{1}{3}} \times (-3)$$

$$f'(x) = \frac{-2}{\sqrt[3]{1-3x}} \quad (1)$$

$$x + y + 13 = 0 \Rightarrow m_{\text{شیب}} = -1 \xrightarrow[\text{(عکس و قرینه است)}]{\text{شیب مماس، عمود بر این خط}} m' = 1 \quad (2)$$

$$1, 2 \Rightarrow \frac{-2}{\sqrt[3]{1-3x}} = 1 \Rightarrow x = 3 , y = 4$$

$$A\Big|_{4}^{3} , m' = 1 \Rightarrow y - 4 = 1(x-3) \Rightarrow x - y + 1 = 0 \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \\ c = 1 \end{cases}$$

$$a^2 + b^2 + c^2 = 3$$

۳۵- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. قدرمطلق تابع سهمی قائم فقط در حالتی‌که $\Delta > 0$ بوده و محور xها را در دو نقطه متمایز قطع کند، در ۲ نقطه (صفرهای تابع) مشتق‌ناپذیر است (نقطهٔ گوشه). بنابراین اگر قدرمطلق یک تابع سهمی فقط در یک نقطهٔ مشتق‌ناپذیر است به این معناست که ضریب x^2 صفر بوده و عملاً با یک تابع درجهٔ اول سروکار داریم:

$$m - 1 = 0 \Rightarrow m = 1 \Rightarrow f(x) = |2x - 8|$$

این تابع فقط در $x = 4$ (ریشه عبارت داخل قدرمطلق) مشتق‌ناپذیر است.

$$f'(x) = \begin{cases} 2 & ; \ x \geq 4 \\ -2 & ; \ x < 4 \end{cases}$$

با توجه به توضیح بالا، تابع $g(x)$ در دو نقطه مشتق‌ناپذیر است، پس الزاماً $\Delta > 0$ است:

$$n^2 - 4(4)(1) > 0$$

حدود n:

$$n^2 > 16 \Rightarrow (-\infty , -4) \cup (4 , +\infty)$$

یا $R - [-4 , 4] \begin{cases} a = -4 \\ b = 4 \end{cases}$

$$f'(4) - f'(-4) = 2 - (-2) = 4$$

۳۶- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ابتدا $g(x)$ را تشکیل می‌دهیم:

$$g(x)=\begin{cases}(x+۲)^۲+b(x+۲)+c-۱ & x\ge ۱\\ (۲x+b)+x & x<۱\end{cases}$$

آن را ساده‌تر می‌کنیم:

$$g(x)=\begin{cases}x^۲+(۴+b)x+۳+۲b+c & x\ge ۱\\ ۳x+b & x<۱\end{cases}$$

برای این که تابع g، تابعی مشتق‌پذیر باشد، لازم است که در نقطه مرزی $x=۱$ مشتق‌پذیر باشد. پس:

اولاً g در $x=۱$ پیوسته است:

$$g(۱)=\lim_{x\to ۱^+} g(x)=\lim_{x\to ۱^-} g(x)\Rightarrow ۱+(۴+b)+۳+۲b+c=۳+b\Rightarrow ۵+۲b+c=۰$$

$$\Rightarrow ۲b+c=-۵$$

ثانیاً مشتقات راست و چپ g در $x=۱$ برابرند:

$$\begin{cases}g'_+(۱)=۲x+(۴+b)\xrightarrow{x=۱}۲+۴+b=۶+b\\ g'_-(۱)=۳\end{cases}\Rightarrow ۶+b=۳\Rightarrow b=-۳$$

با جایگذاری $b=-۳$ در رابطه $۲b+c=-۵$، $c=۱$ به دست می‌آید و لذا:

$$c-b=۱-(-۳)=۴$$

۳۷- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x\to ۱}\frac{f^{-۱}(۲x)-۴}{x-۱}=\frac{f^{-۱}(۲)-۴}{۰}$$

برای آنکه حاصل این حد، متناهی باشد باید:

$$f^{-۱}(۲)-۴=۰\Rightarrow f^{-۱}(۲)=۴$$

از طرف دیگر، چون f تابع خطی است، پس $f^{-۱}$ هم خطی بوده و اگر آن را به فرم $f^{-۱}(x)=mx+h$ درنظر بگیریم:

اولا: $f^{-۱}(۲)=۴\Rightarrow ۲m+h=۴\Rightarrow h=۴-۲m$

ثانیا: $f^{-۱}(۲x)=m(۲x)+h=۲mx+h=۲mx+۴-۲m$

پس:

$$\lim_{x\to ۱}\frac{f^{-۱}(۲x)-۴}{x-۱}=\lim_{x\to ۱}\frac{(۲mx+۴-۲m)-۴}{x-۱}=\lim_{x\to ۱}\frac{۲m(x-۱)}{x-۱}=۲m$$

چون مقدار این حد برابر ۴ است، پس:

$$۲m=۴\Rightarrow m=۲\xrightarrow{h=۴-۲m}h=۰$$

$$f^{-۱}(x)=mx+h\xrightarrow[h=۰]{m=۲}f^{-۱}(x)=۲x\Rightarrow f(x)=\frac{۱}{۲}x\Rightarrow f'(x)=\frac{۱}{۲}\Rightarrow f'(۲)=\frac{۱}{۲}$$

نهایتاً داریم:

$$f'(۲)\times f^{-۱}(۲)=\frac{۱}{۲}\times ۴=۲$$

۳۸- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\left.\begin{array}{ll}t=۰\Rightarrow V(۰)=۴۰۰ & \text{شروع تخلیه}\\ t=۴۰\Rightarrow V(۴۰)=۰ & \text{پایان تخلیه}\end{array}\right\}\Rightarrow\frac{\Delta V}{\Delta t}=\frac{V(۴۰)-V(۰)}{۴۰-۰}=\frac{۰-۴۰۰}{۴۰}=-۱۰\quad(۱)$$

$$۱=۲\Rightarrow -۲۰\left(۱-\frac{t}{۴۰}\right)=-۱۰\Rightarrow ۱-\frac{t}{۴۰}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow t=۲۰\,\text{min}$$

۳۹- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

آهنگ تغییر لحظه‌ای در $x = ۵$: $g'(f(۵))\times f'(۵) = g'(۱۶)\times f'(۵) = \dfrac{۱}{۲\sqrt{۱۶}}\times ۳ = \dfrac{۳}{۸}$

$$\begin{cases} f'(x) = ۳ \\ g'(x) = \dfrac{۱}{۲\sqrt{x}} \end{cases}$$

$$\text{آهنگ تغییر متوسط} = \frac{(gof)(۸) - (gof)(۵)}{۸ - ۵} = \frac{g(f(۸)) - g(f(۵))}{۳} = \frac{g(۲۵) - g(۱۶)}{۳} = \frac{۵ - ۴}{۳} = \frac{۱}{۳}$$

$$\text{اختلاف دو آهنگ} = \frac{۳}{۸} - \frac{۱}{۳} = \frac{۱}{۲۴}$$

«بانک سوال یاوران دانش»

۴۰- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$g(x) = \operatorname{Log}\left(x + \sqrt{x^{۲} - ۴}\right)^{\frac{۱}{۳}} = \frac{۱}{۳}\operatorname{Log}\left(x + \sqrt{x^{۲} - ۴}\right) \Rightarrow ۳g(x) = \operatorname{Log}\left(x + \sqrt{x^{۲} - ۴}\right)$$

$$f(x) + ۳g(x) = \operatorname{Log}\left(x - \sqrt{x^{۲} - ۴}\right) + \operatorname{Log}\left(x + \sqrt{x^{۲} - ۴}\right)$$

$$= \operatorname{Log}\left(x - \sqrt{x^{۲} - ۴}\right)\times\left(x + \sqrt{x^{۲} - ۴}\right) = \operatorname{Log}\left(x^{۲} - x^{۲} + ۴\right) = \operatorname{Log} ۴ = \text{عدد ثابت}$$

$$f(x) + ۳g(x) = \text{عدد ثابت} \xrightarrow{\text{مشتق از طرفین}} f'(x) + ۳g'(x) = ۰$$

$$\Rightarrow \frac{f'(x)}{g'(x)} = -۳ \xrightarrow{x = ۳ + ۲\sqrt{۲}} \frac{f'\left(۳ + ۲\sqrt{۲}\right)}{g'\left(۳ + ۲\sqrt{۲}\right)} = -۳$$

۴۱- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$f'(x) = \frac{-۷}{(۲x + ۱)^{۲}}$$

$$۷x - y - ۲ = ۰ \Rightarrow \text{خط } m = ۷ \xrightarrow[\text{(عکس و قرینه m است)}]{\text{شیب خط عمود بر آن}} \boxed{m' = \frac{-۱}{۷}}$$

خط مماس بر $f(x)$

$$\frac{-۷}{(۲x + ۱)^{۲}} = \frac{-۱}{۷} \Rightarrow (۲x + ۱)^{۲} = ۴۹ \begin{cases} ۲x + ۱ = ۷ \Rightarrow A \begin{cases} x = ۳ \\ y = -۲ \end{cases} \\ ۲x + ۱ = -۷ \Rightarrow B \begin{cases} x = -۴ \\ y = -۳ \end{cases} \end{cases}$$

$$AB = \sqrt{(-۴ - ۳)^{۲} + (-۳ + ۲)^{۲}} = \sqrt{۵۰} = ۵\sqrt{۲}$$

۴۲- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\frac{f(۱/۶۹)-f(۱)}{۱/۶۹-۱}=f'(۱)-\frac{۹}{۱۳۸}$$

$$\frac{۱/۳a-a}{۰/۶۹}=\frac{a}{۲}-\frac{۹}{۱۳۸}\Rightarrow\frac{۰/۳a}{۰/۶۹}=\frac{a}{۲}-\frac{۳}{۴۶}\Rightarrow\frac{۱۰a}{۲۳}=\frac{۲۳a-۳}{۴۶}\Rightarrow۲۰a=۲۳a-۳\Rightarrow a=۱$$

۴۳- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$f(x)=\begin{cases}\frac{۳}{۵}x & ; x\ge۰\\ x & ; x<۰\end{cases}\quad,\quad g(x)=\begin{cases}۵x & ; x\ge۰\\ ۳x & ; x<۰\end{cases}$$

$$(fog)_{(x)}=\begin{cases}\frac{۳}{۵}(۵x) & ; x\ge۰\\ ۳x & ; x<۰\end{cases}\Rightarrow(fog)_{(x)}=۳x\ ;\ x\in R$$

$$\downarrow$$

$$(fog)'_{(x)}=۳\ ;\ x\in R$$

$$(fog)_{(x)}=\begin{cases}۵\left(\frac{۳}{۵}x\right) & ; x\ge۰\\ ۳x & ; x<۰\end{cases}\Rightarrow(gof)_{(x)}=۳x\ ;\ x\in R$$

$$\downarrow$$

$$(fog)'_{(x)}=۳\ ;\ x\in R$$

در نتیجه:

$$(fog)'_{(x)}=(gof)'_{(x)}=۳\ ;\ x\in R$$

۴۴- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$f(x)=۲x-|x-۱|=\begin{cases}۲x-(x-۱) & ,x\ge۱\\ ۲x-(x-۱)\end{cases}=\begin{cases}x+۱ & ,x\ge۱\\ ۳x-۱ & ,x<۱\end{cases}$$

$$g(x)=ax+b+|x-۲|=\begin{cases}ax+b+x-۲ & ,x\ge۲\\ ax+b-x+۲ & ,x<۲\end{cases}=\begin{cases}(a+۱)x+b-۲ & ,x\ge۲\\ (a-۱)x+b+۲ & ,x<۲\end{cases}$$

$$gof(x)=g(f(x))=\begin{cases}(a+۱)f(x)+b-۲ & ,f(x)\ge۲\\ (a-۱)f(x)+b+۲ & ,f(x)<۲\end{cases}$$

چون f اکیداً صعودی و $f(۱)=۲$ است، داریم:

$$gof(x)=\begin{cases}(a+۱)(x+۱)+b-۲ & ,x\ge۱\\ (a-۱)(۳x-۱)+b+۲ & ,x<۱\end{cases}$$

gof ترکیب دو تابع پیوسته است، پس خودش پیوسته است و از مشتق‌پذیری داریم:

$$y'_{+}(۱)=y'_{-}(۱)\Rightarrow a+۱=۳(a-۱)$$

پس $a=۲$ و b هر مقدار دلخواهی می‌تواند باشد.

و داریم:

$$g'(\sqrt{۵})=a+۱=۳$$

۴۵- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{h\to ۰}\frac{f(۲+h)-f(۲)}{h}=f'(۲)$$

$$f'(x)=۵\left(\sqrt{\frac{x+۲}{۲x-۳}}\right)^۴\times\left(\frac{\frac{-۷}{(۲x-۳)^۲}}{۲\sqrt{\frac{x+۲}{۲x-۳}}}\right)$$

$$f'(x)=\frac{-۳۵}{۲(۲x-۳)^۲}\times\left(\sqrt{\frac{x+۲}{۲x-۳}}\right)^۲$$

$$f'(۲)=\frac{-۳۵}{۲(۱)}\times ۲^۳=-۱۴۰$$

۴۶- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. با استفاده از معادله داده شده داریم:

$$\lim_{h\to ۰}\frac{f(a+h)-۲f(a)+f(a-h)}{h^۲}=\frac{۰}{۰}\xrightarrow{\text{هوپیتال}}\lim_{h\to ۰}=\frac{f'(h+a)-f'(-h+a)}{۲h}$$

با اضافه و کم کردن $f'(a)$ داریم:

$$\lim_{h\to ۰}\frac{f'(h+a)-f'(a)-f'(-h+a)+f'(a)}{۲h}=\frac{۱}{۲}\left(\lim_{h\to ۰}\frac{f'(h+a)-f'(a)}{h}-\frac{f'(-h+a)-f'(a)}{h}\right)$$

$$=\frac{۱}{۲}\left(\lim_{h\to ۰}\frac{f'(h+a)-f'(a)}{h}+\frac{f'(-h+a)-f'(a)}{-h}\right)=\frac{۱}{۲}(f''(a)+f''(a))=f''(a)=۲$$

حال خواسته صورت سؤال را حساب می‌کنیم:

$$\lim_{x\to a}\frac{x(f'(x)-f'(a))}{x-a}=a\times f''(a)=۲a$$

۴۷- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

در تابع با ضابطهٔ $f(x)=۲|x-۱|-|x-۲|$ حاصل $\lim_{h\to ۰^-}\frac{f(۱+h)+f(۲-h)-k}{h}$ می‌شود $\frac{f(۱)+f(۲)-k}{۰}$

و چون حد موجود است باید صورت هم صفر شود، پس:

$$k=f(۱)+f(۲)$$

$$\left.\begin{aligned}f(۱)&=۲(۰)-۱=-۱\\ f(۲)&=۲(۱)-۰=۲\end{aligned}\right\}\Rightarrow k=۱$$

حال برای محاسبه حاصل حد مبهم، از قاعدهٔ هوپیتال یا تعریف مشتق داریم:

$$\lim_{h\to ۰^-}\frac{f(۱+h)-f(۱)+f(۲-h)-f(۲)}{h}\xrightarrow{۱+h<۱\ ,\ ۲-h>۲}f'_-(۱)-f'_+(۲)$$

در تابع $f(x)=۲|x-۱|-|x-۲|$ در سمت چپ $x=۱$ داریم:

$$f(x)=۲(-x+۱)+(x-۲)=-x\Rightarrow f'_-(۱)=-۱$$

و در سمت راست $x=۲$ داریم:

$$f(x)=۲(x-۱)-(x-۲)=x\Rightarrow f'_+(۲)=۱$$

بنابراین پاسخ حد $-۲=-۱-۱$ است و جواب $k-b=۱-(-۲)=۳$ است.

۴۸- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. آهنگ لحظه‌ای در $x = ۲$:

$$f'(x) = x + \frac{۱}{۲x^{۲}} \Rightarrow f'(۲) = ۲ + \frac{۱}{۸} = \frac{۱۷}{۸}$$

$$[۱ , ۴] \text{ آهنگ تغییر متوسط در } = \frac{f(۴) - f(۱)}{۴ - ۱} = \frac{\left(۸ - \frac{۱}{۸}\right) - \left(\frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۲}\right)}{۳} = \frac{\frac{۶۳}{۸}}{۳} = \frac{۲۱}{۸}$$

$$\text{اختلاف موردنظر سؤال} = \frac{۲۱}{۸} - \frac{۱۷}{۸} = \frac{۴}{۸} = \frac{k}{۸} \Rightarrow k = ۴$$

۴۹- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. فرض می‌کنیم از نقطهٔ $A(\alpha , \beta)$ خارج از منحنی $y = x^{۲}$ خط یا خطهایی مماس کرده‌ایم. معادلهٔ این خط $y - \beta = m(x - \alpha)$ یا $y = mx - m\alpha + \beta$ است. معادلهٔ تقاطع $y = x^{۲}$ و $y = mx - m\alpha + \beta$ باید ریشهٔ مضاعف داشته باشد.

$$x^{۲} = mx - m\alpha + \beta \Rightarrow x^{۲} - mx + (m\alpha - \beta) = ۰ \Rightarrow \Delta = ۰$$

$$m^{۲} - ۴(m\alpha - \beta) = ۰ \Rightarrow m^{۲} - ۴m\alpha + ۴\beta = ۰$$

از آنجایی که دو خط باید بر هم عمود باشند، پس:

$$mm' = -۱ \Rightarrow \frac{c}{a} = -۱ \Rightarrow \frac{۴\beta}{۱} = -۱ \Rightarrow \beta = -\frac{۱}{۴}$$

یعنی روی نمودار $f(x) = -|x - ۱| + ۱$ نقاطی را می‌خواهیم که عرض آن‌ها $-\frac{۱}{۴}$ باشد.

$$-|x - ۱| + ۱ = -\frac{۱}{۴} \Rightarrow |x - ۱| = \frac{۵}{۴} \Rightarrow x = ۱ \pm \frac{۵}{۴} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{۹}{۴} \\ x = -\frac{۱}{۴} \end{cases}$$

پس دو نقطه روی نمودار $f(x)$ وجود دارد.

۵۰- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. مقدار مشتق تابع در $x=۰$ برابر شیب خط AB است.

$$f'(۰)=\lim_{x\to ۰}\frac{f(x)-f(۰)}{x-۰}=\lim_{x\to ۰}\frac{\frac{x}{\sqrt{x^۲+۱}}-۰}{x-۰}=\lim_{x\to ۰}\frac{۱}{\sqrt{x^۲+۱}}=۱$$

حاصل حدهای تابع در $\pm\infty$ را نیز می‌یابیم.

$$y=\lim_{x\to +\infty}\frac{x}{\sqrt{x^۲+۱}}=\lim_{x\to +\infty}\frac{x}{|x|}=۱$$

$$y=\lim_{x\to -\infty}\frac{x}{\sqrt{x^۲+۱}}=\lim_{x\to -\infty}\frac{x}{|x|}=-۱$$

با توجه به این‌که شیب خط AB برابر یک است و از مبدأ می‌گذرد، بنابراین مختصات نقطهٔ $A(۱,۱)$ و $B(-۱,-۱)$ و فاصلهٔ آن‌ها برابر است با:

$$AB=\sqrt{(-۱-۱)^۲+(-۱-۱)^۲}=\sqrt{۸}=۲\sqrt{۲}$$