

گنجینه سوال رایگان

+ پاسخ تشریحی

یاوران دانش



راه های ارتباطی با ما:

www.Dyavari.com

۰۲۱-۷۶۷۰۳۸۵۸

۰۹۱۲-۳۴ ۹۴ ۱۳۴



- | | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
|------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|
| ۱ - | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |
| ۲ - | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۳ - | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۴ - | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۵ - | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۶ - | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۷ - | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۸ - | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۹ - | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۱۰ - | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |
| ۱۱ - | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |
| ۱۲ - | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۱۳ - | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۱۴ - | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۱۵ - | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۱۶ - | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۱۷ - | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۱۸ - | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۱۹ - | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۲۰ - | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |
| ۲۱ - | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۲۲ - | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |
| ۲۳ - | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |
| ۲۴ - | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۲۵ - | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۲۶ - | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۲۷ - | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۲۸ - | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |
| ۲۹ - | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۳۰ - | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |
| ۳۱ - | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۳۲ - | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۳۳ - | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |
| ۳۴ - | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |

- | | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
|------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|
| ۳۵ - | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۳۶ - | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |
| ۳۷ - | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۳۸ - | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۳۹ - | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۴۰ - | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۴۱ - | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۴۲ - | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۴۳ - | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۴۴ - | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۴۵ - | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۴۶ - | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |
| ۴۷ - | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۴۸ - | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۴۹ - | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۵۰ - | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |



۱- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\frac{1 + \operatorname{tg}^2 x}{2 - \operatorname{tg}^2 x} = \frac{3}{4} \Rightarrow 4 + 4 \operatorname{tg}^2 x = 6 - 3 \operatorname{tg}^2 x$$

$$\Rightarrow 7 \operatorname{tg}^2 x = 2 \Rightarrow \operatorname{tg}^2 x = \frac{2}{7} \Rightarrow 1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{9}{7}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\operatorname{Cos}^2 x} = \frac{9}{7} \Rightarrow \operatorname{Cos}^2 x = \frac{7}{9} \Rightarrow \operatorname{Sin}^2 x = \frac{2}{9}$$

$$\frac{1 + \operatorname{Sin}^2 x}{2 - \operatorname{Sin}^2 x} = \frac{1 + \frac{2}{9}}{2 - \frac{2}{9}} = \frac{\frac{11}{9}}{\frac{16}{9}} = \frac{11}{16}$$

۲- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\operatorname{Sin}^2 \theta + \operatorname{Cos}^2 \theta = 1 \Rightarrow \operatorname{Cos} \theta = \pm \sqrt{1 - \operatorname{Sin}^2 \theta}$$

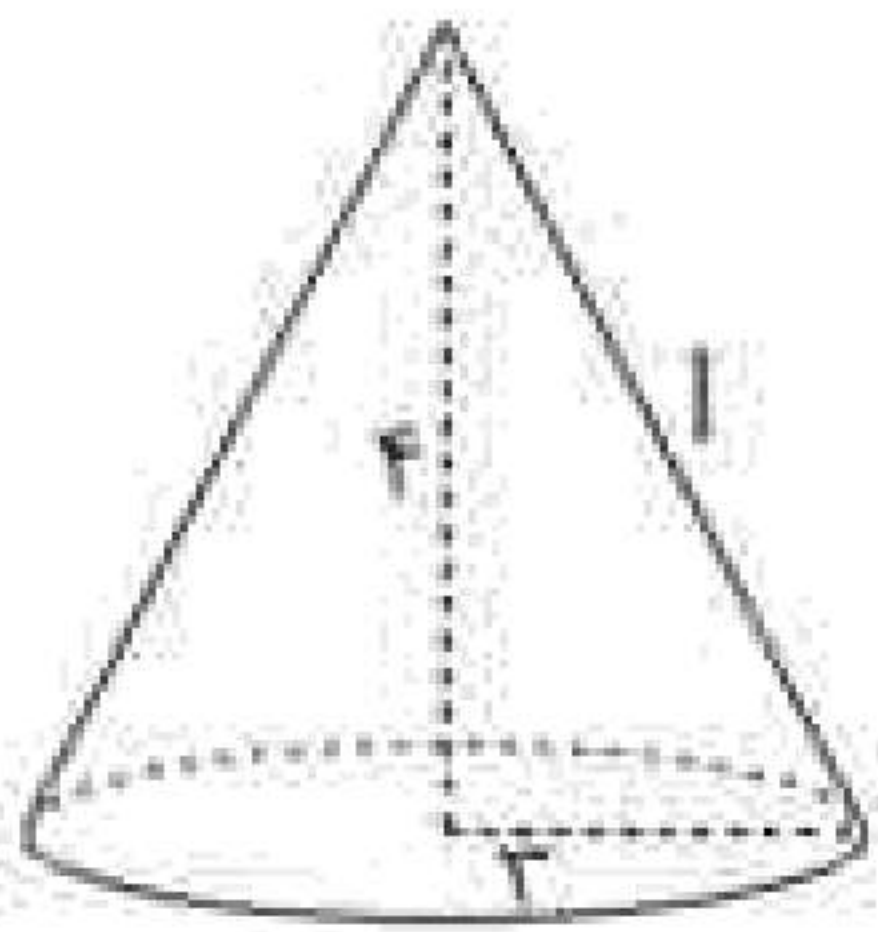
ناحیه دوم $\rightarrow \operatorname{Cos} \theta = -\sqrt{1 - \left(\frac{9}{41}\right)^2} = -\sqrt{1 - \frac{81}{1681}} = -\sqrt{\frac{1600}{1681}} = -\frac{40}{41}$

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\operatorname{Sin} \theta}{\operatorname{Cos} \theta} = \frac{\frac{9}{41}}{-\frac{40}{41}} = -\frac{9}{40}$$



۳- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

مساحت قطاعی به شعاع r و زاویه α برابر $\frac{\alpha}{2}r^2$ است. با توجه به اینکه $15^\circ = \frac{\pi}{12}\text{rad}$ است، مساحت قطاع برابر $\frac{\pi}{24}r^2$ می شود. حالا به سراغ مخروط برویم:



$$l^2 = r^2 + h^2 = 25 \Rightarrow l = 5$$

وقتی مخروط را به شکل گسترده تبدیل کنیم، قطاعی حاصل می شود که شعاع آن همان l به دست آمده و طول کمان آن $2\pi(3) = 6\pi$ است.



$$\theta = \frac{6\pi}{5} \Rightarrow S = \frac{1}{2} \times \frac{6\pi}{5} \times (5)^2 = \frac{3\pi}{5} \times 25 = 15\pi$$

$$\frac{\pi}{24}r^2 = 10 \times 15\pi \Rightarrow r^2 = 24 \times 10 \times 15 \Rightarrow r = 60$$

۴- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

دو زاویه را \hat{A} و \hat{B} در نظر می گیریم. (فرض: $\hat{A} > \hat{B}$)

$$\hat{A} + \hat{B} = \frac{17}{36}\pi \xrightarrow{\text{تبدیل به درجه}} \frac{17 \times 180^\circ}{36} = 85^\circ$$

$$\hat{A} + \hat{B} = 85^\circ$$

$$\hat{A} - \hat{B} = 45^\circ$$

$$\frac{\hat{A} + \hat{B}}{2} = \frac{130^\circ}{2} \Rightarrow \hat{A} = 65^\circ$$

$$65^\circ - \hat{B} = 45^\circ \Rightarrow \hat{B} = 20^\circ \xrightarrow{4 \times \hat{B}} 4\hat{B} = 80^\circ$$

$$\xrightarrow{\text{مکمل}} 180^\circ - 80^\circ = 100^\circ \text{ ربع دوم ناحیه ی مثلثاتی}$$



۵- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

چون تابع دارای Max روی محور عرض‌ها است پس $-b > 0$ یعنی $b < 0$

$$\text{Max} = 6 \Rightarrow a + |b| = 6$$

$$T = \pi \Rightarrow \frac{2\pi}{\left|\frac{b}{a}\right|} = \pi \Rightarrow \left|\frac{a}{b}\right| = \frac{1}{2} \Rightarrow 2|a| = |b|$$

از طرفی:

$$a + |b| = 6 \Rightarrow a + 2|a| = 6$$

$$\text{حالت ۱: } a > 0 \Rightarrow 3a = 6 \Rightarrow a = 2 \Rightarrow b = -4$$

$$\text{حالت ۲: } a < 0 \Rightarrow -a = 6 \Rightarrow a = -6 \Rightarrow b = -12$$

$$\text{حالت ۱: } f(x) = 2 + 4 \cos 2x \Rightarrow f\left(\frac{\sqrt{\pi}}{6}\right) = 2 + 4 \times \frac{1}{2} = 4$$

$$\text{حالت ۲: } f(x) = -6 + 12 \cos 2x \Rightarrow f\left(\frac{\sqrt{\pi}}{6}\right) = -6 + 12 \times \frac{1}{2} = 0$$

با توجه به گزینه‌های موجود، گزینه‌ی ۳ صحیح است.

۶- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\cos 3x = -\sin x \Rightarrow \cos 3x = \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$$

$$\begin{cases} 3x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} + x \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{4} \\ 3x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} - x \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

$x = \frac{\pi}{4}$ اولین ریشه در آن بازه و $x = 2\pi - \frac{\pi}{4}$ آخرین ریشه در آن بازه است، پس اختلاف آن‌ها $\frac{13\pi}{4}$ است.

۷- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

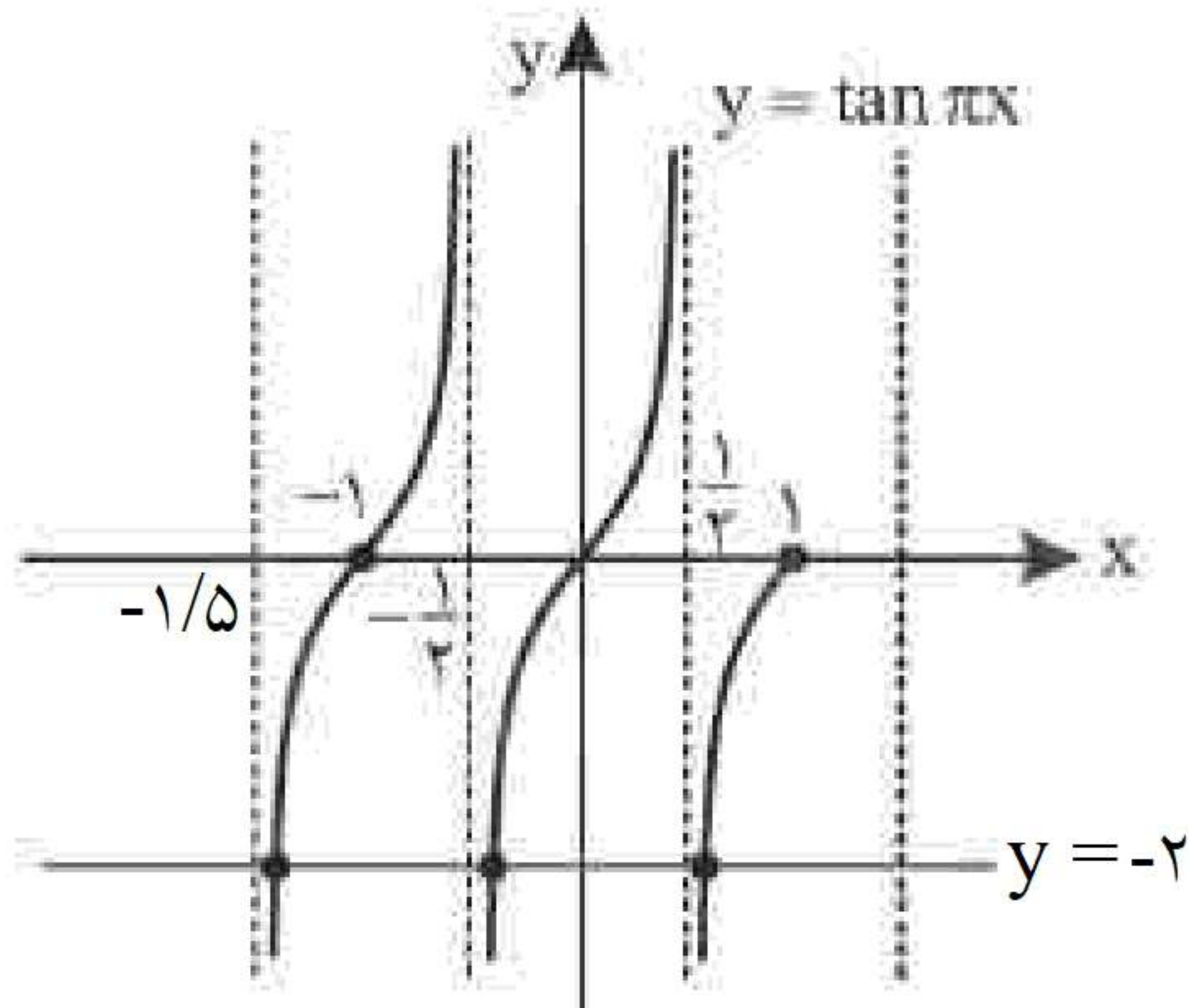
$$\text{tg } x - 2 \text{Cotg } x = 1 \Rightarrow \text{tg } x - \frac{2}{\text{tg } x} = 1$$

$$\xrightarrow{\times \text{tg } x} \text{tg}^2 x - \text{tg } x - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \text{tg } x = -1 \times \\ \text{tg } x = 2 \checkmark \end{cases}$$

$$\cos 2x = \frac{1 - \text{tg}^2 x}{1 + \text{tg}^2 x} = \frac{1 - 4}{1 + 4} = -\frac{3}{5}$$



۸- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.
مطابق شکل در فاصله‌ی داده شده تابع ۳ بار خط $y = -2$ را قطع می‌کند.



۹- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$f(x) = \frac{a}{4} \sin^2\left(\frac{\pi}{a}x\right) \Rightarrow \begin{cases} \text{Max} = \frac{|a|}{4} \\ T = \frac{\pi}{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi|a|}{2} \end{cases}$$

$$\frac{|a|}{4} = 2 \Rightarrow |a| = 8 \Rightarrow T = 4\pi$$

۱۰- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.
زاویه ۳ رادیان در ناحیه دوم و زاویه ۴ رادیان در ناحیه سوم دایره مثلثاتی قرار دارد، پس کسینوس ۳ رادیان، منفی و سینوس ۴ رادیان نیز منفی است.

۱۱- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\begin{cases} f_{\max} = b + |a| = 9 \\ f_{\min} = b - |a| = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 3 \\ |a| = 6 \end{cases} \Rightarrow |ab| = 18$$

$$T = \frac{2\pi}{\left|\frac{\pi}{ba}\right|} = 2|ab| = 36$$

نکته:

$$y = a + b \cos kx \Rightarrow \begin{cases} y_{\max} = a + |b| \\ y_{\min} = a - |b| \\ T = \frac{2\pi}{|k|} \end{cases}$$

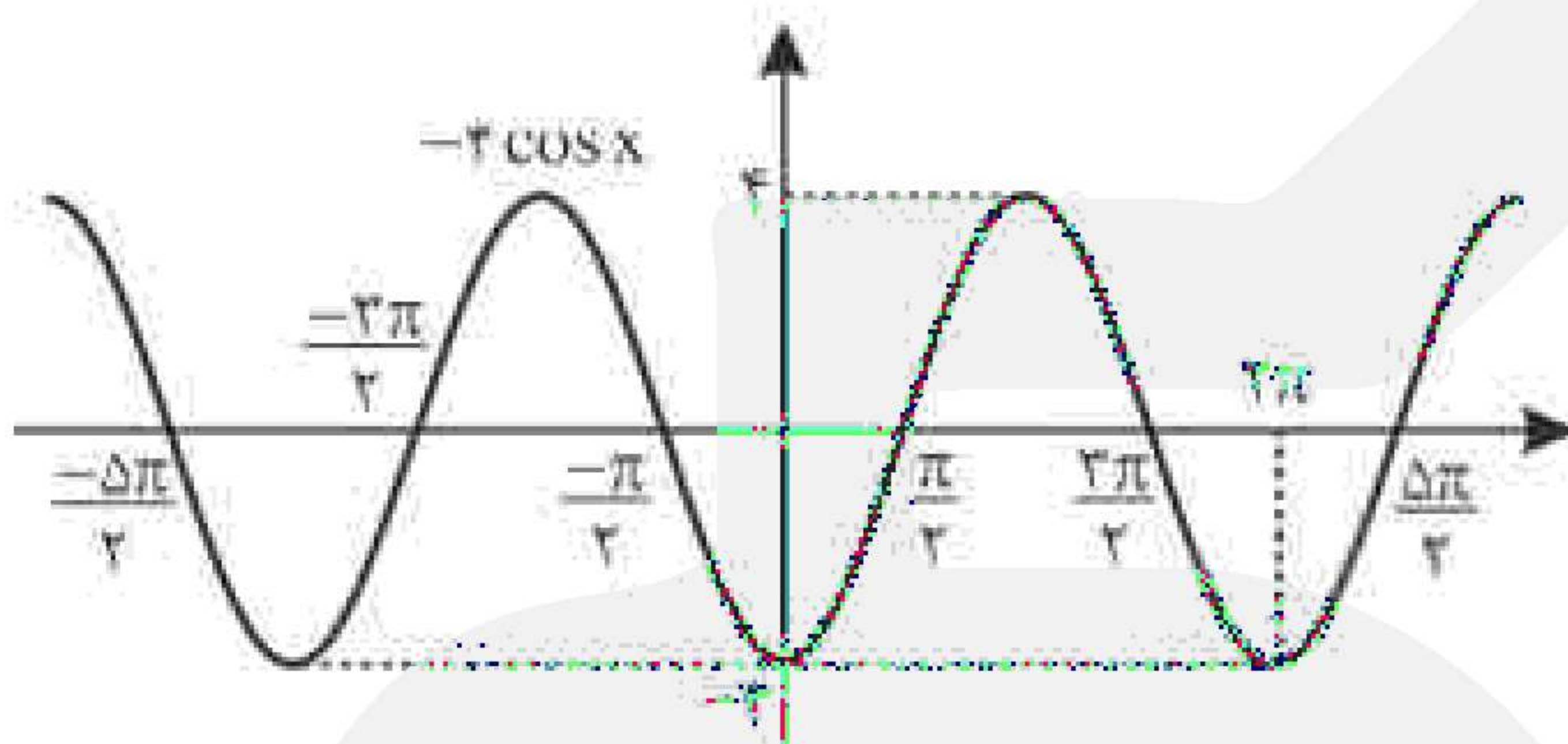


۱۲- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

چون حاصل $[x]$ عددی صحیح است، پس در تابع $f(x) = \cos\left(\frac{\pi [x]}{2}\right)$ کمان تابع کسینوس به صورت $\frac{k\pi}{2}$ خواهد بود $(k \in \mathbb{Z})$ ، یعنی ضابطه تابع f به صورت $f(x) = \cos\left(\frac{k\pi}{2}\right)$ است که چون $\frac{k\pi}{2}$ ، چهار نقطه اصلی دایره مثلثاتی را مشخص می‌کند، پس مقادیر تابع f اعداد $-1, 0, 1$ است یعنی $R_f = \{-1, 0, 1\}$.

۱۳- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

چون دقیقاً در دو نقطه قرار است y برابر -4 باشد، بیشترین مقدار k برابر 2π خواهد شد.



۱۴- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

بررسی گزینه‌ها:

گزینه (۱):

$$f(-x) = \sin(-x) + \cos(-x) = \cos x - \sin x \neq -f(x)$$

گزینه (۲):

$$f(-x) = \operatorname{tg}(-x) + \cos(-x) = \cos x - \operatorname{tg} x \neq -f(x)$$

گزینه (۳):

$$\begin{aligned} f(-x) &= \operatorname{tg}(-x) + \operatorname{ctg}(-x) = -\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x \\ &= -(\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x) = -f(x) \end{aligned}$$

گزینه (۴):

$$f(-x) = \sin^3(-x) + \cos^3(-x) = -\sin^3 x + \cos^3 x \neq -f(x)$$

«بانک سوال یاوران دانش»

۱۵- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

هر یک از اضلاع AB و BC برابر $\sqrt{2}$ است. فرض کنید $OC = a$ باشد:

$$\triangle OBA \text{ در فیثاغورس: } OA^2 = OB^2 + AB^2 \Rightarrow 20 = (a + \sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2$$

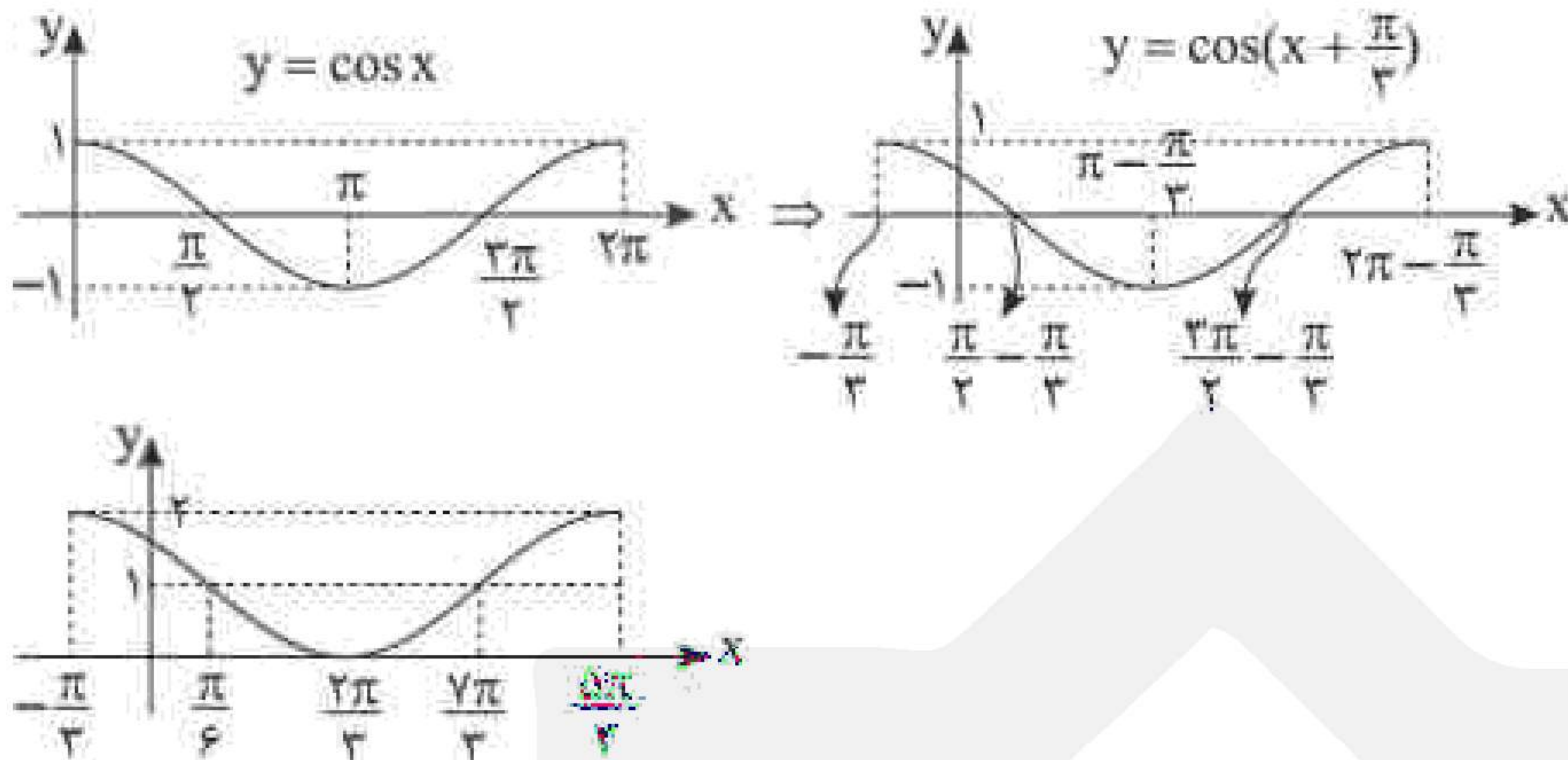
$$\Rightarrow (a + \sqrt{2})^2 = 18 \Rightarrow a + \sqrt{2} = 3\sqrt{2} \Rightarrow a = 2\sqrt{2}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{AB}{OB} = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2} + \sqrt{2}} = \frac{1}{3}$$



۱۶- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

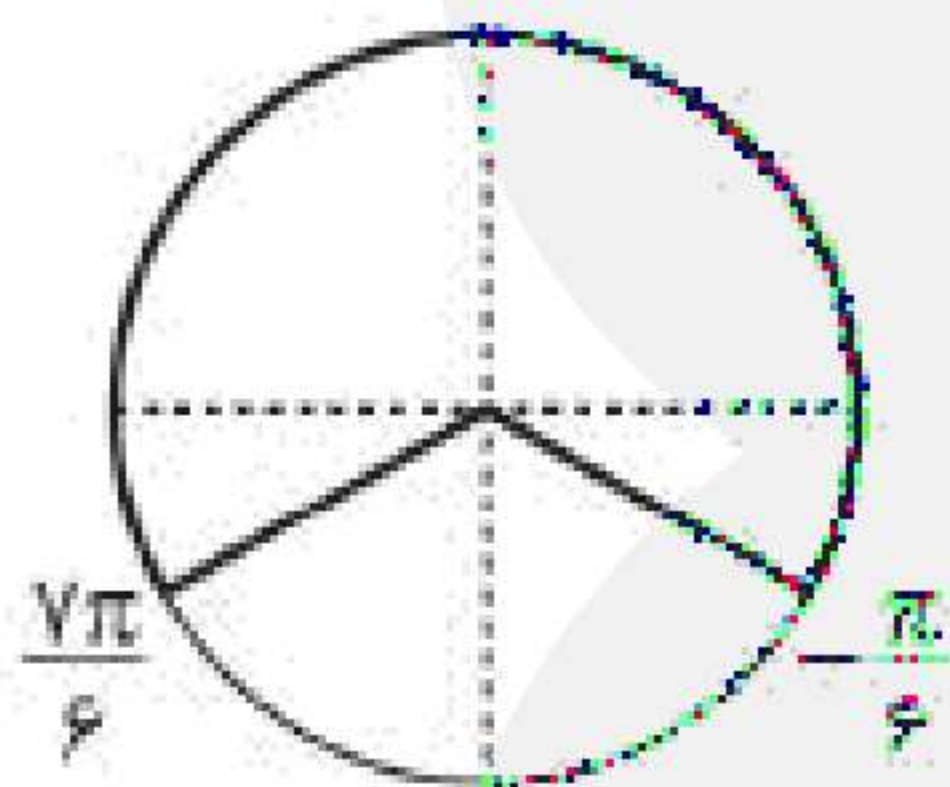
نمودار $y = \cos x$ را $\frac{\pi}{3}$ به چپ و ۱ واحد به بالا انتقال می‌دهیم تا نمودار $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + 1$ حاصل شود.



$$a=2, b=\frac{2\pi}{3}, c=\frac{5\pi}{3} \Rightarrow \frac{b+2c}{a} = \frac{\frac{2\pi}{3} + \frac{10\pi}{3}}{2} = \frac{4\pi}{2} = 2\pi$$

۱۷- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$A = (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)(\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) = \cos 2\alpha$$



$$-1 \leq \cos 2\alpha \leq 1$$

۱۸- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

عبارت (الف): تعریف رادیان و رابطه‌ی آن با درجه است. (صحیح)
عبارت (ب):

$$\frac{100^\circ}{180^\circ} \theta^{\text{Rad}} = \frac{5\pi}{9} \text{ rad} \Rightarrow \theta = \frac{5\pi}{9} \text{ rad}$$

$$l = r \cdot \theta = 3 \times \frac{5\pi}{9} = \frac{5\pi}{3} \text{ m}$$

پس عبارت (ب) غلط است.

عبارت (ج): تابع سینوس در $x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$ ($k \in \mathbb{Z}$)، حداکثر مقدار خود را دارد، پس این عبارت غلط است.

عبارت (د): حداکثر مقدار $y = |\sin x|$ ، ۱ است. (غلط)

عبارت (ه): تابع کسینوس در $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$ ($k \in \mathbb{Z}$) برابر صفر است. پس این عبارت درست است.

عبارت (و): حداقل مقدار $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ ، -۱ است و ۲ واحد انتقال به پایین، حداقل را -۳ می‌کند. پس این عبارت درست است.



۱۹- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$۴ + ۴ \cos \pi x = ۲ \Rightarrow ۴ \cos \pi x = -۲$$

$$\Rightarrow \cos \pi x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \pi x = \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$$

β دومین ریشه‌ای است که تابع $y = ۲$ خط y را قطع می‌کند:

$$\pi\beta = \frac{4\pi}{3} \Rightarrow \beta = \frac{4}{3}$$

$$۴ + ۴ \cos \pi x = ۶ \Rightarrow \cos \pi x = \frac{1}{2} \Rightarrow \pi x = \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, \frac{7\pi}{3}$$

α سومین ریشه‌ای است که نمودار تابع، خط $y = ۶$ را قطع کرده است:

$$\alpha = \frac{7}{3}$$

$$\Rightarrow \alpha - \beta = \frac{7}{3} - \frac{4}{3} = ۱$$

۲۰- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

با توجه به آن که $x = ۳$ اولین مجانب قائم تابع با طول مثبت است پس:

$$x = ۳ \Rightarrow \frac{3\pi}{b} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow b = ۶$$

از طرفی $x = ۱$ ، اولین ریشه مثبت تابع است:

$$۱ - a \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6}\right) = ۰ \Rightarrow ۱ - a \frac{\sqrt{3}}{3} = ۰ \Rightarrow a = \sqrt{3}$$

$$\text{پس: } ab = ۶\sqrt{3}$$

۲۱- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$A = ۳\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + ۲\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = ۱ + ۱ - \frac{3}{4} = \frac{5}{4}$$

$$B = ۳\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 - ۲\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = ۱ - ۱ + \frac{3}{4} = \frac{3}{4}$$

$$۳A = \frac{15}{4}, ۵B = \frac{15}{4} \Rightarrow ۳A = ۵B$$



۲۲- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\left. \begin{aligned} S_{OAC} &= \frac{1}{2} OA \times OC \times \sin 75^\circ \\ S_{OBD} &= \frac{1}{2} OD \times OB \times \sin 75^\circ \end{aligned} \right\} \Rightarrow OA \times OC = OB \times OD$$

$$\Rightarrow 2x(3x-1) = x(4x+1) \xrightarrow{x \neq 0} 2(3x-1) = 4x+1$$

$$\Rightarrow 6x-2 = 4x+1 \Rightarrow 2x=3 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow OC = \frac{7}{2}, OD = \frac{3}{2} \Rightarrow CD = 5$$

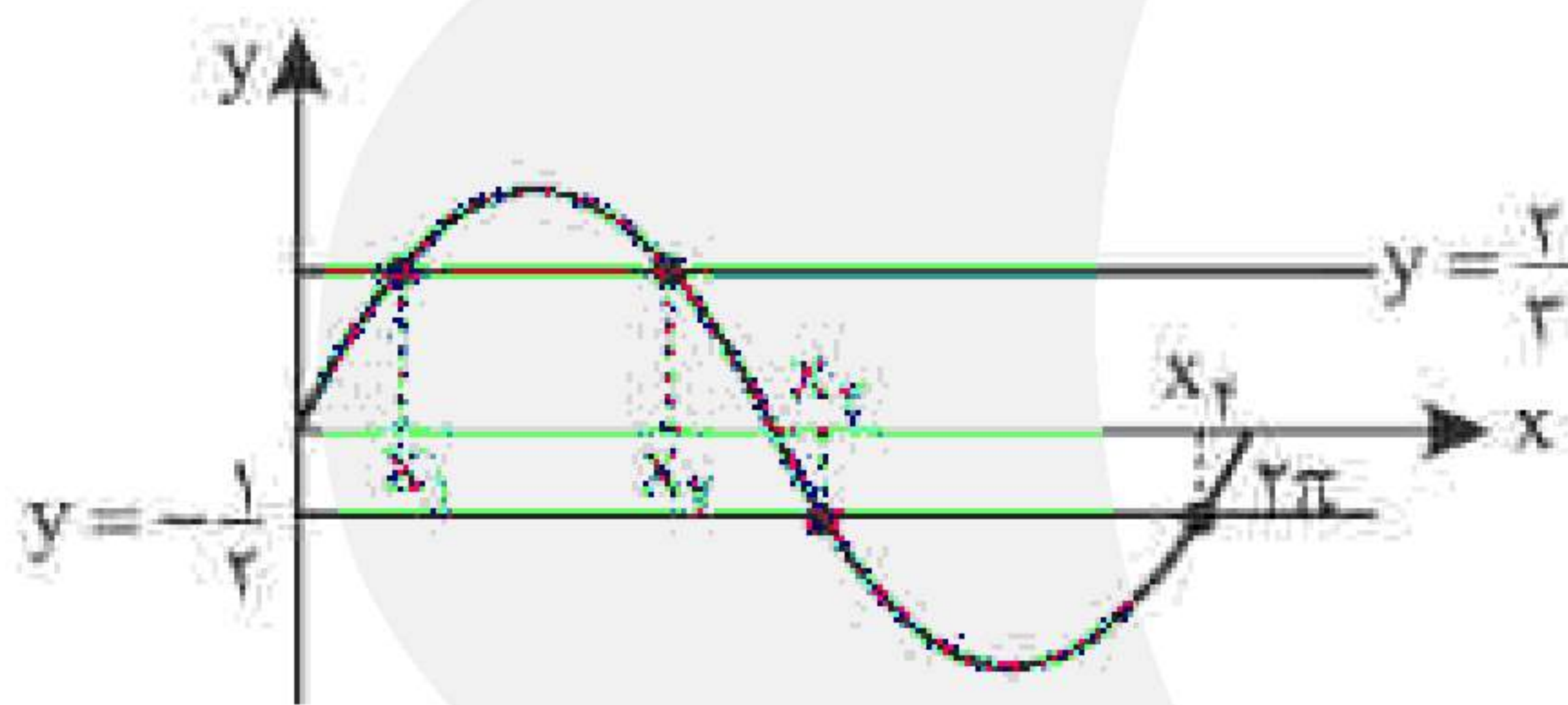
۲۳- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\sin x = 1 - 3(1 - 2\sin^2 x)$$

$$\Rightarrow \sin x = 1 - 3 + 6\sin^2 x \Rightarrow 6\sin^2 x - \sin x - 2 = 0$$

$$\sin x = \frac{1 \pm \sqrt{1+48}}{12} = \frac{1 \pm 7}{12} \Rightarrow \begin{cases} \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{2} \end{cases}$$

با توجه به نمودار تابع $y = \sin x$ در بازه $(0, 2\pi)$ و رسم ۲ خط $y = \frac{2}{3}$ و $y = -\frac{1}{2}$ داریم:



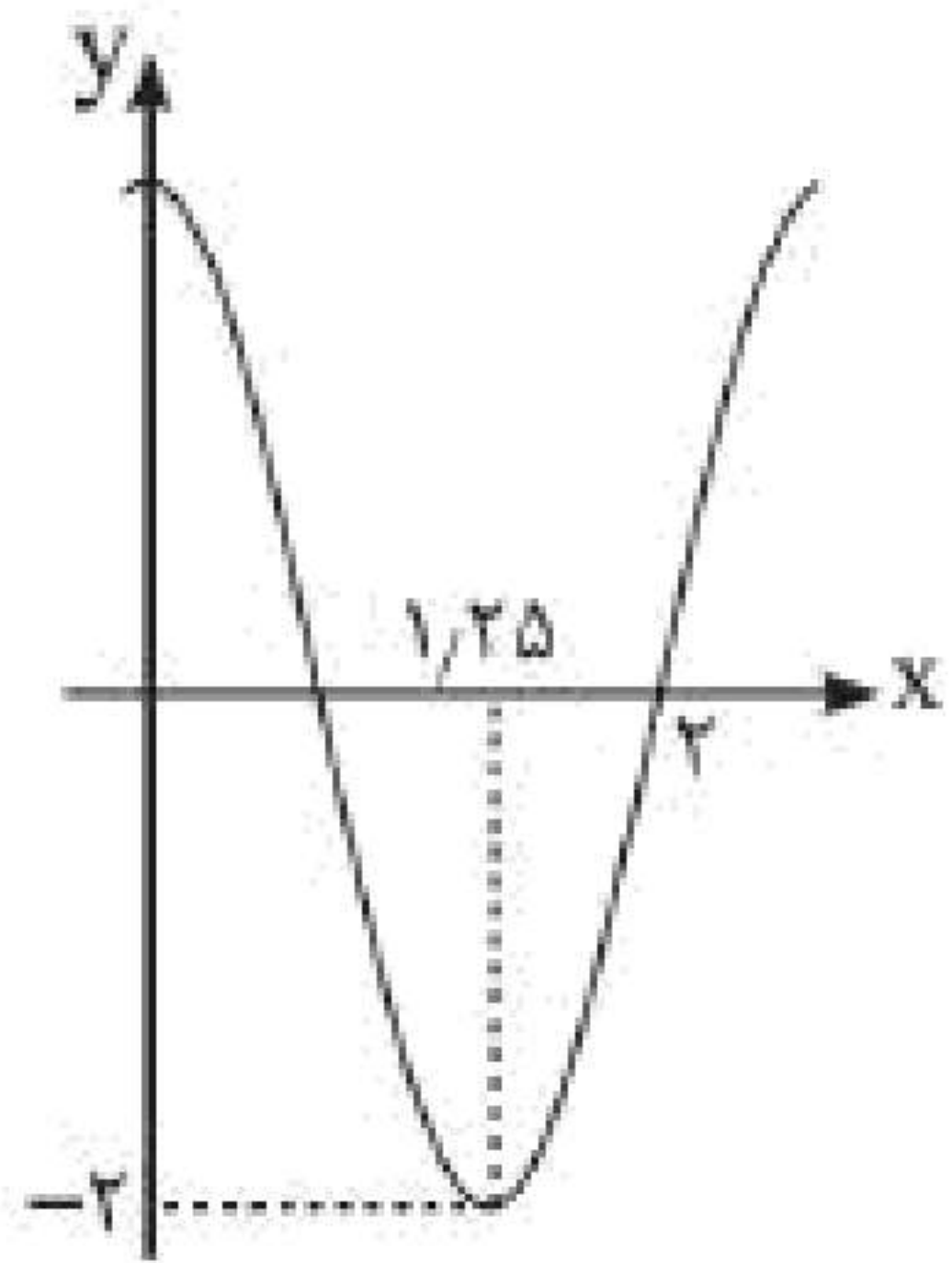
$$\frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow x_1 + x_2 = \pi$$

$$\frac{x_3 + x_4}{2} = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow x_3 + x_4 = 3\pi$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4\pi$$



۲۴- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.
مینیمم تابع ۲- است یعنی $a = -2$ می شود.



$$y = -2 \cos(bx + c)$$

مینیمم تابع جایی رخ می دهد که داخل کسینوس برابر π باشد:

$$1/25b + c = \pi$$

ریشه دوم جایی رخ می دهد که داخل کسینوس $\frac{3\pi}{2}$ باشد:

$$2b + c = \frac{3\pi}{2}$$

$$\begin{cases} 1/25b + c = \pi \\ 2b + c = \frac{3\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{3}{4}b = \frac{\pi}{2} \Rightarrow b = \frac{2\pi}{3}$$

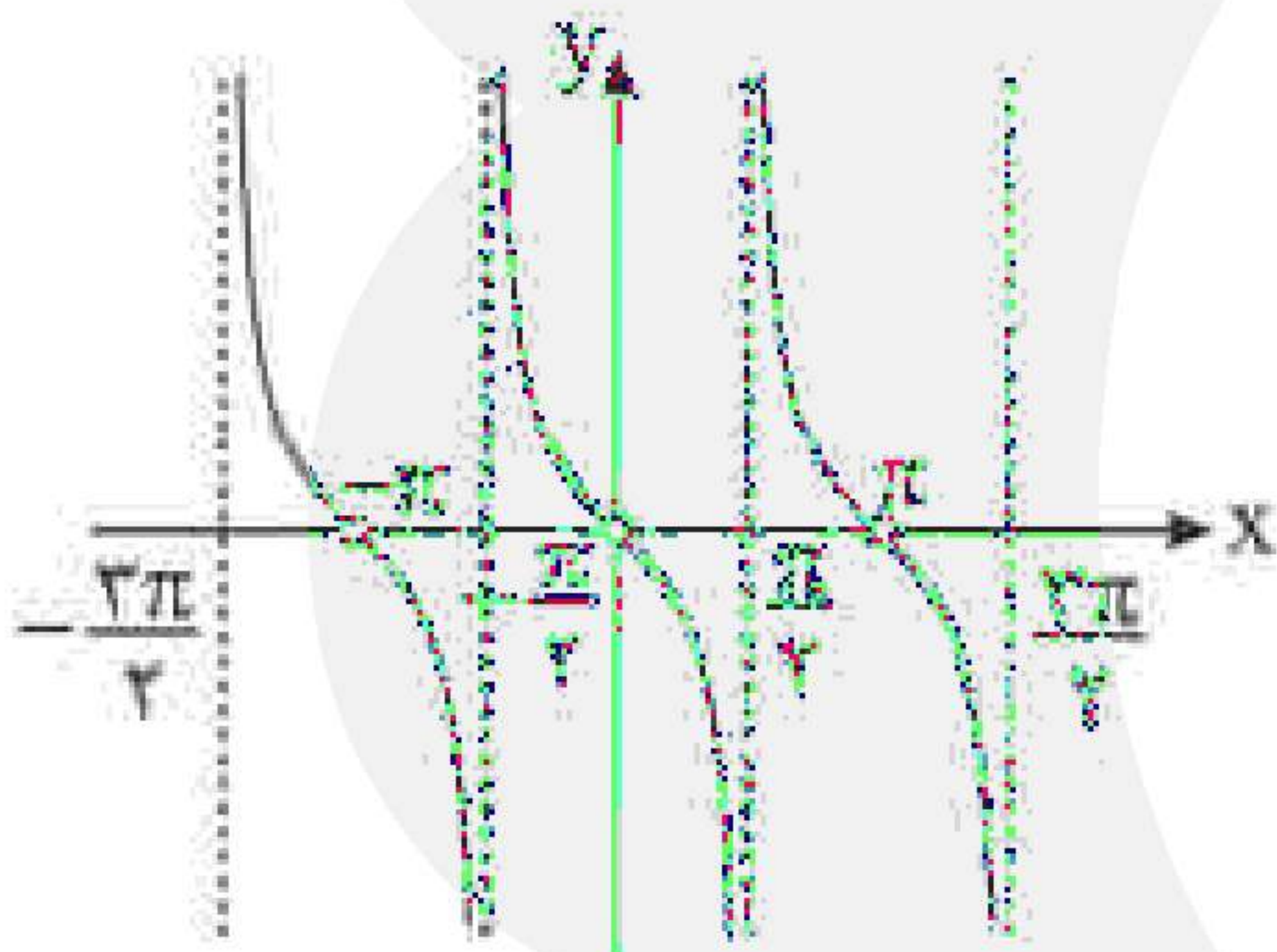
۲۵- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

می دانیم $\cot x - \tan x = 2 \cot 2x$ است.

$$y = 2 \cot 2x - \cot x = \cot x - \tan x - \cot x = -\tan x$$

باید نمودار $-\tan x$ را رسم کنیم فقط دقت کنید نقاطی به طول $x = \frac{k\pi}{2}$

که $k \in \mathbb{Z}$ در دامنه نیستند.



۲۶- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

با توجه به رابطه $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ ، ابتدا مقدار m را محاسبه می کنیم:

$$3m - 1 + \frac{m+1}{5} = 1 \Rightarrow \frac{15m - 5 + m + 1}{5} = 1 \Rightarrow 16m - 4 = 5 \Rightarrow 16m = 9 \Rightarrow m = \frac{9}{16}$$

«بانک سوال یاوران دانش»

۲۷- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$A\left(0, \frac{2}{3}\right) \quad B\left(\pi, -\frac{3}{2}\right) \quad C\left(2\pi, \frac{3}{2}\right)$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \times \text{ارتفاع} \times \text{قاعده} = \frac{1}{2} \times 3 \times 2\pi = 3\pi$$



۲۸- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

طرفین تساوی $\sin \alpha - \cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{5}$ را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$(\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = \frac{3}{25} \Rightarrow \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha - 2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{3}{25}$$

$$1 - \sin 2\alpha = \frac{3}{25} \Rightarrow \sin 2\alpha = 1 - \frac{3}{25} \Rightarrow \sin 2\alpha = \frac{22}{25}$$

۲۹- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

از تساوی شده داریم:

$$\frac{-\cos x + \sin x}{+\sin x + \cos x} = -\frac{5}{12} \Rightarrow -12 \cos x + 12 \sin x = -5 \sin x - 5 \cos x$$

$$\Rightarrow 17 \sin x = 7 \cos x \Rightarrow \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{7}{17} \Rightarrow \tan x = \frac{7}{17}$$

۳۰- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\begin{cases} DE = AE \times \sin \frac{\pi}{12} = 8 \times \cos \frac{\pi}{8} \times \sin \frac{\pi}{12} \\ CE = BE \times \cos \frac{\pi}{12} = 8 \times \sin \frac{\pi}{8} \times \cos \frac{\pi}{12} \end{cases}$$

$$DE \times CE = 64 \sin \frac{\pi}{8} \cos \frac{\pi}{8} \sin \frac{\pi}{12} \cos \frac{\pi}{12}$$

$$= 16 \sin \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{6} = 4\sqrt{2}$$

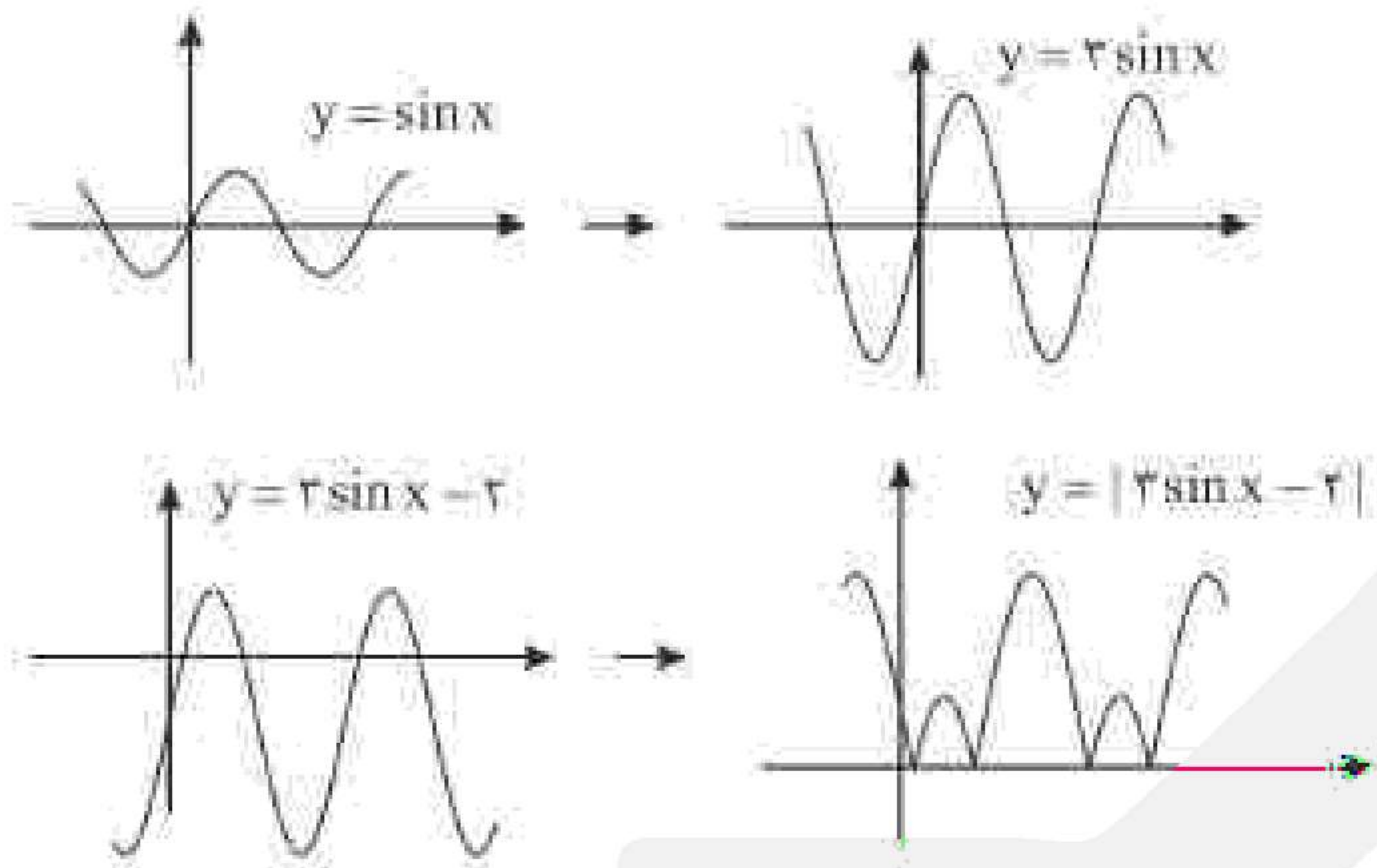
۳۱- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$0 \leq x \leq \frac{\pi}{3} \Rightarrow \operatorname{tg}(0) \leq \operatorname{tg} x \leq \operatorname{tg} \frac{\pi}{3}$$

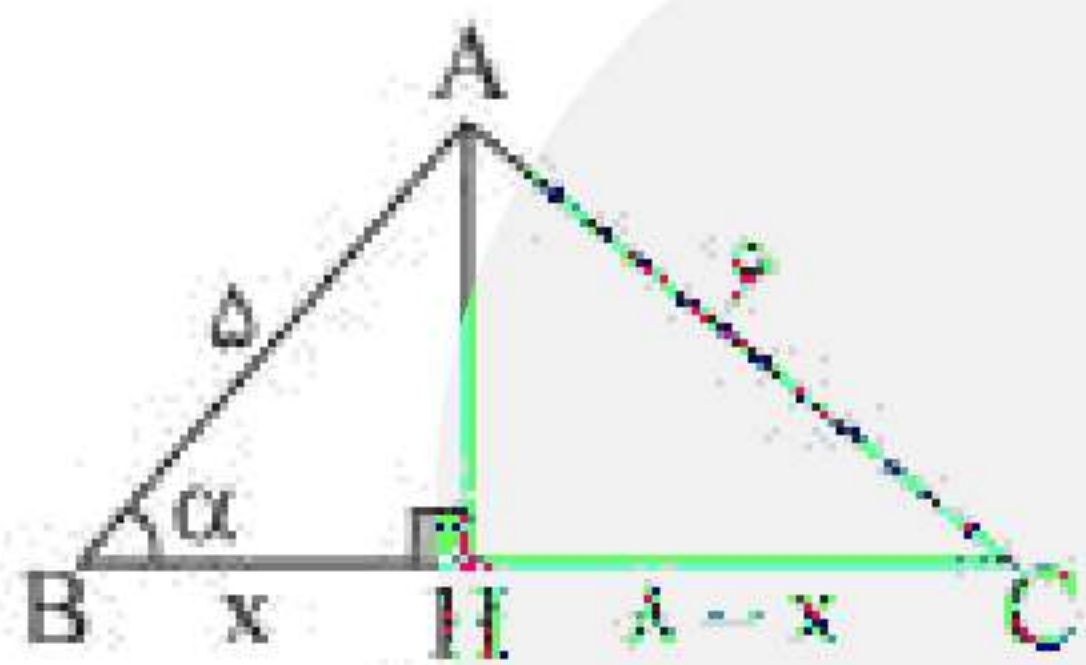
$$\Rightarrow 0 \leq \operatorname{tg} x \leq \sqrt{3} \Rightarrow [\operatorname{tg} x] = 0, 1$$



۳۲- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.
تابع $y = |3 \sin x - 2|$ را رسم می‌کنیم.



۳۳- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.
اگر در مثلث ABC، ارتفاع AH را رسم کنیم در این صورت با توجه به رابطه فیثاغورس در مثلث‌های ABH و ACH داریم:



$$ABH: x^2 + y^2 = 25 \quad (1)$$

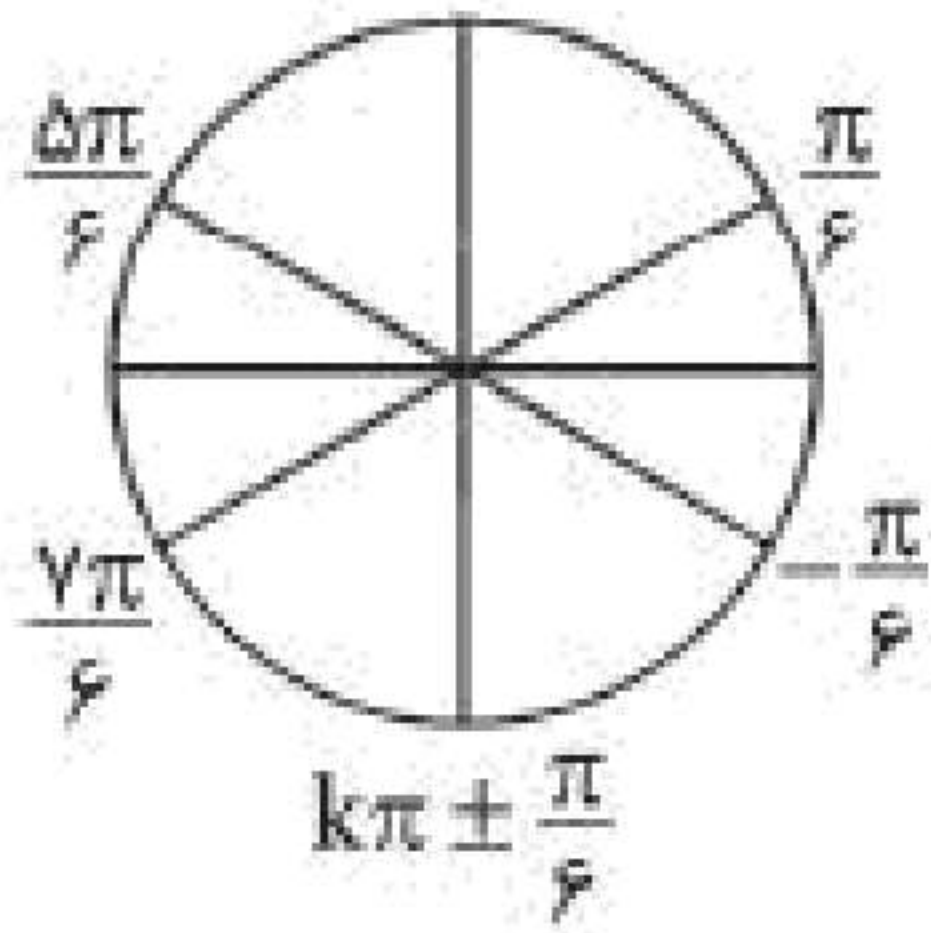
$$ACH: y^2 + (8 - x)^2 = 36 \Rightarrow y^2 + 64 + x^2 - 16x = 36$$

$$\xrightarrow{(1)} 25 + 64 - 16x = 36 \Rightarrow 16x = 53 \Rightarrow x = \frac{53}{16}$$

$$ABH: \cos \alpha = \frac{x}{5} = \frac{\frac{53}{16}}{5} = \frac{53}{80}$$



۳۴- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.



$$\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{4} \Rightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{4}$$

$$\underbrace{\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)}_{\sin\left(\frac{\pi}{6} + \left(x - \frac{\pi}{3}\right)\right)}$$

$$\Rightarrow \sin^2\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{4} \Rightarrow \begin{cases} \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} \\ \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + \frac{\pi}{6} = k\pi + \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = k\pi \\ x + \frac{\pi}{6} = k\pi - \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

۳۵- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\left. \begin{aligned} \cos\left(\frac{11\pi}{2} - x\right) &= -\sin x \\ \cos(x - 5\pi) &= -\cos x \end{aligned} \right\} \Rightarrow -\sin x - 3(-\cos x) = 0$$

$$\Rightarrow \sin x = 3\cos x \Rightarrow \cot x = \frac{1}{3}$$

$$\tan\left(\frac{5\pi}{2} + x\right) = -\cot x = -\frac{1}{3}$$

۳۶- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.
ابتدا معادله را حل می‌کنیم:

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$$

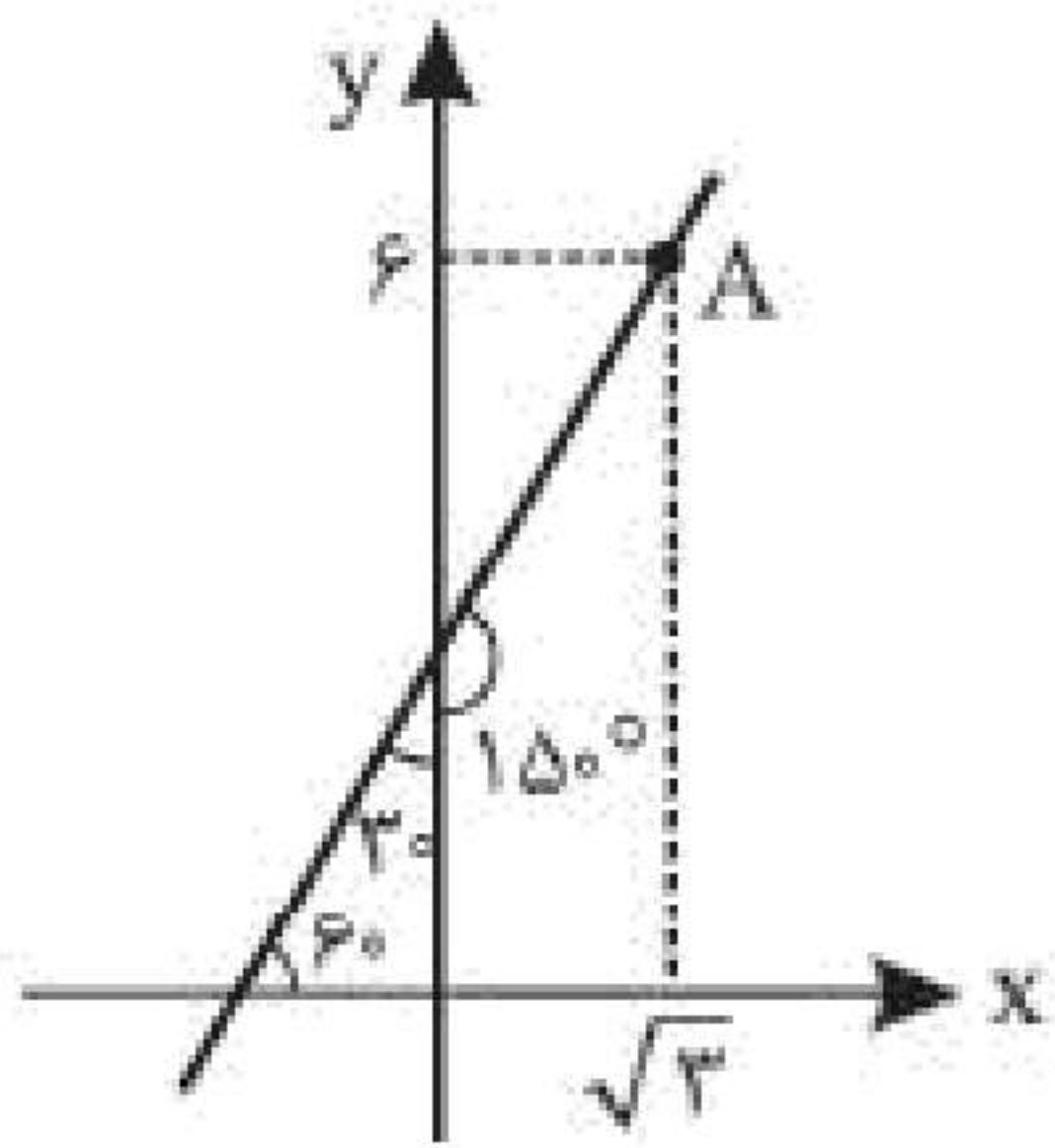
$$\Rightarrow 2 + 2\cos^2 x - 3\cos x - 1 = 0 \Rightarrow 2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi \\ \cos x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1 = -\frac{1}{2}$$



۳۷- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.



$$m = \tan 60^\circ = \sqrt{3}$$

$$y - y_A = m(x - x_A) \Rightarrow y - 6 = \sqrt{3}(x - \sqrt{3})$$

$$\Rightarrow y - 6 = \sqrt{3}x - 3 \Rightarrow y = \sqrt{3}x + 3$$

۳۸- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

می دانیم: $\sin(13^\circ + 90^\circ) = \cos 13^\circ$ ، پس:

$$2 \sin 13^\circ \cos 13^\circ = \sin 26^\circ$$

می دانیم: $\sin \alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ ، پس:

$$\sin 26^\circ = \cos 64^\circ$$

می دانیم: $\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$ ، پس:

$$\cos 64^\circ = 2 \cos^2 32^\circ - 1$$

۳۹- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \Rightarrow 1 + 9 = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

$$\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\cos \alpha}{\frac{1}{\sqrt{10}}} = -3 \Rightarrow \cos \alpha = \frac{-3}{\sqrt{10}}, \tan \alpha = \frac{1}{\cot \alpha} = -\frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow A = \frac{\frac{1}{\sqrt{10}} - \left(\frac{-3}{\sqrt{10}}\right)}{-\frac{1}{3}} = \frac{\frac{4}{\sqrt{10}}}{-\frac{1}{3}} = \frac{-12}{\sqrt{10}}$$

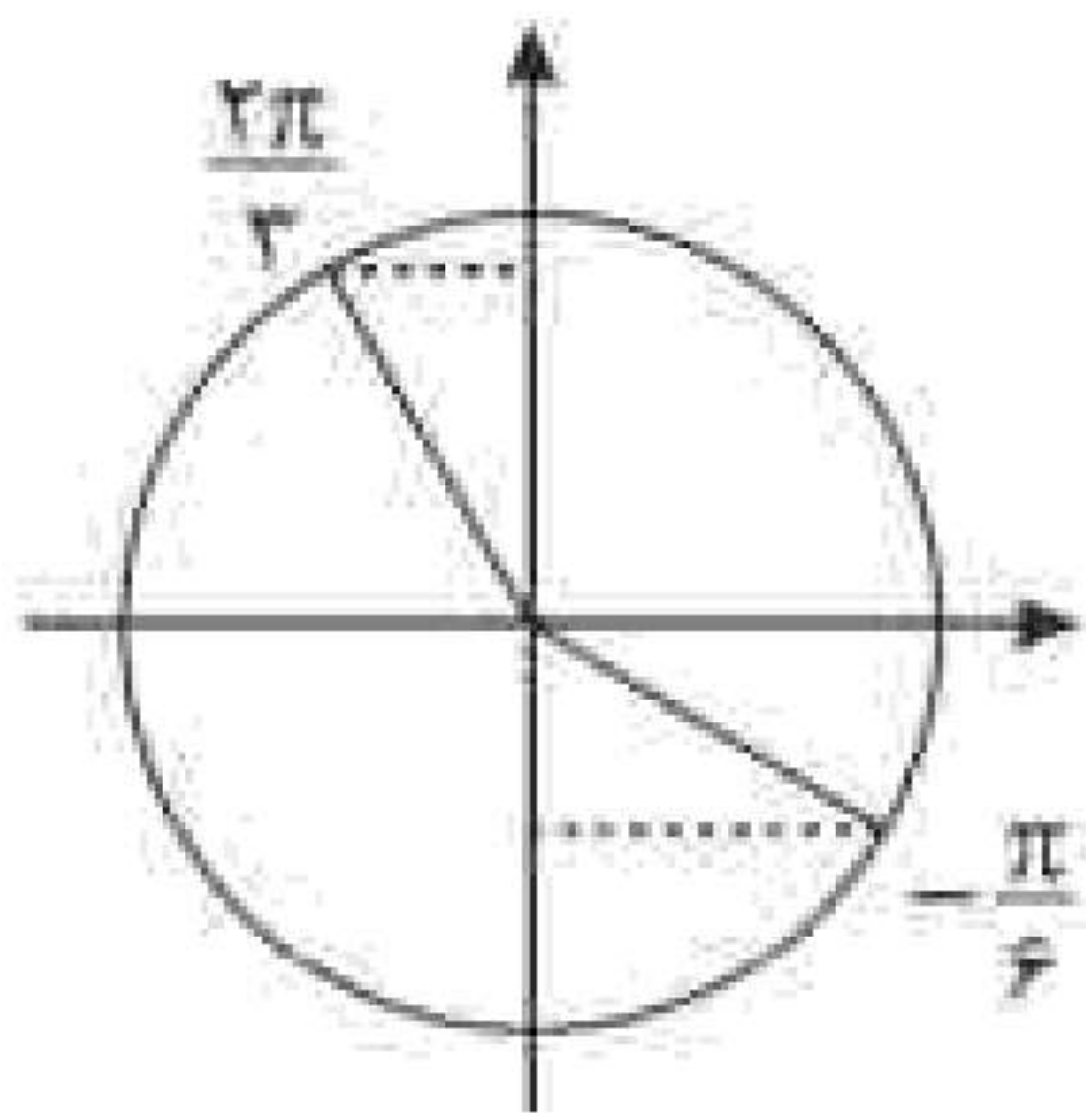


۴۰- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$-\frac{\pi}{12} < \alpha < \frac{\pi}{3} \xrightarrow{\times 2} -\frac{\pi}{6} < 2\alpha < \frac{2\pi}{3}$$

با توجه به دایره ی مثلثاتی وقتی زاویه ی 2α از $-\frac{\pi}{6}$ تا $\frac{2\pi}{3}$ را طی می کند، سینوس آن از عدد $-\frac{1}{2}$ به صفر و سپس به ۱ و

سپس به $\frac{\sqrt{3}}{2}$ می رسد. به طور دقیق تر:



$$-\frac{1}{2} < \sin 2\alpha \leq 1$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2} < \frac{2m-3}{4} \leq 1 \Rightarrow -2 < 2m-3 \leq 4 \Rightarrow \frac{1}{2} < m \leq \frac{7}{2}$$

$$\xrightarrow{m \in \mathbb{Z}} m = 1, 2, 3$$

«بانک سوال یاوران دانش»

۴۱- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\tan\left(-\frac{11\pi}{6}\right) = -\tan\left(\frac{11\pi}{6}\right) = -\tan\left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\tan\left(-\frac{\pi}{6}\right)$$

$$= \tan\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\cos\left(-\frac{19\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{19\pi}{6}\right) = \cos\left(3\pi + \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

$$= -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan\left(\frac{8\pi}{3}\right) = \tan\left(2\pi + \frac{2\pi}{3}\right) = \tan\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}\right) = -\cot\frac{\pi}{6} = -\sqrt{3}$$

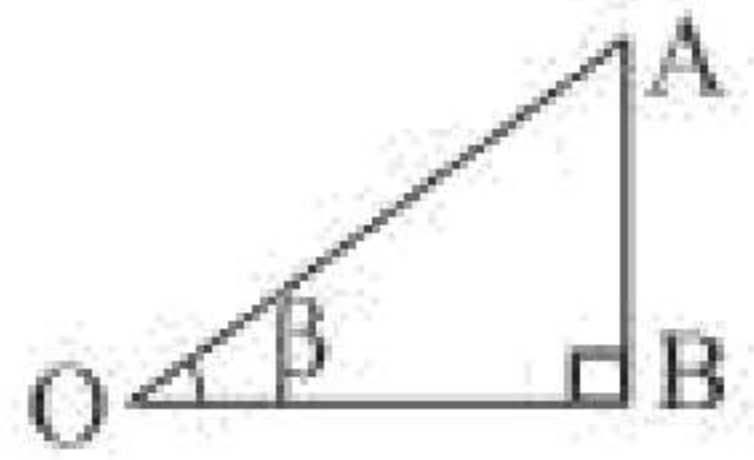
$$\sin\left(\frac{14\pi}{3}\right) = \sin\left(4\pi + \frac{2\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

در نتیجه حاصل عبارت خواسته شده برابر است با:

$$\frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + (-\sqrt{3}) \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -2$$

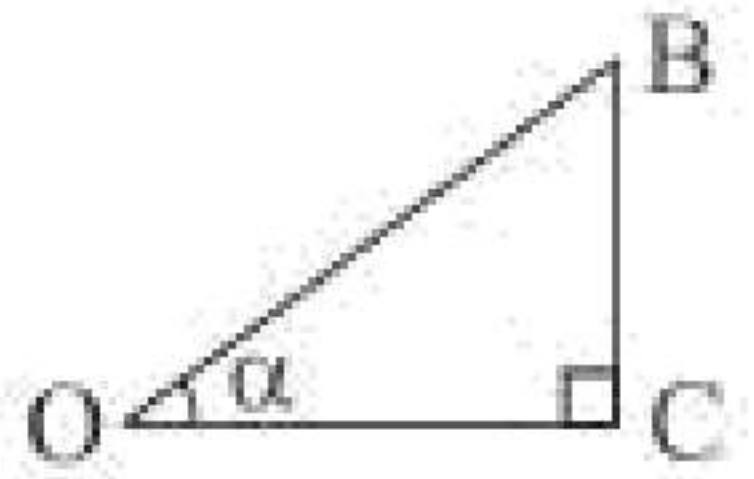


۴۲- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.
در مثلث OAB داریم:



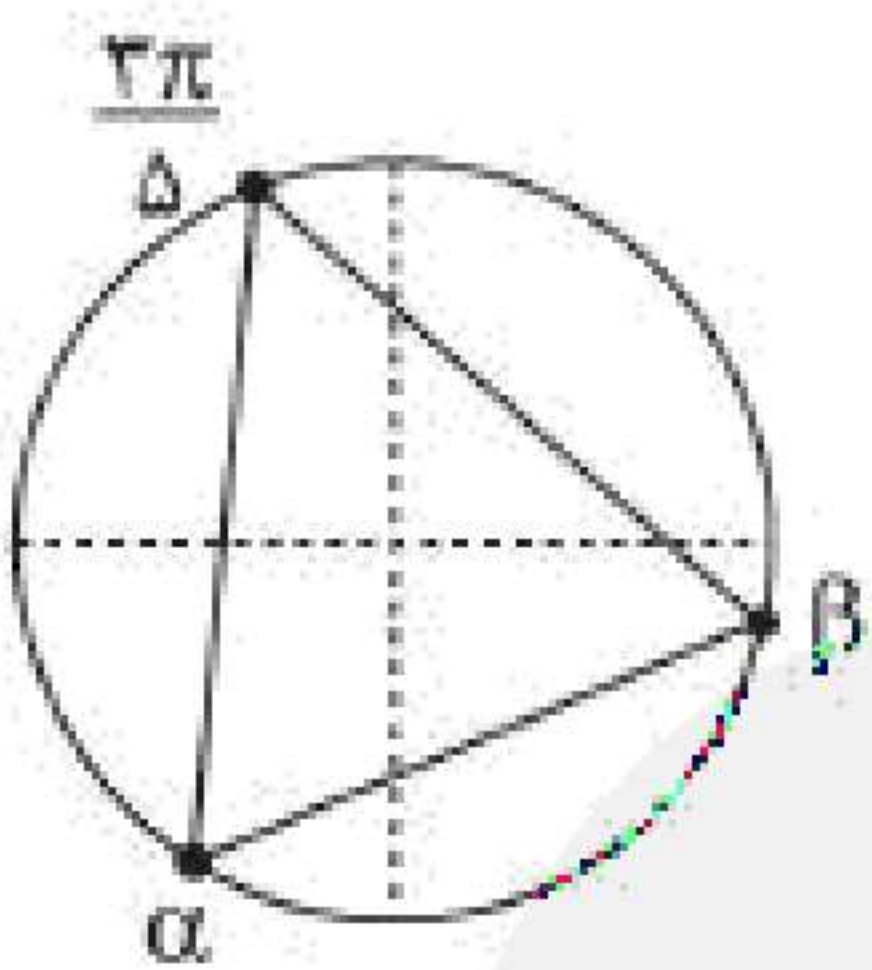
$$\cos \beta = \frac{OB}{OA} \Rightarrow OB = OA \cos \beta \quad (1)$$

همچنین در مثلث OBC داریم:



$$\cos \alpha = \frac{OC}{OB} \Rightarrow OC = OB \cos \alpha \xrightarrow{(1)} OC = OA \cos \beta \cos \alpha$$

۴۳- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.
باید 2π را به ۳ قسمت مساوی تقسیم کنیم:



$$\begin{cases} \alpha = \frac{3\pi}{5} + \frac{2\pi}{3} \\ \beta = \frac{3\pi}{5} + \frac{4\pi}{3} \end{cases} \Rightarrow \alpha + \beta = \frac{16\pi}{5}$$

۴۴- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$(\sin x + \cos x)^2 = 1 + 2 \sin x \cos x = 1 + \sin 2x$$

$$\Rightarrow \sin 2x = (\sin x + \cos x)^2 - 1$$

پس با فرض $\sin x + \cos x = t$ داریم:

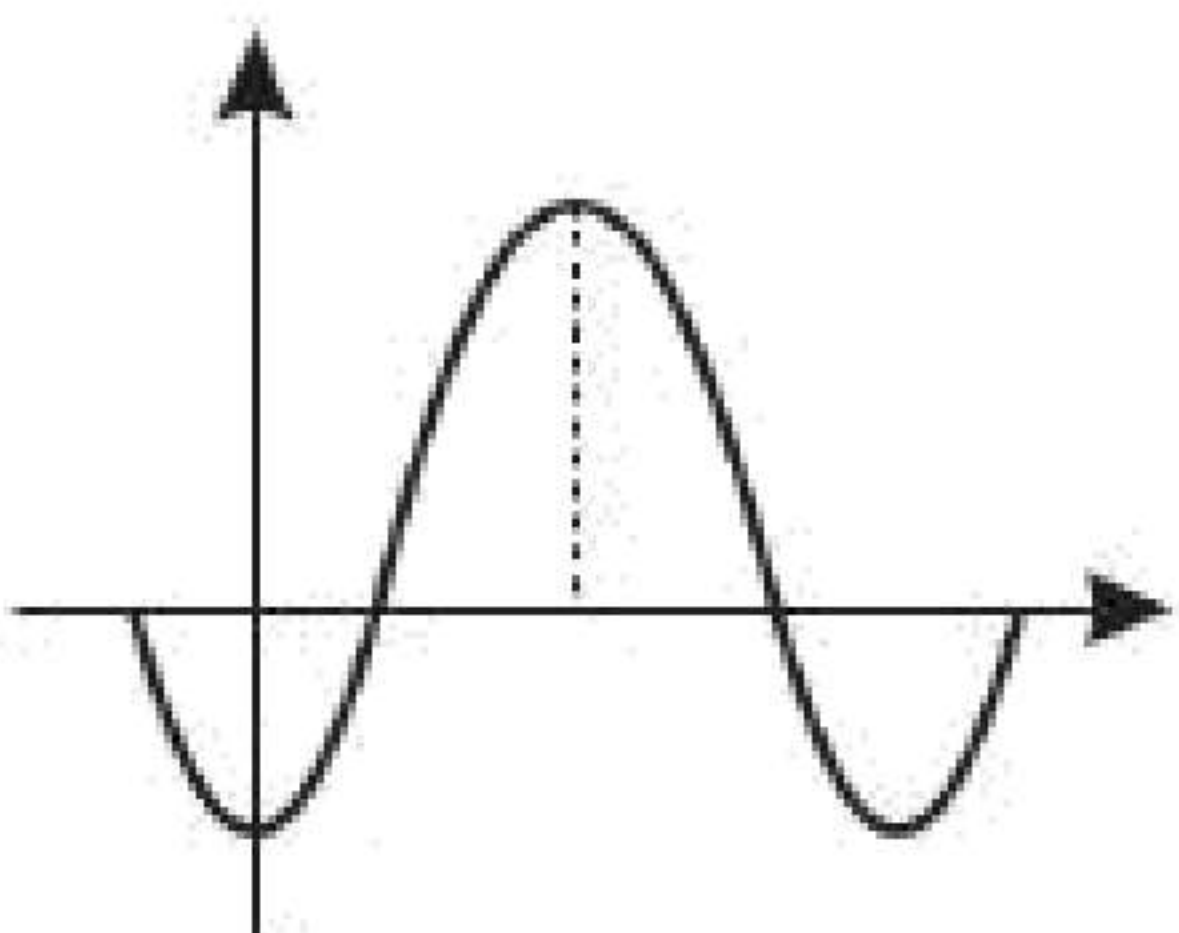
$$f(t) = t^2 - 1 \Rightarrow f(x) = x^2 - 1$$

اگر $f^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) = s$ بنامیم:

$$f^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) = s \Rightarrow f(s) = \frac{1}{3} \Rightarrow s^2 - 1 = \frac{1}{3} \Rightarrow s^2 = \frac{4}{3} \Rightarrow s = \pm \frac{2}{\sqrt{3}}$$

۴۵- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

با توجه به نمودار تابع، حداکثر مقدار α برابر طول اولین نقطه \max است.



زمانی تابع برابر \max است که $\cos \frac{\pi}{3} x = -1$ باشد پس $\frac{\pi}{3} \alpha = \pi$ و در نتیجه $\alpha = 3$ است.



۴۶- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

طرفین فرض را بر $\cos^2 \alpha \neq 0$ تقسیم می‌کنیم:

$$\tan^2 \alpha + 6 = \frac{2}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow \tan^2 \alpha + 6 = 2(1 + \tan^2 \alpha) \Rightarrow \tan^2 \alpha = 4 \Rightarrow \tan \alpha = \pm 2$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} = \frac{\pm 4}{1 - 4} = \pm \frac{4}{3}$$

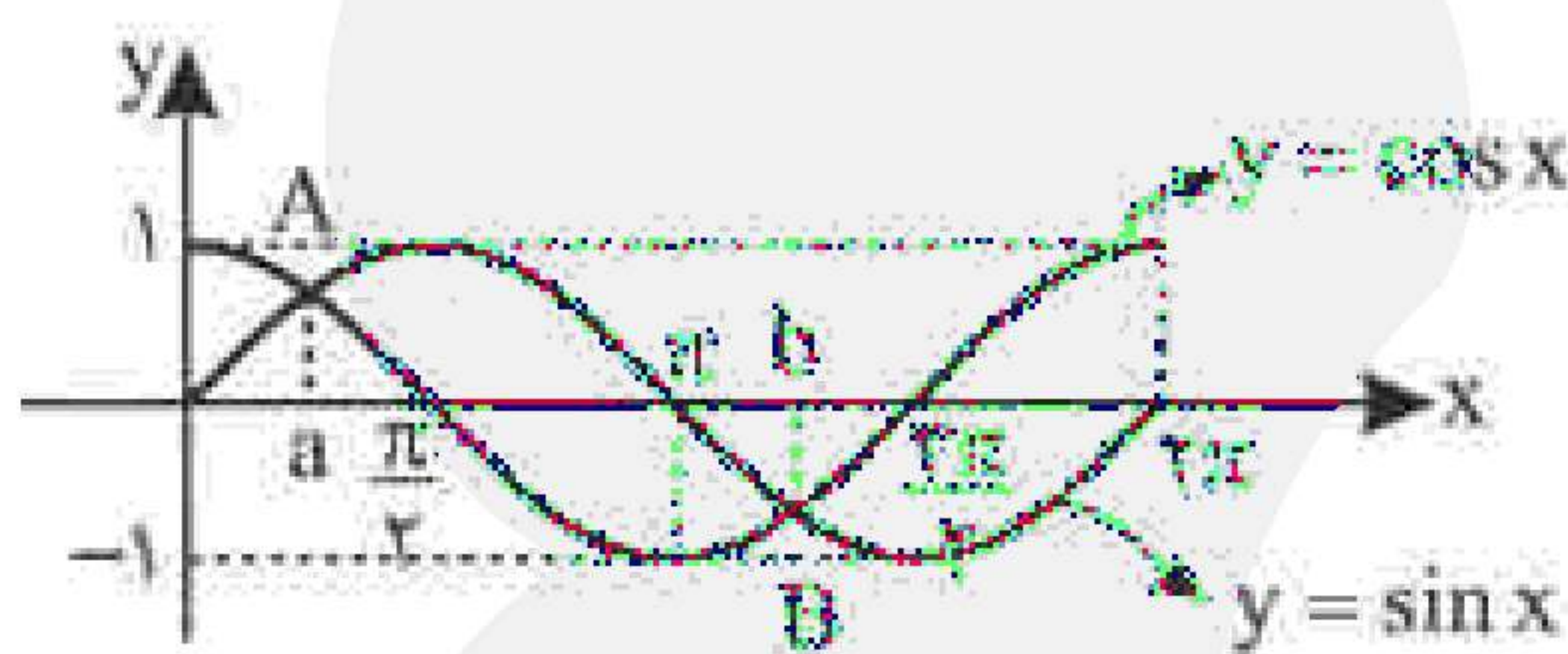
۴۷- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$60^\circ \equiv \frac{\pi}{3} \text{ rad}$$

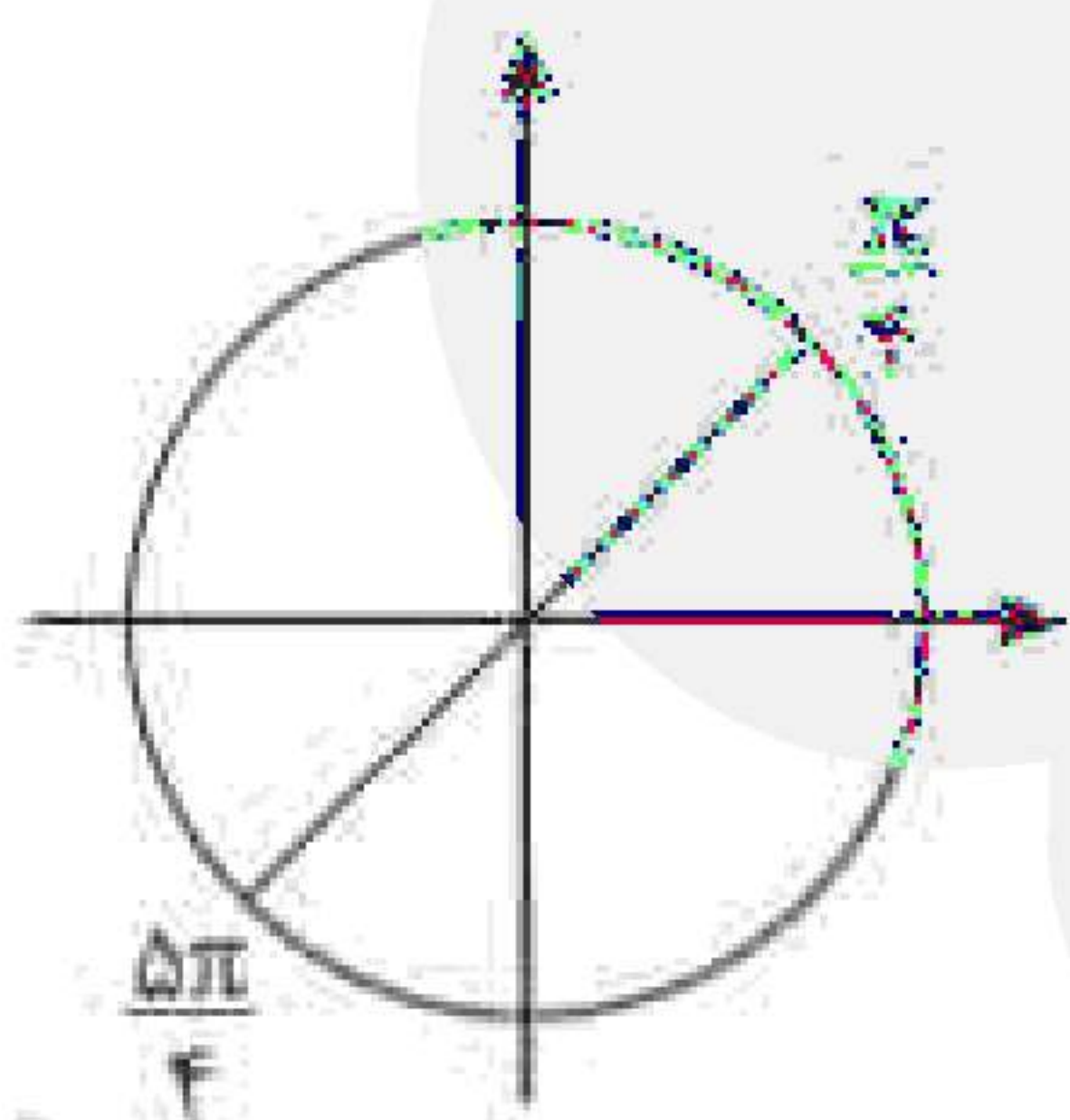
$$\text{زوایای داخلی مثلث: } \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} + \alpha = \pi \Rightarrow \frac{5\pi}{12} + \alpha = \pi \Rightarrow \alpha = \pi - \frac{5\pi}{12} = \frac{7\pi}{12}$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{5\pi}{12}$$

۴۸- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.



نمودارهای توابع $y = \sin x$ و $y = \cos x$ را در بازه $[0, 2\pi]$ رسم می‌کنیم. با توجه به نمودار، از نقطه‌ای به طول a تا نقطه‌ای به طول b نمودار $y = \cos x$ زیر نمودار $y = \sin x$ است $(\cos x < \sin x)$. نقاط تلاقی A و B به ترتیب در ربع اول و سوم دایره‌ی مثلثاتی هستند که سینوس و کسینوس آنها با هم برابر است.



$$\Rightarrow a = \frac{\pi}{4}, b = \frac{5\pi}{4}$$

$$\Rightarrow a + b = \frac{\pi}{4} + \frac{5\pi}{4} = \frac{3\pi}{2}$$

۴۹- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{1 + \tan 10^\circ} + \frac{1}{1 + \tan 80^\circ} = \frac{1}{1 + \tan 10^\circ} + \frac{1}{1 + \cot 10^\circ} \\ &= \frac{1 + \cot 10^\circ + 1 + \tan 10^\circ}{(1 + \tan 10^\circ)(1 + \cot 10^\circ)} = \frac{2 + \tan 10^\circ + \cot 10^\circ}{1 + \cot 10^\circ + \tan 10^\circ + \tan 10^\circ \cot 10^\circ} \\ &= \frac{2 + \tan 10^\circ + \cot 10^\circ}{2 + \tan 10^\circ + \cot 10^\circ} = 1 \end{aligned}$$



۵۰- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$A = \cos^3 x (1 + 3 \tan x) + \sin^3 x (1 + 3 \cot x) \\ = \cos^3 x \left(1 + \frac{3 \sin x}{\cos x} \right) + \sin^3 x \left(1 + \frac{3 \cos x}{\sin x} \right)$$

$$A = \cos^3 x + 3 \cos^2 x \sin x + \sin^3 x + 3 \sin^2 x \cos x \\ = \left(\frac{2}{3} \right)^3 = \frac{8}{27}$$

