

گنجینه سوال رایگان

+ پاسخ تشریحی

یاوران دانش



راه های ارتباطی با ما:

www.Dyavari.com

۰۲۱-۷۶۷۰۳۸۵۸

۰۹۱۲-۳۴ ۹۴ ۱۳۴



	۱	۲	۳	۴
۱ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۴ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۵ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۶ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۷ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۸ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۹ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۰ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۱ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۱۲ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۳ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۴ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۵ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۶ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۷ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۱۸ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۹ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۲۰ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۱ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۲۲ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۳ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۴ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۵ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۲۶ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۷ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۸ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۹ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۰ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۱ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۲ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۳ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۴ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

	۱	۲	۳	۴
۳۵ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۳۶ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۳۷ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۳۸ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۹ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۴۰ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۴۱ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۴۲ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۴۳ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۴۴ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۴۵ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۴۶ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۴۷ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۴۸ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۴۹ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۵۰ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



۱- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$y = a \cos\left(\frac{3\pi}{2} - b\pi x\right) + c = -a \sin(b\pi x) + c$$

$$c = \frac{-4 + 2}{2} = -1, -a = \frac{2 - (-4)}{2} = 3 \Rightarrow a = -3$$

$$\frac{3}{2} T = 2 \Rightarrow T = \frac{4}{3} \Rightarrow \frac{2\pi}{|b|\pi} = \frac{4}{3} \Rightarrow |b| = \frac{3}{2}$$

چون ابتدا دارای می نیمم است، داریم:

$$\Rightarrow abc = \frac{9}{2} \times -1 = -\frac{9}{2}$$

۲- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$A = \cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) + \operatorname{tg}(\pi - \alpha) \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = -\sin \alpha - \operatorname{tg} \alpha \cos \alpha$$

$$= -\sin \alpha - \sin \alpha = -2 \sin \alpha$$

۳- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ماکزیمم نمودار در وسط بازه (۰، ۴) یعنی $x = 2$ واقع شده است بنابراین:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Max}(2, 4) \xrightarrow{\text{صدق در } f} 4 = a - b \\ \text{مبدأ } (0, 0) \xrightarrow{\text{صدق در } f} 0 = a + b \end{array} \right\} \Rightarrow a = 2, b = -2 \Rightarrow f(x) = 2 - 2 \cos\left(\frac{\pi}{2} x\right)$$

$$f\left(\frac{1}{3}\right) + f\left(\frac{4}{3}\right) = 2 - 2 \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + \left(2 - 2 \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$$

$$= 4 - 2 \cos\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) - 2 \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = 4 + 2 \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + 2 \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$= 4 + 2\left(\frac{1}{2}\right) + 2\left(\frac{1}{2}\right) = 6$$

۴- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\cot \alpha = \frac{2}{3} \Rightarrow \tan \alpha = \frac{3}{2} \Rightarrow \sin 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} = \frac{2 \times \frac{3}{2}}{1 + \frac{9}{4}} = \frac{12}{13}$$

۵- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\cos^2 2x - \sin^2 2x = \sin 2x \Rightarrow \cos 4x = \sin 2x \Rightarrow \cos 4x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} - 2x \\ 4x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} + 2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{k\pi}{3} + \frac{\pi}{12} \Rightarrow \text{جواب ۶} \\ x = k\pi - \frac{\pi}{4} = \text{جواب ۲} \end{cases} \Rightarrow \text{جواب ۸}$$



۶- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$2 \sin^2 x (\sin x - 1) - (\sin x - 1) = 0 \Rightarrow (\sin x - 1)(2 \sin^2 x - 1) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} \\ \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4} \Rightarrow \text{مجموع جواب ها} = \frac{9\pi}{4} \\ \sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x = \frac{5\pi}{4}; \frac{7\pi}{4} \end{cases}$$

۷- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. می‌دانیم $\cos 2\theta = 1 - 2 \sin^2 \theta$ و $\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$ می‌باشد، پس:

$$\frac{2 \sin^2 \theta - 1}{\sin \theta - \cos \theta} = \frac{\sqrt{6}}{2} \Rightarrow \frac{\sin^2 \theta - \cos^2 \theta}{\sin \theta - \cos \theta} = \frac{\sqrt{6}}{2} \Rightarrow \sin \theta + \cos \theta = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$\operatorname{tg} \theta + \operatorname{Cotg} \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \frac{1}{\sin \theta \cos \theta}$$

از طرفی داریم:

بنابراین حاصل $\operatorname{tg} \theta + \operatorname{Cotg} \theta$ برابر است با:

$$\sin \theta + \cos \theta = \frac{\sqrt{6}}{2} \Rightarrow \underbrace{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta}_1 + 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{3}{2} \Rightarrow 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{1}{\sin \theta \cos \theta} = 4$$

۸- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ابتدا تابع را ساده می‌کنیم و داریم:

$$y = a \cos x + b \Rightarrow \begin{cases} a \cos \frac{3\pi}{4} + b = -1 \Rightarrow b = -1 \\ -a + b = -4 \xrightarrow{b = -1} a = 3 \end{cases} \Rightarrow a + b = 2$$

۹- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$f(x) = \cos^4 \pi - \sin^4 \pi x = (\cos^2 \pi x - \sin^2 \pi x) \underbrace{(\cos^2 \pi x + \sin^2 \pi x)}_1 = \cos 2\pi x$$

$$\Rightarrow T = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$$



۱۰- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$2 \cos^2 x - 9 \cos x - 5 = 0 \Rightarrow \Delta = 121$$

$$\cos x = \frac{9 \pm 11}{4} \begin{cases} \cos x = 5 \text{ غ ق ق } (-1 \leq \cos x \leq 1) \\ \cos x = \frac{-1}{2} \Rightarrow \cos x = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \cos x = \cos \frac{2\pi}{3} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \begin{matrix} \xrightarrow{k=0} x_1 = \frac{2\pi}{3} \\ \xrightarrow{k=1} x_2 = \frac{4\pi}{3} \end{matrix}$$

$$\text{مجموع جوابها} = x_1 + x_2 = 2\pi$$

۱۱- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\sin x \times \frac{\sin x}{\cos x} = 3 - 3 \cos x \Rightarrow \sin^2 x = 3 \cos x - 3 \cos^2 x$$

$$\Rightarrow 1 - \cos^2 x = 3 \cos x - 3 \cos^2 x \Rightarrow 2 \cos^2 x - 3 \cos x + 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \cos x = 1 \\ \cos x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi \xrightarrow{x \in [0; 4\pi)} x = 0; 2\pi \\ \cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = \frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{3}; 2\pi + \frac{\pi}{3}; 2\pi + \frac{5\pi}{3} \end{cases}$$

بنابراین مجموع جوابها در بازه $[0, 4\pi)$ برابر 10π می باشد.

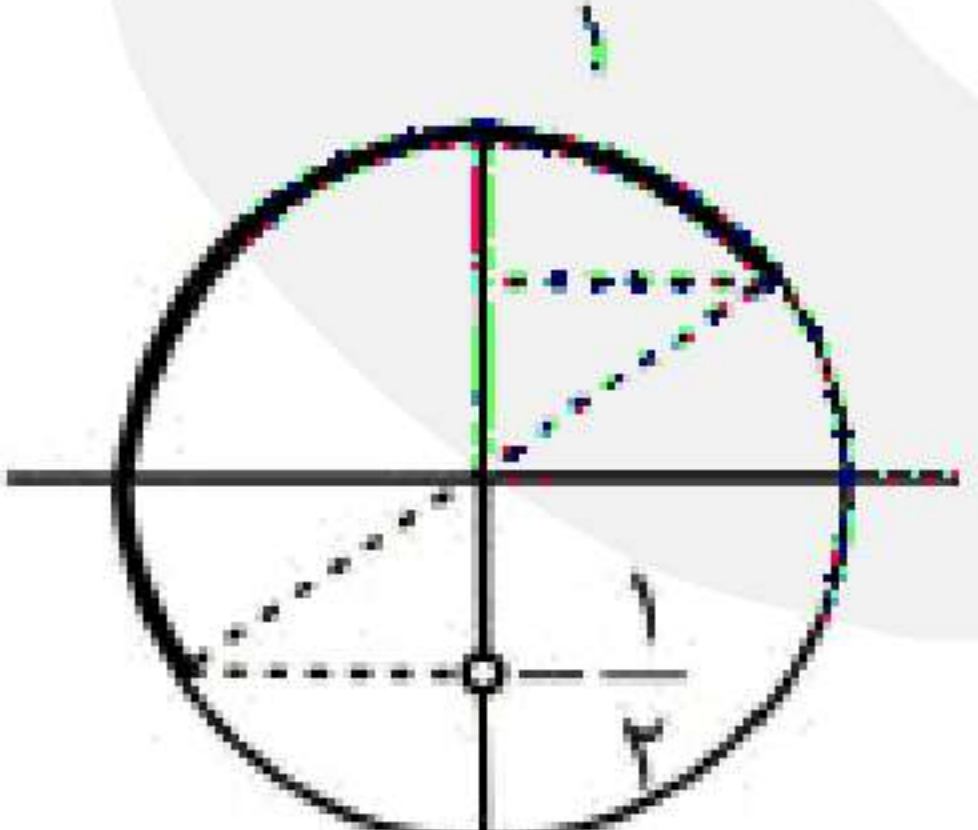
«بانک سوال یاوران دانش»

$$BC^2 = 6^2 + 8^2 - 2 \times 6 \times 8 \times \frac{3}{8} = 64 \Rightarrow BC = 8$$

۱۲- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$BC = AB \cos B + AC \cos C \Rightarrow 8 = 6 \cos B + 8 \cos C \Rightarrow 1 = \frac{3}{4} \cos B + \cos C$$

۱۳- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\frac{\pi}{6} < 3\alpha < \frac{7\pi}{6} \Rightarrow \frac{\pi}{6} < \alpha < \frac{7\pi}{18} \Rightarrow -\frac{1}{2} < \frac{-2m+1}{m+2} \leq 1$$


$$-\frac{1}{2} < \frac{-2m+1}{m+2} \leq 1 \Rightarrow -\frac{1}{2} < -2 + \frac{5}{m+2} \leq 1 \Rightarrow \frac{3}{2} < \frac{5}{m+2} \leq 3$$

$$\frac{5}{3} \leq m+2 < \frac{10}{3} \Rightarrow -\frac{1}{3} \leq m < \frac{4}{3}$$

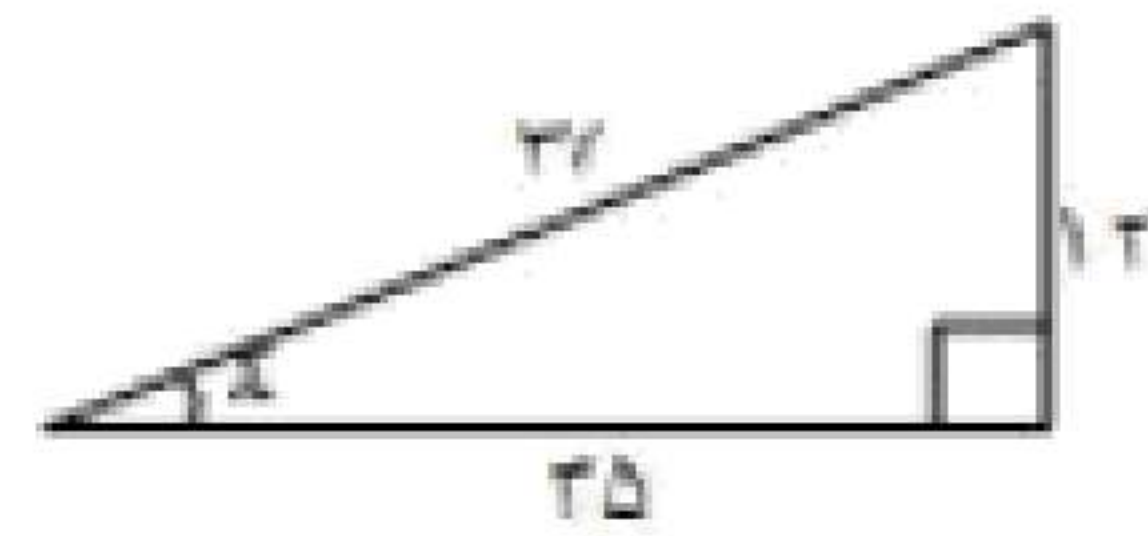
چون سه طرف مثبت است، داریم:



۱۴- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

اعداد ۱۲ و ۳۵ و ۳۷ فیثاغورثی اند، بنابراین ساده‌ترین روش برای به دست آوردن نسبت‌ها مثلثاتی X در نظر

و توجه به این نکته است که در ناحیه‌ی چهارم مثلثاتی فقط Cos



گرفتن مثلث قائم‌الزاویه مثبت و سه نسبت دیگر Sin و tan و cot منفی اند:

$$\cot x = \frac{-35}{12}, \tan x = \frac{-12}{35}, \sin x = -\frac{12}{37}, \cos x = \frac{35}{37}$$

$$36 \tan\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - 35 \cot\left(-\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)\right) - 74 \cos(-(\pi - x)) - 111 \cos\left(-\left(\frac{13\pi}{2} - x\right)\right)$$

$$= -36 \cot x + 35 \tan x + 74 \cos x - 111 \sin x$$

$$= -36 \left(\frac{-35}{12}\right) + 35 \left(\frac{-12}{35}\right) + 74 \left(\frac{35}{37}\right) - 111 \left(\frac{-12}{37}\right) = 105 - 12 + 70 + 36 = 199$$

۱۵- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\cos \frac{3x}{2} = \cos \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{10}\right) \Rightarrow \begin{cases} \frac{3x}{2} = 2k\pi + \frac{x}{2} + \frac{\pi}{10} \\ \frac{3x}{2} = 2k\pi - \frac{x}{2} - \frac{\pi}{10} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{10} \\ x = k\pi - \frac{\pi}{20} \end{cases} \xrightarrow{k=2} x = \frac{39\pi}{20} \Rightarrow a - b = 39 - 20 = 19$$

$$f(x) = \operatorname{tg}(\pi - \pi ax) = -\operatorname{tg}(\pi ax)$$

۱۶- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

این تابع نسبت به مبدأ مختصات متقارن است و با توجه به شکل دوره تناوب آن $T = 4$ است. بنابراین:

$$|a| = \frac{1}{4}, T = \frac{\pi}{\pi a} = 4$$

با توجه به روند نزولی اکید تابع در هر دو دوره تناوب (بین دو مجانب قائم متوالی) و ضابطه نهایی

$f(x) = -\operatorname{tg}(\pi ax)$ مقدار a باید مثبت باشد:

$$a = \frac{1}{4} \Rightarrow f(x) = -\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}x\right) \Rightarrow f\left(\frac{1}{3a}\right) \times f\left(\frac{-2}{3a}\right) = f\left(\frac{4}{3}\right) \times f\left(\frac{-8}{3}\right) = (-\sqrt{3}) \times (-\sqrt{3}) = 3$$



۱۷- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. با توجه به نمودار داریم:

$$\begin{cases} T = 2 \Rightarrow \frac{2\pi}{|b|\pi} = 2 \Rightarrow |b| = 1 \Rightarrow b = 1 \\ a \cos \frac{\pi}{3} + c = 2 \Rightarrow \frac{a}{2} + c = 2 \\ -a + c = -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{2}a = 3 \Rightarrow a = 2 \Rightarrow c = 1 \Rightarrow a + b + c = 2 + 1 + 1 = 4$$

توجه کنید چون بعد از محور y ها ابتدا مینیمم داریم پس $b = 1$ بوده و $b = -1$ غیر قابل قبول است.

۱۸- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

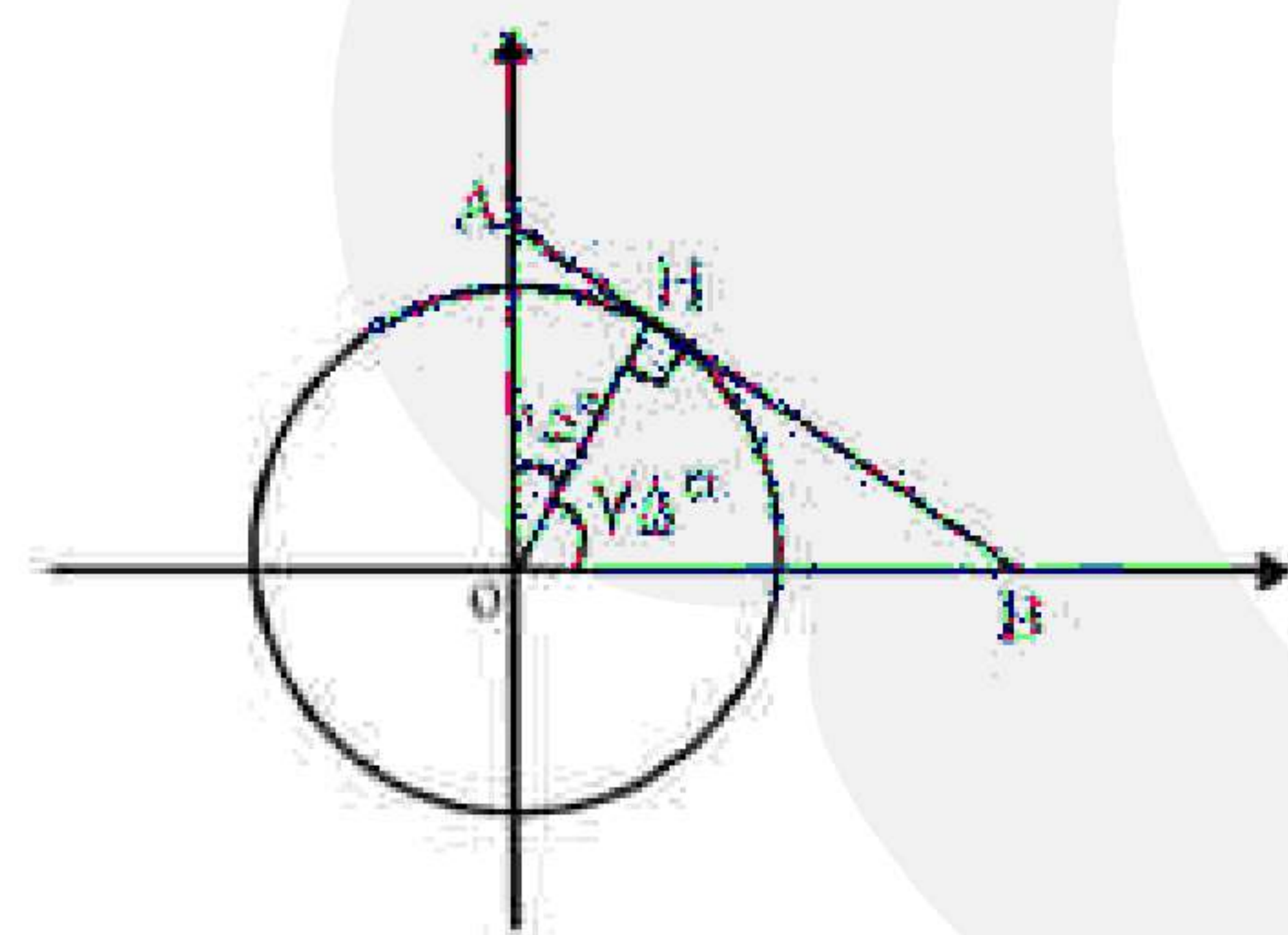
$$y = \frac{2}{5}x + \frac{3}{5} \Rightarrow \tan \alpha = m \text{ شیب خط} = \frac{2}{5} \Rightarrow \tan \alpha = 0.4$$

$$\frac{2 \sin \alpha + 4 \cos \alpha}{3 \cos \alpha - 5 \sin \alpha} \xrightarrow[\div \cos \alpha]{\text{صورت و مخرج}} \frac{2 \tan \alpha + 4}{3 - 5 \tan \alpha} = \frac{2(0.4) + 4}{3 - 5(0.4)} = 4/8$$

۱۹- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. با توجه به این که Max تابع مثلثاتی در $x = 3$ می باشد، پس تابع به فرم $\sin ax$ دارای دوره تناوب $12 = 4 \times 3$ و ضریب آن برابر $3 = (-2) - 1$ بوده که به اندازه ۲- واحد روی محور y ها جابه جا شده، پس ضابطه آن $y = -2 + 3 \sin \frac{\pi}{6}x$ است.

$$\frac{2\pi}{a} = 12 \Rightarrow a = \frac{\pi}{6}$$

۲۰- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. با توجه به شکل مقابل $AH = \tan \frac{\pi}{12} = \cot \frac{5\pi}{12}$ و $BH = \tan \frac{5\pi}{12}$ پس داریم:



$$\frac{BH}{AH} = \frac{\tan \frac{5\pi}{12}}{\tan \frac{\pi}{12}} = \tan^2 \left(\frac{5\pi}{12} \right) = \frac{2 + \sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}}$$

$$7 + 4\sqrt{3} \approx 14$$

۲۱- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

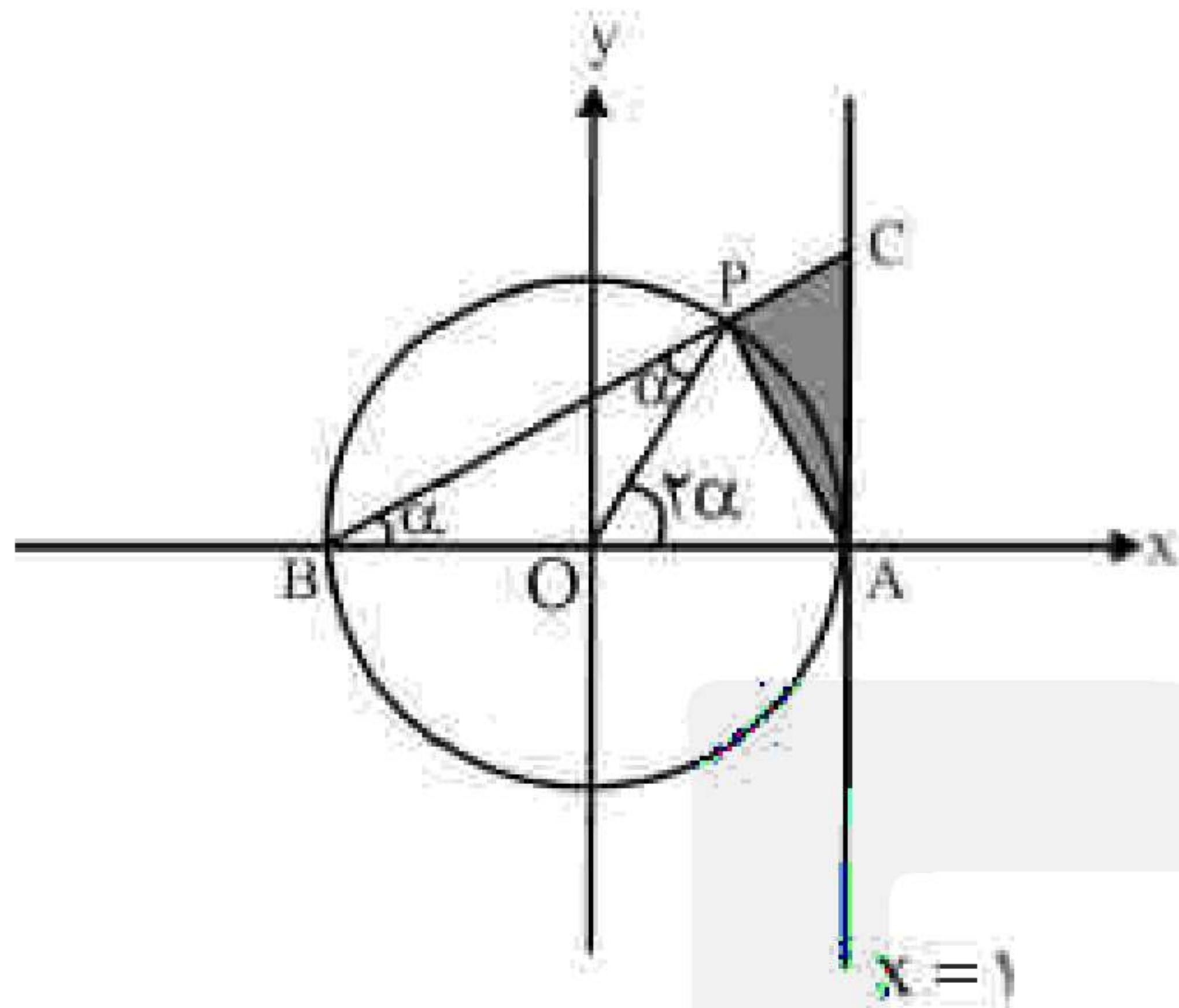
$$2 + 4 \sin \frac{x}{4} = 0 \Rightarrow \sin \frac{x}{4} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{4} = 2k\pi - \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = 8k\pi - \frac{2\pi}{3} \\ \frac{x}{4} = 2k\pi + \frac{7\pi}{6} \Rightarrow x = 8k\pi + \frac{14\pi}{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{2\pi}{3}, 8\pi - \frac{2\pi}{3}, \dots \\ x = \frac{14\pi}{3}, 8\pi + \frac{14\pi}{3}, \dots \end{cases} \Rightarrow \text{طول بزرگ ترین پاره خط} = \frac{14\pi}{3} - \left(-\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{16\pi}{3}$$



۲۲- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. هرگاه $\text{Cotg } \alpha \text{ Cotg } \beta = 1$ باشد می توان گفت $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$ یا $\alpha + \beta = \frac{3\pi}{2}$ است.

$$\hat{A} + \frac{\pi}{18} + \hat{B} + \frac{5\pi}{9} = \hat{A} + \hat{B} + \frac{11\pi}{18} = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \hat{A} + \hat{B} = \frac{8\pi}{9} \Rightarrow \hat{C} = \frac{\pi}{9}$$



۲۳- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. در مثلث قائم الزاویه CAB داریم:

$$\text{tg } \alpha = \frac{AC}{AB} \Rightarrow \text{tg } \alpha = \frac{AC}{2} \Rightarrow AC = 2 \text{tg } \alpha$$

$$S_{CAB} = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 \text{tg } \alpha = 2 \text{tg } \alpha$$

از O به P وصل می کنیم. زاویه POA برابر 2α است، پس ارتفاع مثلث BPA برابر $\sin 2\alpha$ می شود و داریم:

$$S_{BPA} = \frac{1}{2} \times 2 \times \sin 2\alpha = \sin 2\alpha$$

بنابراین مساحت قسمت رنگی برابر است با:

$$S_{\text{رنگی}} = 2 \text{tg } \alpha - \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \left(\frac{1}{\cos \alpha} - \cos \alpha \right)$$

$$= 2 \sin \alpha \left(\frac{1 - \cos^2 \alpha}{\cos \alpha} \right) = 2 \sin^3 \alpha \times \text{tg } \alpha$$

$$f(x) = 2 \sin^2 x - 5(1 - \sin^2 x) + 11$$

$$f(x) = 7 \sin^2 x + 6$$

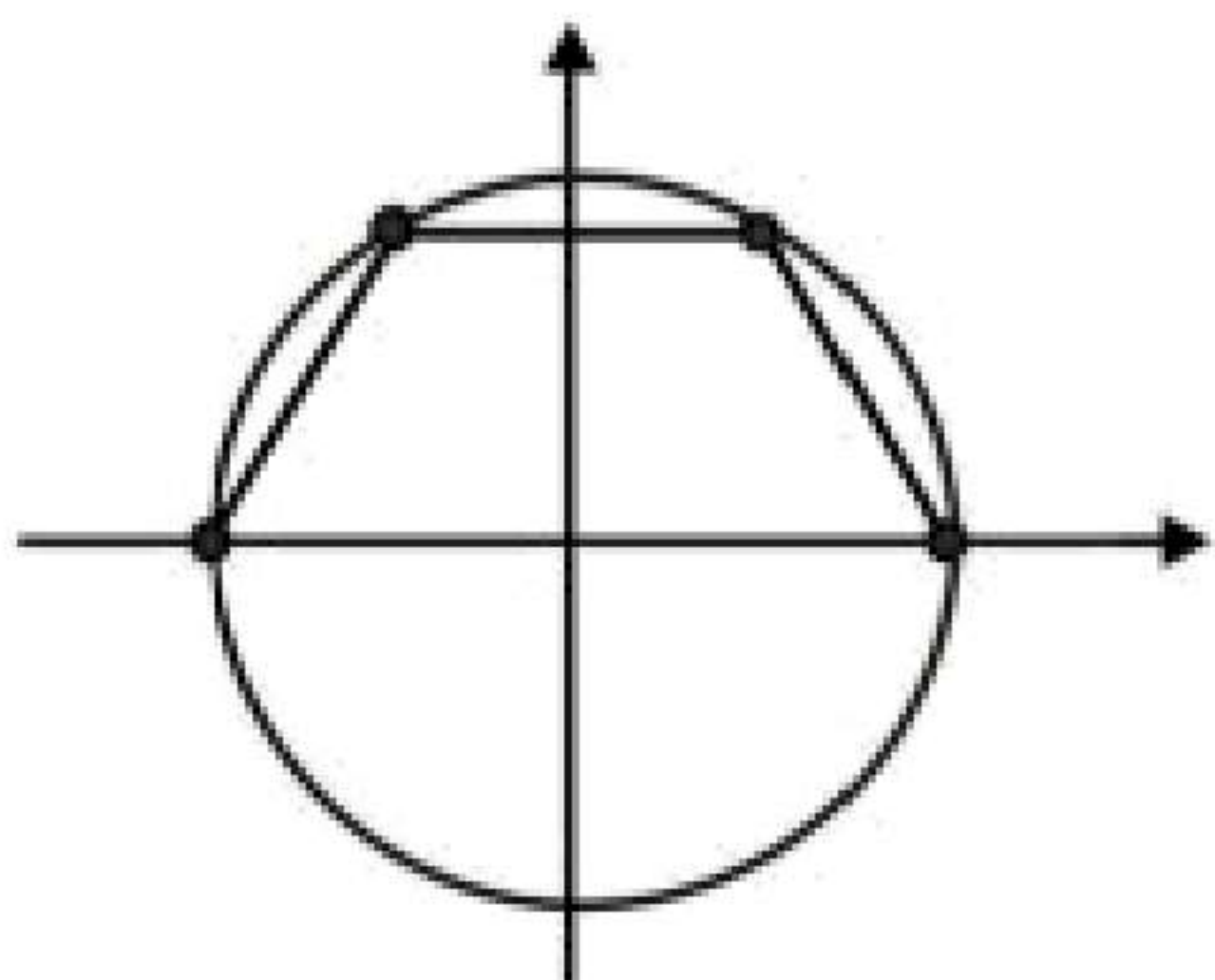
$$\text{چون } 0 \leq \sin^2 x \leq 1 \xrightarrow{\times 7} 0 \leq 7 \sin^2 x \leq 7 \xrightarrow{+6} 6 \leq 7 \sin^2 x + 6 \leq 13 \Rightarrow 6 \leq f(x) \leq 13$$

نمودار تابع ۸ خط افقی با عرض صحیح ۶ و ۷ و ... و ۱۳ را قطع می کند.

۲۵- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\cos 4x - \cos 2x = 0 \Rightarrow \cos 4x = \cos 2x \Rightarrow \begin{cases} 4x = 2k\pi + 2x \Rightarrow x = k\pi \\ 4x = 2k\pi - 2x \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{6} \end{cases}$$

بنابراین جواب های معادله در بازه $[0, \pi]$ نقاط $x = 0$ ، $x = \frac{\pi}{3}$ ، $x = \frac{2\pi}{3}$ و $x = \pi$ هستند، پس:



$$\text{محیط} = 2 + 1 + 1 + 1 = 5$$



۲۶- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$y = \frac{\operatorname{tg} ax}{1 + \operatorname{tg}^2 ax} = \frac{1}{2} \sin 2ax \Rightarrow T = \frac{2\pi}{2a} = \frac{2\pi}{2} = \frac{5\pi}{5}$$

۲۷- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. دوره‌ی تناوب تابع برابر ۴ و مقدار a منفی است، پس:

$$\frac{\pi}{|a|} = 4 \Rightarrow |a| = \frac{\pi}{4} \Rightarrow a = -\frac{\pi}{4}$$

بنابراین $f\left(\frac{16}{3}\right)$ برابر است با:

$$f\left(\frac{16}{3}\right) = \operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4} \times \frac{16}{3}\right) = -\operatorname{tg}\frac{4\pi}{3} = -\operatorname{tg}\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$$

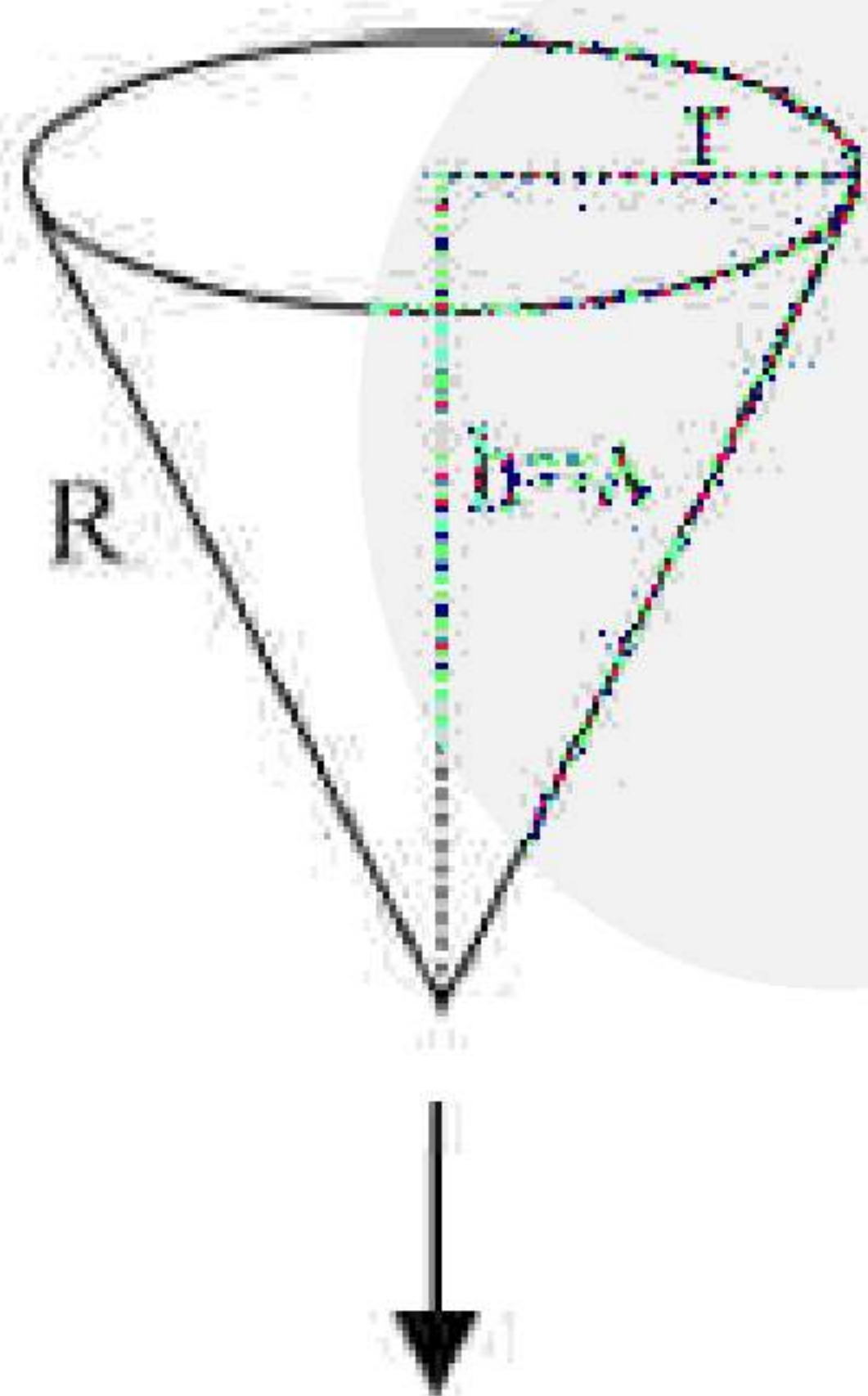
۲۸- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\frac{2 \sin(2 \times 36^\circ + 180^\circ - 15^\circ) + \cos(2 \times 36^\circ + 90^\circ + 15^\circ)}{2 \sin(2 \times 36^\circ + 90^\circ - 15^\circ) - \cos(2 \times 36^\circ + 15^\circ)} \cdot \frac{\sin(180^\circ + 75^\circ)}{\cos(36^\circ + 75^\circ)}$$

$$= \frac{2 \sin 15^\circ - \sin 15^\circ - \sin 75^\circ}{2 \cos 15^\circ - \cos 15^\circ} \cdot \frac{-\sin 75^\circ}{\cos 75^\circ} = -\operatorname{tg} 15^\circ \cdot \operatorname{tg} 75^\circ = -\operatorname{tg} 15^\circ \cdot \operatorname{Cotg} 15^\circ = -1$$

«بانک سوال یاوران دانش»

۲۹- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.



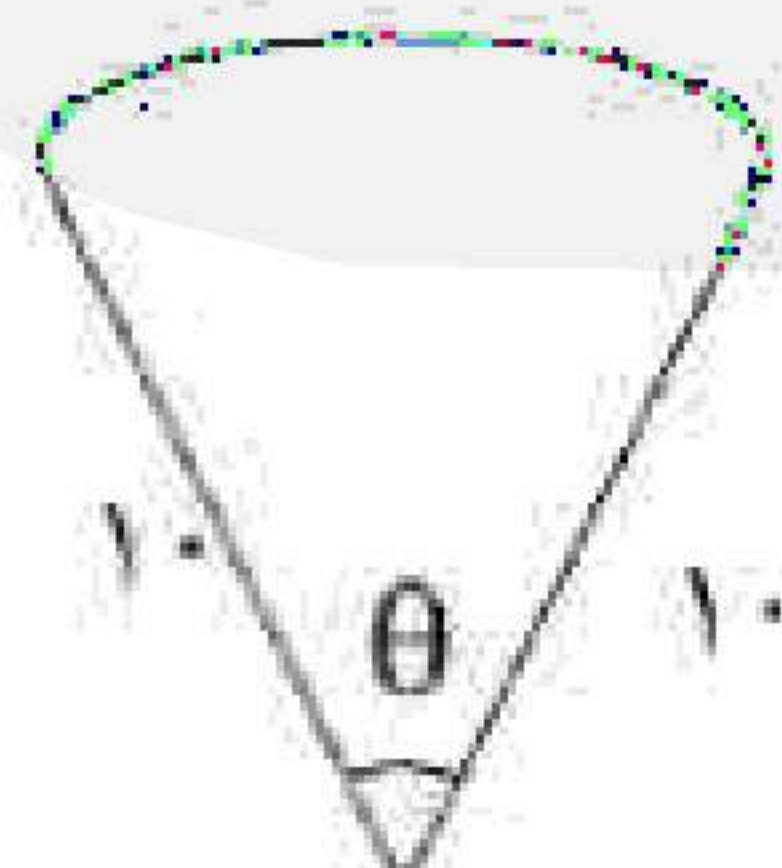
$$v = \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot h$$

$$288 = \frac{1}{3} \times 3 \times r^2 \times 8$$

$$r = 6 \Rightarrow r^2 + h^2 = R^2 \Rightarrow R = 10$$

$$L = 2\pi r = 36$$

قطاع حاصل از شکل گسترده



$$\begin{cases} \text{محيط} = 10 + 10 + 36 = 56 \\ L = R \cdot \theta \Rightarrow \text{رادیان} \end{cases}$$

$$36 = 10 \times \theta \Rightarrow \theta = 3/6 \text{ رادیان}$$

$$s_{\text{قطاع}} = \frac{1}{2} R^2 \cdot \theta \Rightarrow s_{\text{قطاع}} = \frac{1}{2} (10)^2 \times 3/6 = 180$$

$$\text{اختلاف محیط و مساحت قطاع} = 180 - 56 = 124$$

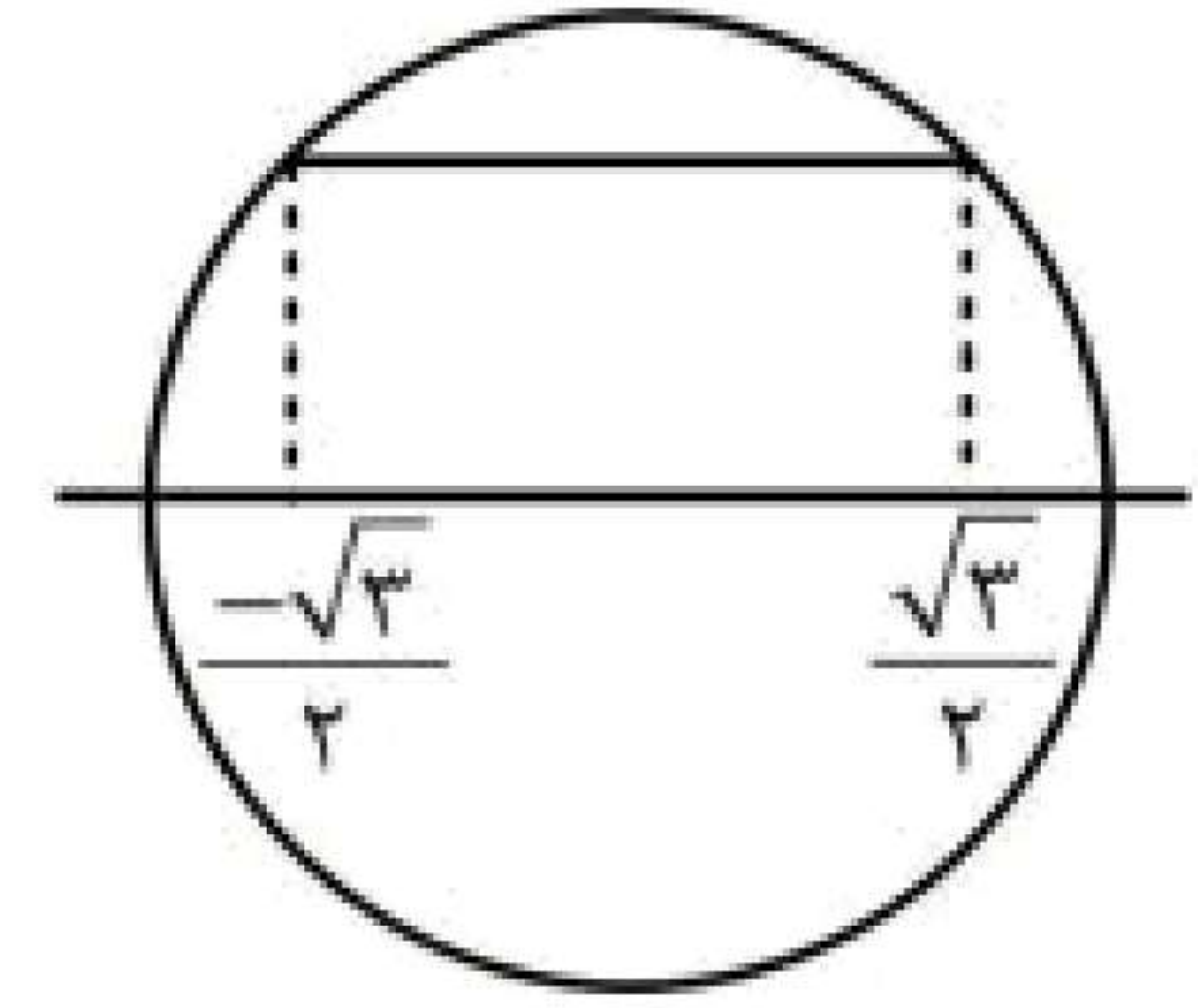


۳۰- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\frac{\sin x \cos x - 2 \sin^2 x \cos x}{\cos x} = \sin x - 2 \sin^2 x = 0$$

$\sin x = 0$ غ ق ق

$\sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow \sqrt{3}$ پاره خط به طول



۳۱- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. در ذوزنقهی ABCD، $AD = \sin \alpha$ ، $BC = \tan \alpha$ و $CD = 1 - \cos \alpha$ است. پس:

$$S = \frac{1}{2}(\sin \alpha + \tan \alpha) \times (1 - \cos \alpha) = \frac{1}{2}(\sin \alpha - \sin \alpha \cos \alpha + \tan \alpha - \tan \alpha \cos \alpha)$$

$$\Rightarrow S = \frac{1}{2}(\tan \alpha - \sin \alpha \cos \alpha) \Rightarrow S = \frac{1}{2} \sin \alpha \left(\frac{1}{\cos \alpha} - \cos \alpha \right) = \frac{1}{2} \sin \alpha \left(\frac{\sin^2 \alpha}{\cos \alpha} \right)$$

$$\Rightarrow S = \frac{\sin^3 \alpha}{2 \cos \alpha}$$

$$\frac{\cos^2 x + 5 \cos x + 3 \sin^2 x}{\sin x \cos x} = 0$$

$$\cos^2 x + 5 \cos x + 3(1 - \cos^2 x) = 0 \Rightarrow -2 \cos^2 x + 5 \cos x + 3 = 0$$

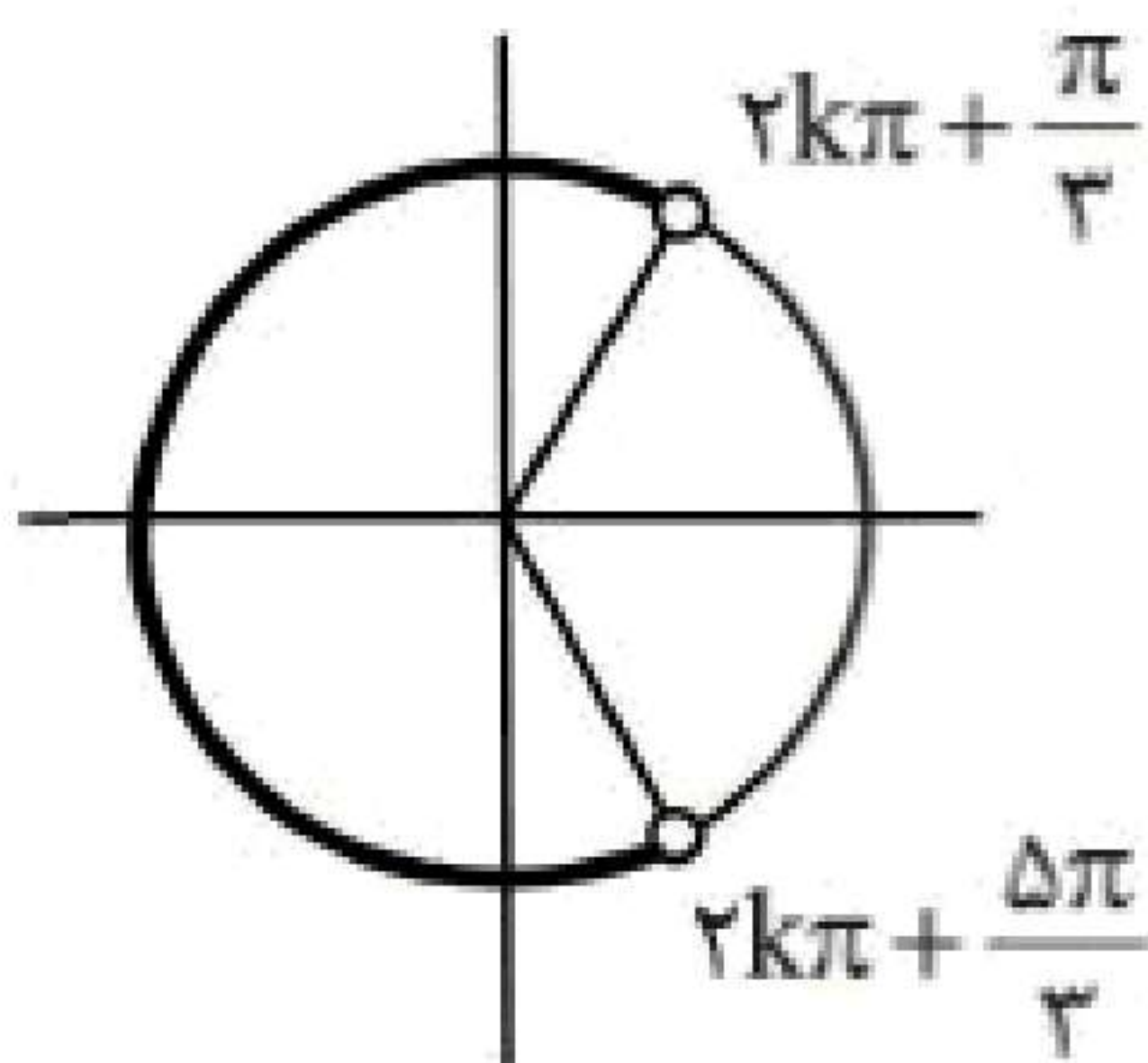
$$\cos x = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 24}}{-4} = \begin{cases} 3 & \text{غ ق ق} \\ -\frac{1}{2} & \text{ق ق} \end{cases}$$

$$\cos x = -\frac{1}{2} = \cos \frac{2\pi}{3} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \Rightarrow x = \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$$

$$\frac{4\pi}{3} - \frac{2\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$$

۳۲- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

۳۳- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.



$$1 - 2 \cos x > 0 \Rightarrow -1 \leq \cos x < \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow D = \left(2k\pi + \frac{\pi}{3}, 2k\pi + \frac{5\pi}{3} \right)$$



۳۴- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. دوره‌ی تناوب برابر 4π و ماکسیمم و مینیمم آن به ترتیب ۱ و -۵ است، پس:

$$\begin{cases} \frac{2\pi}{|b|} = 4\pi \Rightarrow |b| = \frac{1}{2} \\ \begin{cases} |a| + c = 1 \\ -|a| + c = -5 \end{cases} \Rightarrow c = -2, |a| = 3 \end{cases}$$

$$ab + c = -\frac{3}{2} + (-2) = -\frac{7}{2}$$

بنابراین حاصل $ab + c$ برابر است با:

۳۵- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\sin(\pi \cos 4x) = 1 \Rightarrow \pi \cos 4x = 2K\pi + \frac{\pi}{2}, K \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow \cos 4x = 2K + \frac{1}{2}, K \in \mathbb{Z} \xrightarrow{\text{فقط } K=0 \text{ درست است}} \cos 4x = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow 4x = 2K\pi \pm \frac{\pi}{2} \xrightarrow{\div 4} x = \frac{K\pi}{2} \pm \frac{\pi}{8}$$

$$\textcircled{1} \quad 0 \leq \frac{K\pi}{2} + \frac{\pi}{8} \leq 2\pi \xrightarrow{\times \frac{2}{\pi}} 0 \leq K + \frac{1}{4} \leq 4 \xrightarrow{K \in \mathbb{Z}} K = 0, 1, 2, 3$$

$$\textcircled{2} \quad 0 \leq \frac{K\pi}{2} - \frac{\pi}{8} \leq 2\pi \xrightarrow{\times \frac{2}{\pi}} 0 \leq K - \frac{1}{4} \leq 4 \xrightarrow{K \in \mathbb{Z}} K = 1, 2, 3, 4$$

این معادله در بازه‌ی $[0, 2\pi]$ مجموعاً به تعداد ۸ جواب متمایز دارد.

۳۶- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. با توجه به این که $\tan \theta = \frac{1}{2}$ است، با فرض $AD = a$ داریم:

$$\begin{cases} \tan \theta = \frac{AD}{AC} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{a}{AC} \Rightarrow AC = 2a \\ \tan \theta = \frac{AC}{AB} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{2a}{AB} \Rightarrow AB = 4a \end{cases} \Rightarrow BD = 3a \Rightarrow \frac{BD}{AD} = 3$$

«بانک سوال یاوران دانش»

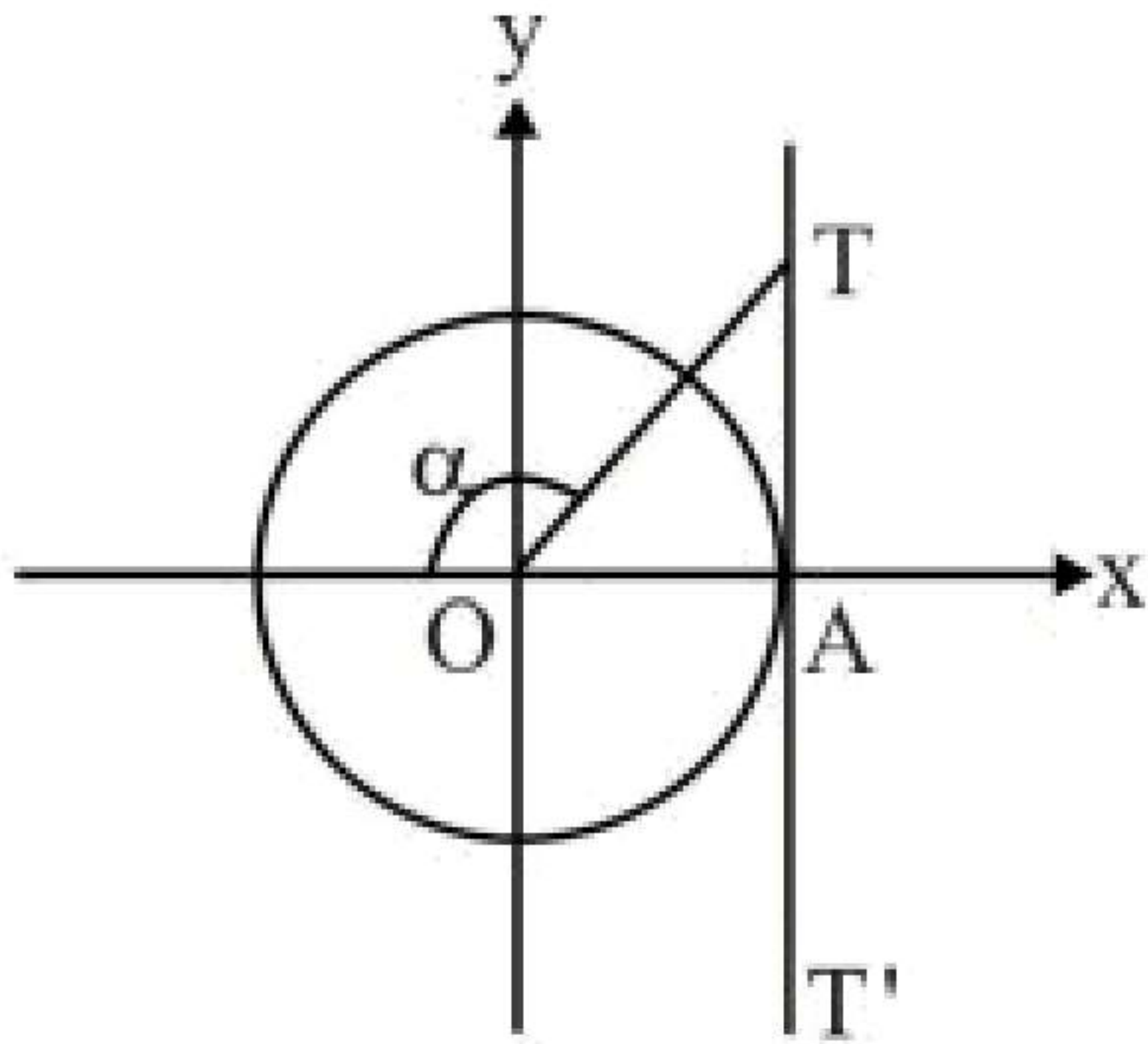
۳۷- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. با توجه به شکل، $x = y + \frac{\pi}{2}$ است، پس:

$$\cos x = \cos \left(\frac{\pi}{2} + y \right) = -\sin y \Rightarrow \sin y + \cos x = 0$$



۳۸- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

AT برابر $\tan \theta$ است. از طرفی $\alpha = \pi - \theta$ می باشد. پس:



$$\tan \theta = \frac{4}{3} \Rightarrow \cot \theta = \frac{3}{4}$$

$$1 + \cot^2 \theta = \frac{1}{\sin^2 \theta} \xrightarrow{\cot \theta = \frac{3}{4}} \sin \theta = \frac{4}{5}$$

$$\sin \alpha = \sin (\pi - \theta) = \sin \theta = \frac{4}{5}$$

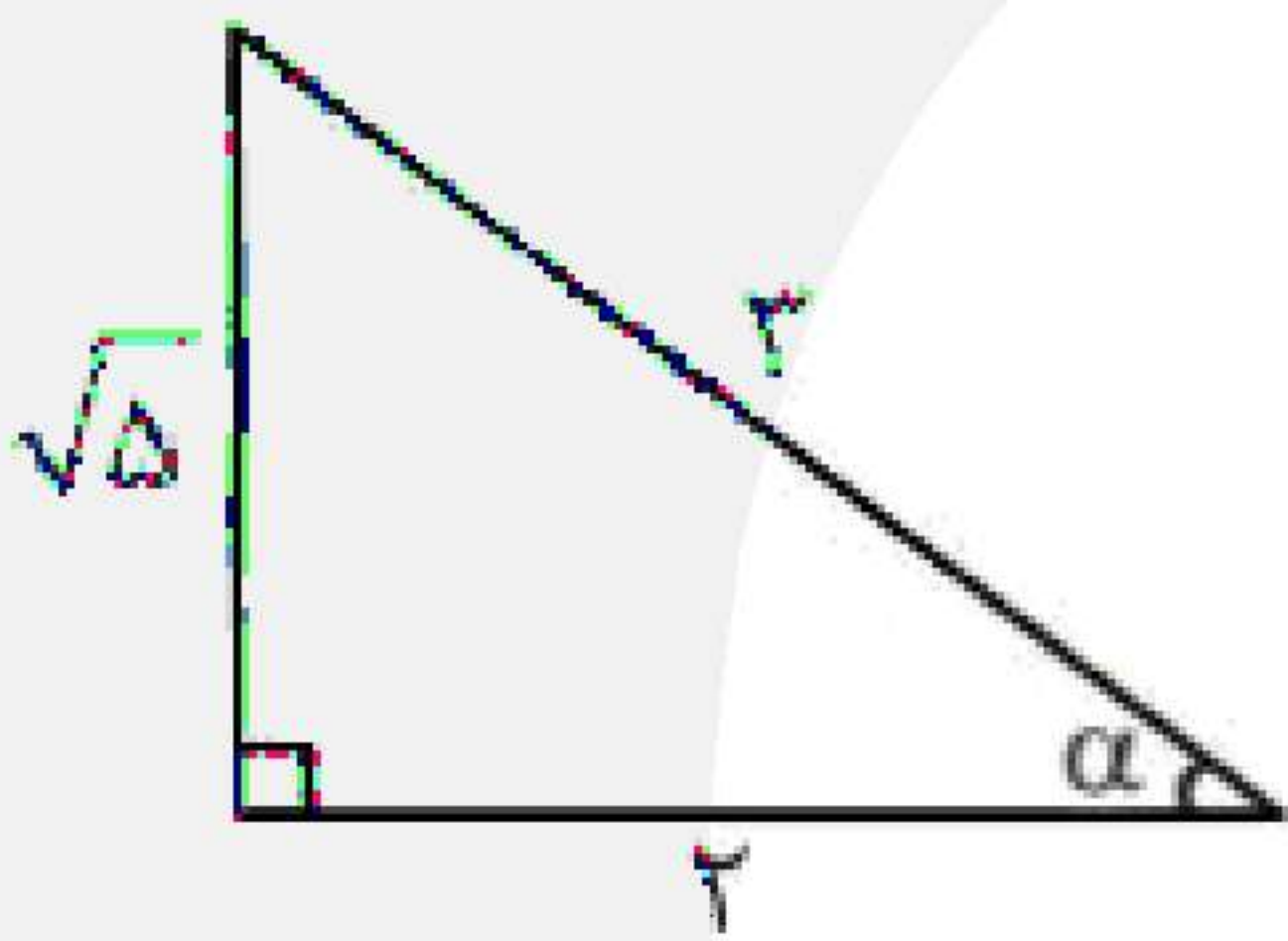
۳۹- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\frac{\sin \frac{\pi}{4} \times \cos \alpha}{\tan \frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{6}}{3} \Rightarrow \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} \times \cos \alpha}{\frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \alpha = \frac{\sqrt{18}}{9} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{2}{3}$$

$$\tan \left(\alpha - \frac{11\pi}{2} \right) = -\tan \left(\frac{11\pi}{2} - \alpha \right) = -\tan \left(\frac{3\pi}{2} - \alpha \right) = -\cot \alpha$$

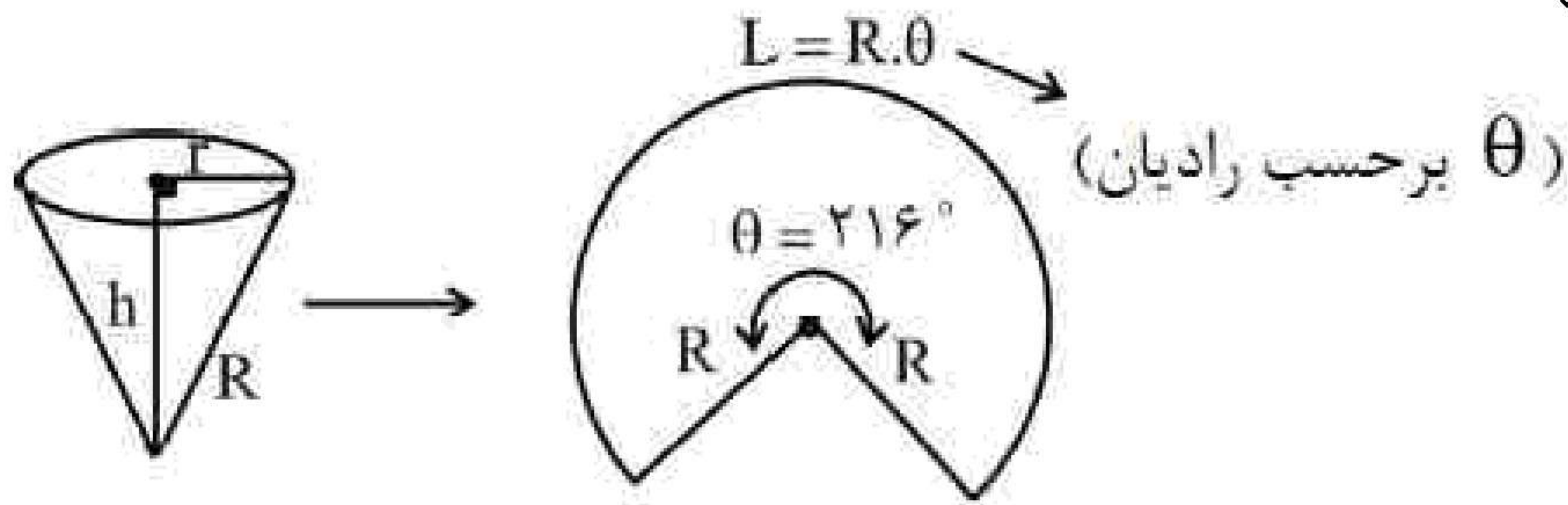
از طرفی داریم:

$$\cos \alpha = \frac{2}{3} \Rightarrow \Rightarrow -\cot \alpha = -\frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{-2\sqrt{5}}{5}$$





۴۰- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.



$$\frac{D}{180} = \frac{\theta}{\pi} \Rightarrow \frac{216}{180} = \frac{\theta}{\pi} \Rightarrow \theta = \frac{6\pi}{5} \text{ رادیان} \xrightarrow{\pi=3} \theta = \frac{18}{5}$$

$$\theta = \frac{L}{R} \Rightarrow \frac{18}{5} = \frac{L}{R} \Rightarrow L = \frac{18}{5}R \quad \text{طول کمان قطاع}$$

$$\text{محیط قطاع} = 56 \Rightarrow 2R + L = 56 \Rightarrow 2R + \frac{18}{5}R = 56 \Rightarrow R = 10$$

$$2\pi r = L \Rightarrow 2 \times 3 \times r = \frac{18}{5} \times 10 \Rightarrow r = 6$$

$$R^2 = r^2 + h^2 \Rightarrow 10^2 = 6^2 + h^2 \Rightarrow h = 8$$

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot h = \frac{1}{3} \times 3 \times 6^2 \times 8 = 288$$

$$2 \cos^2\left(x - \frac{\pi}{8}\right) - 3 \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{8} - x\right) = -1$$

$$2 \cos^2\left(x - \frac{\pi}{8}\right) - 3 \cos\left(x - \frac{\pi}{8}\right) + 1 = 0, \cos(-\alpha) = \cos \alpha$$

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{8}\right) = 1 = \cos 0 \Rightarrow x - \frac{\pi}{8} = 2k\pi \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{8}$$

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{8}\right) = \frac{1}{2} = \cos \frac{\pi}{3} \Rightarrow x - \frac{\pi}{8} = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{8} \\ x = 2k\pi - \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{8} \end{cases}$$

$$x = \frac{\pi}{8}, x = \frac{11\pi}{24}, x = \frac{43\pi}{24} \Rightarrow \frac{43\pi}{24} - \frac{3\pi}{24} = \frac{40\pi}{24} = \frac{5\pi}{3}$$

۴۲- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ماکزیمم این تابع ۵ است. بنابراین $a \sin(bx) + 2 \leq 5$ یعنی $a = 3$. دوره تناوب

$$\frac{\pi}{3} - \left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{2\pi}{3} \text{ است، در نتیجه: } \frac{2\pi}{b} = \frac{2\pi}{3} \leftarrow b = 3 \text{ (با توجه به شکل } a \text{ و } b \text{ هم علامت هستند.)}$$

$$f(x) = 3 \sin(3x) + 2 \Rightarrow f\left(\frac{\pi}{18}\right) = 3 \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) + 2 = 3\left(\frac{1}{2}\right) + 2 = \frac{7}{2}$$



۴۳- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

فرض می‌کنیم در مثلث ABC طول اضلاع ۲ و ۶ AC = ۶ و AB = ۲ است. پس:

$$S = \frac{1}{2} AB \times AC \times \sin \hat{A} = 3 \Rightarrow \frac{1}{2} \times 2 \times 6 \times \sin \hat{A} \Rightarrow \sin \hat{A} = \frac{1}{2} \Rightarrow \hat{A} = \frac{\pi}{6} \text{ یا } \frac{5\pi}{6}$$

چون محیط مثلث بیشترین مقدار ممکن است $\hat{A} = \frac{5\pi}{6}$ بوده و مجموع زوایای حاده‌ی مثلث $\pi - \frac{5\pi}{6} = \frac{\pi}{6}$ است.

«بانک سوال یاوران دانش»

۴۴- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$A = \sin x \cdot \cos x (\cos^4 x - \sin^4 x) = \frac{1}{4} \sin^2 x (\underbrace{\cos^2 x - \sin^2 x}_{\cos 2x}) (\underbrace{\cos^2 x + \sin^2 x}_1)$$

$$A = \frac{1}{4} \sin^2 x \cdot \cos 2x \xrightarrow{x = \frac{\pi}{24}} A = \frac{1}{8}$$

با تقسیم صورت و مخرج بر $\cos 15^\circ$:

$$B = \frac{\cos\left(\frac{3\pi}{2} + 15^\circ\right) - \sin\left(\frac{3\pi}{2} - 15^\circ\right)}{\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \pi - 15^\circ\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2} + 15^\circ\right)} = \frac{\sin 15^\circ + \cos 15^\circ}{\sin 15^\circ - \cos 15^\circ}$$

↓
دور دایره صرف نظر می‌شود

$$B = \frac{\operatorname{tg} 15^\circ + 1}{\operatorname{tg} 15^\circ - 1} = \frac{0/28 + 1}{0/28 - 1} = \frac{-16}{9}$$

$$8A - 9B = 8\left(\frac{1}{8}\right) - 9\left(\frac{-16}{9}\right) = 17$$

۴۵- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\operatorname{tg} \frac{7\pi}{4} = -1, \sin \frac{29\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \operatorname{tg} \frac{3\pi}{8} = 2 + \sqrt{3}, \cos \frac{17\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{-1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{2 + \sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{\sqrt{3} + 2}{3\sqrt{3} + 4} = -\frac{(\sqrt{3} + 2)(3\sqrt{3} - 4)}{23} = -\frac{9 + 2\sqrt{3} - 8}{23} = -\frac{1 + 2\sqrt{3}}{23}$$



$$\begin{aligned} \max : |x| + c &= 3 \\ \min : -|a| + c &= 1 \Rightarrow c = 2 \Rightarrow |a| = 1 \Rightarrow a = 1 \end{aligned}$$

۴۶- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$T = \frac{2\pi}{|b|} = 4\pi \Rightarrow b = \frac{1}{4}$$

$$y = \cos \frac{x}{4} + 2$$

$$a + b + c = 1 + \frac{1}{4} + 2 = \frac{9}{4}$$

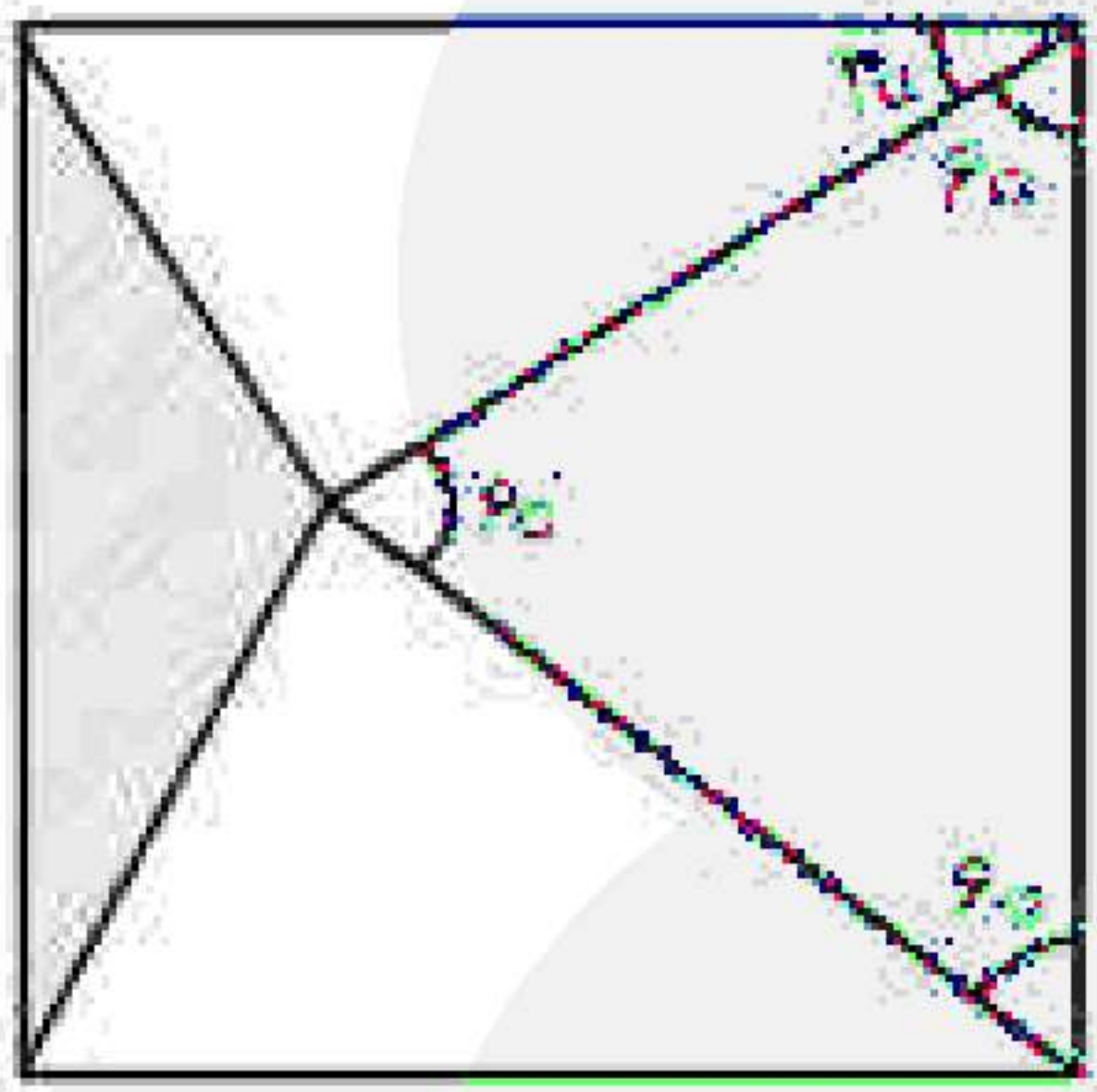
۴۷- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. با توجه به نمودار سینوس:

$$\begin{aligned} \max &= |a| + c = 3 \\ \min &= -|a| + c = -1 \Rightarrow c = 1 \Rightarrow |a| = 2 \Rightarrow a = -2 \end{aligned}$$

$$T = \frac{2\pi}{b} = \frac{2\pi}{\lambda} - \left(-\frac{5\pi}{\lambda}\right) = \pi \Rightarrow b = 2$$

$$a + b + c = -2 + 2 + 1 = 1$$

۴۸- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.



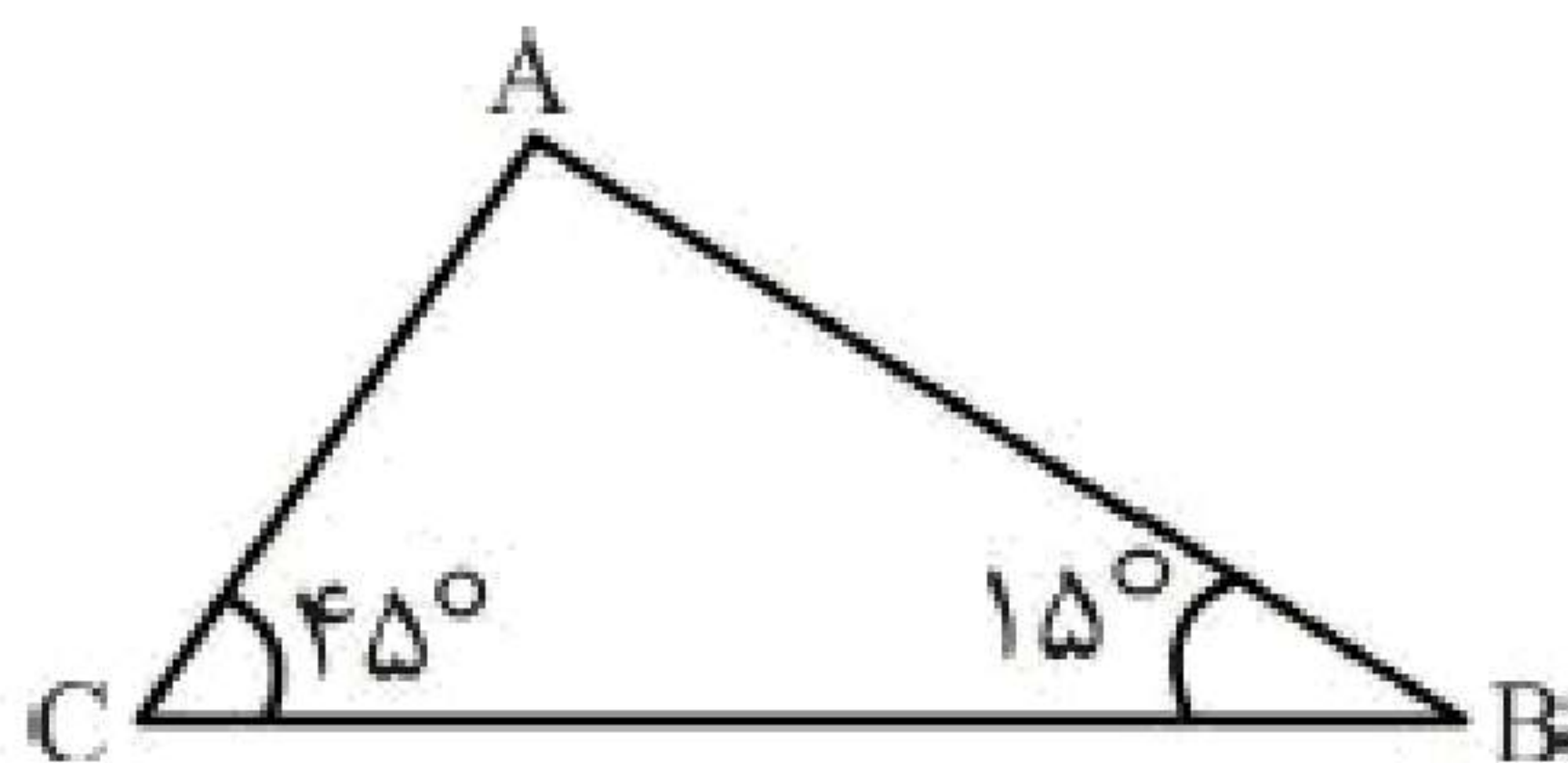
$$S = 1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{4} + 1 \times 1 \times \sin 30^\circ \right) = \frac{2 - \sqrt{3}}{4}$$

۴۹- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\triangle ABC : \hat{B} = \hat{C} = 90^\circ - 15^\circ = 75^\circ \Rightarrow \hat{A} = 30^\circ, \triangle ABH : \hat{ABH} = 60^\circ$$

$$\frac{S_{ABH}}{S_{ABC}} = \frac{\frac{1}{2} AB \times \frac{\sqrt{3}}{2} AB}{\frac{1}{2} AB \times AB \times \sin 30^\circ} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \frac{S_{BCH}}{S_{ABC}} = \frac{2 - \sqrt{3}}{2}$$

۵۰- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.



$$\Rightarrow \hat{A} = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ, \sin 120^\circ = \sin(180^\circ - 60^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$AB \times \sin A = BC \times \sin C \Rightarrow BC = 3\sqrt{3}$$