

گنجینه سوال رایگان

+ پاسخ تشریحی

یاوران دانش



راه های ارتباطی با ما:

www.Dyavari.com

۰۲۱-۷۶۷۰۳۸۵۸

۰۹۱۲-۳۴ ۹۴ ۱۳۴



	۱	۲	۳	۴
۱ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۲ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۳ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۴ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۵ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۶ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۷ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۸ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۹ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۰ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۱ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۲ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۳ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۱۴ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۱۵ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۶ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۷ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۸ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۹ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۰ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۱ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۲ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۳ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۴ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۵ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۶ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۷ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۲۸ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۹ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۳۰ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۱ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۲ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۳ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۳۴ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

	۱	۲	۳	۴
۳۵ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۶ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۷ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۸ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۹ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۴۰ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۴۱ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۴۲ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۴۳ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۴۴ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۴۵ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۴۶ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۴۷ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۴۸ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۴۹ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۵۰ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



$$\frac{D}{180} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow \frac{45}{180} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow R = \frac{\pi}{4}$$

۱- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

می‌دانیم مجموع زوایای داخلی مثلث $\pi \equiv 180^\circ$ است:

$$\alpha + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{5} = \pi \Rightarrow \alpha = \frac{11\pi}{20} \text{ رادیان}$$

$$L = r \cdot \theta \Rightarrow L = 100 \times \frac{11\pi}{20} = 55\pi \xrightarrow{\pi = 3} L = 165$$

↓
بر حسب رادیان

۲- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. با فاکتورگیری علامت منفی در کمان $\text{tg} : y = 1 + \text{mtg}\left(Kx - \frac{\pi}{3}\right)$ ضابطه تابع

می‌شود.

چون $\left(-\frac{\pi}{6}\right)$ اولین مجانب در سمت چپ مبدأ مختصات است:

$$K\left(-\frac{\pi}{6}\right) - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow K = 1$$

$$f\left(\frac{13\pi}{12}\right) = 0 \Rightarrow 1 + \text{mtg}\left(\frac{13\pi}{12} - \frac{\pi}{3}\right) = 0 \Rightarrow 1 + \text{mtg}\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 0$$

$$\text{tg}\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -1$$

$$\xrightarrow{\quad} 1 - m = 0 \Rightarrow m = 1$$

بنابراین، ضابطه تابع به صورت $y = 1 + \text{tg}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ است و

$$f\left(\frac{\pi}{12}\right) = 1 + \text{tg}\left(\frac{\pi}{12} - \frac{\pi}{3}\right) = 1 + \text{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = 1 - 1 = 0$$

$$f(x) = 2(1 - \sin^2 x) - 8\sin x + 9$$

۳- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$f(x) = -2\sin^2 x - 8\sin x + 9 \Rightarrow f(x) = -2(\sin^2 x + 4\sin x) + 9$$

$$\Rightarrow f(x) = -2[(\sin x + 2)^2 - 4] + 9$$

$$f(x) = -2(\sin x + 2)^2 + 17 \begin{cases} \xrightarrow{\sin x = -1} \text{Max} = 15 \\ \xrightarrow{\sin x = 1} \text{Min} = -1 \end{cases} \text{ اختلاف Max, Min تابع} = 16$$

$$-1 \leq \sin x \leq 1$$

چون:



۴- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

صرف نظر از دور دایره

$$\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} + 14^\circ\right) - \sin(\cancel{2\pi} + \pi - 14^\circ)}{\cos\left(\frac{3\pi}{2} + 14^\circ\right) - \sin\left(\frac{3\pi}{2} - 14^\circ\right)} = \frac{\cos 14^\circ - \sin 14^\circ}{+\sin 14^\circ + \cos 14^\circ}$$

صورت و مخرج تقسیم بر $\cos 14^\circ$

$$\rightarrow \frac{1 - \operatorname{tg} 14^\circ}{\operatorname{tg} 14^\circ + 1} = \frac{1 - 0/25}{0/25 + 1} = \frac{0/75}{1/25} = \frac{3}{5} = 0/6$$

۵- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. باقیمانده تقسیم عبارت موردنظر بر $x - \cos \alpha$ برابر با ۱ است، یعنی وقتی ریشه مقسوم علیه را پیدا کرده و در مقسوم قرار می دهیم، حاصل برابر با ۱ می شود:

$$x - \cos \alpha = 0 \Rightarrow x = \cos \alpha$$

$$2x^4 - x^2 - \sin^2 \alpha (2\sin^2 \alpha - 1) \xrightarrow{x = \cos \alpha} 2\cos^4 \alpha - \cos^2 \alpha - 2\sin^4 \alpha + \sin^2 \alpha$$

$$= 1 \Rightarrow 2(\cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha) - (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) = 1 \quad (*)$$

می دانیم:

$$\cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha = (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \underbrace{(\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha)}_1 = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \cos 2\alpha$$

پس عبارت (*) به این صورت خواهد بود:

$$2\cos 2\alpha - \cos 2\alpha = 1 \Rightarrow \cos 2\alpha = 1 \Rightarrow 2\alpha = 2k\pi \Rightarrow \alpha = k\pi$$

$$1 + \operatorname{Cotg}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} \Rightarrow 1 + 9 = \frac{1}{\sin^2 x} \Rightarrow \sin^2 x = \frac{1}{10}$$

۶- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x = 1 - 2\left(\frac{1}{10}\right) = \frac{4}{5}$$

$$\cos 4x = 2\cos^2 2x - 1 = 2\left(\frac{4}{5}\right)^2 - 1 = \frac{7}{25} = 0/28$$



۷- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\begin{aligned} \max &= 2 \Rightarrow \begin{cases} a + |b| = 2 \\ a - |b| = -6 \end{cases} \Rightarrow a = -2, |b| = 4 \Rightarrow \\ \min &= -6 \Rightarrow \end{aligned}$$

با توجه به شکل، b و C هم علامت هستند، بنابراین b و C را مثبت فرض می کنیم:

$$f(x) = 0 \Rightarrow -2 + 4 \sin(cx) = 0 \Rightarrow \sin(cx) = \frac{1}{4} \Rightarrow cx = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$$

$$\begin{cases} C\alpha = \frac{\pi}{6} \\ C \times 5 = \frac{5\pi}{6} \Rightarrow C = \frac{\pi}{6}, \alpha = 1 \end{cases} \begin{cases} f(x) = -2 + 4 \sin\left(\frac{\pi}{6}x\right) \\ f(3\alpha) = f(3) = -2 + 4 \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 \end{cases}$$

۸- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\frac{\sin 3x}{\sin x} = 1 \xrightarrow[\text{یعنی } x \neq K\pi]{\text{با شرط } \sin x \neq 0} \sin 3x = \sin x$$

$$\begin{aligned} 3x &= 2K\pi + x \\ 2x &= 2K\pi \end{aligned} \quad \begin{aligned} 3x &= (2K+1)\pi - x \\ 4x &= (2K+1)\pi \\ x &= \frac{2K+1}{4}\pi, K \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

غ ق ق چون مخرج کسر معادله صفر می شود $x = K\pi$

$$0 \leq x \leq 2\pi \Rightarrow 0 \leq \frac{(2K+1)\pi}{4} \leq 2\pi \Rightarrow 0 \leq \frac{2K+1}{4} \leq 2 \Rightarrow 0 \leq 2K+1 \leq 8$$

$$\Rightarrow -1 \leq 2K \leq 7 \Rightarrow -\frac{1}{2} \leq K \leq \frac{7}{2} \Rightarrow K = 0, 1, 2, 3$$

$$\Rightarrow x = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4} \Rightarrow \text{مجموع جواب ها} = 4\pi$$

۹- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\text{tg } 135^\circ = \text{شیب خط} = \frac{-(2K+3)}{-(5-K)}$$

$$-1 = \frac{2K+3}{5-K} \Rightarrow K = -8 \Rightarrow -13x - 13y - 78 = 0 \xrightarrow{\div (-13)} x + y + 6 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{شیب} = -1 \\ \text{عرض از مبدا} = -6 \end{cases} \Rightarrow \text{مجموع } K \text{ و شیب و عرض از مبدا} = -15$$



$$\operatorname{tg} 135^\circ = \text{شیب خط} = \frac{-(2a+3)}{-(5-a)}$$

۱۰- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$-1 = \frac{2a+3}{5-a} \Rightarrow a = -8 \Rightarrow -13x - 13y = 78$$

$$\xrightarrow{\div (-13)} \boxed{x + y + 6 = 0} \begin{cases} \xrightarrow{\text{طول از مبدا}} x = -6 \\ \xrightarrow{\text{عرض از مبدا}} y = -6 \\ \xrightarrow{\text{شیب خط}} m = -1 \end{cases}$$

$$\text{حاصلضرب ۴ مقدار خواسته شده} = (-8)(-6)(-6)(-1) = 288$$

۱۱- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\frac{1}{\operatorname{Cotg} 2x} = 2 \sin x \Rightarrow 2 \sin x = \tan 2x \Rightarrow 2 \sin x = \frac{\sin 2x}{\cos 2x} = \frac{2 \sin x \cos x}{\cos 2x}$$

$$\Rightarrow 2 \sin x \cos 2x = 2 \sin x \cos x \Rightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \Rightarrow x = \pi \\ \cos 2x = \cos x \Rightarrow 2x = \pm x + 2k\pi \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi & \text{غ ق ق} \\ x = \frac{2k\pi}{3} \end{cases}$$

پس فقط $x = \frac{2\pi}{3}$ و $x = \frac{4\pi}{3}$ قابل قبول است که جمع آنها برابر 2π است.



«بانک سوال یاوران دانش»

۱۲- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$\Rightarrow A(x, -4x), x < 0$ روی خط $y = -4x$ و در ناحیه دوم مثلثاتی قرار دارد.

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \cos \alpha \\ y = \sin \alpha \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 = \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$$

$$x^2 + (-4x)^2 = 1 \xrightarrow{x < 0} x = \frac{-1}{\sqrt{17}}, y = \frac{4}{\sqrt{17}}$$

$$\sin \alpha = y = \frac{4}{\sqrt{17}}, \cos \alpha = x = \frac{-1}{\sqrt{17}} \quad (1)$$

$\Rightarrow B(x, -4x), x > 0$ روی خط $y = -4x$ و در ناحیه چهارم مثلثاتی قرار دارد.

$$\begin{cases} x = \cos \beta \\ y = \sin \beta \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 = \cos^2 \beta + \sin^2 \beta = 1$$

$$x^2 + (-4x)^2 = 1 \xrightarrow{x > 0} x = \frac{1}{\sqrt{17}}, y = \frac{-4}{\sqrt{17}}$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\sin \beta}{\cos \beta} = \frac{y}{x} = \frac{\frac{-4}{\sqrt{17}}}{\frac{1}{\sqrt{17}}} = -4 \Rightarrow \operatorname{Cotg} \beta = \frac{-1}{4} \quad (2)$$

$$1, 2 \Rightarrow 4\sqrt{17} \left(\frac{4}{\sqrt{17}} - \left(\frac{-1}{\sqrt{17}} \right) \right) \left(-4 + \left(\frac{-1}{4} \right) \right) = 4 \times 5 \times \left(\frac{-17}{4} \right) = -85$$

$$T = \frac{\pi}{\left| \frac{3\pi}{4} \right|} = \frac{4}{3}$$

۱۳- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. دوره تناوب را می‌یابیم:

به ازاء $x = -2$ تابع $f(x)$ تعریف نشده است. بنابراین تابع روی بازه $\left(-2, -2 + \frac{4}{3}\right)$ یعنی $\left(-2, \frac{-2}{3}\right)$ تعریف

نشده و اکیداً صعودی است. حداکثر b برابر $\frac{2}{3}$ است.



۱۴- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. می‌دانیم:

$$\sin\left(\frac{19\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{16\pi + 3\pi}{4}\right) = \sin\left(4\pi + \frac{3\pi}{4}\right) = \sin\frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos(945^\circ) = \cos(\underbrace{720^\circ}_{2 \times 360^\circ} + 225^\circ) = \cos(225^\circ) = \cos(180^\circ + 45^\circ) = -\cos 45^\circ = \frac{-\sqrt{2}}{2}$$

پس فرض مسئله به این صورت می‌شود:

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \sin \alpha + \left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right) \cos \alpha = \frac{1}{3} \xrightarrow{\text{طرفین تقسیم بر } \frac{\sqrt{2}}{2}} \sin \alpha - \cos \alpha = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$\Rightarrow \sin \alpha - \cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

طرفین تساوی اخیر را به توان دو می‌رسانیم:

$$(\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2 \Rightarrow \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha - 2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{2}{9} = 1 - \sin^2 \alpha = \frac{2}{9}$$

$$\Rightarrow \sin^2 \alpha = \frac{7}{9}$$

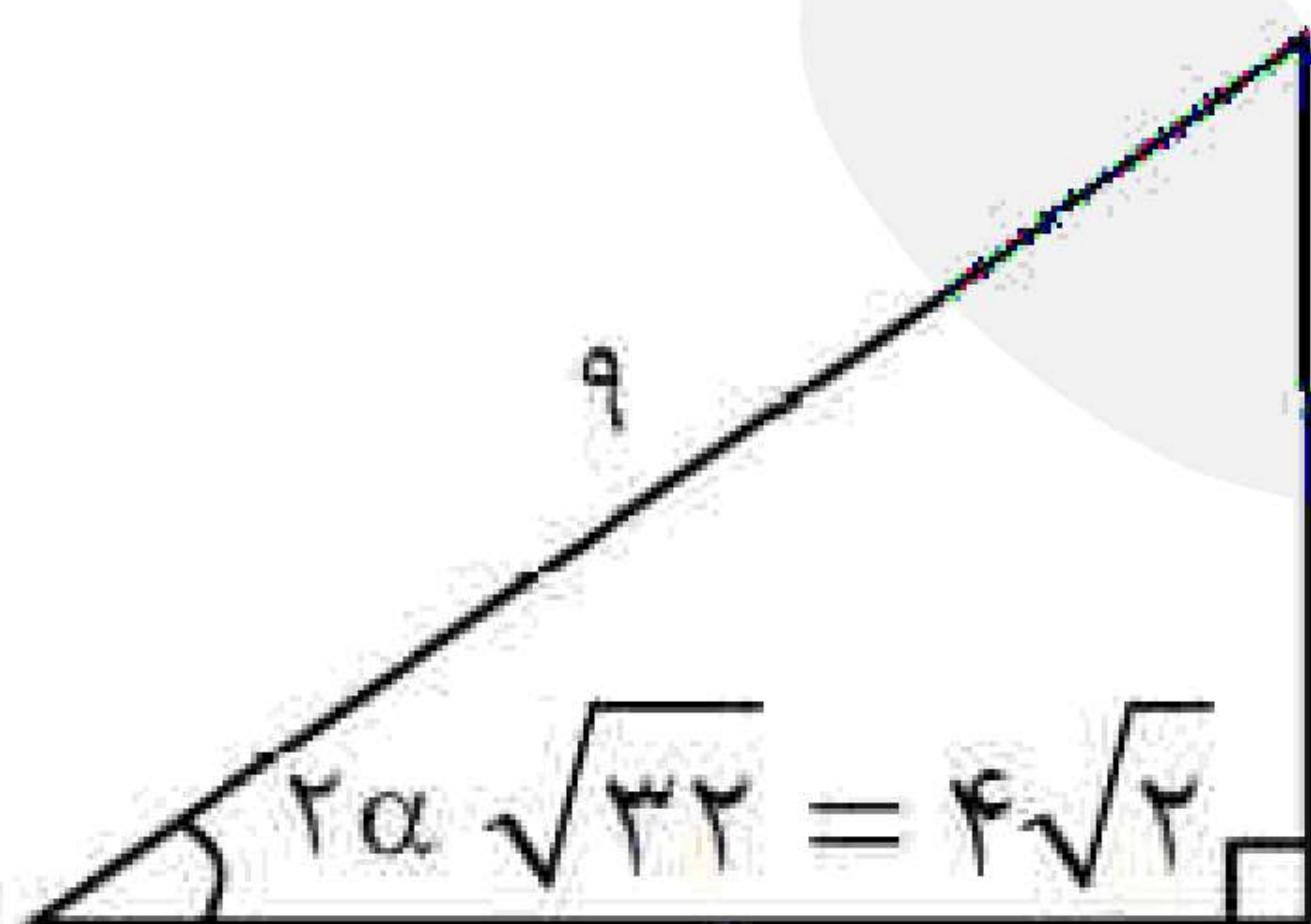
می‌دانیم شیب یک خط، \tan زاویه‌ای است که آن خط با جهت مثبت محور x ها می‌سازد که در اینجا می‌شود:

$$m = \tan 2\alpha$$

$$\begin{cases} \sin^2 \alpha = \frac{7}{9} \\ \tan 2\alpha = ? \end{cases}$$

یعنی:

از طریق رسم یک مثلث قائم‌الزاویه فرضی عمل می‌کنیم:



$$\Rightarrow \tan 2\alpha = \frac{7}{4\sqrt{2}} \Rightarrow m = \frac{7}{4\sqrt{2}}$$

(دقت کنید که $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$ و لذا $0 < 2\alpha < \frac{\pi}{2}$ است، یعنی زاویه 2α در ربع اول دایره مثلثاتی و مقدار \tan آن مثبت است) پس معادله خط موردنظر به صورت $y = \frac{7}{4\sqrt{2}}x + h$ است که با جایگذاری نقطه $(\sqrt{2}, 0)$ در آن

$$0 = \frac{7}{4\sqrt{2}}(\sqrt{2}) + h \Rightarrow 0 = \frac{7}{4} + h \Rightarrow h = -\frac{7}{4}$$

داریم:



۱۵- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$-\frac{\pi}{3} \leq x < -\frac{\pi}{4} \Rightarrow -\sqrt{3} \leq \tan x < -1 \Rightarrow f(x) = -2$$

$$-\frac{\pi}{4} \leq x < 0 \Rightarrow -1 \leq \tan x < 0 \Rightarrow f(x) = -1$$

$$0 \leq x < \frac{\pi}{4} \Rightarrow 0 \leq \tan x < 1 \Rightarrow f(x) = 0$$

$$\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{3} \Rightarrow 1 \leq \tan x \leq \sqrt{3} \Rightarrow f(x) = 1$$

مجموعه برد f در بازه $\left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right]$ به صورت $\{-2, -1, 0\}$ و دارای ۴ عضو است.

۱۶- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. با توجه به معادله داده شده و تغییر متغیر داریم:

$$4 \cos^3 x + \cos x = \frac{10}{3} \Rightarrow 27 \cos^3 x + 3 \cos x = 10 \xrightarrow{3 \cos x = t} t^3 + t = 10$$

$$\xrightarrow{\text{حدس ریشه}} t = 2 \Rightarrow (t-2) \overbrace{(t^2 + 2t + 5)}^{\Delta < 0} = 0 \Rightarrow t = 3 \cos x = 2 \Rightarrow \cos x = \frac{2}{3}$$

می‌دانیم در $x = \frac{\pi}{4}$ ، مقادیر $\sin x$ و $\cos x$ با یکدیگر برابر و تقریباً برابر با $\frac{0.7}{1} = \frac{1/2}{\sqrt{2}/2} \simeq \frac{1/4}{\sqrt{2}/2}$ است، با توجه

به این که $\frac{2}{3} \simeq 0.66$ از $\frac{\sqrt{2}}{2}$ کوچکتر است، نتیجه می‌گیریم $\frac{\pi}{4} > x > \frac{\pi}{3}$.

همچنین جواب‌های $\cos x = k$ در بازه $[0, 2\pi]$ برابر a و $2\pi - a$ است که مجموعشان برابر 2π است. از آنجاکه در بازه $[2\pi, 3\pi]$ معادله $\cos x = \frac{2}{3}$ تنها یک ریشه بین $2\pi + \frac{\pi}{4}$ و $2\pi + \frac{\pi}{2}$ دارد، مجموع ریشه‌ها باید از

$$\frac{17\pi}{4} < \text{مجموع} < \frac{9\pi}{2} \quad \frac{\pi}{4} + 4\pi \text{ بزرگ‌تر و از } 4\pi + \frac{\pi}{2} \text{ کوچک‌تر باشد:}$$

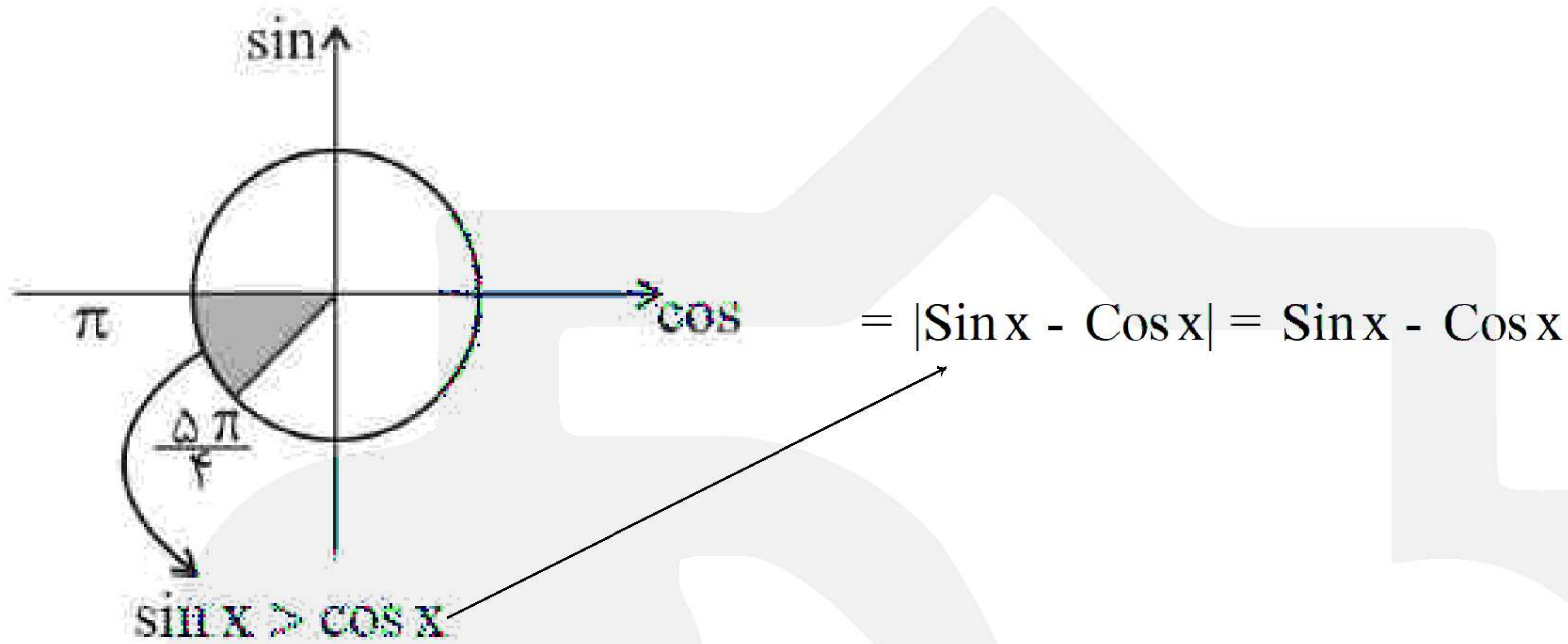
با توجه به گزینه‌ها، گزینه ۳ درست است.



۱۷- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\sqrt{1 - 2\sqrt{\sin^2 x (1 - \sin^2 x)}} = \sqrt{1 - 2\sqrt{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}}$$

$$\begin{aligned} & \pi < x < \frac{5\pi}{4} \Rightarrow \sin x < 0, \cos x < 0 \\ & = \sqrt{1 - 2|\sin x||\cos x|} \xrightarrow{\hspace{10em}} \\ & = \sqrt{1 - 2\sin x \cos x} = \sqrt{(\sin x - \cos x)^2} \end{aligned}$$



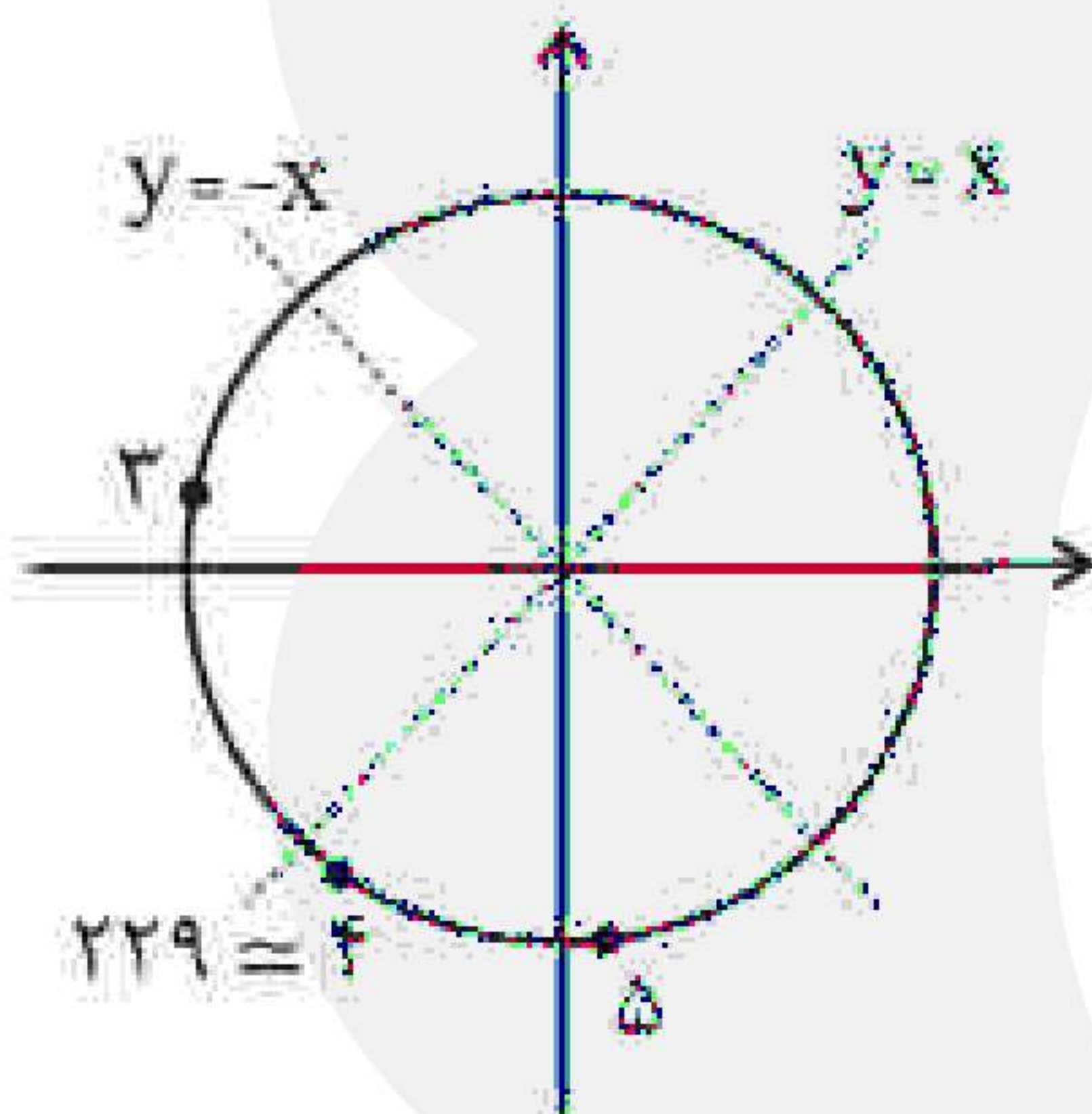
۱۸- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

با توجه به ربع سوم و قرارگیری نیم‌سازها داریم:

$$\tan \varphi > 1 > \cot \varphi > 0 > \cos \varphi > \sin \varphi$$

۵ از ۴ پایین‌تر است پس \sin آن کمتر است.

۳ در سمت چپ ۴ قرار دارد، پس کسینوس آن کمتر است.





۱۹- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. در رابطه صورت سؤال به جای X باید $\frac{\pi}{6}$ و $-\frac{\pi}{6}$ قرار دهیم.

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{6} \Rightarrow \\ x = -\frac{\pi}{6} \Rightarrow \end{cases} \begin{cases} \frac{1}{2}f\left(\frac{\pi}{6}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}f\left(-\frac{\pi}{6}\right) = 1 \xrightarrow{\times \frac{1}{2}} \\ -\frac{1}{2}f\left(-\frac{\pi}{6}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1 \xrightarrow{\times \frac{\sqrt{3}}{2}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{4}f\left(\frac{\pi}{6}\right) + \frac{\sqrt{3}}{4}f\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{4}f\left(-\frac{\pi}{6}\right) + \frac{3}{4}f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{1}{4}\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{\sqrt{3}}{4}f\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} \Rightarrow f\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right) + f\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}$$

۲۰- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$f\left(\frac{\sqrt{\pi}}{6}\right) = K \sin \frac{\sqrt{\pi}}{6} - 1 = K \sin\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) - 1 = K\left(-\sin \frac{\pi}{6}\right) - 1 = K\left(-\frac{1}{2}\right) - 1 = \frac{-11}{2}$$

$$\Rightarrow K = 9$$

$$f(x) = 9 \sin x - 1$$

$$\begin{cases} x_A = \frac{\pi}{2} \\ x_C = \frac{3\pi}{2} \\ x_B = \frac{5\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} AB = \frac{5\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 2\pi \\ f\left(\frac{\pi}{2}\right) = f\left(\frac{5\pi}{2}\right) = 8 \\ f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -10 \end{cases} \Rightarrow \text{ارتفاع مثلث } ABC = 18$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}(2\pi) \times 18 = 18\pi$$

۲۱- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\frac{\cos(270^\circ + 10^\circ) - \sin(3 \times 180^\circ + 10^\circ)}{\cos(360^\circ + 10^\circ) + 2 \cos(360^\circ + 90^\circ - 10^\circ)} = \frac{\sin 10^\circ + \sin 10^\circ}{\cos 10^\circ + 2 \sin 10^\circ} \xrightarrow{\div \cos 10^\circ}$$

$$\frac{2 \tan 10^\circ}{1 + 2 \tan 10^\circ} = 0.26 = \frac{13}{50} \Rightarrow 100 \tan 10^\circ = 13 + 26 \tan 10^\circ \Rightarrow 74 \tan 10^\circ = 13$$

$$\Rightarrow \tan 10^\circ = \frac{13}{74} \Rightarrow \cot 10^\circ = \frac{74}{13} \Rightarrow \text{براکت} = 5$$



۲۲- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$3 \cot x + \operatorname{tg}\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = 2 \left(\cot x + \operatorname{tg}\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right) \right)$$

$$3 \cot x + \operatorname{tg}\frac{\pi}{3} = 2 \left(\cot x - \operatorname{tg}\frac{\pi}{3} \right) \Rightarrow 3 \cot x + \sqrt{3} = 2 \left(\cot x - \sqrt{3} \right)$$

$$\Rightarrow \cot x = -3\sqrt{3}$$

$$1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$$

$$\cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x \xrightarrow{\quad} \cos 2x = 1 - 2 \left(\frac{1}{28} \right) \Rightarrow \cos 2x = \frac{13}{14}$$

$$\sin\left(\frac{35\pi}{6}\right) = \sin\left(6\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\sin\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$$

$$\text{عبارت مورد نظر} = 6 \left(-\frac{1}{2} \right) + 28 \left(\frac{13}{14} \right) = -3 + 26 = 23$$

۲۳- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$D_f = [0, 4]$$

↓

$$T = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}} = 4 \Rightarrow x_{\max} = 2, y_{\max} = 4 \xrightarrow{\text{جاگذاری}} 4 = a + b \cos^{-1}(\pi) \Rightarrow a - b = 4 \quad (1)$$

$$\text{جاگذاری} \quad (0, 0) \xrightarrow{\quad} 0 = a + b \cos^{-1}(0) \Rightarrow a + b = 0 \quad (2)$$

$$1, 2 \Rightarrow a = 2, b = -2 \Rightarrow f(x) = 2 - 2 \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$$

ناحیه سوم
↑

ناحیه دوم
↑

$$f\left(\frac{8}{3}\right) + f\left(\frac{4}{3}\right) = \left(2 - 2 \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right) + \left(2 - 2 \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$$

$$f\left(\frac{8}{3}\right) + f\left(\frac{4}{3}\right) = \left(2 - 2\left(-\frac{1}{2}\right)\right) + \left(2 - 2\left(-\frac{1}{2}\right)\right) = 3 + 3 = 6$$

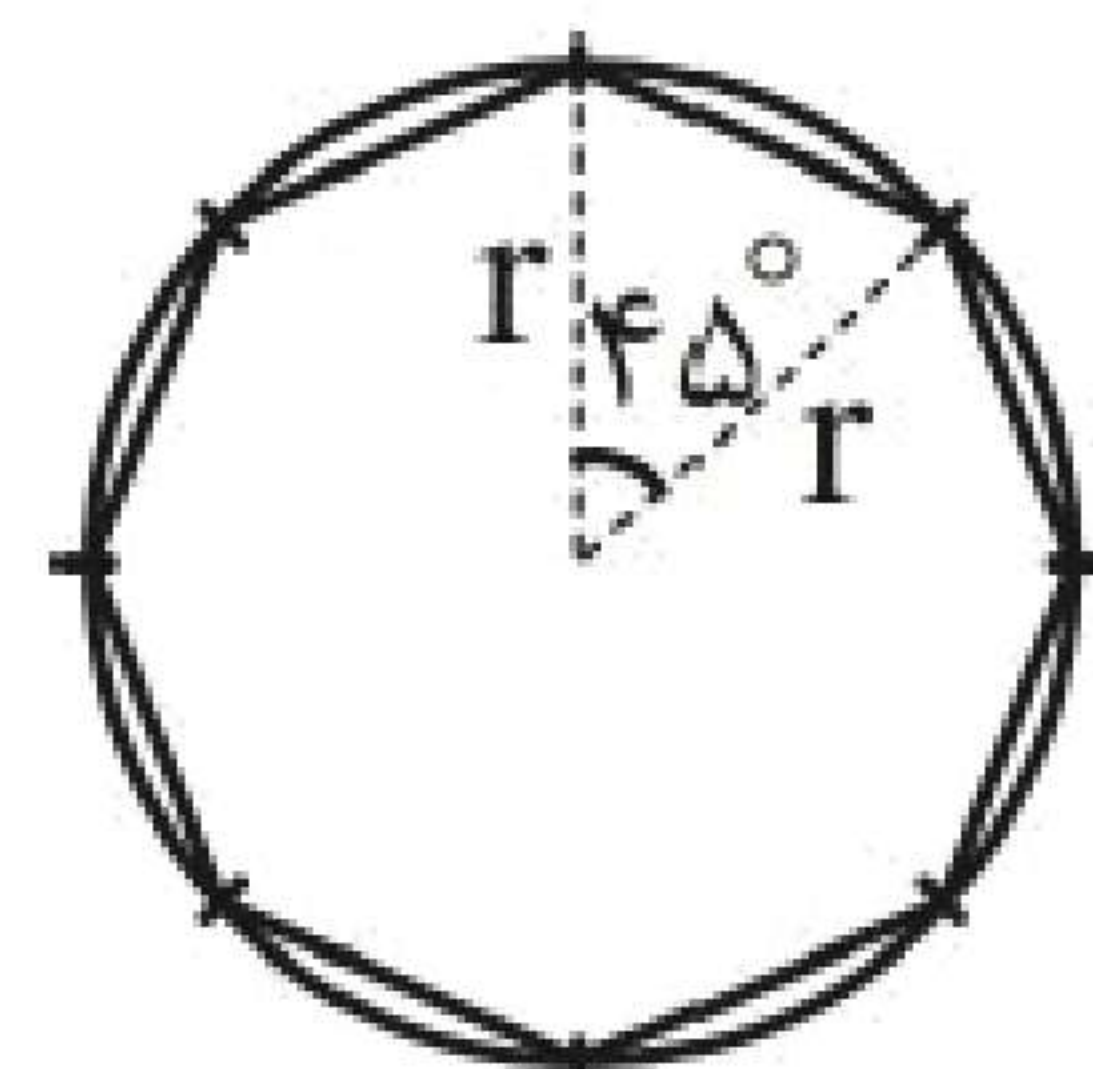
«بانک سوال یاوران دانش»

۲۴- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$8 \text{ ضلعی} = 8 \times \text{مساحت مثلث} = 8 \times \frac{1}{2} r^2 \sin 45^\circ = 2\sqrt{2} r^2$$

$$\text{مساحت دایره} = \pi r^2$$

$$\text{نسبت} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}$$





۲۵- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. از اتحاد $\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$ استفاده می‌کنیم:

$$y = \frac{a}{2} \left(1 + \cos \left(\frac{\pi}{2} - 2bx \right) \right) + c$$

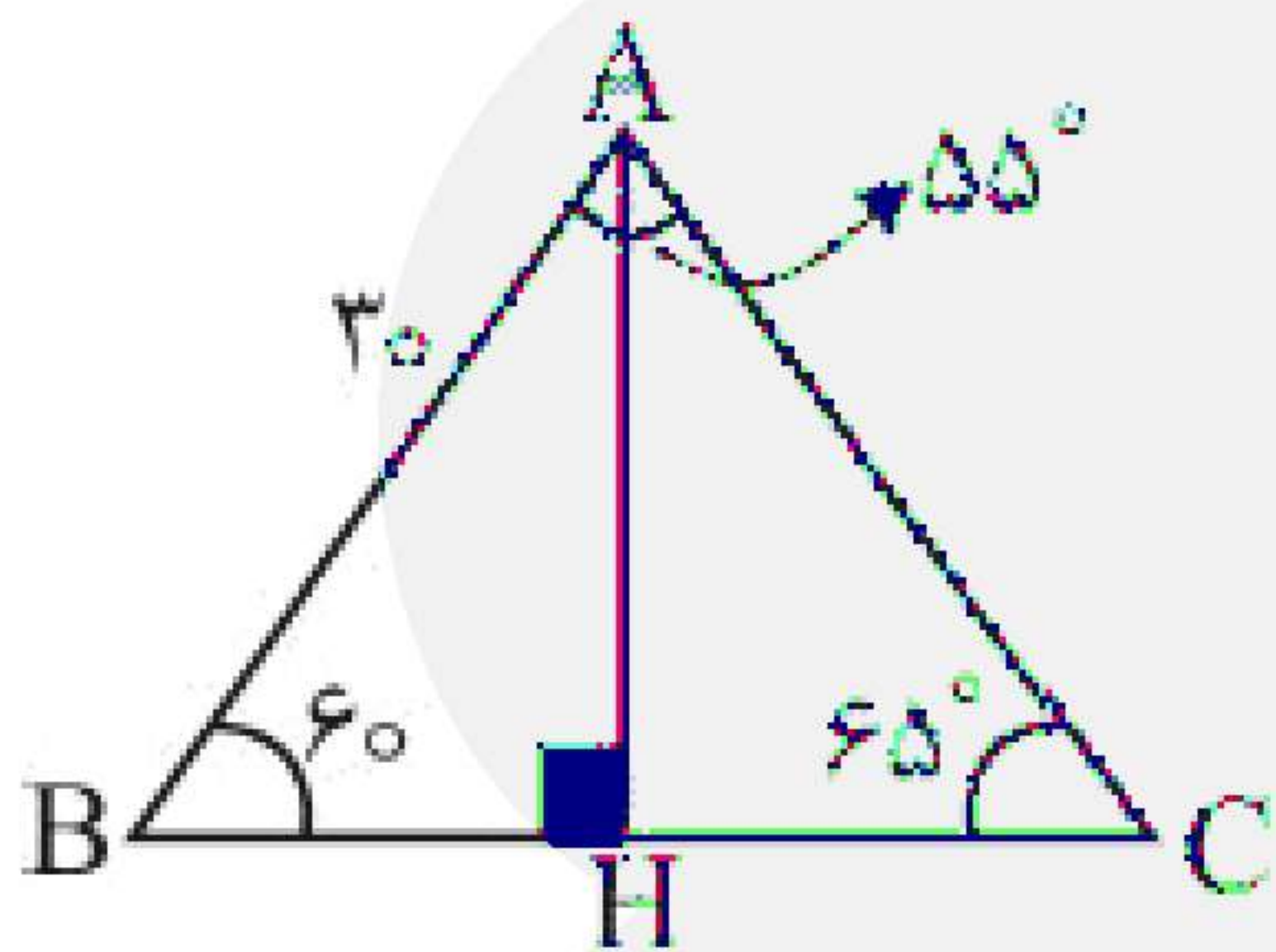
$$y = \frac{a}{2} + c + \frac{a}{2} \sin(2bx)$$

در $x = 0$ تابع صعودی است؛ پس می‌توان a و b را مثبت فرض کرد.

$$\begin{cases} \frac{a}{2} + c + \left| \frac{a}{2} \right| = 2 \\ \frac{a}{2} + c - \left| \frac{a}{2} \right| = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + c = 2 \\ c = -1 \end{cases} \Rightarrow a = 3$$

$$T = \frac{2\pi}{2b} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow b = 2 \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{3}{2}$$

۲۶- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.



$$\sin 60^\circ = \frac{AH}{30} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{AH}{30} \Rightarrow \frac{1/\sqrt{3}}{2} = \frac{AH}{30} \Rightarrow AH = 25/95$$

$$\sin 65^\circ = \frac{AH}{AC} \Rightarrow 0.91 = \frac{25/95}{AC} \Rightarrow AC = 28/52$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times AB \times AC \times \sin 55^\circ = \frac{1}{2} \times 30 \times 28/52 \times 0.82 \Rightarrow S_{\triangle ABC} = 350/8$$

۲۷- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. خلاصه ضابطه تابع به صورت $y = a + b \sin x$ می‌شود و طبق نمودار:

$$f\left(-\frac{5\pi}{6}\right) = 0 \Rightarrow 0 = a + b \sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)$$

$$a + b\left(-\frac{1}{2}\right) = 0 \Rightarrow a = \frac{b}{2} \Rightarrow b = 2a \quad (1)$$

در مبدأ $y > 0$ بنابراین $a > 0$ و در نتیجه $b > 0$. ماکزیمم تابع برابر ۳ است. بنابراین:

$$\begin{array}{c} \text{طبق ۱} \\ a + 2a = 3 \leftarrow a + b = 3 \leftarrow a + |b| = 3 \\ 3a = 3 \end{array}$$

$$\boxed{a = 1}, \boxed{b = 2} \Rightarrow f(x) = 1 + 2 \sin x$$

$$f\left(\frac{7\pi}{6}\right) = 1 + 2 \sin\left(\frac{7\pi}{6}\right) = 1 + 2 \sin\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = 1 + 2\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$$

ناحیه سوم

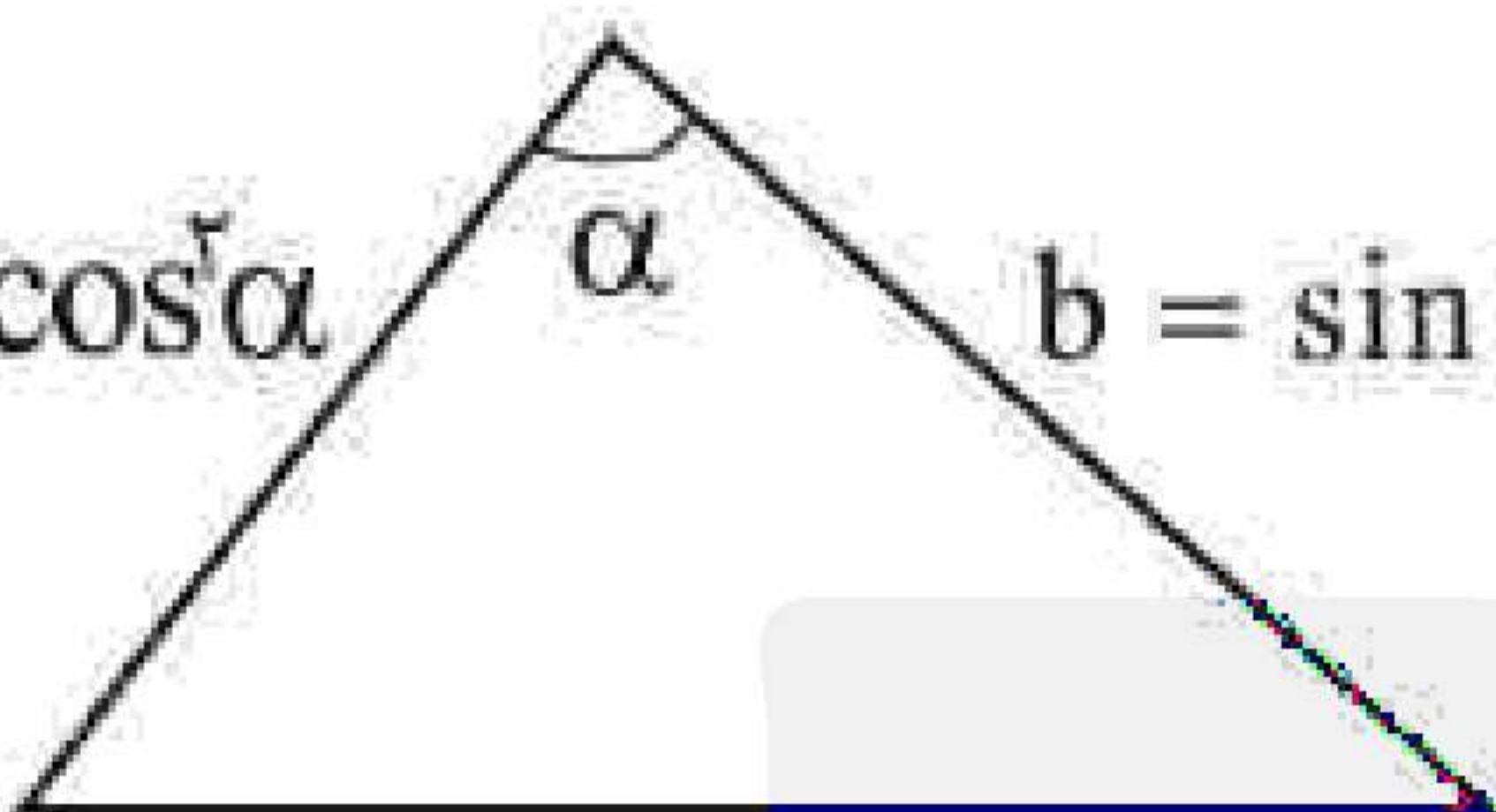


۲۸- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\text{شیب خط} = \tan \alpha \Rightarrow \frac{3}{4} = \tan \alpha \Rightarrow 1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$1 + \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{16}{25} \quad (1)$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \sin^2 \alpha + \frac{16}{25} = 1 \Rightarrow \sin^2 \alpha = \frac{9}{25} \quad (2)$$



$$a = \cos \alpha \quad b = \sin \alpha \longrightarrow S_{\Delta} = \frac{1}{2} a \times b \times \sin \alpha$$

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} \cos^2 \alpha \times \sin \alpha \times \sin \alpha$$

مطابق ۱، ۲

$$\begin{cases} S_{\Delta} = \frac{1}{2} \cos^2 \alpha \cdot \sin^2 \alpha \\ S_{\Delta} = \frac{1}{2} \times \frac{16}{25} \times \frac{9}{25} = 0.1152 \end{cases}$$

۲۹- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. در ابتدا دقت کنید که:

$$f(x) = a \sin \pi x \cos \pi x \cos^2 \pi x + b = \frac{a}{4} \sin^4 \pi x + b$$

چون در مثلث $\triangle ABC$ ، ارتفاع و میانه نظیر ضلع AC بر هم منطبق‌اند، پس این مثلث در رأس B ، متساوی‌الساقین

$$BC = \frac{T}{2} = \frac{\frac{2\pi}{4\pi}}{2} = \frac{1}{4} \Rightarrow AB = \frac{1}{4}$$

بوده و $AB = BC$ پس:

$$\begin{cases} \frac{a}{4} = \frac{1}{8} \Rightarrow a = \frac{1}{2} \\ b = \frac{1}{8} \end{cases} \Rightarrow \frac{a}{b} = 4$$

از اینجا به راحتی نتیجه می‌شود:

۳۰- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. با توجه به رابطه

$$\cos^2 2x = \frac{1 + \cos 4x}{2} \Rightarrow \cos^2 2x = \frac{1 + \cos 4x}{2}$$

$$\Rightarrow \cos^2 2x = \frac{1 + \cos 4x}{2} \xrightarrow{\times 2} \cos^2 2x = 1$$

$$2x = 2K\pi$$

$$x = \frac{K\pi}{2}, K \in \mathbb{Z}$$

$$-2\pi \leq x \leq 2\pi \Rightarrow -2\pi \leq \frac{K\pi}{2} \leq 2\pi \Rightarrow -4 \leq K \leq 4 \Rightarrow K \in \mathbb{Z}$$

K شامل ۹ عدد صحیح می‌شود، پس معادله در این بازه دارای ۹ جواب است.



۳۱- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{1}{2} \xrightarrow{\text{توان ۲}} \underbrace{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}_1 + \underbrace{2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha}_{\sin 2\alpha} = \frac{1}{4}$$

$$1 + \sin 2\alpha = \frac{1}{4} \Rightarrow \sin 2\alpha = \frac{-3}{4}$$

$$\cos 4\alpha = 1 - 2 \sin^2 2\alpha = 1 - 2 \left(\frac{-3}{4} \right)^2 = 1 - \frac{9}{8} = -\frac{1}{8}$$

$$\cos 8\alpha = 2 \cos^2 4\alpha - 1 = 2 \left(-\frac{1}{8} \right)^2 - 1 = \frac{-31}{32}$$

۳۲- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. در خط L شیب برابر $m = \operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}$ است:

$$y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y - (-4\sqrt{3}) = \sqrt{3}(x - 0)$$

$$y = \sqrt{3}x - 4\sqrt{3} \xrightarrow[\text{محل برخورد با محور xها}]{y=0} 0 = \sqrt{3}x - 4\sqrt{3} \Rightarrow x = 4$$



۳۳- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\frac{1 - \sin x}{1 + \sin x} = 4 \Rightarrow 1 - \sin x = 4 + 4 \sin x \Rightarrow \sin x = -\frac{3}{5} \xrightarrow{\text{ربع سوم}} \cos x = -\frac{4}{5} \Rightarrow \operatorname{tg} x = \frac{3}{4}$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2}}{1 - 2 \sin^2 \frac{x}{2}} \xrightarrow{\text{صورت و مخرج تقسیم بر } \cos^2 \frac{x}{2}}$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{\frac{2 \sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2}}}{\frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}} - \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2}}} \Rightarrow \operatorname{tg} x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} - 2 \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} \Rightarrow \operatorname{tg} x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}$$

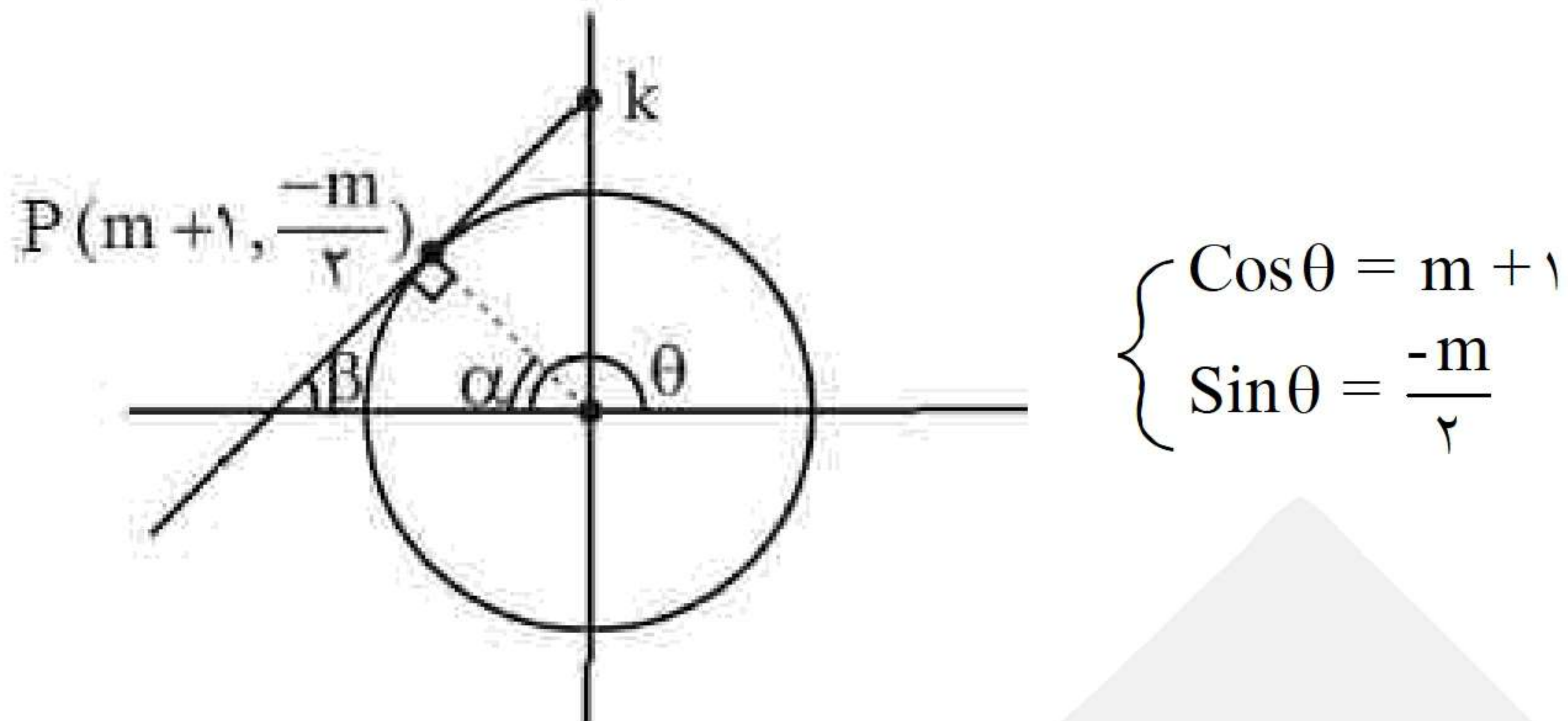
$$\Rightarrow \frac{3}{4} = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} \Rightarrow 3 \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} + 8 \operatorname{tg} \frac{x}{2} - 3 = 0$$

$$\downarrow$$

مجموع ریشه ها $= \frac{-b}{a} = \frac{-8}{3}$ (جمع دو مقدار ممکن برای $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$)



۳۴- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. شکل زیر را ببینید. در ابتدا دقت کنید که برای نوشتن معادله خط موردنظر، باید شیب آن که برابر با $\tan \beta$ است را به دست بیاوریم. با توجه به مختصات نقطه P ، به راحتی داریم:



(دقت کنید که شعاع دایره بر خط مماس عمود است.)

پس باید:

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \Rightarrow \left(\frac{-m}{2}\right)^2 + (m+1)^2 = 1 \Rightarrow \frac{m^2}{4} + (m^2 + 2m + 1) = 1$$

$$\Rightarrow \frac{5}{4}m^2 + 2m = 0 \Rightarrow m\left(\frac{5}{4}m + 2\right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 0 & \text{غ ق ق} \\ m = -\frac{8}{5} \end{cases}$$

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{\frac{-4}{5}}{\frac{-3}{5}} = \frac{-4}{-3} = \frac{4}{3} \quad \text{پس نقطه } P \text{ به صورت } P\left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right) \text{ بوده و}$$

$$\tan \alpha = \tan(\pi - \theta) = -\tan \theta = -\left(\frac{-4}{3}\right) = \frac{4}{3}$$

$$\tan \beta = \tan(90^\circ - \alpha) = \cot \alpha = \frac{3}{4}$$

پس کافی است معادله خط گذرنده از نقطه $p\left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$ با شیب $m = \tan \beta = \frac{3}{4}$ را بنویسیم:

$$y = \frac{3}{4}x + h \xrightarrow[\text{را صدق می دهیم}]{\text{نقطه } \left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)} \frac{4}{5} = \frac{3}{4}\left(-\frac{3}{5}\right) + h \Rightarrow \frac{4}{5} = \frac{-9}{20} + h \Rightarrow h = \frac{4}{5} + \frac{9}{20} = \frac{25}{20} = \frac{5}{4}$$

بنابراین معادله خط فوق به صورت $y = \frac{3}{4}x + \frac{5}{4}$ است و مقدار k همان عرض از مبدأ این خط یعنی $\frac{5}{4}$ است.



«بانک سوال یاوران دانش»

۳۵- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\max(f(x)) = 2 \Rightarrow a = 2$$

$$x_A = x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{5\pi}{6} \Rightarrow A\left(\frac{5\pi}{6}, 2\right)$$

$$x_B \Rightarrow x - \frac{\pi}{3} = 3\pi \Rightarrow x = \frac{10\pi}{3} \Rightarrow B\left(\frac{10\pi}{3}, 0\right)$$

$$AB \text{ شیب خط } m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{0 - 2}{\frac{10\pi}{3} - \frac{5\pi}{6}} = -\frac{4}{5\pi}$$

$$y - 0 = \frac{-4}{5\pi} \left(x - \frac{10\pi}{3} \right)$$

$$y = \frac{-4}{5\pi} x + \frac{8}{3}$$

$$m = \frac{-4}{5\pi}, \quad b = \frac{8}{3}$$

$$\text{مقدار عبارت مورد نظر سؤال} = 3b - 10\pi m = 3\left(\frac{8}{3}\right) - 10\pi\left(\frac{-4}{5\pi}\right) = 8 + 8 = 16$$

۳۶- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$a_n \Rightarrow n_{\max} = \frac{-b}{2a} = \frac{-51}{2(-6)} = 4.25$$

چون $n \in \mathbb{N}$ ، بنابراین بزرگ‌ترین جمله در $n = 4$ یا $n = 5$ اتفاق می‌افتد:

$$\left. \begin{aligned} n = 4 &\Rightarrow a_4 = -6(4)^2 + 51(4) + 17 = 125 \\ n = 5 &\Rightarrow a_5 = -6(5)^2 + 51(5) + 17 = 122 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{a_{\max} = 125} \quad (1)$$

از طرفی $-1 \leq \sin\left(\frac{x}{2}\right) \leq 1$ بنابراین:

$$\sin\left(\frac{x}{2}\right) = -1 \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{-5} = 32 \text{ بیشترین مقدار}$$

$$\sin\left(\frac{x}{2}\right) = 1 \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = 2 \text{ کمترین مقدار}$$

\Rightarrow

$$\boxed{b_n = 2n + 32}$$

دنباله خطی مورد نظر

$$b_{40} = 2(40) + 32 = 112 \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow \text{مجموع مورد نظر سؤال} = 125 + 112 = 237$$



۳۷- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. یک زاویه دلخواه مثلاً $x = \frac{\pi}{4}$ را در هر دو عبارت جایگذاری می‌کنیم:

$$\frac{1}{\cos^6 x} - \frac{3 \operatorname{tg}^2 x}{\cos^2 x} \xrightarrow{x = \frac{\pi}{4}} \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^6} - \frac{3(1)}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{1}{\frac{1}{8}} - \frac{3}{\frac{1}{2}} = 8 - 6 = 2$$

$$* \frac{\operatorname{tg}^2 x - \sin^2 x}{\operatorname{Cotg}^2 x - \cos^2 x} \xrightarrow{x = \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}{1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = 1$$

پس حاصل عبارت اول، یک واحد بیشتر از حاصل عبارت دوم است.

۳۸- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

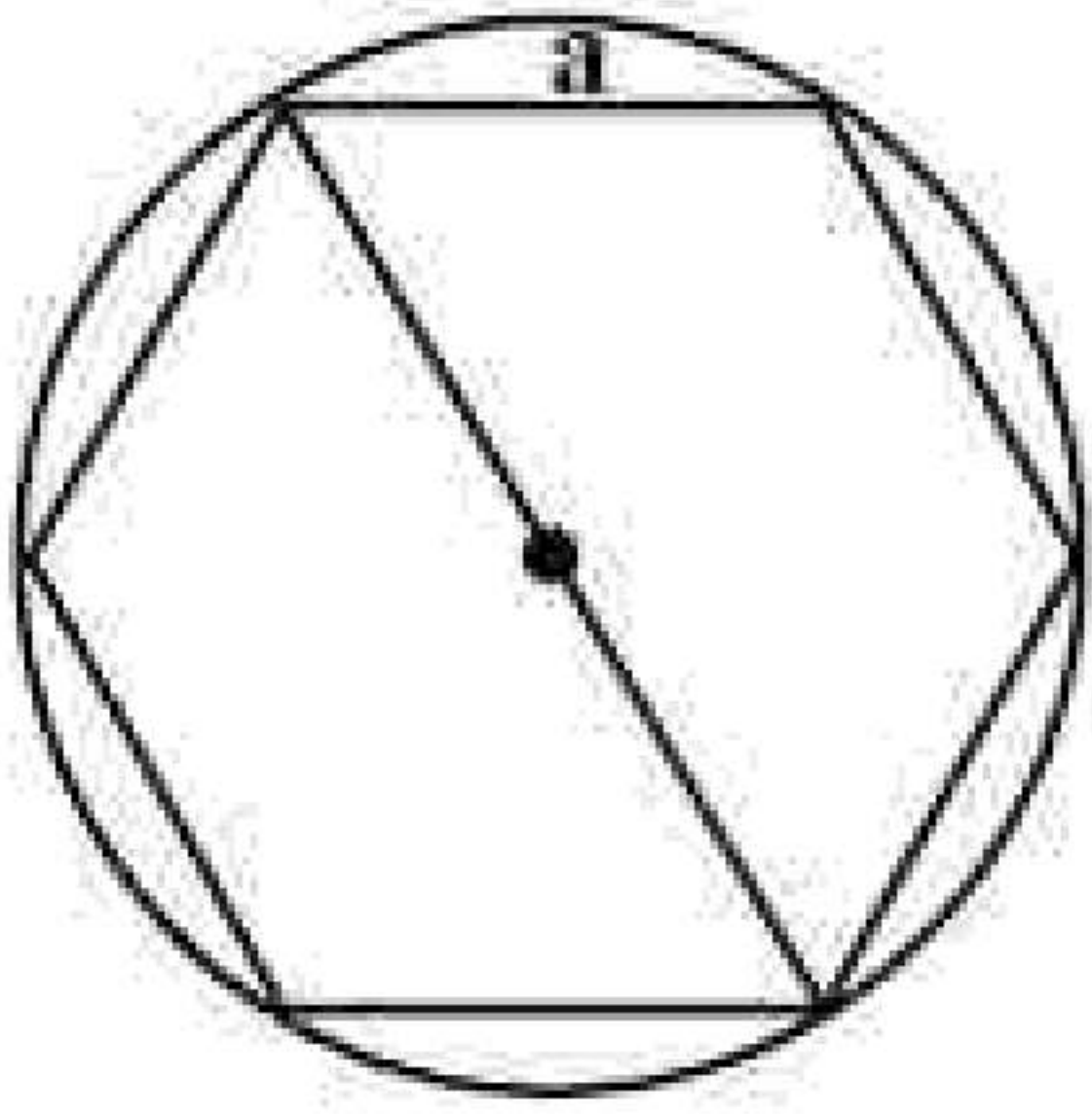
$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{5\pi}{2} - x\right) &= \cos\left(2\pi + \frac{\pi}{2} - x\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x \\ 2 \cos(x - 3\pi) &= 2 \cos(x - \pi - 2\pi) = 2 \cos(x - \pi) = 2 \cos(\pi - x) = -2 \cos x \\ \text{فرض سوال: } \sin x + 2 \cos x &= 0 \xrightarrow{\div \cos x} \operatorname{tg} x + 2 = 0 \Rightarrow \operatorname{tg} x = -2 \\ \operatorname{Cotg}\left(\frac{11\pi}{2} + x\right) &= \operatorname{Cotg}\left(4\pi + \frac{3\pi}{2} + x\right) = \operatorname{Cotg}\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = -\operatorname{tg} x = 2 \end{aligned}$$

۳۹- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. کسینوس، منفی کمان خود را حذف ولی تانژانت، منفی کمان را به ضریب منتقل می‌کند:

$$\begin{aligned} 4 \sin\left(6\pi - \frac{\pi}{3}\right) \cos\left(3\pi - \frac{\pi}{6}\right) - 8 \operatorname{tg}\left(5\pi - \frac{\pi}{4}\right) \sin\left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right) \\ \text{دوره‌های دایره در محاسبه نسبت مثلثاتی تأثیری ندارند.} \\ -4 \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) - 8 \operatorname{tg}\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \\ = +4 \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) - 8 \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}\right) \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - 8 \times 1 \times \frac{1}{2} = 3 - 4 = -1 \end{aligned}$$



۴۰- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. دقت کنید که وقتی ۶ ضلعی منتظم در داخل دایره ای محاط می شود، قطر بزرگ ۶ ضلعی منتظم برابر با قطر دایره است (شکل را ببینید)، پس در اینجا:

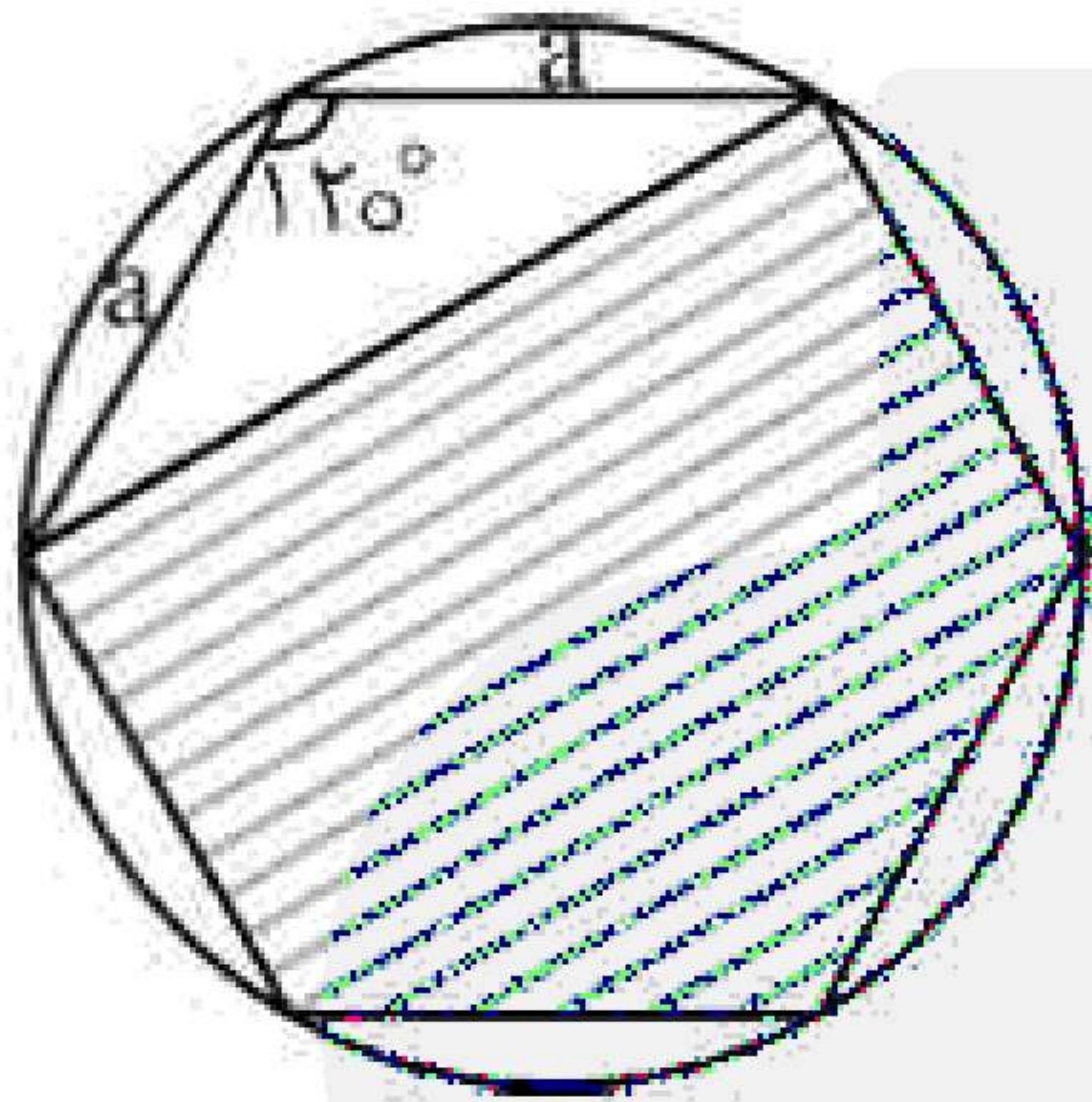


$$S = 4\pi \Rightarrow \pi R^2 = 4\pi \Rightarrow R^2 = 4 \Rightarrow R = 2 \Rightarrow \text{قطر دایره} = 4$$

$$S = 4\pi \Rightarrow \pi R^2 = 4\pi \Rightarrow R^2 = 4 \Rightarrow R = 2 \Rightarrow \text{قطر دایره} = 4$$

$$2a = 4 \Rightarrow a = 2$$

حالا برای به دست آوردن مساحت ۵ ضلعی هاشورخورده، باید مساحت مثلث سفید که مثلثی متساوی الساقین به طول ساق های a و زاویه بین دو ساق 120° است، را از مساحت ۶ ضلعی منتظم کم کنیم:



$$S_{\text{۶ ضلعی}} = 6 \left(\frac{\sqrt{3}}{4} a^2 \right) \xrightarrow{a=2} 6\sqrt{3}$$

$$S_{\text{مثلث سفید}} = \frac{1}{2} (a)(a) (\sin 120^\circ) \xrightarrow{a=2} \frac{1}{2} (2)(2) \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \sqrt{3}$$

$$S_{\text{هاشورخورده}} = 6\sqrt{3} - \sqrt{3} = 5\sqrt{3}$$

$$y = a \sin(b\pi x) \Rightarrow T = \frac{2\pi}{|b|\pi} = \frac{2}{|b|} = 6 \Rightarrow |b| = \frac{1}{3} \Rightarrow b = \pm \frac{1}{3}$$

۴۱- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

با توجه به شکل، a و b هم علامت هستند، چون شکل اولیه $y = \sin x$ حفظ شده است. بنابراین می توانیم a و b را مثبت فرض کنیم:

$$\sin(b\pi x) = 1 \Rightarrow \max(y) = 2 \Rightarrow a = 2$$

$$\frac{a}{b} = \frac{2}{\frac{1}{3}} = 6$$

۴۲- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. هر ۶ مورد درست هستند.



۴۳- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\sin x - \cos x = \frac{1}{4} \xrightarrow{\text{دو طرف به توان ۲}} \underbrace{\sin^2 x + \cos^2 x}_1 - \underbrace{2 \sin x \cdot \cos x}_{\sin 2x} = \frac{1}{4}$$

$$1 - \sin 2x = \frac{1}{4} \Rightarrow \sin 2x = \frac{3}{4} \quad (۱)$$

$$\Rightarrow \sin^2 2x + \cos^2 2x = 1 \Rightarrow \frac{9}{16} + \cos^2 2x = 1 \Rightarrow \cos^2 2x = \frac{7}{16}$$

$$\Rightarrow \cos 2x = \pm \frac{\sqrt{7}}{4}$$

$$\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2} \xrightarrow{\times 2} \frac{\pi}{2} < 2x < \pi$$

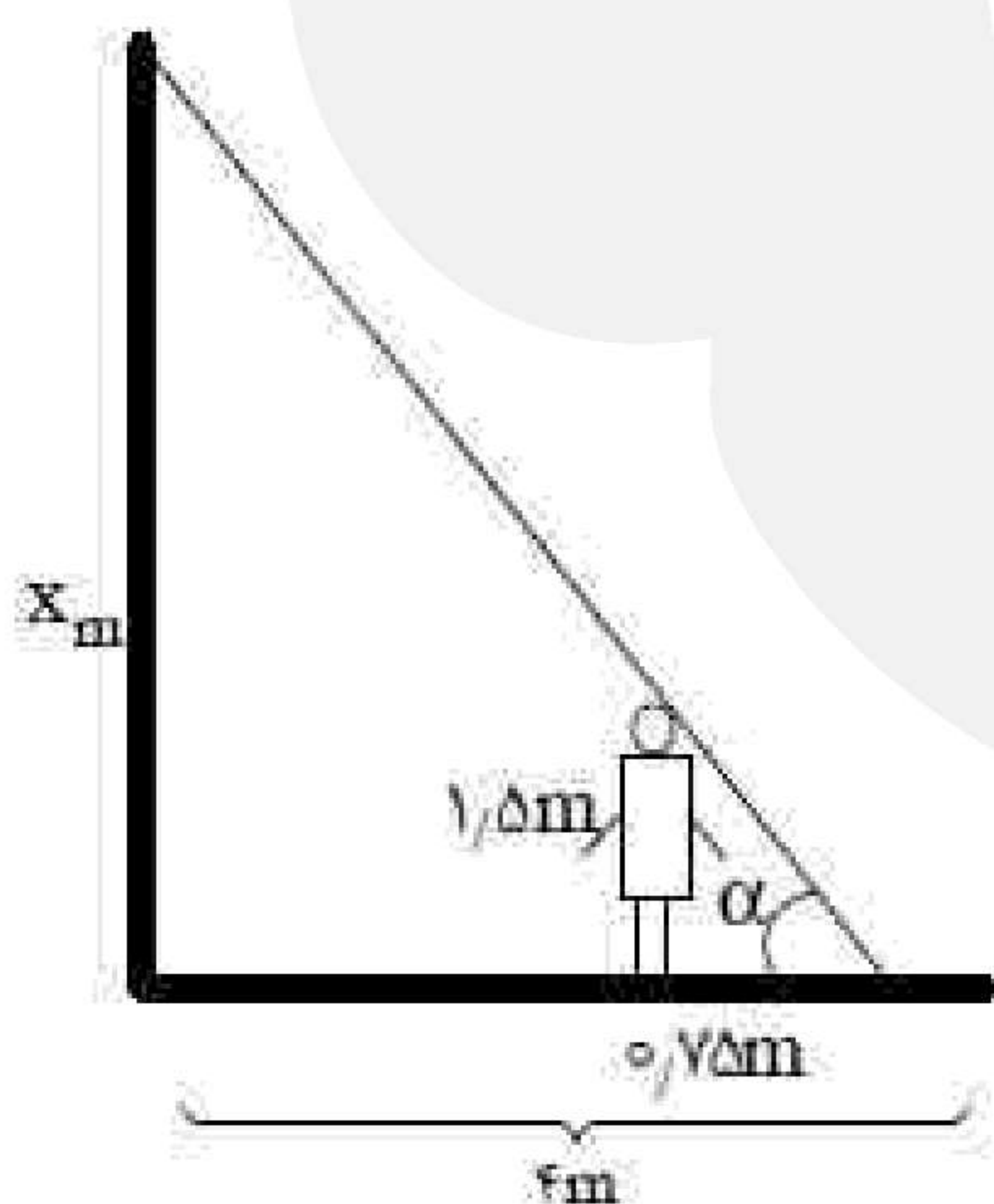
$$\cos 2x < 0 \Rightarrow \cos 2x = -\frac{\sqrt{7}}{4} \quad (۲)$$

$$۱, ۲ \Rightarrow \sin 4x = 2 \sin 2x \cdot \cos 2x = 2 \left(\frac{3}{4} \right) \left(-\frac{\sqrt{7}}{4} \right) = -\frac{3\sqrt{7}}{8}$$

$$\text{عبارت مورد نظر} = \frac{8 \sin 4x}{\sqrt{7}} = \frac{8}{\sqrt{7}} \left(-\frac{3\sqrt{7}}{8} \right) = -3$$

«بانک سوال یاوران دانش»

۴۴- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.



$$\tan \alpha = \frac{1/5}{4/5} = \frac{x}{4} \Rightarrow 0.75x = 4 \times 1/5 \Rightarrow x = 8 \text{ متر}$$



۴۵- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$T = 2\left(\frac{5}{4} - \frac{1}{4}\right) = 2 \Rightarrow \frac{2\pi}{|b|} = 2 \Rightarrow |b| = \pi \xrightarrow{b > 0} b = \pi$$

$$f\left(\frac{1}{4}\right) = 0 \Rightarrow a \cos\left(\frac{\pi}{4} + c\right) = 0 \Rightarrow \frac{\pi}{4} + c = \frac{\pi}{2} \Rightarrow c = \frac{\pi}{4}$$

$$f_{\max} = |a| = \frac{1}{4} \Rightarrow a = \pm \frac{1}{4}$$

$$f(x) = \pm \frac{1}{4} \cos\left(\pi x + \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow f(0) = \pm \frac{1}{4} \cos \frac{\pi}{4} \xrightarrow{f(0) > 0} a = \frac{1}{4}$$

$$\frac{b}{ac} = \frac{\pi}{\frac{1}{4} \times \frac{\pi}{4}} = 16$$

۴۶- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\text{عبارت مورنظر} = \sin \alpha \cdot \cos \alpha (\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha)$$

$$= \frac{1}{2} \times 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha \cdot (-\cos^2 \alpha)$$

$$= \frac{1}{2} \sin^2 \alpha (-\cos^2 \alpha)$$

$$= -\frac{1}{4} \sin \alpha = -\frac{1}{4} \sin\left(4 \times \frac{\pi}{16}\right) = -\frac{1}{4} \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{4} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{8}$$

۴۷- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. نقطه A روی منحنی $f(x) = 2 \sin^2 x$ و نقطه B روی منحنی $g(x) = \cos^2 x$ است. پس وقتی طول پاره خط AB برابر دو واحد است، یعنی:

$$y_A - y_B = 2 \Rightarrow 2 \sin^2 x - \cos^2 x = 2$$

برای حل این معادله مثلثاتی از رابطه $\cos^2 x = 1 - 2 \sin^2 x$ استفاده کرده و داریم:

$$2 \sin^2 x - (1 - 2 \sin^2 x) = 2 \Rightarrow 4 \sin^2 x = 3 \Rightarrow \sin^2 x = \frac{3}{4} \Rightarrow \sin x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

با توجه به اینکه مطابق شکل، طول نقاط A و B در بازه $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ قرار دارد، $x = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$ قابل قبول است.

پس:

$$\begin{cases} x_A = x_B = \frac{2\pi}{3} \\ y_A = 2 \sin^2\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{x_B}{y_A} = \frac{\frac{2\pi}{3}}{\frac{3}{2}} = \frac{4\pi}{9}$$



۴۸- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\sin \alpha = 2 \cos \alpha \xrightarrow{\div \cos \alpha} \tan \alpha = 2$$

$$1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \rightarrow 1 + 4 = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{1}{5} \rightarrow \cos \alpha = \frac{-1}{\sqrt{5}} \quad \left\{ \begin{array}{l} \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \\ \sin^2 \alpha + \frac{1}{5} = 1 \end{array} \right. \rightarrow$$

ناحیه سوم

$$\sin^2 \alpha = \frac{4}{5} \rightarrow \sin \alpha = \frac{-2}{\sqrt{5}}$$

ناحیه سوم

$$\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 2 \left(\frac{1}{5} \right) - 1 = \frac{-3}{5}$$

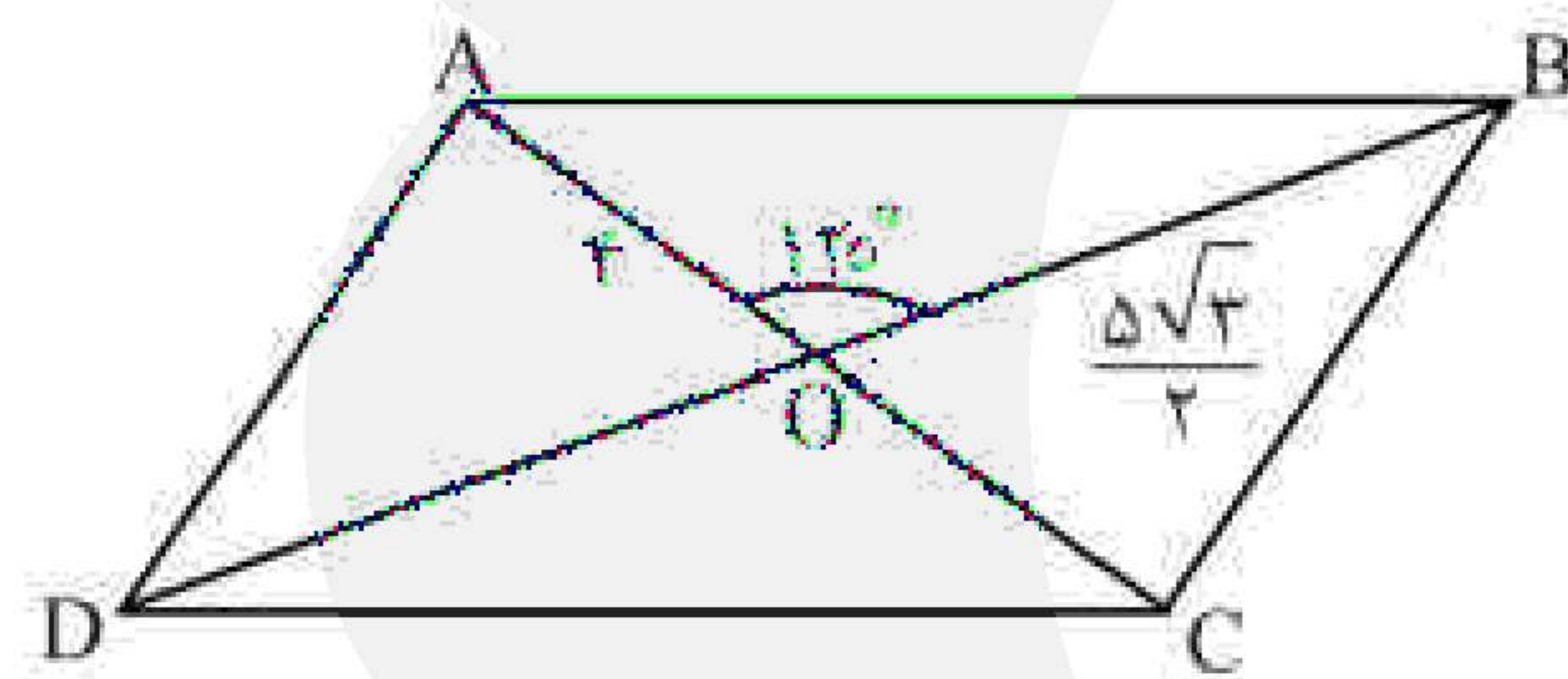
$$\cos 4\alpha = 2 \cos^2 2\alpha - 1 = 2 \left(\frac{-3}{5} \right)^2 - 1 = \frac{-7}{25}$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

$$\sin 2\alpha = 2 \left(\frac{-2}{\sqrt{5}} \right) \left(\frac{-1}{\sqrt{5}} \right) = \frac{4}{5}$$

$$\sin 2\alpha + \cos 4\alpha = \frac{4}{5} - \frac{7}{25} = \frac{13}{25} = 0.52$$

۴۹- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.



$$S_{\triangle OAB} = \frac{1}{2} \times OA \times OB \times \sin 120^\circ$$

$$S_{ABCD} = 4 S_{\triangle OAB} = 2 \times OA \times OB \times \sin 120^\circ$$

$$= 2 \times 4 \times \frac{5\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 30$$

۵۰- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. شیب خط برابر است با تانژانت زاویه‌ای که خط با جهت مثبت محور افقی می‌سازد، بنابراین:

$$y = -0.4x + \frac{1}{3} \Rightarrow \tan 160^\circ = -0.4 \Rightarrow \tan(\pi - 20^\circ) = -0.4 \Rightarrow -\tan 20^\circ = -0.4 \Rightarrow \tan 20^\circ = 0.4$$

$$\text{شیب خط} = \tan \alpha$$

$$\frac{\sin\left(\frac{3\pi}{2} - 20^\circ\right) + \sin(4\pi - 20^\circ)}{\cos(2\pi + \pi + 20^\circ) - \cos\left(\frac{\pi}{2} + 20^\circ\right)} = \frac{-\cos 20^\circ - \sin 20^\circ}{-\cos 20^\circ + \sin 20^\circ}$$

$$\xrightarrow{\text{صورت و مخرج بر } \cos 20^\circ \text{ تقسیم می شود}} \frac{-1 - \tan 20^\circ}{-1 + \tan 20^\circ} = \frac{-1 - 0.4}{-1 + 0.4} = \frac{-1.4}{-0.6} = \frac{7}{3}$$