گنجینه سوال رایـگان

+پاسخ تشریحی

یاوران دانش

راه های ارتباطی با ما:

www.Dyavari.com

۰۲۱-۷۶۷۰۳۸۵۸

۰۹۱۲-۳۴ ۹۴ ۱۳۴

پاسخ کلیدی سوالات تستی (آزمایشی)

ریاضی - کاربرد مشتق

	۱	۲	۳	۴
۱ -	■	□	□	□
۲ -	■	□	□	□
۳ -	■	□	□	□
۴ -	□	■	□	□
۵ -	■	□	□	□
۶ -	□	□	■	□
۷ -	□	■	□	□
۸ -	■	□	□	□
۹ -	□	□	■	□
۱۰ -	□	□	□	■
۱۱ -	□	□	■	□
۱۲ -	□	■	□	□
۱۳ -	□	□	■	□
۱۴ -	□	■	□	□
۱۵ -	□	□	□	■
۱۶ -	■	□	□	□
۱۷ -	■	□	□	□
۱۸ -	□	□	□	■
۱۹ -	□	□	■	□
۲۰ -	□	□	□	■
۲۱ -	□	□	■	□
۲۲ -	□	□	□	■
۲۳ -	□	■	□	□
۲۴ -	□	□	□	■
۲۵ -	□	□	■	□
۲۶ -	□	□	□	■
۲۷ -	□	■	□	□
۲۸ -	■	□	□	□
۲۹ -	□	□	■	□
۳۰ -	□	□	□	■
۳۱ -	□	□	□	■
۳۲ -	□	□	□	■
۳۳ -	□	□	■	□
۳۴ -	■	□	□	□

	۱	۲	۳	۴
۳۵ -	□	■	□	□
۳۶ -	■	□	□	□
۳۷ -	□	□	■	□
۳۸ -	□	□	□	■
۳۹ -	□	□	■	□
۴۰ -	□	□	■	□
۴۱ -	□	□	□	■
۴۲ -	□	□	■	□
۴۳ -	□	□	■	□
۴۴ -	■	□	□	□
۴۵ -	□	□	□	■
۴۶ -	□	□	□	■
۴۷ -	□	□	□	■
۴۸ -	□	■	□	□
۴۹ -	□	■	□	□
۵۰ -	□	□	■	□

۱- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. انرژی در کل مسیر برابر است با:

$$E = 70 \times AD + 50 \times DC$$

$$f(x) = 70\sqrt{x^2 + 6^2} + 50(12 - x)$$

برای رسیدن به مقدار مینیمم، مشتق را مساوی صفر قرار می‌دهیم.

$$f'(x) = 70\frac{2x}{2\sqrt{36 + x^2}} - 50 = 0 \Rightarrow \frac{x}{\sqrt{36 + x^2}} = \frac{5}{4} \xrightarrow{\text{به توان ۲}} \frac{x^2}{x^2 + 36} = \frac{25}{49}$$

$$\xrightarrow{\text{تفضیل در مخرج}} \frac{x^2}{36} = \frac{25}{24} \Rightarrow x^2 = \frac{3}{2} \times 25 \Rightarrow x = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}5 = \frac{5\sqrt{6}}{2}$$

دقت کنید که:

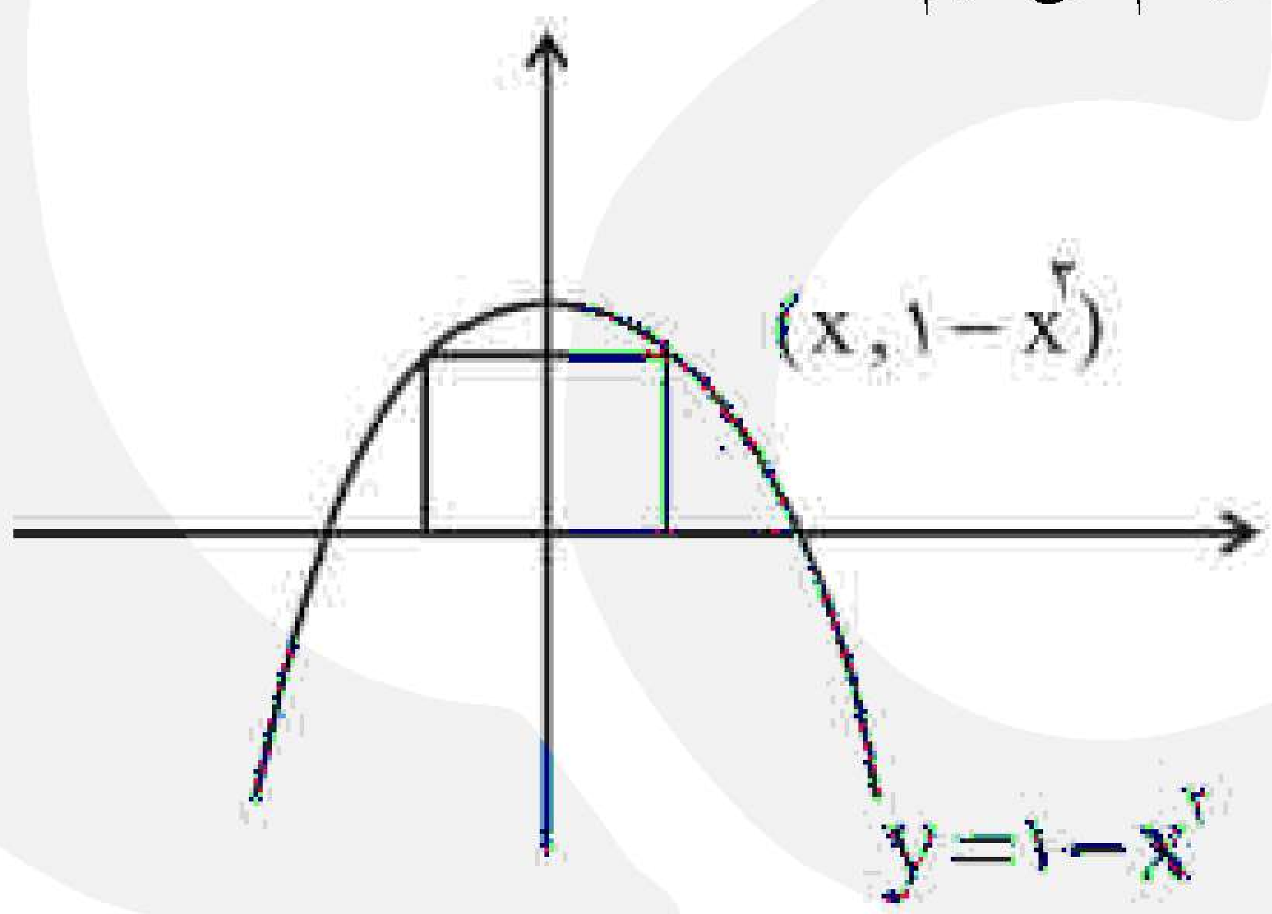
		$5\frac{\sqrt{6}}{2}$	
f'	$-$	0	$+$

پس در $x = \frac{5\sqrt{6}}{2}$ انرژی مینیمم است.

۲- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. بهتر است نمودار تابع را یک واحد به چپ انتقال دهیم تا نسبت به محور عرض‌ها متقارن شود.

$$f(x) = 2x - x^2 \Rightarrow y = 2(x+1) - (x+1)^2 = 2x + 2 - x^2 - 2x - 1 \Rightarrow y = 1 - x^2$$

نمودار تابع و مستطیل محاط در آن را رسم می‌کنیم.



تابع مساحت مستطیل‌ها را می‌سازیم و مشتق آن را برابر صفر می‌گذاریم:

$$S = 2x(1 - x^2) = 2x - 2x^3 \Rightarrow S' = 2 - 6x^2 = 0 \Rightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

ماکزیمم مساحت را محاسبه می‌کنیم:

$$S = 2x(1 - x^2) \xrightarrow{x = \frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{2}{\sqrt{3}}\left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{4}{3\sqrt{3}}$$

۳- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. g را به صورت قطعه‌ای می‌نویسیم:

$$g(x)=\begin{cases}-۱-(-۱)=۰ & , x<-۱\\ -۱-۱=-۲ & , -۱<x<۰\\ ۱-۱=۰ & , x>۰\end{cases}$$

پس g مقادیر ۰ و ۲- را دارد که با قرار دادن آن در f به ۰ و ۳- می‌رسیم که ماکزیمم مطلق صفر است.

۴- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ضابطهٔ تابع را به صورت قطعه‌ای می‌نویسیم:

$$f(x)=x\left|x^۲-۲x\right|=\begin{cases}x\left(-x^۲+۲x\right)=-x^۳+۲x^۲ & ۰\le x\le ۲\\ x\left(x^۲-۲x\right)=x^۳-۲x^۲ & x<۰ \text{ یا } x>۲\end{cases}$$

از تابع مشتق می‌گیریم و ریشه‌های آن و سایر نقاط بحرانی را می‌یابیم:

$$f'(x)=\begin{cases}-۳x^۲+۴x=۰\Rightarrow\begin{cases}x=۰ & \checkmark\\ x=\frac{۴}{۳} & \checkmark\end{cases} & ۰\le x\le ۲\\ ۳x^۲-۴x=۰\Rightarrow\begin{cases}x=۰ & \times\\ x=\frac{۴}{۳} & \times\end{cases} & x<۰ \text{ یا } x>۲\end{cases}$$

مجموعهٔ طول نقاط بحرانی تابع $\left\{-۱,۰,\frac{۴}{۳},۲\right\}$ است. عرض این نقاط را می‌یابیم:

$f(-۱)=-۳$

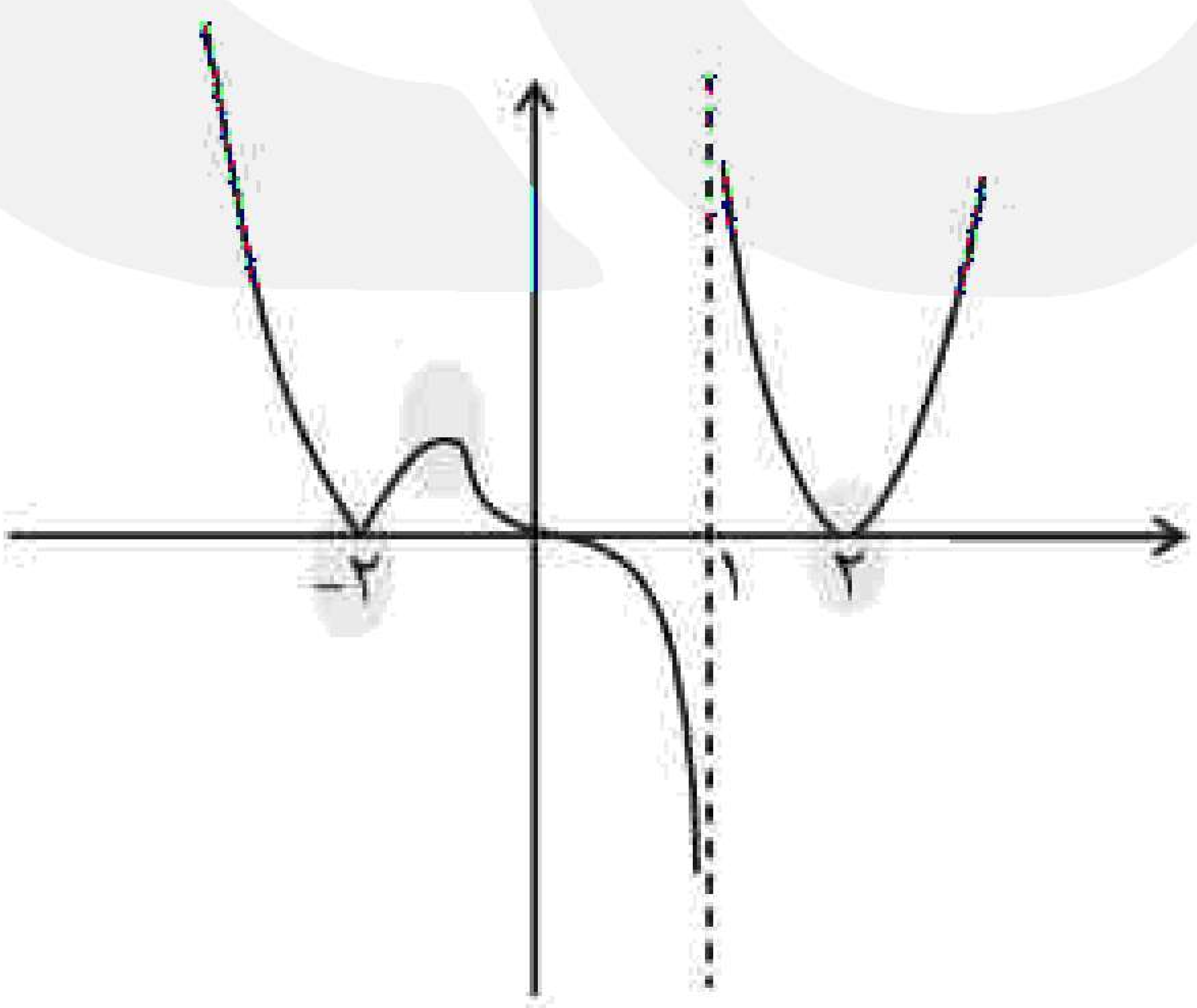
$f(۰)=۰$

$f\left(\frac{۴}{۳}\right)=\frac{۳۲}{۲۷}$

$f(۲)=۰$

ماکزیمم مطلق تابع $\frac{۳۲}{۲۷}$ است.

۵- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. به خاطر عامل $|x-۲|$ و $|x+۲|$ در ۲ و ۲- گوشه داریم. به خاطر عامل $x^۳$ در $x=۰$ فرم گُر داریم. به خاطر عامل $\frac{۱}{x-۱}$ در $x=۱$، حدّ بی‌نهایت داریم. با توجه به نمودار، تابع ۳ تا اکسترمم دارد.



۶- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. از تابع مشتق می‌گیریم.

$$f'(x) = \frac{(۲x + m)(x - ۱) - (x^۲ + mx + ۲)}{(x - ۱)^۲} = \frac{x^۲ - ۲x - m - ۲}{(x - ۱)^۲} = ۰$$

معادلهٔ بالا نباید ریشه داشته باشد یا باید ریشهٔ مضاعف داشته باشد.

$$\Delta \le ۰ \Rightarrow (-۲)^۲ - ۴(۱)(-m - ۲) \le ۰ \xrightarrow{\div ۴} ۱ - (-m - ۲) \le ۰ \Rightarrow ۱ + m + ۲ \le ۰ \Rightarrow m \le -۳$$

۷- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. دو حالت درنظر می‌گیریم:

$$۱)\ x \ge a \Rightarrow y = \frac{x^۲ - ax}{x - ۲a} \Rightarrow y' = \frac{x^۲ - ۴ax + ۲a^۲}{(x - ۲a)^۲}$$

$$y' = ۰ \Rightarrow x^۲ - ۴ax + ۲a^۲ = ۰ \Rightarrow x = \left(۲ \pm \sqrt{۲}\right)a$$

$$x \ge a \Rightarrow x = \left(۲ + \sqrt{۲}\right)a$$

$$۲)\ x < a$$

به طور مشابه طول اکسترمم نسبی برابر $\left(۲ - \sqrt{۲}\right)a$ است و چون خود $x = a$ نیز بحرانی و اکسترمم نسبی است؛ پس:

$$x_۱ + x_۲ + x_۳ = \left(۲ + \sqrt{۲} + ۲ - \sqrt{۲} + ۱\right)a = ۵a \Rightarrow ۵a = ۱۰ \Rightarrow a = ۲ \Rightarrow \left[\frac{۴a}{۳}\right] = ۲$$

۸- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ابتدا شرط $f'(۵) = ۰$ را بررسی می‌کنیم.

$$f'(x) = ۱ - \frac{a}{۲\sqrt{b - x}}$$

$$f'(۵) = ۰ \Rightarrow ۲\sqrt{b - ۵} = a \Rightarrow \sqrt{b - ۵} = \frac{a}{۲} \quad (۱)$$

از طرفی $f(۵) = ۷$ است؛ پس:

$$۵ + a\sqrt{b - ۵} = ۷ \xrightarrow{(۱)} ۵ + a\left(\frac{a}{۲}\right) = ۷ \Rightarrow a^۲ = ۴ \xrightarrow{a > ۰} a = ۲ \Rightarrow b = ۶ \Rightarrow ab = ۱۲$$

۹- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$f'(x) = (x - ۲)^۲ + ۲(x - ۲)(x + ۷) = (x - ۲)(x - ۲ + ۲x + ۱۴) = (x - ۲)(۳x + ۱۲)$$

$$f' = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۲ \Rightarrow y = ۰ \\ x = -۴ \Rightarrow y = ۱۰۸ \end{cases}$$

اگر نمودار را k واحد به سمت پایین انتقال دهیم عرض نقاط اکسترمم $۰ - k$ و $۱۰۸ - k$ خواهد بود ولی طول نقاط بحرانی عوض نمی‌شود؛ پس:

$$۱۰۸ - k + (-k) = ۲ + (-۴) \Rightarrow k = ۵۵$$

۱۰- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ضابطهٔ F به صورت $f(x)=\sqrt{۴-x}$ است. فرض کنید $B(x\,,\,y)$ باشد.

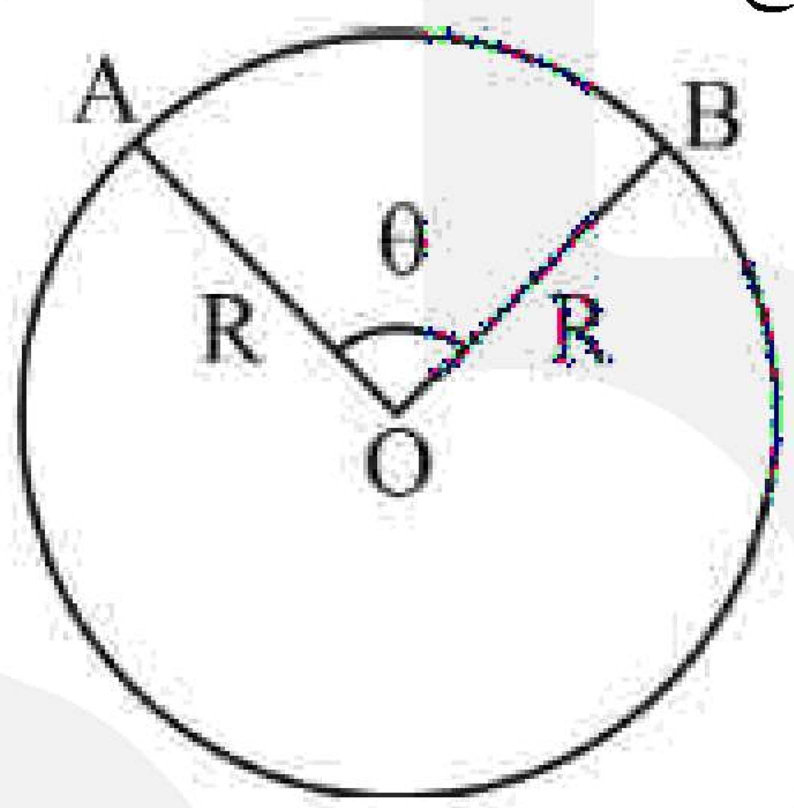
$$S = xy = x\sqrt{۴-x}$$

$$S' = \sqrt{۴-x} - \frac{x}{۲\sqrt{۴-x}} = \frac{۸-۳x}{۲\sqrt{۴-x}}$$

$$S' = ۰ \Rightarrow x = \frac{۸}{۳} \Rightarrow y = \sqrt{۴-x} = \frac{۲}{\sqrt{۳}}$$

$$S_{BCD} = \frac{۱}{۲}(۴-x_C)\times y_B = \frac{۱}{۲}\left(۴-\frac{۸}{۳}\right)\times\frac{۲}{\sqrt{۳}} = \frac{۴}{۳\sqrt{۳}}$$

۱۱- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

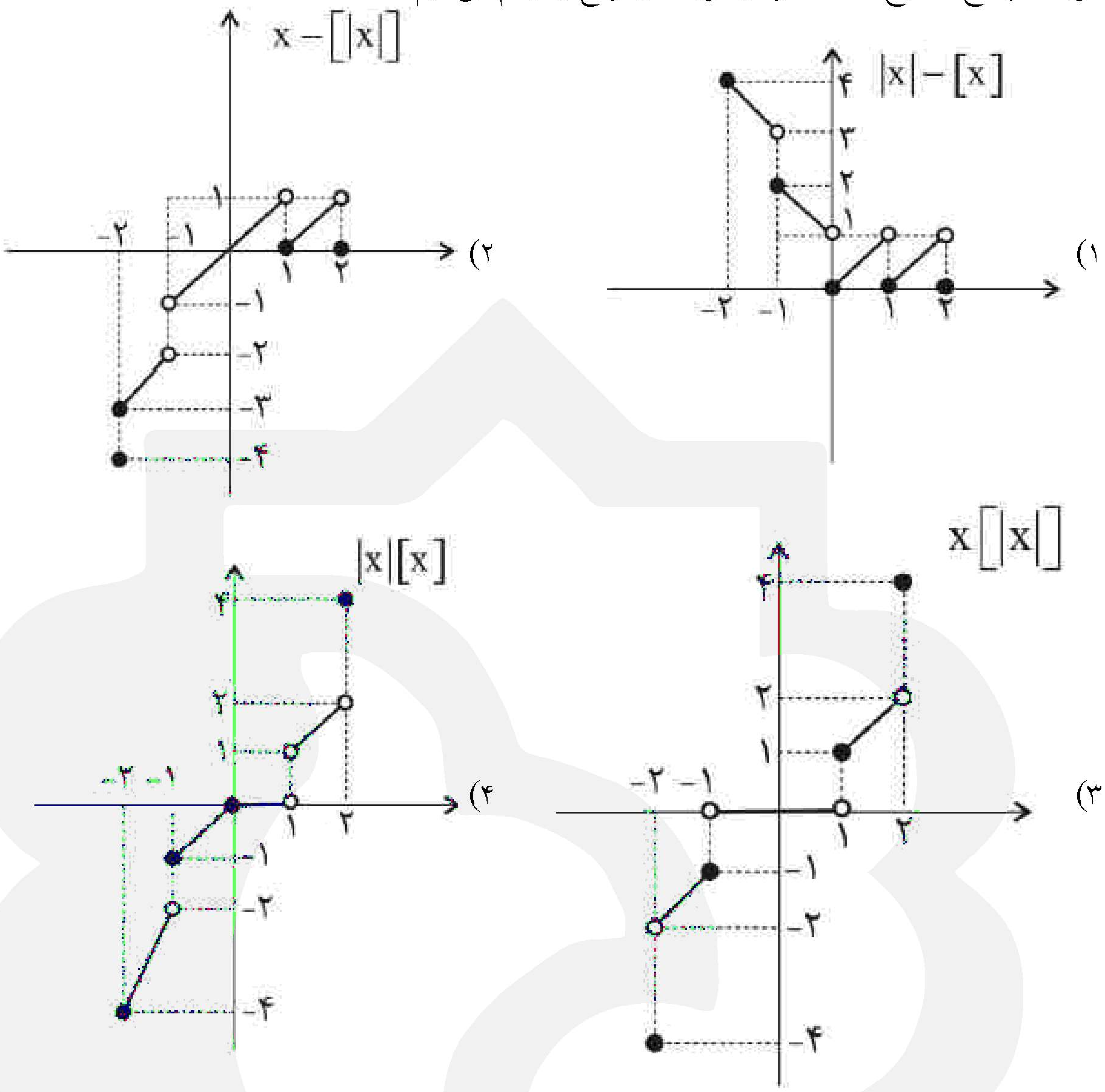


$$\begin{cases} OA + OB + \overset{\frown}{AB} = ۲۰۰ \\ ۲R + R\theta = ۲۰۰ \end{cases}$$

$$S = \frac{۱}{۲}R^{۲}\theta = \frac{۱}{۲}R^{۲}\left(\frac{۲۰۰-۲R}{R}\right) = \frac{۱}{۲}\left(۲۰۰R-۲R^{۲}\right)$$

$$S' = ۰ \Rightarrow ۲۰۰-۴R = ۰ \Rightarrow R = ۵۰$$

۱۲- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. نمودار هریک از توابع را رسم می‌کنیم.



گزینه‌های ۱، ۳ و ۴ هم ماکزیمم مطلق و هم مینیمم مطلق دارند ولی گزینهٔ ۲ ماکزیمم مطلق ندارد.

«بانک سوال یاوران دانش»

۱۳- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. باید y' در این بازه مثبت باشد.

$$y' = \sqrt{۳k - x} - \frac{x}{۲\sqrt{۳k - x}} = \frac{۶k - ۳x}{۲\sqrt{۳k - x}}$$

$$y' > ۰ \Rightarrow ۶k - ۳x > ۰ \Rightarrow x < ۲k \Rightarrow ۲k \le ۱۲ \Rightarrow k \le ۶$$

۱۴- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. کافی است، k برابر $\max$ تابع $y=\frac{۹}{x-۲}-\frac{۱}{x}$ در این بازه باشد.

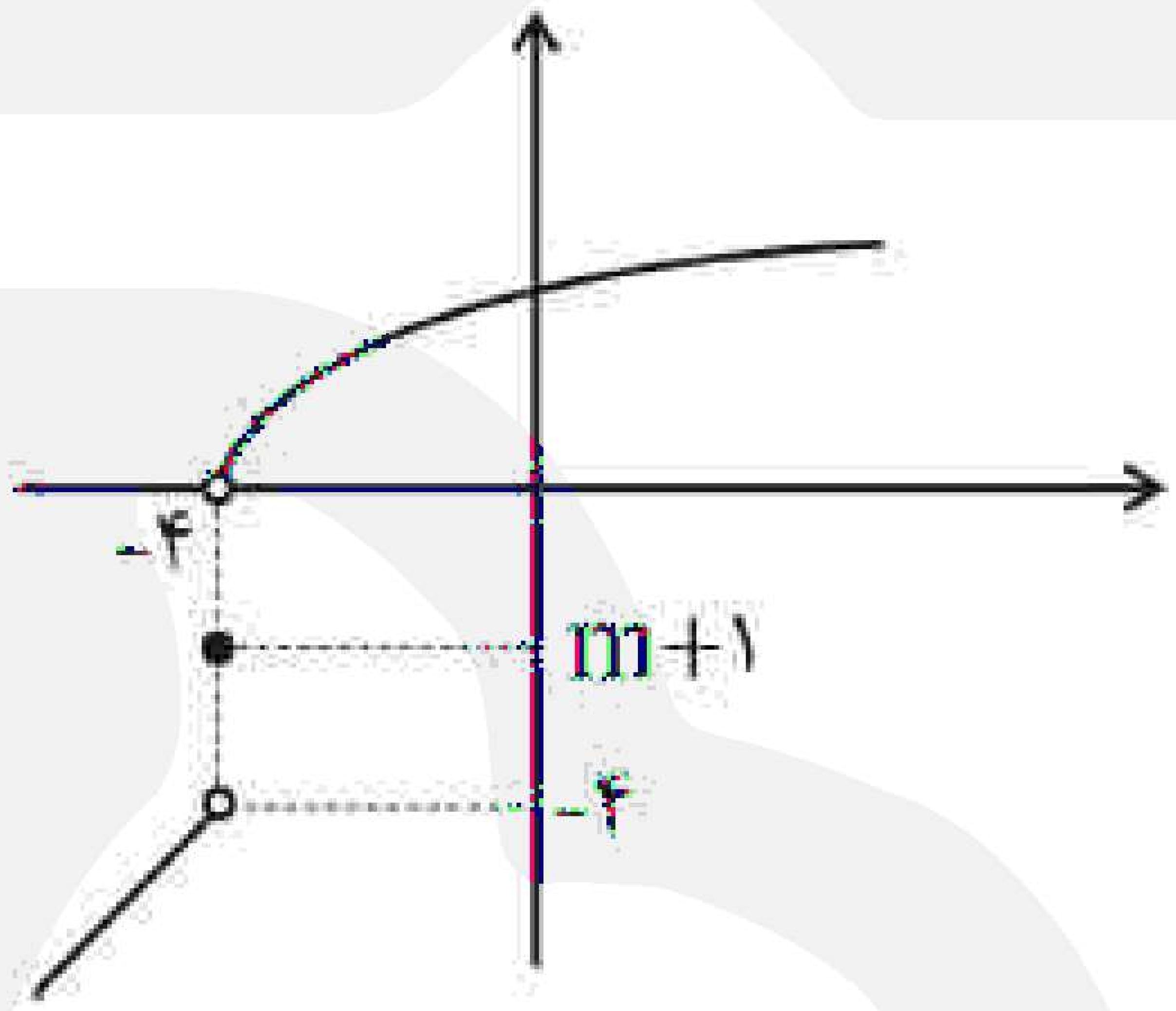
$$y'=\frac{-۹}{(x-۲)^۲}+\frac{۱}{x^۲}\Rightarrow y'=۰\Rightarrow\frac{۹}{(x-۲)^۲}=\frac{۱}{x^۲}\Rightarrow\frac{۳}{|x-۲|}=\frac{۱}{|x|}$$

$$\xrightarrow{۰<x<۲}\frac{۳}{۲-x}=\frac{۱}{x}$$

$$\Rightarrow ۳x=۲-x\Rightarrow x=\frac{۱}{۲}\Rightarrow y=\frac{۹}{-\frac{۳}{۲}}-\frac{۱}{\frac{۱}{۲}}\Rightarrow y=-۸\Rightarrow$$

پس: $k=\max=-۸$ است.

۱۵- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. نمودار تابع را رسم می‌کنیم.



برای آنکه فاقد ماکزیمم و مینیمم نسبی باشد، باید $۰\leq m+۱\leq -۴$ باشد؛ پس $-۵\leq m\leq -۱$ است. مقادیر صحیح قابل قبول برای m برابر ۱-، ۲-، ۳-، ۴- و ۵- است که جمع آن‌ها برابر ۱۵- است.

۱۶- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. دو حالت درنظر می‌گیریم:

$$۱)\ ۰\leq x\leq ۱\Rightarrow y=۱-x+\sqrt{x}\Rightarrow y'=-۱+\frac{۱}{۲\sqrt{x}}\xrightarrow{y'=۰}۲\sqrt{x}=۱\Rightarrow x=\frac{۱}{۴}$$

$$۲)\ x>۱\Rightarrow y=x-۱+\sqrt{x}\Rightarrow y'=۱+\frac{۱}{۲\sqrt{x}}\Rightarrow y'>۰$$

جدول تعیین علامت y' به صورت مقابل است:

در بازهٔ $\left[\frac{۱}{۴},۱\right]$ اکیداً نزولی است؛ پس $b-a=\frac{۳}{۴}$ است.

۱۷- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ریشه‌های داخل قدرمطلق، نقاط بحرانی‌اند یعنی ۱±. حال سایر نقاط بحرانی را پیدا می‌کنیم.

$$f(x) = \pm\left(x^3 - x\right)$$

$$f'(x) = \pm\left(3x^2 - 1\right) \xrightarrow{f' = 0} x = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$$

پس نقاط بحرانی به‌ترتیب برابر ۱-، $-\frac{\sqrt{3}}{3}$، $\frac{\sqrt{3}}{3}$ و ۱ است و حداکثر b برابر ۱ است.

۱۸- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$f(x) = -x^3 + 3ax^2 + b \Rightarrow f'(x) = -3x^2 + 6ax$$

اولاً: نقطه $A(-1 , 1)$ در ضابطه تابع f صدق می‌کند:

$$f(-1) = 1 \Rightarrow 1 + 3a + b = 1 \Rightarrow 3a + b = 0 \quad (1)$$

ثانیاً: نقطه $A(-1 , 1)$ به عنوان نقطه اکسترمم نسبی و بحرانی، مشتق تابع f را صفر می‌کند:

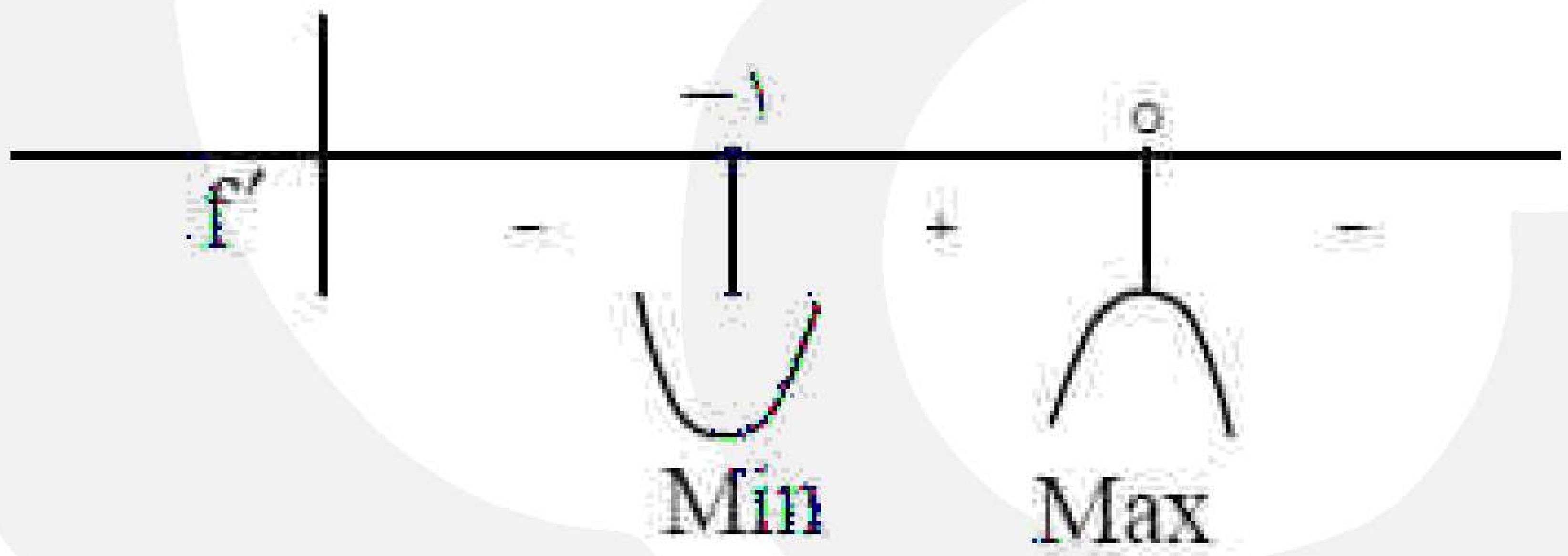
$$f'(-1) = 0 \Rightarrow -3 - 6a = 0 \Rightarrow a = \frac{-1}{2}$$

با جایگذاری $a = -\frac{1}{2}$ در رابطه ۱ داریم: $b = \frac{3}{2}$

امّا دقت کنید! تا اینجا متوجه شدیم که به ازای مقادیر به دست آمده برای a و b، نقطه A اکسترمم نسبی (مینیمم نسبی یا ماکزیمم نسبی) تابع f است. حالا باید مطمئن شویم که این نقطه، ماکزیمم نسبی است. کافی است جدول تعیین علامت f' را رسم کنیم:

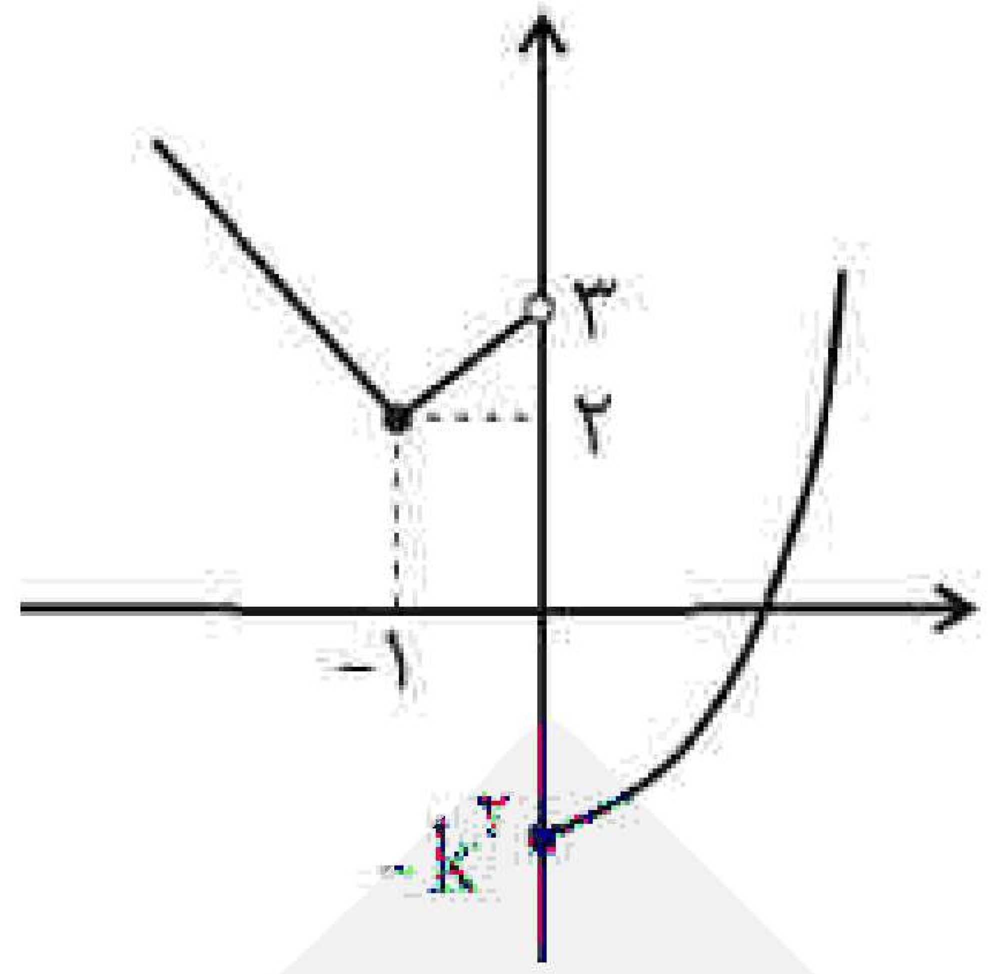
$$f'(x) = -3x^2 + 6ax \xrightarrow{a = \frac{-1}{2}} f'(x) = -3x^2 - 3x = -3x(x + 1)$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0 , 1$$



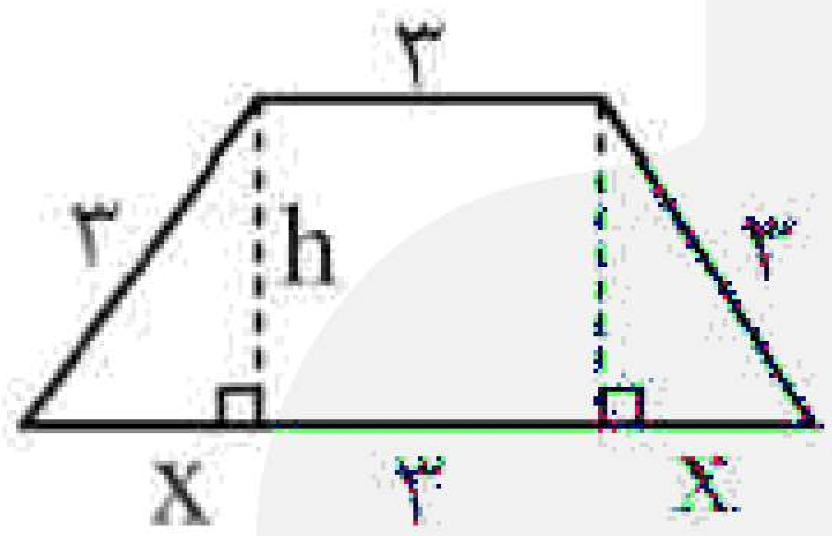
پس $x = -1$ طول نقطه مینیمم نسبی است، نه ماکزیمم نسبی و جواب، نشدنی است.

۱۹- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. نمودار تابع را رسم می‌کنیم:



همانطور که می‌بینید، مستقل از مقدار k، تابع در $x = -۱$ و $x = ۰$ دارای مینیمم نسبی است.

۲۰- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. شکل مسئله را ببینید:



تابع هدف : $S = \dfrac{(۳ + (۳ + ۲x)) \times h}{۲} = (۳ + x)h$

برای تک متغیره کردن این تابع، با استفاده از فیثاغورس داریم:

$$x^۲ + h^۲ = ۹ \Rightarrow h^۲ = ۹ - x^۲ \Rightarrow h = \sqrt{۹ - x^۲}$$

پس:

$$s = (۳ + x)\sqrt{۹ - x^۲}$$

نقاط بحرانی این تابع را به دست می‌آوریم:

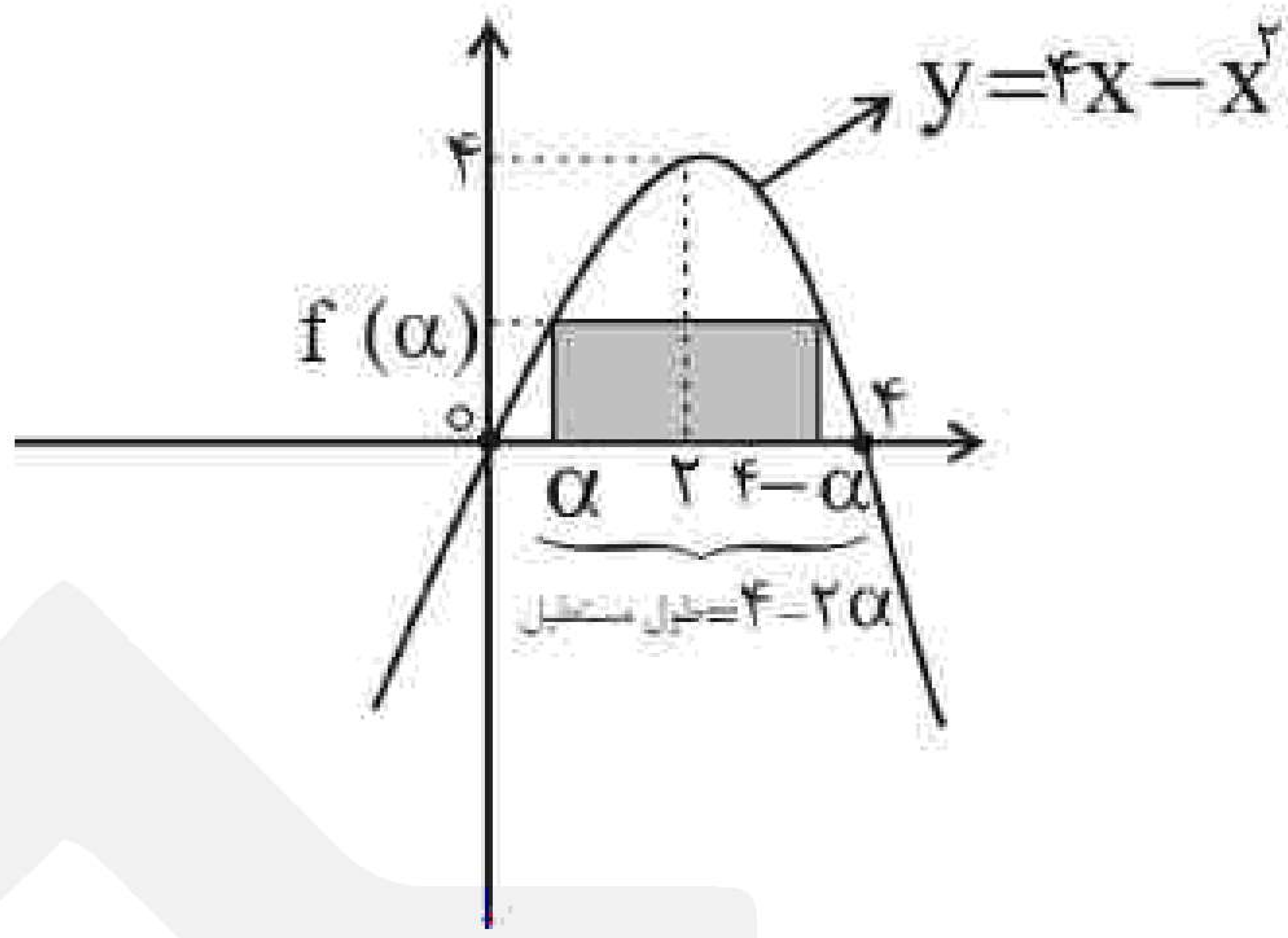
$$s' = (۱)\sqrt{۹ - x^۲} + \left(\frac{-۲x}{۲\sqrt{۹ - x^۲}}\right)(۳ + x) = ۰ \Rightarrow \sqrt{۹ - x^۲} = \frac{x^۲ + ۳x}{\sqrt{۹ - x^۲}}$$

$$\Rightarrow ۹ - x^۲ = x^۲ + ۳x \Rightarrow ۲x^۲ + ۳x - ۹ = ۰ \Rightarrow x = \begin{cases} -۳ & \text{غیرقابل قبول} \\ \frac{۳}{۲} \end{cases}$$

با جایگذاری $x = \frac{۳}{۲}$ در تابع S داریم:

$$S = (۳ + x)\sqrt{۹ - x^۲} \xrightarrow{x = \frac{۳}{۲}} = \frac{۹}{۲}\sqrt{\frac{۲۷}{۴}} = \frac{۹}{۲} \times \frac{۳}{۲}\sqrt{۳} = \frac{۲۷}{۴}\sqrt{۳} = ۶/۷۵\sqrt{۳}$$

۲۱- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. مساحت مستطیل هاشورخورده را برحسب α به صورت زیر بیان می‌کنیم:



$$S(\alpha) = ۲(۲ - \alpha)\left(۴\alpha - \alpha^{۲}\right) \; ; \; ۰ < \alpha < ۲$$

$$S'(\alpha) = ۶\alpha^{۲} - ۲۴\alpha + ۱۶ = ۰$$

$$۳\alpha^{۲} - ۱۲\alpha + ۸ = ۰$$

$$\alpha = \frac{۱۲ \pm ۴\sqrt{۳}}{۶} = ۲ \pm \frac{۲\sqrt{۳}}{۳}$$

$$\xrightarrow{\text{چون } ۰ < \alpha < ۲} \alpha = ۲ - \frac{۲\sqrt{۳}}{۳}$$

$$\Rightarrow S(\alpha) = ۲ \times \frac{۲\sqrt{۳}}{۳} \times \frac{۸}{۳} = \frac{۳۲\sqrt{۳}}{۹}$$

بنابراین بیشترین مساحت مستطیل ۳۲ برابر $\frac{\sqrt{۳}}{۹}$ است.

۲۲- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. این تابع در $x = -۱$ مشتق ناپذیر است پس:

$$(-۱)^{۲} + a(-۱) + b = ۰ \Rightarrow -a + b = -۱$$

از طرفی مقدار $x^{۲} + ax + b$ در $x = ۱$ نیز باید برابر صفر باشد.

$$(۱)^{۲} + a(۱) + b = ۰ \Rightarrow a + b = -۱$$

با حل دستگاه حاصل $a = ۰$ و $b = -۱$ می‌شوند.

$$f(x) = (x - ۱)\left|x^{۲} - ۱\right| = \begin{cases} (x - ۱)\left(x^{۲} - ۱\right) = (x - ۱)^{۲}(x + ۱) & x > ۱ \text{ یا } x < -۱ \\ -(x - ۱)\left(x^{۲} - ۱\right) = -(x - ۱)^{۲}(x + ۱) & -۱ \leq x \leq ۱ \end{cases}$$

از تابع مشتق می‌گیریم و جدول تعیین علامت مشتق را می‌یابیم:

$$f'(x) = \begin{cases} ۲(x - ۱)(x + ۱) + (x - ۱)^{۲} = ۰ & x > ۱ \text{ یا } x < -۱ \\ -۲(x - ۱)(x + ۱) - (x - ۱)^{۲} = ۰ & -۱ < x < ۱ \end{cases}$$

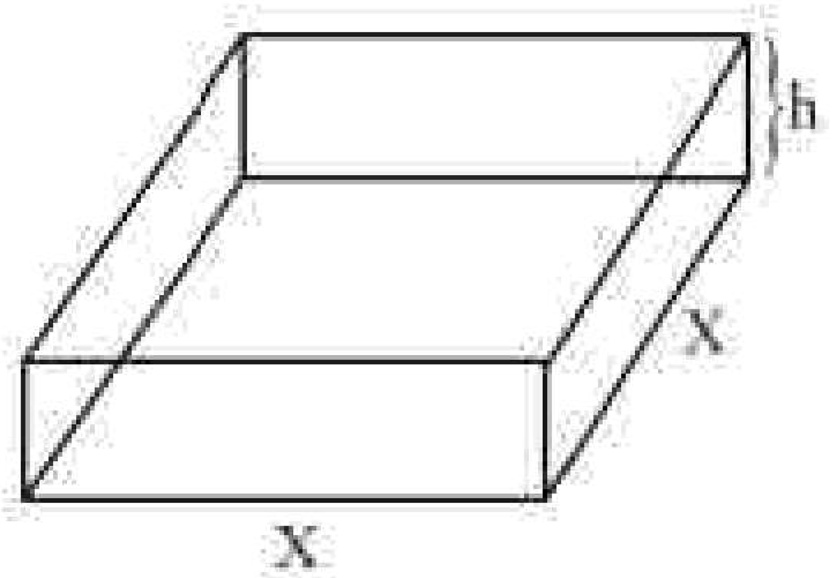
ریشه‌های مشتق $x = ۱$ و $x = -\frac{۱}{۳}$ هستند.

x		-۱		$\frac{-۱}{۳}$		۱	
$f'(x)$	+	‖	−	۰	+	۰	+
	↗		↘		↗		↗

تابع در بازه‌ی $\left[-\frac{۱}{۳}, ۱\right]$ اکیداً صعودی است.

«بانک سوال یاوران دانش»

۲۳- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.



$$V = x^{۲}h = ۴ \Rightarrow h = \frac{۴}{x^{۲}} \quad (۱)$$

مساحت کل ورقه فلزی مصرفی برای مساحت جعبه درباز $\boxed{S = x^{۲} + ۴xh}$

$$S = x^{۲} + ۴x\left(\frac{۴}{x^{۲}}\right)$$

$$S = x^{۲} + \frac{۱۶}{x}$$

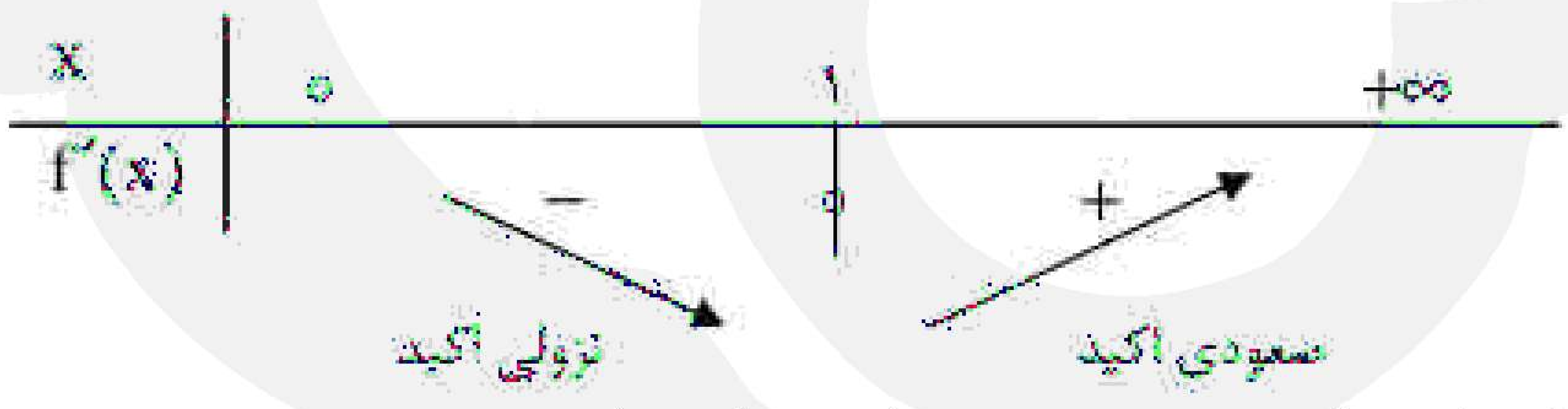
$$S' = ۲x - \frac{۱۶}{x^{۲}} = ۰ \Rightarrow x^{۳} = ۸ \Rightarrow x = ۲\ ,\ h = ۱$$

$$S_{min} = ۲^{۲} + ۴(۲)(۱) = ۱۲$$

۲۴- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$f(x) = \left(\frac{x - ۱}{\sqrt{x}}\right)^{۲} = \frac{(x - ۱)^{۲}}{x} \text{ و } x > ۰$$

$$f'(x) = \frac{۲(x - ۱)\ x - ۱\ (x - ۱)^{۲}}{x^{۲}} = \frac{x^{۲} - ۱}{x۲۲} = ۰$$



بنابراین $f(x)$ در بازه $(۰,۱)$ اکیداً نزولی و در بازه‌ی $(۱,+\infty)$ اکیداً صعودی است.

۲۵- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$-۳ \leq x < -۲ \Rightarrow f(x) = x^{۳} + ۳x^{۲} \Rightarrow f'(x) = ۳x^{۲} + ۶x = ۰ \begin{cases} x = ۰ & \text{غ ق ق} \\ x = -۲ & \text{غ ق ق} \end{cases}$$

$$-۲ \leq x < -۱ \Rightarrow f(x) = x^{۳} + ۲x^{۲} \Rightarrow f'(x) = ۳x^{۲} + ۴x = ۰ \begin{cases} x = ۰ & \text{غ ق ق} \\ x = \frac{-۴}{۳} & \text{ق ق} \end{cases}$$

$$-۱ \leq x < ۰ \Rightarrow f(x) = x^{۳} + x^{۲} \Rightarrow f'(x) = ۳x^{۲} + ۲x = ۰ \begin{cases} x = ۰ & \text{غ ق ق} \\ x = \frac{-۲}{۳} & \text{ق ق} \end{cases}$$

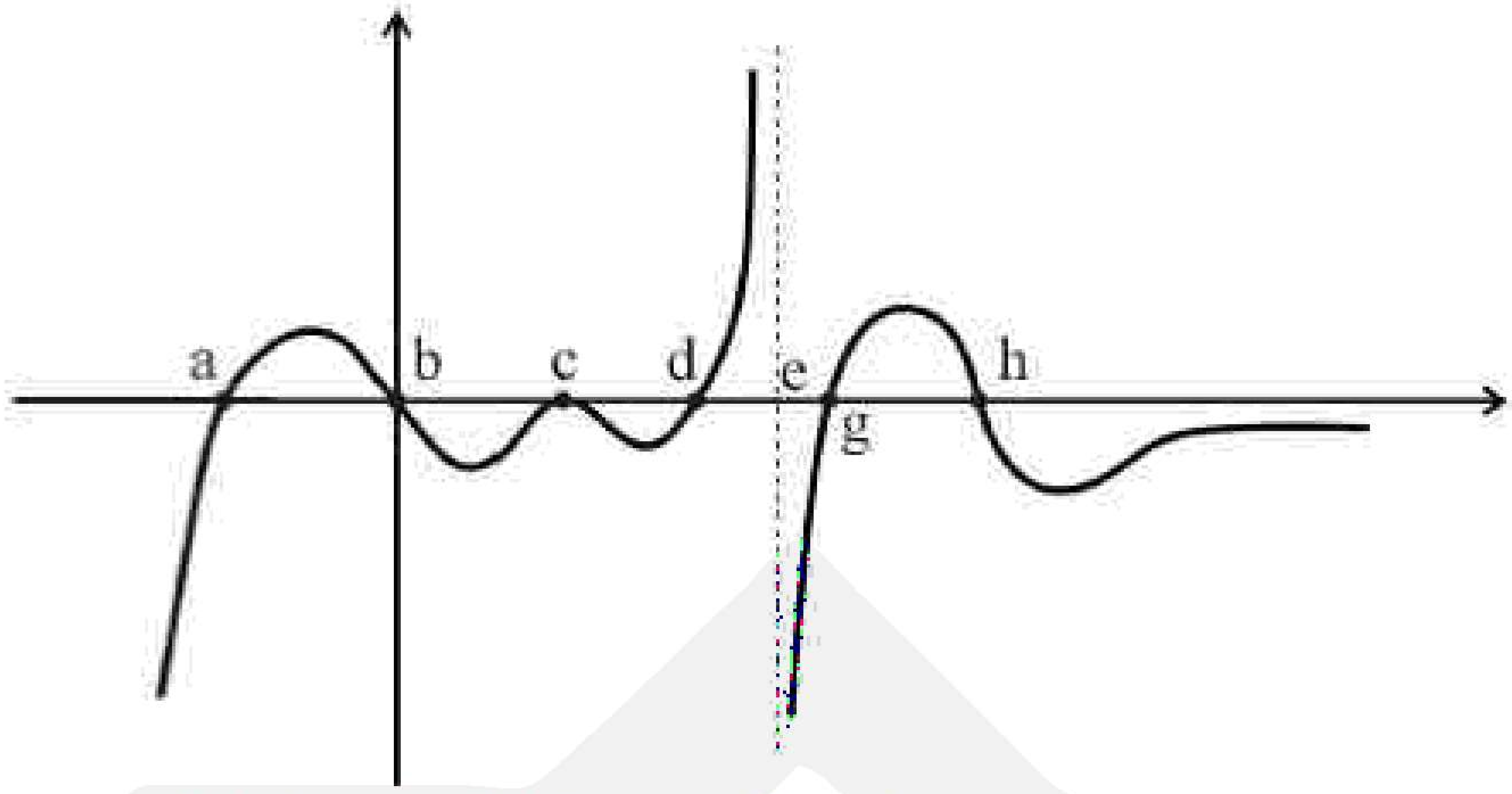
$$۰ \leq x < ۱ \Rightarrow f(x) = x^{۳} \Rightarrow f'(x) = ۳x^{۲} = ۰ \Rightarrow x = ۰ \quad \checkmark$$

$$-۱ \leq x < ۲ \Rightarrow f(x) = x^{۳} - x^{۲} \Rightarrow f'(x) = ۳x^{۲} - ۲x = ۰ \begin{cases} x = ۰ & \text{غ ق ق} \\ x = \frac{۲}{۳} & \text{غ ق ق} \end{cases}$$

$$۲ \leq x < ۳ \Rightarrow f(x) = x^{۳} - x^{۲} \Rightarrow f'(x) = ۳x^{۲} - ۴x = ۰ \begin{cases} x = ۰ & \text{غ ق ق} \\ x = \frac{۴}{۳} & \text{غ ق ق} \end{cases}$$

بنابراین تابع f در نقاط $x = ۰, \frac{-۲}{۳}, \frac{-۴}{۳}$ دارای $f' = ۰$ است و بحرانی هستند. همچنین در نقاط $x = -۲$، $x = -۱$ و $x = ۱$ و $x = ۲$ مشتق وجود ندارد $(f'_{-} \neq f'_{+})$. از طرفی $x = -۳$ و $x = ۳$ نقاط ابتدا و انتهای بازه‌ی و بحرانی‌اند. بنابراین تابع f در ۹ نقطه از این بازه بحرانی است.

۲۶- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

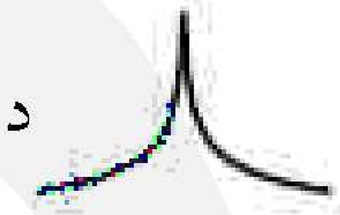


۱) f در $x = a$ دارای max نسبی است، زیرا $f'_{+}(a) > ۰$ و $f'(a) = ۰$ و $f'_{-}(a) < ۰$

۲) f در $x = b$ داری Min نسبی است، زیرا $f'_{+}(b) < ۰$ و $f'(b) = ۰$ و $f'_{-}(b) > ۰$

۳) f در $x = c$ اکسترمم ندارد، زیرا علیرغم $f'(c) = ۰$ تغییر علامت مشتق نداریم.

۴) f در $x = d$ دارای Max نسبی است، زیرا $f'_{+}(d) > ۰$ و $f'(d) = ۰$ و $f'_{-}(d) < ۰$

۵) f در $x = e$ نقطه بحرانی گوشه‌ای به صورت  دارد که Max نسبی است، زیرا $f'_{+}(e) = -\infty$ و $f'_{-}(e) = +\infty$ و f در این نقطه پیوسته است.

۶) f در $x = g$ دارای Max نسبی است، زیرا $f'_{+}(g) > ۰$ و $f'(g) = ۰$ و $f'_{-}(g) < ۰$

۷) f در $x = h$ دارای Min نسبی است، زیرا $f'_{+}(h) < ۰$ و $f'(h) = ۰$ و $f'_{-}(h) > ۰$

بنابراین تابع f در ۶ نقطه اکسترمم نسبی دارد.

۲۷- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. نقاط بحرانی تابع که f' در آن‌ها صفر می‌شود.

$$f'(x) = ۶x^{۲} - ۶x = ۰ \Rightarrow x = ۰ \,,\, x = ۱$$

$$\begin{cases} f(-۱) = k - ۵ \Rightarrow \text{مطلق } \min \\ f(۰) = k \\ f(۱) = k - ۱ \\ f(۲) = k + ۴ \Rightarrow \text{مطلق } \max \end{cases}$$

$$P(k) = \text{حاصلضرب اکسترمم های مطلق} = (k - ۵)(k + ۴) = k^{۲} - k - ۲۰$$

این حاصلضرب، یک تابع درجه ۲ برحسب k است که کمترین مقدار آن در $k = \frac{۱}{۲}$ اتفاق می افتد:

$$P'(k) = ۰ \Rightarrow ۲k - ۱ = ۰ \Rightarrow k = \frac{۱}{۲} \Rightarrow P\left(\frac{۱}{۲}\right) = -۲۰/۲۵$$

۲۸- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

مینیمم نسبی $A(۲,۱)$ $\begin{cases} ۱ = ۲^۳ + b(۲)^۲ + d \Rightarrow ۴b + d = -۷ \\ f'(x) = ۰ \Rightarrow f'(x) = ۳x^۲ + ۲bx \Rightarrow ۳(۲)^۲ + ۲b(۲) = ۰ \end{cases}$

$$\boxed{b = -۳} \downarrow \boxed{d = ۵}$$

$f(x) = x^۳ - ۳x^۲ + ۵ \; ; \; [-۴ , ۴]$

$f'(x) = ۳x^۲ - ۶x = ۰ \Rightarrow ۳x(x-۲) = ۰ \begin{cases} x = ۰ \; , \; f(۰) = ۵ \\ x = ۲ \; , \; f(۲) = ۱ \end{cases}$

$f(-۴) = -۱۰۷$ مینیمم مطلق

$f(۴) = ۲۱$ ماکزیمم مطلق

x	-۴		۰		۲		۴
$f'(x)$		$+$		$-$		$+$	
$f(x)$	-۱۰۷	$\nearrow$	۵	$\searrow$	۱	$\nearrow$	۲۱

مجموع مقادیر ماکزیمم مطلق و نسبی $= ۲۱ + ۵ = ۲۶$

۲۹- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. مطابق قوانین فیزیک می‌دانیم که در حرکت با سرعت ثابت، زمان حرکت از رابطه $t = \frac{x}{V}$ به دست می‌آید که در آن x مسافت پیموده شده و V اندازه سرعت ثابت است.

زمان پیمودن مسیر $AB = t_۱ = \frac{۱۰۰ - x}{۴} \; ; \; ۰ \leq x \leq ۱۰۰$

زمان پیمودن مسیر $BC = t_۲ = \frac{\sqrt{x^۲ + (۲۵\sqrt{۳})^۲}}{۲}$

کل $t = t_۱ + t_۲ = \frac{۱۰۰ - x}{۴} + \frac{\sqrt{x^۲ + ۱۸۷۵}}{۲}$

$t' = -\frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۲} \times \frac{۲x}{۲\sqrt{x^۲ + ۱۸۷۵}} = ۰ \Rightarrow x = ۲۵$ متر

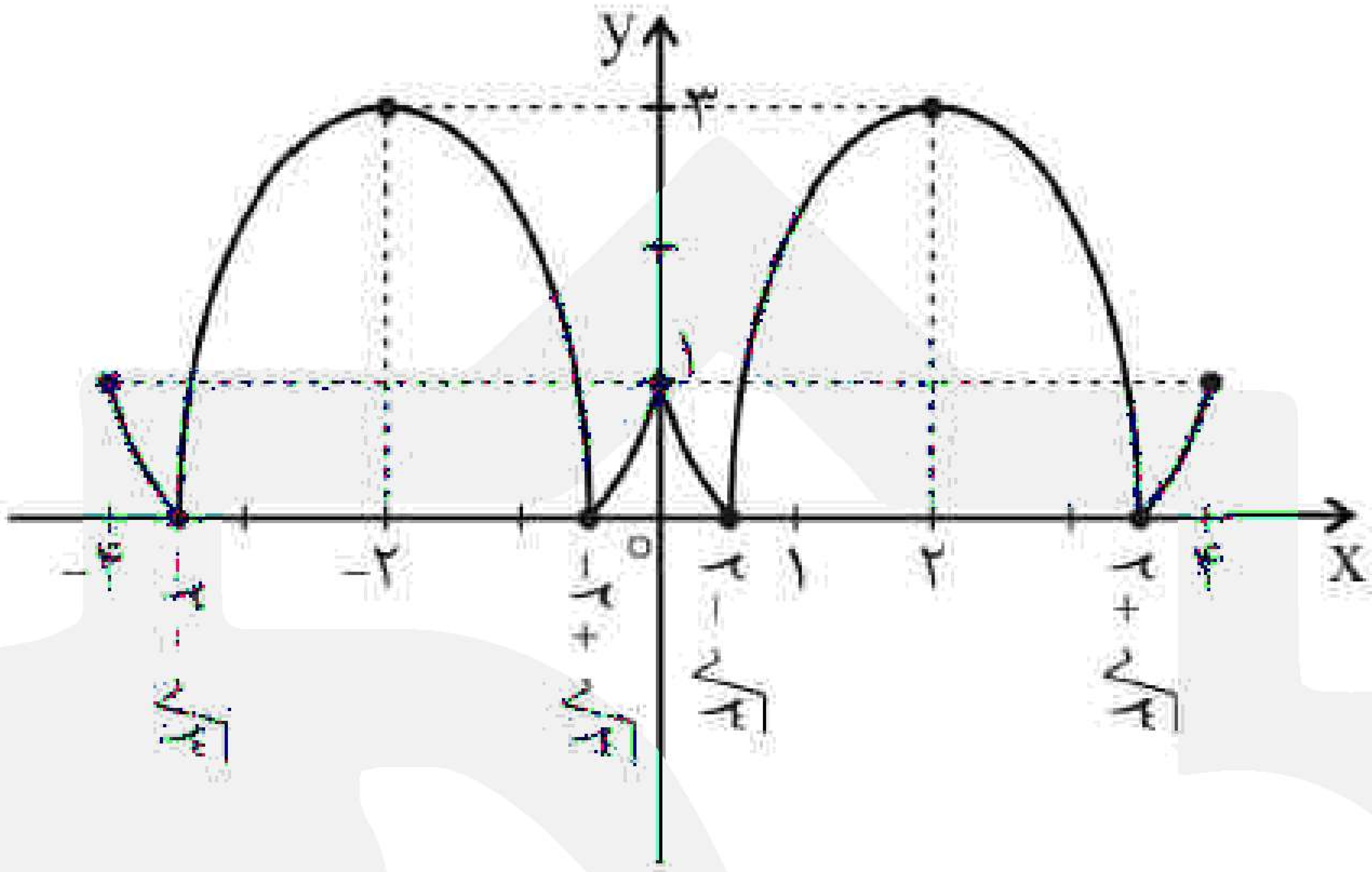
کل مینیمم $t = \frac{۷۵}{۴} + \frac{۵۰}{۲} = \frac{۱۷۵}{۴} = ۴۳/۷۵$ ثانیه

۳۰- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$x \geq 0 \Rightarrow f(x) = |x^2 - 4x + 1| \Rightarrow$ مشتق عبارت درون قدرمطلق $= 0 \Rightarrow 2x - 4 = 0 \Rightarrow x = 2$

$x < 0 \Rightarrow f(x) = |x^2 + 4x + 1| \Rightarrow$ مشتق عبارت درون قدرمطلق $= 0 \Rightarrow 2x + 4 = 0 \Rightarrow x = -2$

با رسم نمودار سهمی درون قدرمطلق و سپس اعمال قدرمطلق، نمودار نهایی تابع $f(x)$ در بازهٔ $[-4, 4]$ به صورت زیر است:



$x = -4$ بحرانی

$x = -2 - \sqrt{3}$ (نقطه گوشه ای) Min نسبی و مطلق، بحرانی

$x = -2$ Max نسبی و مطلق، بحرانی

$x = -2 + \sqrt{3}$ (نقطه گوشه ای) Min نسبی و مطلق، بحرانی

$x = 0$ (نقطه گوشه ای) Max نسبی و بحرانی

$x = 2 - \sqrt{3}$ (نقطه گوشه ای) Min نسبی و مطلق، بحرانی

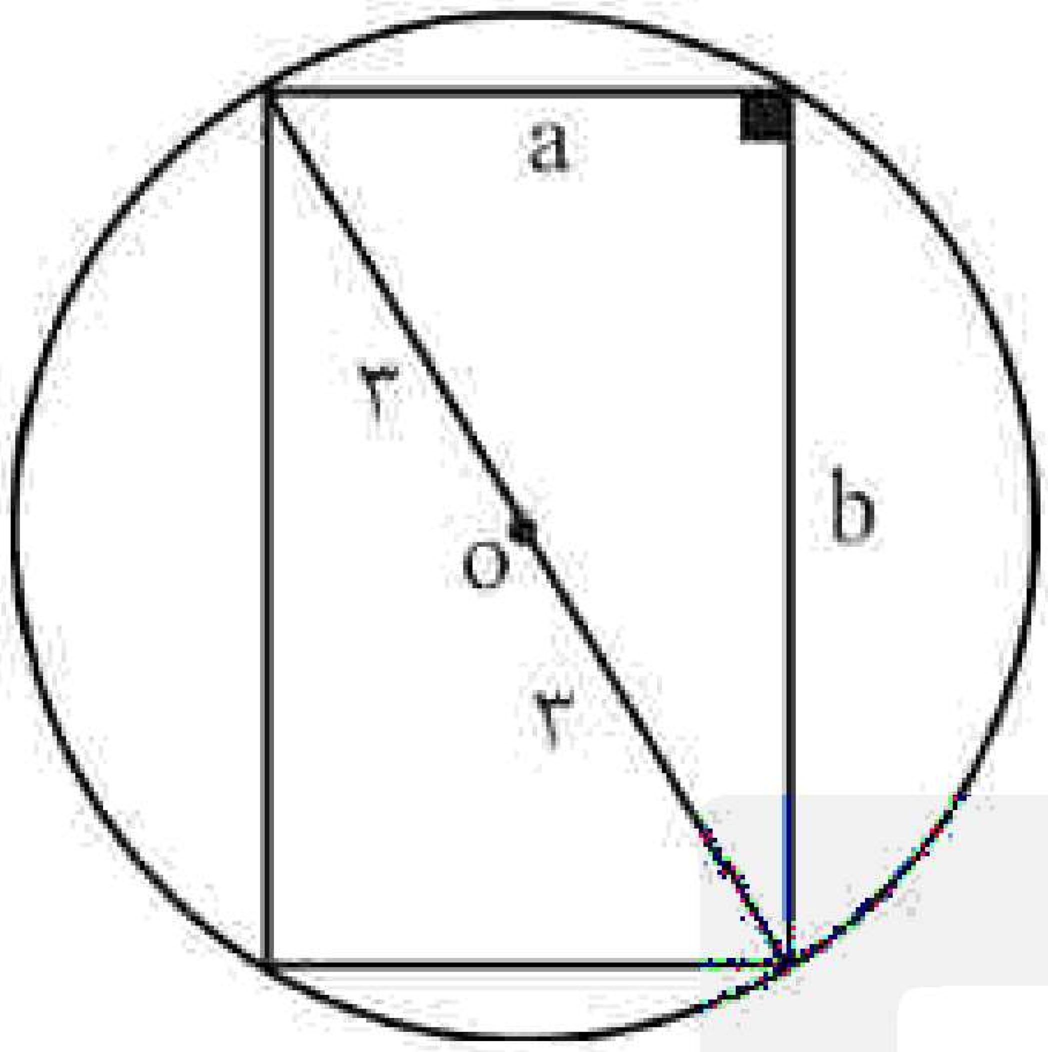
$x = 2$ Max نسبی و مطلق، بحرانی

$x = 2 + \sqrt{3}$ (نقطه گوشه ای) Min نسبی و مطلق و بحرانی

$x = 4$ بحرانی

$$\Rightarrow \begin{cases} m = 9 \\ n = 2 \\ p = 3 \\ q = 4 \\ r = 4 \\ s = 5 \end{cases} \Rightarrow m^2 + n^2 + p^2 + q^2 + r^2 + s^2 = 151$$

۳۱- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. مطابق شکل، مستطیل محاط در دایره با عرض a و طول b را حول طول آن یعنی b دوران می‌دهیم تا استوانه‌ای با شعاع قاعدهٔ a و ارتفاع b حاصل شود. می‌خواهیم حجم استوانه یعنی $V = \pi a^۲ b$ ماکزیمم شود. چون:



$$\left.\begin{array}{l} \text{محیط دایره} = ۶\pi = ۲\pi R \Rightarrow R = ۳ \\ \text{قطر دایره} = ۲R = ۶ \end{array}\right\} \Rightarrow a^۲ + b^۲ = ۳۶$$

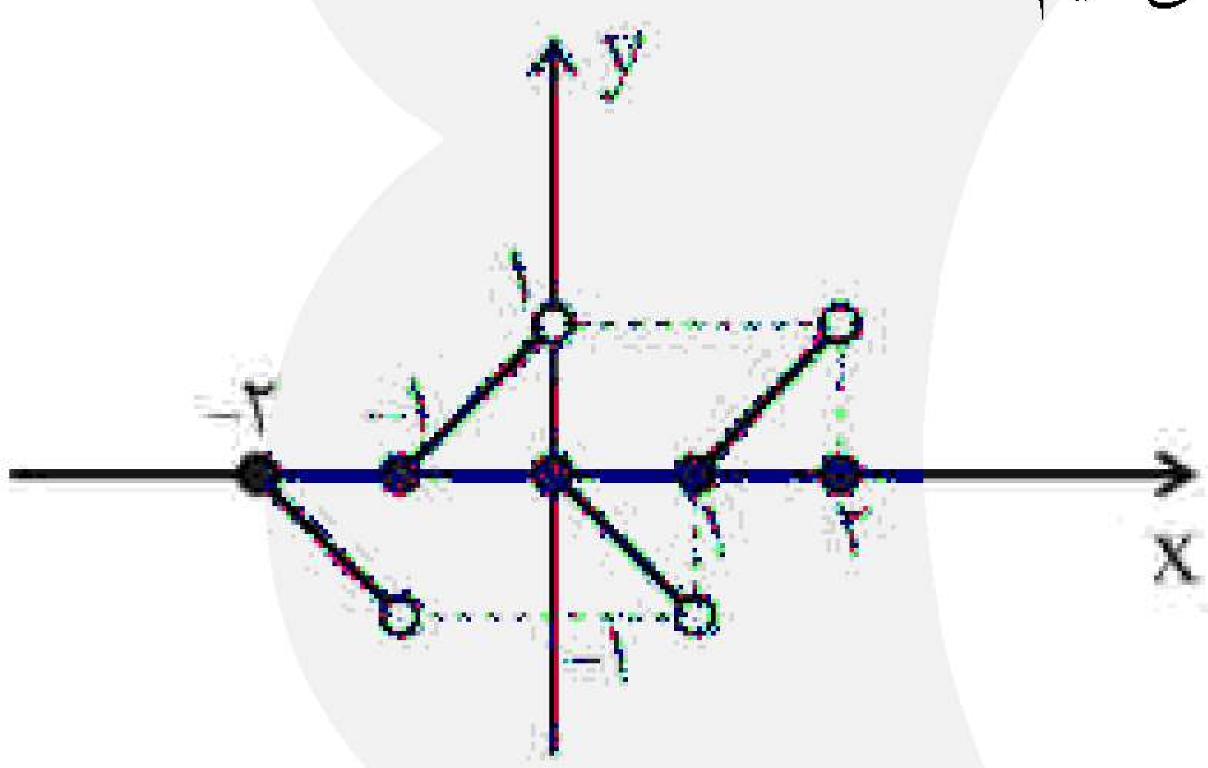
$$\Rightarrow a^۲ = ۳۶ - b^۲$$

$$V = \pi a^۲ b = \pi\left(۳۶ - b^۲\right)b \Rightarrow V = ۳۶\pi b - \pi b^۳$$

$$V'(b) = ۳۶\pi - ۳\pi b^۲ = ۰ \Rightarrow b^۲ = ۱۲ \begin{cases} b = ۲\sqrt{۳} \\ a = ۲\sqrt{۶} \end{cases}$$

مساحت مستطیل اولیه با شرط ماکزیمم بودن حجم استوانه حاصل $S_{\square} = a \times b = ۱۲\sqrt{۲}$

۳۲- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ابتدا نمودار تابع f را در بازهٔ [۲ , ۲-] رسم می‌کنیم:



$$-۲ \le x < -۱ \Rightarrow [x] = -۲ \Rightarrow y = -۲ - x$$
$$-۱ \le x < ۰ \Rightarrow [x] = -۱ \Rightarrow y = ۱ + x$$
$$۰ \le x < ۱ \Rightarrow [x] = ۰ \Rightarrow y = -x$$
$$۱ \le x < ۲ \Rightarrow [x] = ۱ \Rightarrow y = -۱ + x$$
$$x = ۲ \Rightarrow y = ۰$$

با توجه به نمودار، تابع f در این بازه، هیچ اکسترمم نسبی یا مطلق ندارد.

۳۳- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ابتدا دامنه تابع f را مشخص می‌کنیم:

$$۳۶ - x^{۲} \geq ۰ \Rightarrow -۶ \leq x \leq ۶$$

شرط اینکه تابع f در بازهٔ موردنظر صعودی اکید باشد آن است که $f'(x) > ۰$:

$$f'(x) = ۲ + \frac{-x}{\sqrt{۳۶ - x^{۲}}} = \frac{۲\sqrt{۳۶ - x^{۲}} - x}{\sqrt{۳۶ - x^{۲}}} > ۰$$

مخرج کسر تابع مشتق همواره مثبت است، بنابراین:

$$۲\sqrt{۳۶ - x^{۲}} - x > ۰ \Rightarrow ۲\sqrt{۳۶ - x^{۲}} > x$$

نامعادلهٔ فوق به ازای $-۶ \leq x \leq ۰$ برقرار است. به ازای $x \geq ۰$:

$$۴\left(۳۶ - x^{۲}\right) > x^{۲} \Rightarrow x^{۲} < \frac{۱۴۴}{۵} \Rightarrow ۰ \leq x \leq \frac{۱۲}{\sqrt{۵}}$$

چون تابع در $x = ۰$ پیوسته است و در نقطه $x = \frac{۱۲}{\sqrt{۵}}$ مقدار مشتق صفر می‌شود، بنابراین بازه $\left[-۶ , \frac{۱۲}{\sqrt{۵}}\right]$ بزرگترین بازه‌ای است که تابع f اکیداً صعودی است:

$$a = -۶ , b = \frac{۱۲}{\sqrt{۵}}$$

$$b\sqrt{۵} - a = \frac{۱۲}{\sqrt{۵}} \times \sqrt{۵} - (-۶) = ۱۲ + ۶ = ۱۸$$

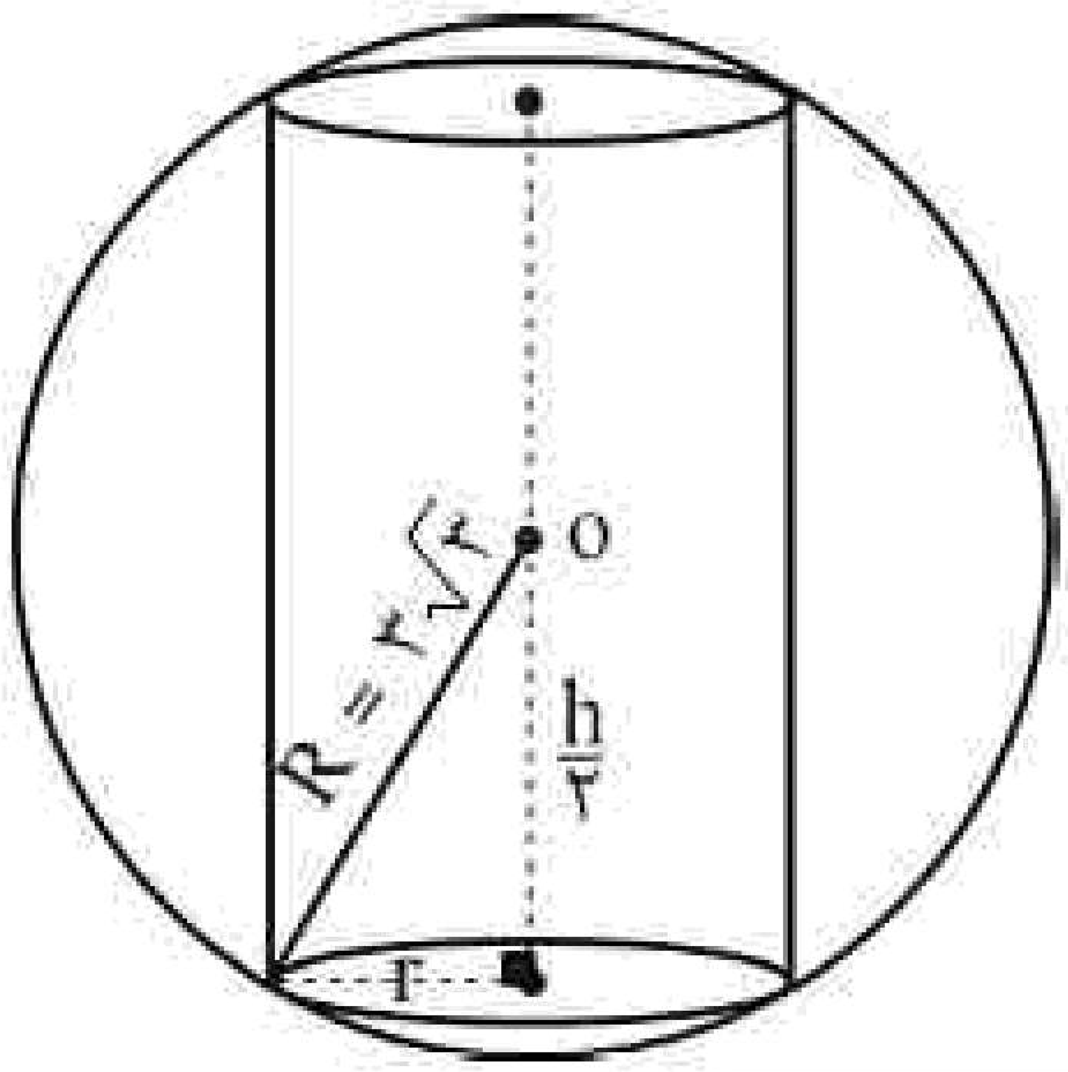
۳۴- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$f'(x) = ۳ax^{۲} + ۲bx + ۲a^{۲}$$

ماکزیمم نسبی $(۲ , ۱۶)$ $\begin{cases} f(۲) = ۱۶ \Rightarrow ۱۶ = ۸a + ۴b + ۴a^{۲} & (۱) \\ f'(۲) = ۰ \Rightarrow ۱۲a + ۴b + ۲a^{۲} = ۰ & (۲) \end{cases}$

$۱ , ۲ \Rightarrow a^{۲} - ۲a - ۸ = ۰$ $\begin{cases} a = -۲ , b = ۴ \Rightarrow a \times b = -۸ \\ a = ۴ \end{cases}$ غ ق ق (چون به ازای $a = ۴$ نقطه $(۲,۱۶)$ مینیمم نسبی می شود)

۳۵- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.



$$\left(۳\sqrt{۳}\right)^{۲} = r^{۲} + \frac{h^{۲}}{۴} \Rightarrow r^{۲} = ۲۷ - \frac{۱}{۴}h^{۲} \quad (۱)$$

$$V_{\text{استوانه}} = \pi r^{۲}.h = \pi\left(۲۷ - \frac{۱}{۴}h^{۲}\right).h$$

$$V_{\text{استوانه}(h)} = ۲۷\pi h - \frac{\pi}{۴}h^{۳} \ ; \ ۰ \le h \le ۶\sqrt{۳}$$

برای یافتن نقاط بحرانی تابع حجم استوانه در بازه $\left[۰ \,,\, ۶\sqrt{۳}\right]$ ریشه‌های مشتق را به دست می‌آوریم:

$$V'(h) = ۲۷\pi - \frac{۳\pi}{۴}h^{۲} = ۰ \Rightarrow h = ۶ \Rightarrow r^{۲} = ۱۸$$

$$V_{max} = \pi r^{۲}.h = \pi \times ۱۸ \times ۶ = ۱۰۸\pi$$

«بانک سوال یاوران دانش»

۳۶- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. نقاط $x = \pm ۴$ نقاط انتهایی بازه هستند (۲ نقطه بحرانی) برای یافتن اکسترمم‌های مطلق و نسبی باید تابع مشتق را بررسی کنیم:

$$f(x) = |x^۲ - x - ۶| = \begin{cases} x^۲ - x - ۶ \; ; \; x \leq -۲ \text{ یا } x \geq ۳ \\ -x + x + ۶ \; ; \; -۲ \leq x \leq ۳ \end{cases}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \begin{cases} ۲x - ۱ \; ; \; x < -۲ \text{ یا } x > ۳ \\ ۱ - ۲x \; ; \; -۲ < x < ۳ \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} f'_-(-۲) = -۵ \\ f'_+(-۲) = ۵ \end{array}\right\} \Rightarrow \text{ در } x = -۲ \text{ مشتق‌ناپذیر است (بحرانی) } f$$

$$\left.\begin{array}{l} f'_-(۳) = -۵ \\ f'_+(۳) = ۵ \end{array}\right\} \Rightarrow \text{ در } x = ۳ \text{ مشتق‌ناپذیر است (بحرانی) } f$$

$$f'\left(\frac{۱}{۲}\right) = ۰ \Rightarrow x = \frac{۱}{۲} \quad \text{بحرانی}$$

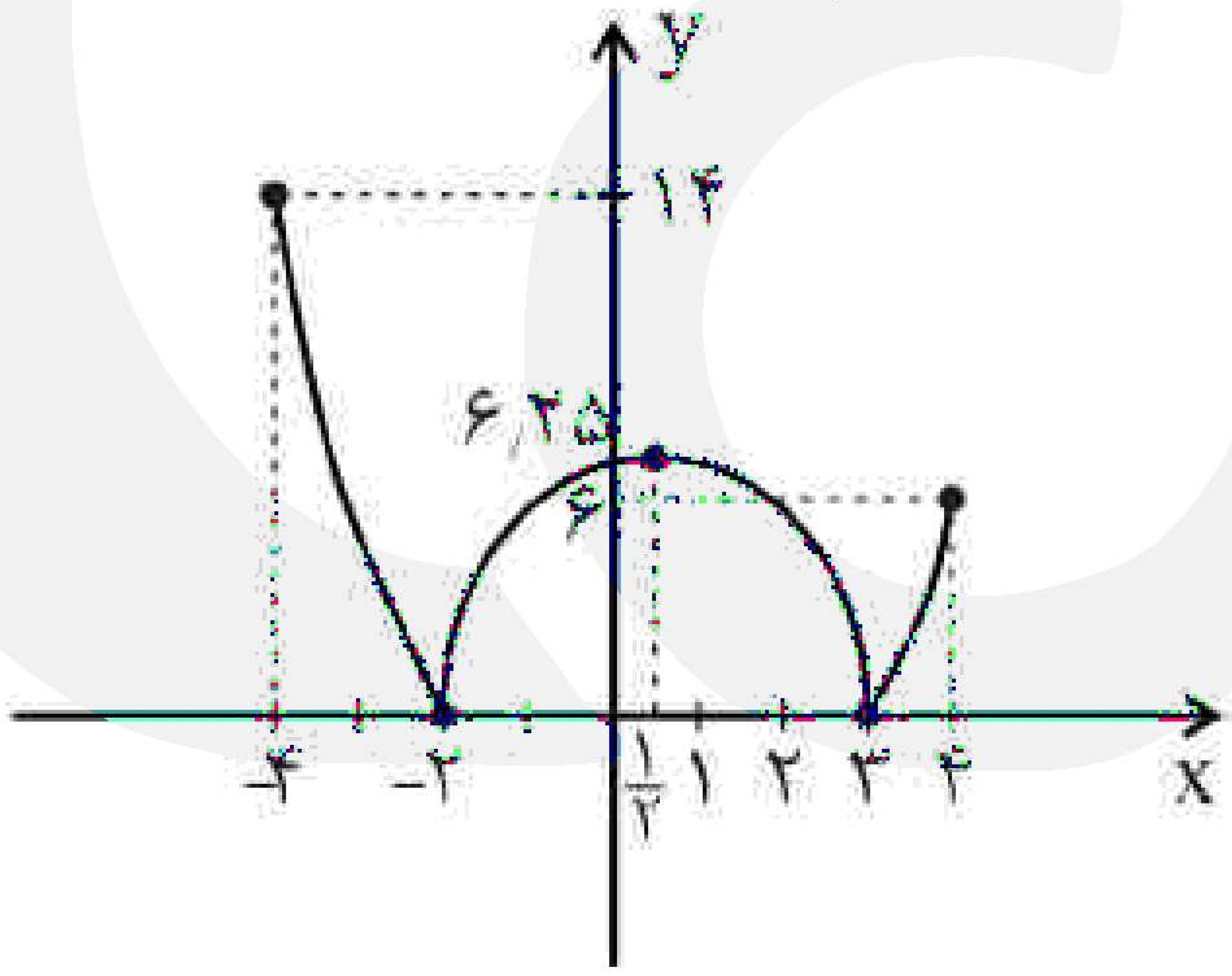
بنابراین: تابع f در ۵ نقطه $x = \pm ۴$ و $x = -۲$ و $x = \frac{۱}{۲}$ و $x = ۳$ بحرانی است. لذا $a = ۵$.

$$\underset{\text{max مطلق (بحرانی)}}{f(-۴) = ۴} \; , \; \underset{\text{min مطلق و نسبی (بحرانی)}}{f(-۲) = ۰} \; , \; \underset{\text{max نسبی}}{f\left(\frac{۱}{۲}\right) = ۶/۲۵} \; , \; \underset{\text{min مطلق و نسبی (بحرانی)}}{f(۳) = ۰} \; , \; \underset{\text{فقط بحرانی}}{f(۴) = ۶}$$

$a = ۵ , b = ۱ , c = ۲ , d = ۱ , e = ۲$ (بحرانی)

$a + ۲b + ۳c + ۴d + ۵e = ۵ + ۲(۱) + ۳(۲) + ۴(۱) + ۵(۲) = ۲۷$

نمودار نهایی تابع در بازهٔ $[-۴ , ۴]$ به صورت زیر است:



۳۷- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

دامنه تابع f : $\frac{۱}{۲}x^۲ - \frac{۱}{۴}x^۴ \geq ۰ \Rightarrow \underbrace{\frac{۱}{۴}x^۲}_{\text{همواره نامنفی}}(۲ - x^۲) \geq ۰$

$۲ - x^۲ \geq ۰ \Rightarrow x^۲ \leq ۲ \Rightarrow -\sqrt{۲} \leq x \leq \sqrt{۲} \Rightarrow D_f = [-\sqrt{۲}, \sqrt{۲}]$

نقاط ابتدا و انتهای بازهٔ بسته D_f خود بحرانی‌اند؛ زیرا در $x = \sqrt{۲}$ مشتق راست و در $x = -\sqrt{۲}$ مشتق چپ وجود ندارد.

$$f(x) = \left(\frac{۱}{۲}x^۲ - \frac{۱}{۴}x^۴\right)^{\frac{۱}{۴}} \Rightarrow f'(x) = \frac{۱}{۴}\left(\frac{۱}{۲}x^۲ - \frac{۱}{۴}x^۴\right)^{-\frac{۳}{۴}}(x - x^۳)$$

$$f'(x) = \frac{x - x^۳}{۴\sqrt[۴]{\left(\frac{۱}{۲}x^۲ - \frac{۱}{۴}x^۴\right)^۳}}$$

$\xrightarrow{\text{صورت} = ۰} x = ۰, x = ۱, x = -۱ \Rightarrow f' = ۰$

$\xrightarrow{\text{مخرج} = ۰} x = ۰, x = \sqrt{۲}, x = -\sqrt{۲} \Rightarrow$ f' وجود ندارد

با توجه به تعریف مشتق در $x = ۰$ به صورت:

$$f(۰) = \lim_{x \to ۰} \frac{\sqrt[۴]{\frac{۱}{۲}x^۲ - \frac{۱}{۴}x^۴} - ۰}{x - ۰} = \lim_{x \to ۰} \frac{\sqrt[۴]{x^۲\left(\frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۴}x^۲\right)}}{x}$$

حاصل این حدّ $f'_+(۰) = +\infty$ و $f'_-(۰) = -\infty$ و بنابراین نقطه بحرانی است. این تابع با این شرایط در پنج نقطه $\{-\sqrt{۲}, -۱, ۰, ۱, \sqrt{۲}\}$ بحرانی است.

۳۸- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. تابع f در بازه $[-۴, ۳]$ پیوسته و مشتق‌پذیر است:

$$f'(x) = x^۲ - ۲x - ۱۵ = ۰ \begin{cases} x = ۵ \quad \text{غ ق ق (در بازه نیست)} \\ x = -۳ \Rightarrow f(-۳) = ۳۴ \end{cases}$$

$f(-۴) = \frac{۸۹}{۳} \approx ۲۹/۶۷$

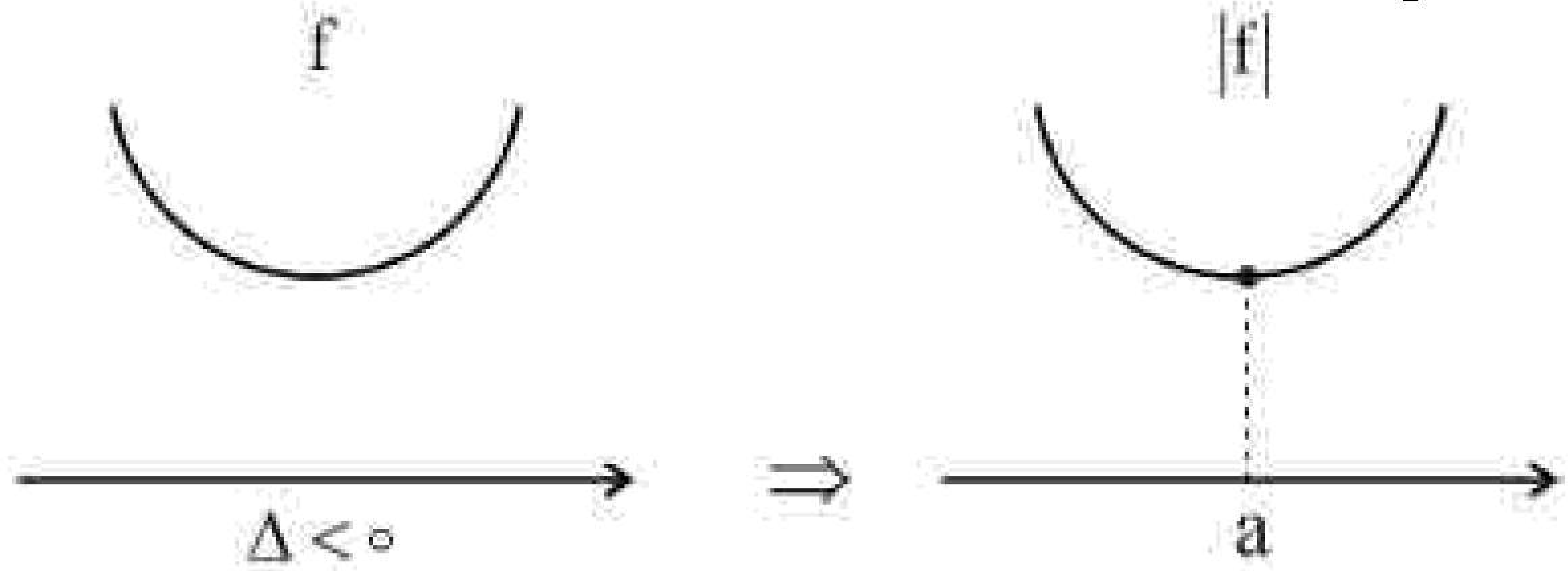
$f(۳) = -۳۸ \Rightarrow$ Min مطلق

$f(-۳) = ۳۴ \Rightarrow$ Max مطلق

(تفاوت مقادیر ماکزیمم و مینیمم $= ۳۴ - (-۳۸) = ۷۲$)

۳۹- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. برای نمودار قدرمطلق یک تابع درجه دو، سه حالت متصور است:

حالت اول:



دارای یک نقطهٔ مینیمم نسبی در $x = a$ است.

حالت دوم:

دارای یک نقطهٔ مینیمم نسبی در $x = a$ است.

حالت سوم:

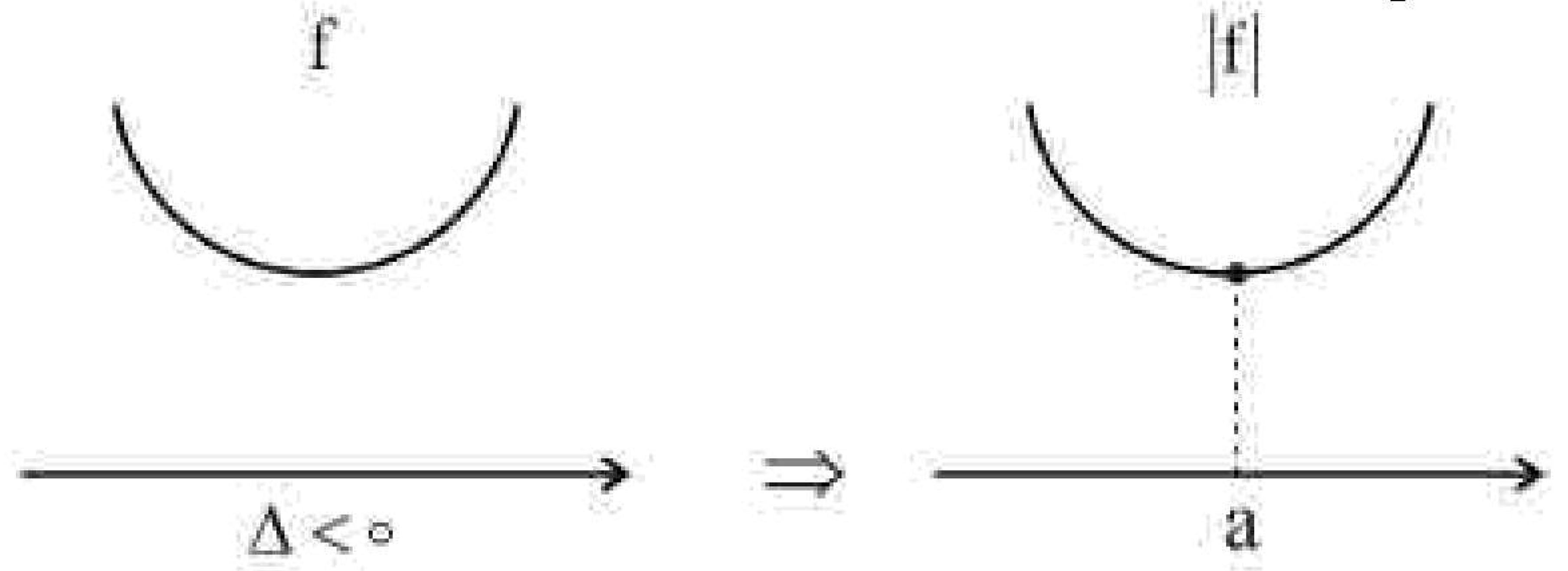
دارای دو نقطهٔ مینیمم نسبی در ریشه‌های f یعنی $x = b$ و $x = c$ است.
(واضح است در حالتی‌که در دهانهٔ نمودار درجه دو به سمت پایین باشد هم همین حالات تکرار می‌شود.)
چون می‌خواهیم که تابع یک نقطهٔ مینیمم نسبی داشته باشد، پس باید دو حالت اول اتفاق افتاده باشد، یعنی:

$$\Delta \leq 0 \Rightarrow (m-1)^2 - 4(m-1) \leq 0 \Rightarrow m^2 - 6m + 5 \leq 0 \Rightarrow 1 \leq m \leq 5$$

دقت کنید که به ازای $m = 1$، ضریب x^2 در تابع درجه دو، برابر با صفر شده و این تابع از فرم درجه دو خارج می‌شود و به صورت تابع ثابت $y = 1$ درمی‌آید که دارای بی‌شمار نقطه مینیمم نسبی است و حالت مطلوب این تست نیست.
پس $1 < m \leq 5$، قابل قبول است و چهار مقدار صحیح برای m وجود دارد.

۴۰- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. برای نمودار قدرمطلق یک تابع درجه دو، سه حالت متصور است:

حالت اول:



دارای یک نقطهٔ بحرانی با مشتق صفر در $x = a$ است.

حالت دوم:

دارای یک نقطهٔ بحرانی با مشتق صفر در $x = a$ است.

حالت سوم:

دارای یک نقطهٔ بحرانی با مشتق صفر در $x = a$ و دو نقطهٔ بحرانی گوشه و مشتق‌ناپذیر در ریشه‌های f یعنی $x = b$ و $x = c$ است.

(واضح است در حالتی‌که در دهانهٔ نمودار درجه دو به سمت پایین باشد هم همین حالات تکرار می‌شود.)

چون می‌خواهیم که تابع یک نقطهٔ بحرانی داشته باشد، پس باید دو حالت اول اتفاق افتاده باشد، یعنی:

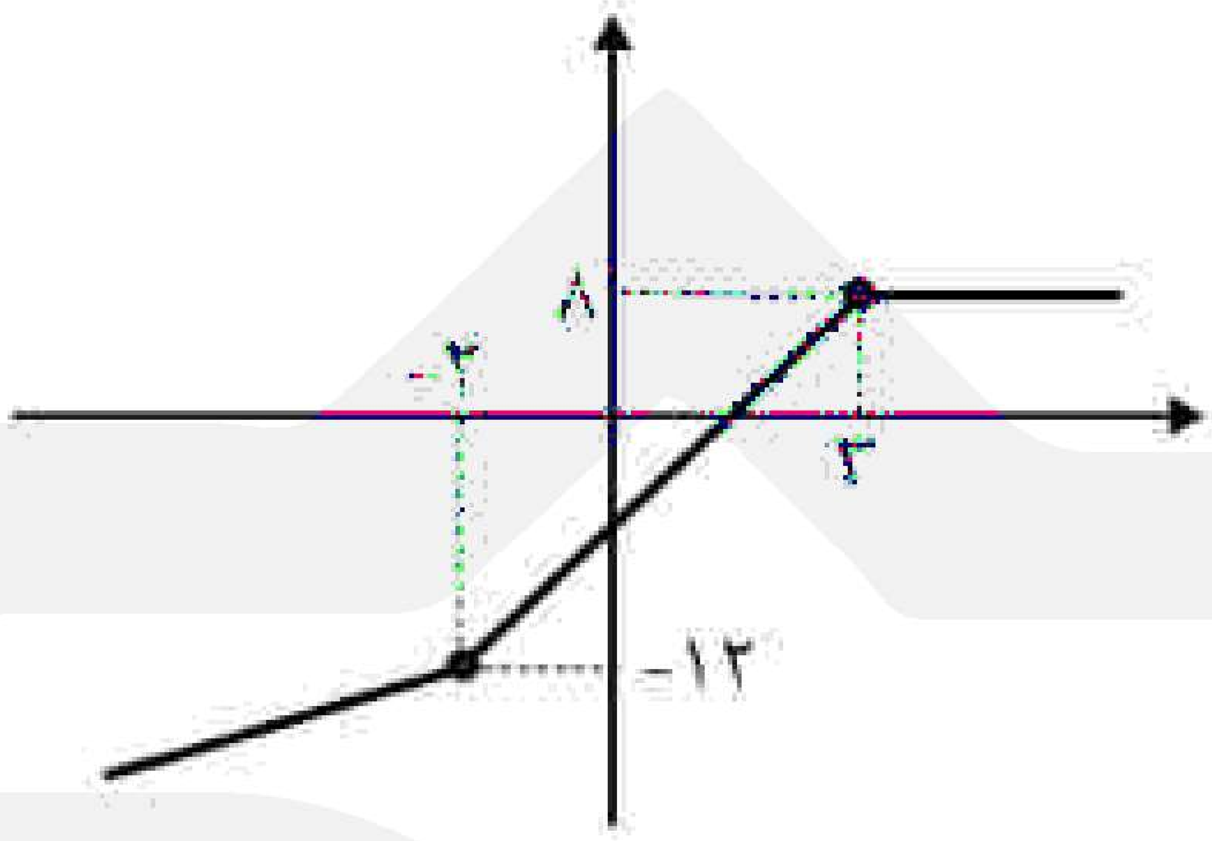
$$\Delta \le 0 \Rightarrow (m+3)^2 - 4(m+3) \le 0 \Rightarrow m^2 + 2m - 3 \le 0 \Rightarrow -3 \le m \le 1$$

دقت کنید که به ازای $m = -3$، ضریب x^2 در تابع درجه دو، برابر با صفر شده و این تابع از فرم درجه دو خارج می‌شود و به صورت تابع ثابت $y = 1$ درمی‌آید که دارای بی‌شمار نقطه بحرانی است و حالت مطلوب این تست نیست. پس $-3 < m \le 1$، قابل قبول است و چهار مقدار صحیح برای m وجود دارد.

۴۱- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. دقت کنید که بزرگترین بازه‌ای که تابع f در آن صعودی است را به دست آوریم.
تابع به صورت $f(x) = |x+۲| - |۲x-۶| + x$ است. به کمک ریشه‌های داخل قدرمطلق $(x = ۳ , x = -۲)$ محور اعداد را تقسیم‌بندی کرده و تکلیف قدرمطلق‌ها را روشن می‌کنیم:

$$x < -۲ \Rightarrow (-x-۲) + (۲x+۶) + x = ۲x - ۸$$
$$-۲ \le x < ۳ \Rightarrow (x+۲) + (۲x-۶) + x = ۴x - ۴$$
$$۳ \le x \Rightarrow (x+۲) - (۲x-۶) + x = ۸$$

پس نمودار تابع به این صورت است:



واضح است که تابع در بازه $(-\infty , ۳)$ اکیداً صعودی و در $(-\infty , +\infty)$ صعودی است.

۴۲- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ممکن است $f'(x_۰) = ۰$ موجود نباشد ولی $x_۰$ طول اکسترمم نسبی تابع f باشد. ممکن است $f'(x_۰)$ موجود و برابر صفر باشد، ولی $x_۰$ طول اکسترمم نسبی تابع f نباشد. اما اگر f در $x_۰$ دارای اکسترمم نسبی باشد و $f'(x_۰)$ موجود باشد، آن‌گاه $f'(x_۰) = ۰$ است.

۴۳- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$f'(x) = ۳x^۲ - ۱۲ = ۰ \begin{cases} x = ۲ \ \checkmark \\ x = -۲ \ \times \ \text{در بازه نیست} \end{cases}$$

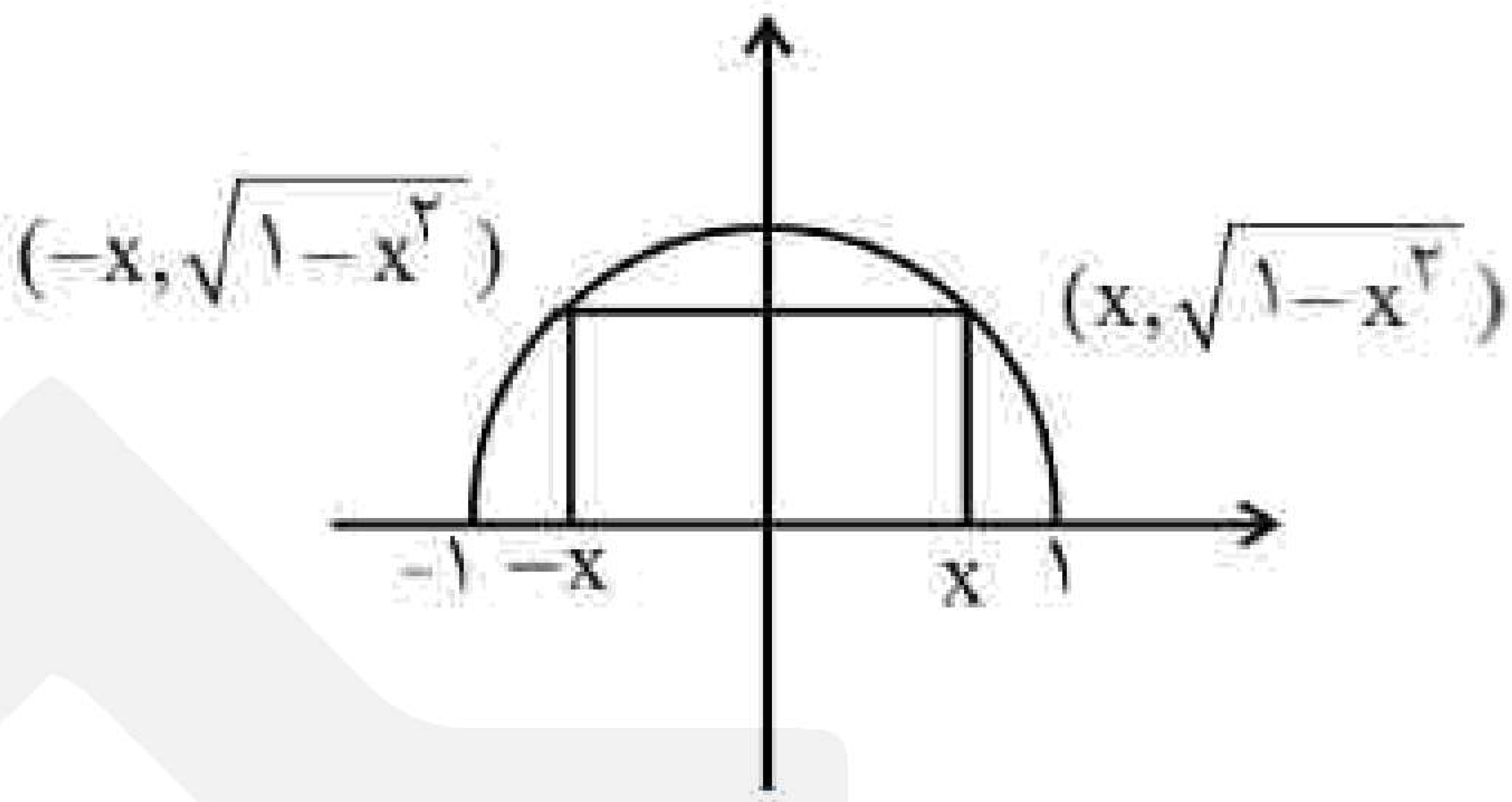
$$x = ۱ \Rightarrow y = k - ۱۱$$
$$\left.\begin{array}{l} x = ۲ \Rightarrow y = k - ۱۶ \min \\ x = ۳ \Rightarrow y = k - ۹ \max \end{array}\right\} \Rightarrow k - ۹ = ۲(k - ۱۶) \Rightarrow k = ۲۳$$

$$f(x) = x^۳ - ۱۲x + ۲۳ \Rightarrow f'(x) = ۳x^۲ - ۱۲ \Rightarrow f'' = ۶x = ۰ \Rightarrow x = ۰ , y = ۲۳$$

$$\Rightarrow \text{نقطه عطف } I(۰ , ۲۳) \xrightarrow{\text{فاصله تا مبدا مختصات}} OI = ۲۳$$

«بانک سوال یاوران دانش»

۴۴- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.



$$S_{ABCD} = 2x.\sqrt{1-x^2}$$

$$S' = 2\sqrt{1-x^2} + \frac{(-2x)(2x)}{2\sqrt{1-x^2}} = 0$$

$$S' = \frac{2(1-x^2) - 2x^2}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{-4x^2+2}{\sqrt{1-x^2}} = 0$$

$$\Rightarrow x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$S = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right).\sqrt{1-\frac{1}{2}} = \sqrt{2}.\frac{1}{\sqrt{2}} = 1$$

۴۵- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$f'(x) = \frac{a(a+2)-3}{(-x+a+2)^2} = \frac{a^2+2a-3}{(-x+a+2)^2} < 0$$

$$(a+3)(a-1) < 0 \Rightarrow -3 < a < 1$$

۴۶- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. $f' > 0$ (نمودار f' بالای محور xها) باشد f صعودی
$f' < 0$ (نمودار f' بالای محور xها) باشد f نزولی

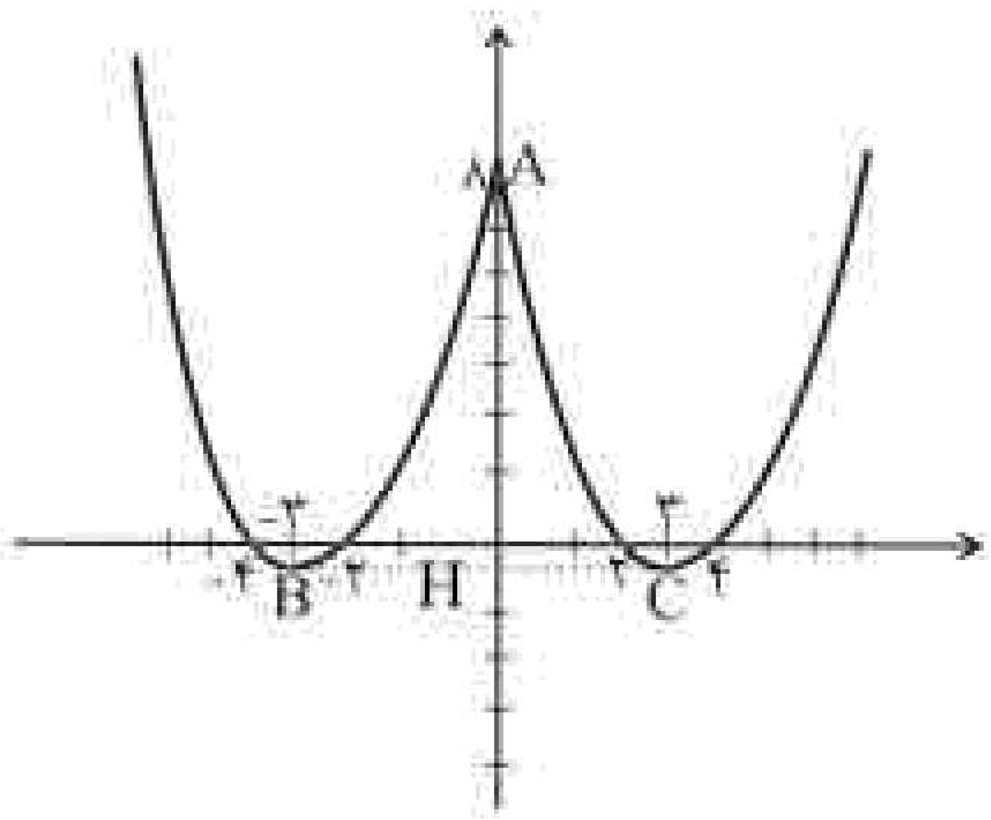
۴۷- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$x \geq 0 \Rightarrow f(x) = x^2 - 6x + 8 \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow 2x - 6 = 0 \Rightarrow x = 3\ ,\ y = -1$$

$$x < 0 \Rightarrow f(x) = x^2 + 6x + 8 \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow 2x + 6 = 0 \Rightarrow x = -3, y = -1$$

نقاط بحرانی این تابع $A\Big|_{8}^{0}$ (مشتق وجود ندارد)، $B\Big|_{-1}^{-3}$ (مشتق برابر صفر است) و $C\Big|_{-1}^{3}$ (مشتق برابر صفر است)

هستند، بنابراین:



$$S_{\overset{\triangle}{ABC}} = \frac{1}{2}(BC)(AH) = \frac{1}{2}(6)(9) = 27$$

۴۸- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$y' = ۳x^۲ + ۲mx - ۹ \Rightarrow y'(-۳) = ۰ \Rightarrow ۳(-۳)^۲ + ۲m(-۳) - ۹ = ۰$$

$$m = ۳ \begin{cases} y' = ۳x^۲ + ۶x - ۹ = ۰ \begin{cases} x = ۱ \Rightarrow y = -۲۴ & \text{مقدار اکسترمم دیگر} \\ x = -۳ \end{cases} \\ y = x^۳ + ۳x^۲ - ۹x - ۱۹ \end{cases}$$

۴۹- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$f'(x) = ۱ + \frac{۴ - ۲x}{۲\sqrt{۴x - x^۲}} = ۰ \Rightarrow ۱ = \frac{x - ۲}{\sqrt{۴x - x^۲}} \xrightarrow{\text{دو طرف به توان ۲}} x^۲ - ۴x + ۲ = ۰$$

$$x = ۲ \pm \sqrt{۲} \xrightarrow{\text{چون } x > ۲} x = ۲ + \sqrt{۲}, \ y = ۶ + ۲\sqrt{۲}$$

بنابراین نقطه ماکسیمم نسبی $A\left(۲ + \sqrt{۲}, ۶ + ۲\sqrt{۲}\right)$ است و فاصلهٔ آن از خط $-x + y = ۰$ (نیمساز ربع اول):

$$\text{فاصله از نیمساز ناحیه اول} = \frac{\left|۶ + ۲\sqrt{۲} - ۲ - \sqrt{۲}\right|}{\sqrt{(-۱)^۲ + ۱^۲}} = \frac{۴ + \sqrt{۲}}{\sqrt{۲}} = ۲\sqrt{۲} + ۱$$

۵۰- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. اگر حاصل‌ضرب دو مقدار مثبت برابر عدد ثابتی باشد، حاصل‌جمع آن دو عدد وقتی می‌نیمم است که آن دو عدد با هم برابر باشند.

$$x . y = ۲۵۶ \Rightarrow y = \frac{۲۵۶}{x}$$

$$\text{می‌نیمم باشد} : z = x + y \Rightarrow z = x + \frac{۲۵۶}{x} = \frac{x^۲ + ۲۵۶}{x}$$

$$Z' = \frac{۲x^۲ - x^۲ - ۲۵۶}{x^۲} = ۰ \Rightarrow x^۲ - ۲۵۶ = ۰ \Rightarrow x = ۱۶ \Rightarrow y = ۱۶$$

$$(d: \text{قطر}) \Rightarrow d^۲ = ۱۶^۲ + ۱۶^۲ = ۲۵۶ + ۲۵۶ = ۵۱۲ \Rightarrow d = ۱۶\sqrt{۲}$$