

گنجینه سوال رایگان

+ پاسخ تشریحی

یاوران دانش



راه های ارتباطی با ما:

www.Dyavari.com

۰۲۱-۷۶۷۰۳۸۵۸

۰۹۱۲-۳۴ ۹۴ ۱۳۴



- | | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
|------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|
| ۱ - | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۲ - | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۳ - | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |
| ۴ - | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۵ - | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۶ - | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |
| ۷ - | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۸ - | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |
| ۹ - | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۱۰ - | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۱۱ - | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |
| ۱۲ - | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۱۳ - | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۱۴ - | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۱۵ - | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۱۶ - | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۱۷ - | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۱۸ - | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |
| ۱۹ - | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۲۰ - | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۲۱ - | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۲۲ - | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۲۳ - | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۲۴ - | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۲۵ - | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۲۶ - | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۲۷ - | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۲۸ - | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |
| ۲۹ - | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۳۰ - | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۳۱ - | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۳۲ - | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |
| ۳۳ - | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۳۴ - | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

- | | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
|------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|
| ۳۵ - | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |
| ۳۶ - | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۳۷ - | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۳۸ - | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۳۹ - | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۴۰ - | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۴۱ - | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۴۲ - | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |
| ۴۳ - | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۴۴ - | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۴۵ - | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۴۶ - | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۴۷ - | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۴۸ - | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |
| ۴۹ - | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۵۰ - | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

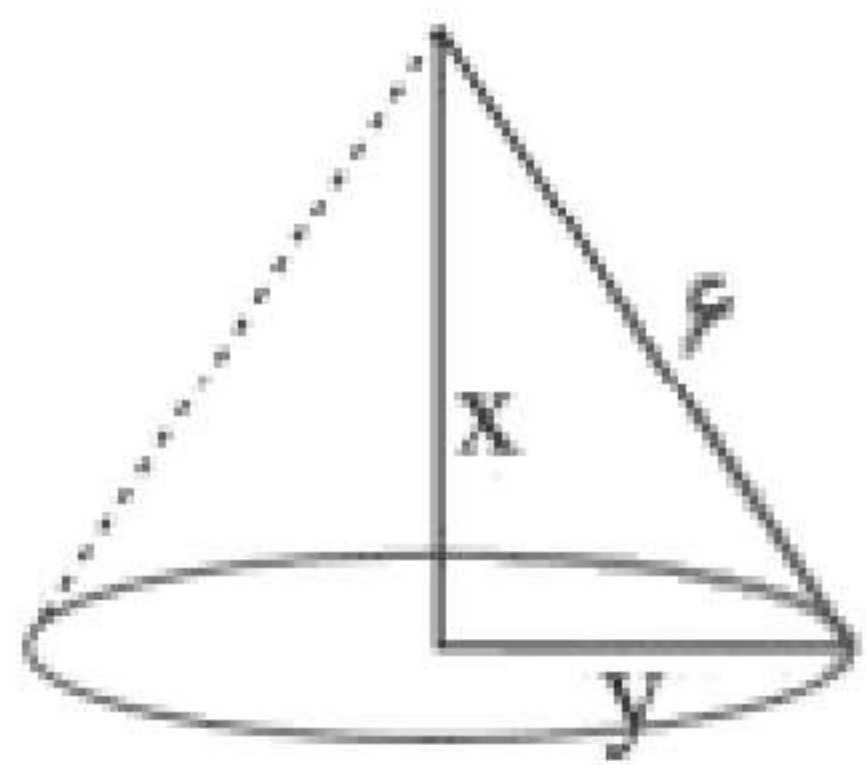


۱- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.
باید ضرایب x^2 ، y^2 یکسان باشند:

$$m - 2 = 1 \Rightarrow m = 3 \xrightarrow{\text{معادله دایره}} x^2 + y^2 + 3x - y - 5 = 0$$

$$\Rightarrow R = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 - 4c}}{2} = \frac{\sqrt{9 + 1 + 20}}{2} = \frac{\sqrt{30}}{2} = \frac{2\sqrt{7/5}}{2} = \sqrt{7/5}$$

۲- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.



$$x^2 + y^2 = 36 \Rightarrow y^2 = 36 - x^2$$

$$V = \frac{1}{3}\pi y^2 x = \frac{1}{3}\pi (36 - x^2)x$$

$$= \frac{1}{3}\pi (36x - x^3)$$

$$V' = \frac{1}{3}\pi (36 - 3x^2) = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{36}{3} = 12$$

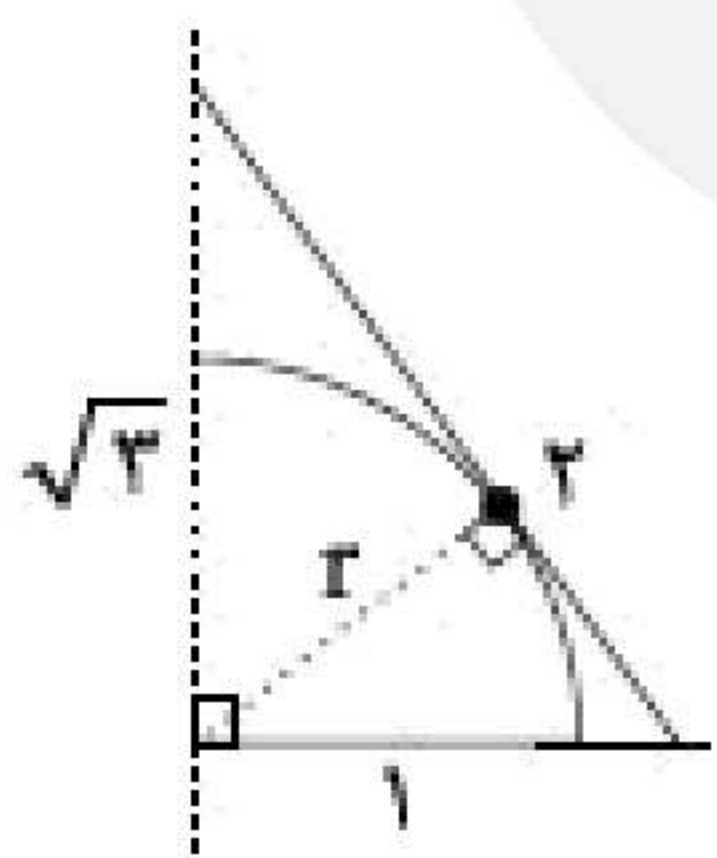
اگر $x^2 = 12$ باشد $y^2 = 24$ خواهد بود.

$$\frac{y^2}{x^2} = \frac{24}{12} = 2 \Rightarrow \frac{y}{x} = \sqrt{2}$$

۳- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. شعاع ربع دایره، ارتفاع وارد بر وتر است؟

$$S = \frac{r \times 2}{2} = \frac{1 \times \sqrt{3}}{2} \Rightarrow r = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

شکل حاصل یک مخروط است که یک نیم کره از آن خارج شده است:



$$V = \frac{\pi}{3} R^2 H - \frac{2\pi}{3} r^3 = \frac{\pi}{3} (1)^2 (\sqrt{3}) - \frac{2\pi}{3} \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 = \frac{\pi\sqrt{3}}{3} - \frac{2\pi}{3} \times \frac{3\sqrt{3}}{8}$$

$$= \frac{\pi\sqrt{3}}{3} - \frac{\pi\sqrt{3}}{4} = \frac{\pi\sqrt{3}}{12}$$

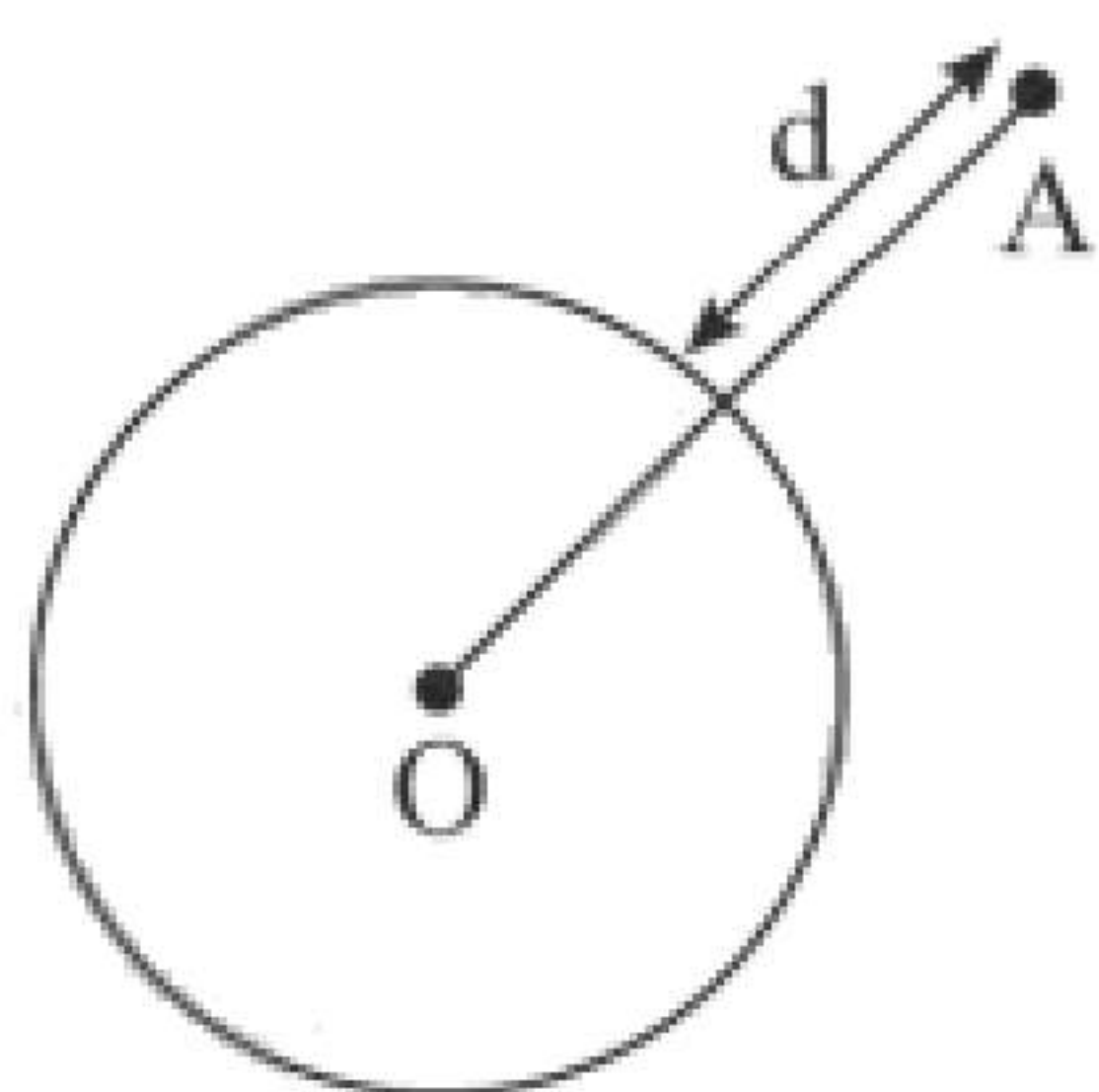
۴- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

نقطه‌ی A خارج دایره قرار دارد زیرا $f(-1, 4) > 0$ است پس کمترین فاصله‌ی نقاط دایره از نقطه‌ی A برابر $d = OA - R$ است یعنی داریم:

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0 \Rightarrow O(1, -2)$$

$$R = \frac{1}{2}\sqrt{4 + 16 + 16} = 3, \quad OA = \sqrt{4 + 36} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$$

$$\Rightarrow d = 2\sqrt{10} - 3$$





۵- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

خطی که بر دایره مماس است، فاصله مرکز دایره از آن برابر با شعاع دایره است. ضمناً خطی بر دایره عمود است که از مرکز آن عبور کند.

$$\text{مرکز دایره } O\left(-\frac{m}{2}, 2\right) \xrightarrow{\text{فاصله از خط}} \frac{\left|-\frac{m}{2} + 2 - 4\right|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{\left|-\frac{m}{2} - 2\right|}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{a^2 + b^2 - 4c}}{2} = \frac{\sqrt{m^2 + 16 - 4}}{2} = \frac{\sqrt{m^2 + 12}}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{\left|\frac{m}{2} + 2\right|}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{m^2 + 12}}{\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{\frac{m^2}{4} + 2m + 4}{2} = \frac{m^2 + 12}{4}$$

$$\Rightarrow m^2 + 8m + 16 = 2m^2 + 24$$

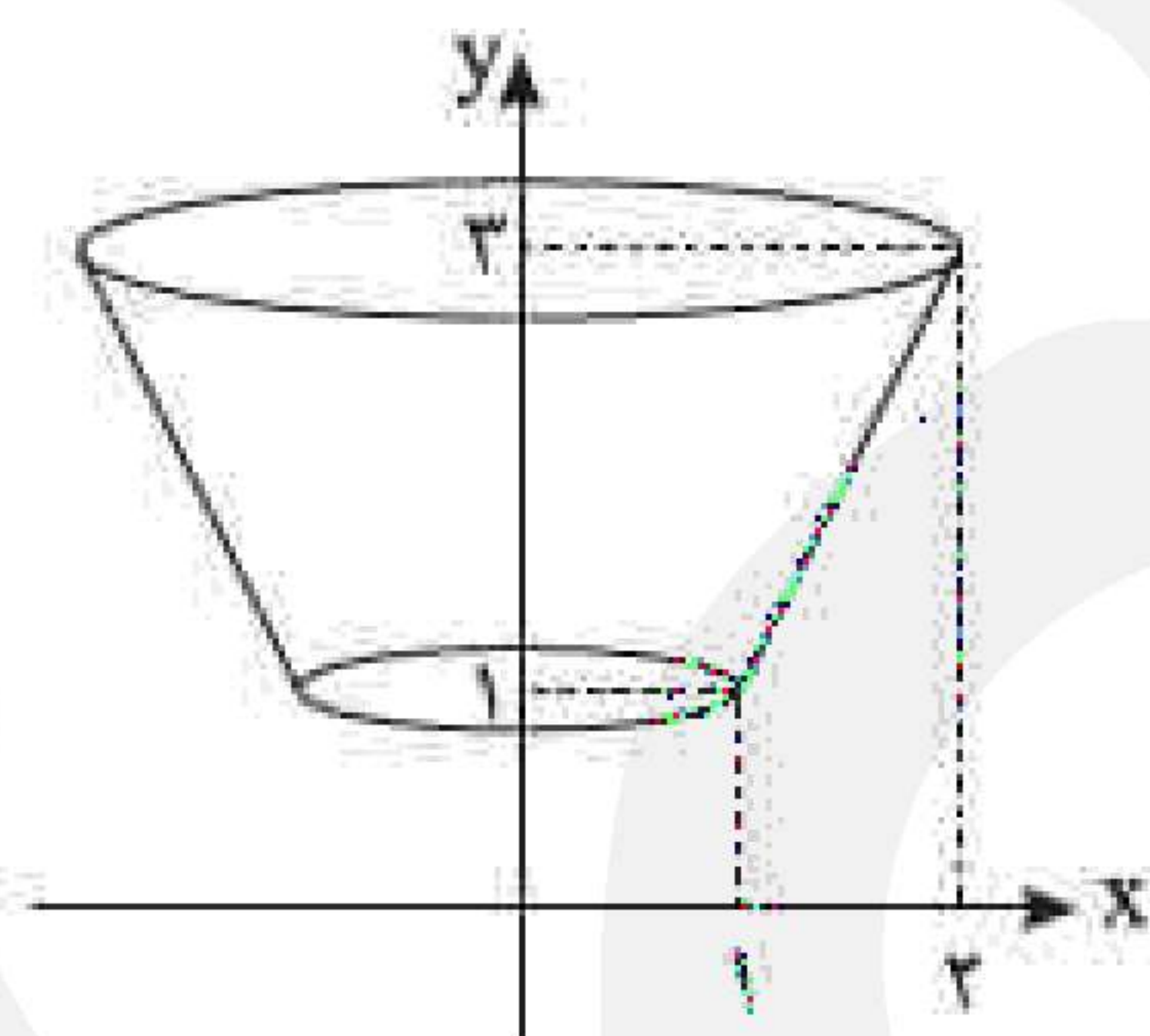
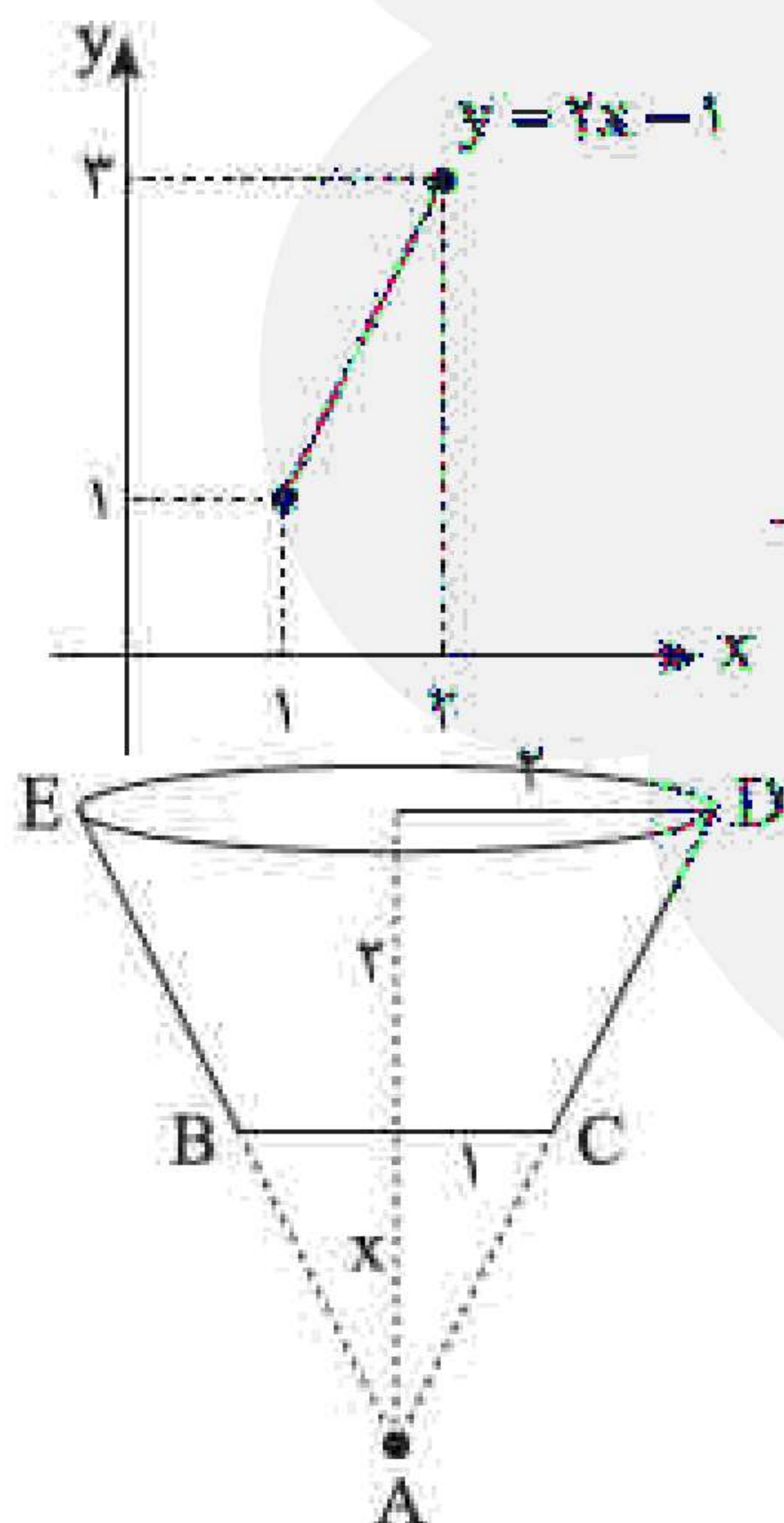
$$\Rightarrow m^2 - 8m + 8 = 0 \xrightarrow{\Delta = 32} m = \frac{8 \pm 4\sqrt{2}}{2} = 4 \pm 2\sqrt{2} \xrightarrow{m > 4} m = 4 + 2\sqrt{2}$$

پس مرکز دایره نقطه $O(-2 - \sqrt{2}, 2)$ است که خط $y + x = -\sqrt{2}$ از آن می‌گذرد.

۶- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

شکل ایجاد شده به شکل یک مخروط ناقص است. در مثلث ADE تالس می‌نویسیم:

$$\frac{x}{x+2} = \frac{1}{2} \Rightarrow 2x = x + 2 \Rightarrow x = 2$$



$$V_{\text{مطلوب}} = V_{\text{مخروط بزرگ}} - V_{\text{مخروط کوچک}}$$

$$= \frac{1}{3}\pi(2)^2 \times 4 - \frac{1}{3}\pi(1)^2 \times 2$$

$$= \frac{16\pi}{3} - \frac{2\pi}{3} = \frac{14\pi}{3}$$



۷- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$x^2 + y^2 - 4x - 6y - 3 = 0 \Rightarrow O_1(2, 3), r_1 = \frac{\sqrt{16 + 36 + 12}}{2} = 4$$

$$O_2(-1, -1), r_2$$

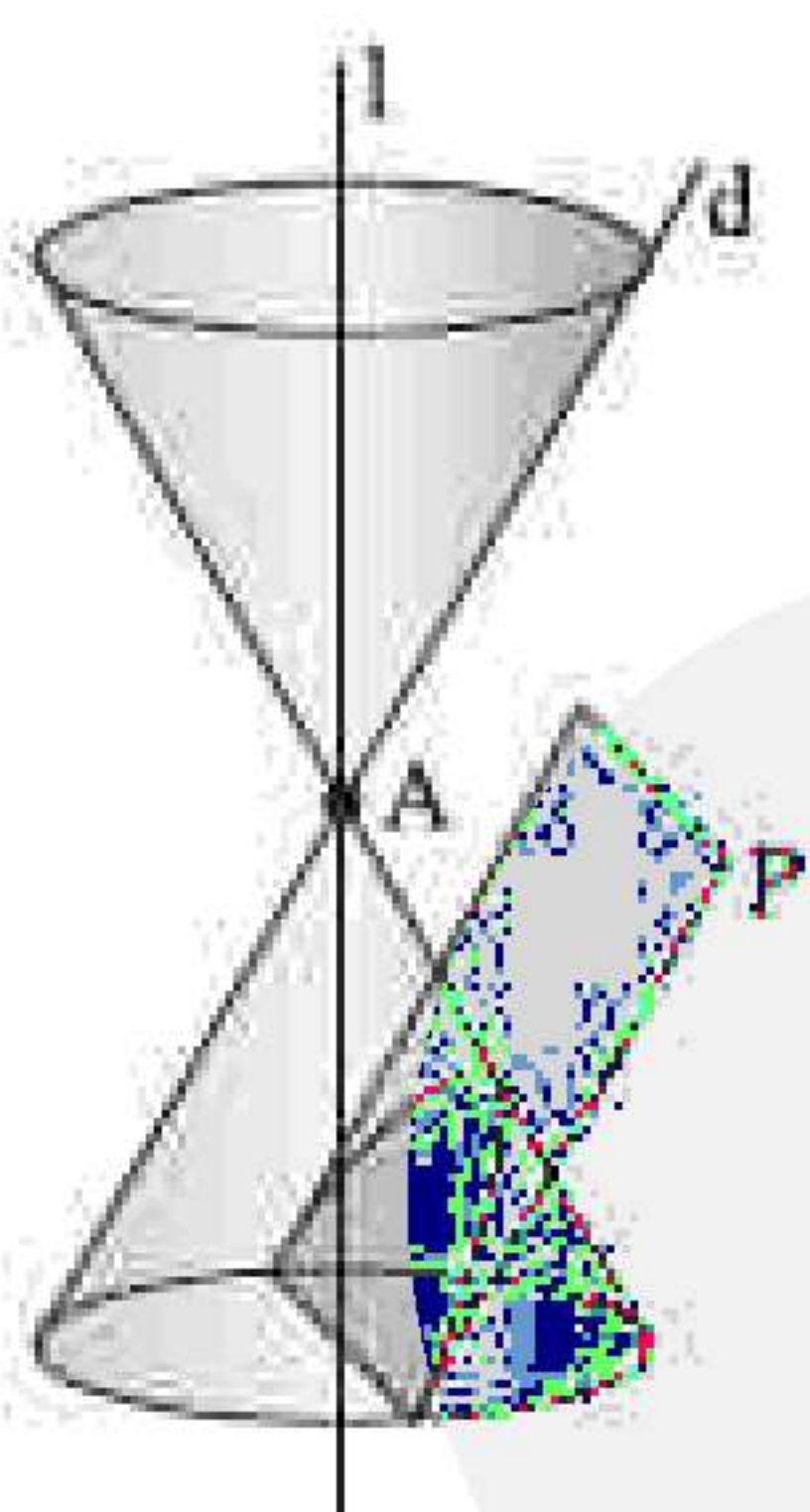
$$d = O_1 O_2 = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

$$\Rightarrow d = |r_1 - r_2| \Rightarrow 5 = |4 - r_2| \Rightarrow 4 - r_2 = \pm 5$$

$$\begin{matrix} r_2 > 0 \\ \Rightarrow r_2 = 9, -1 \end{matrix} \longrightarrow r_2 = 9$$

۸- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

اگر صفحه‌ی P در یکی از موقعیت‌ها با مولد سطح مخروطی موازی باشد و از رأس آن عبور نکند، شکل حاصل یک سهمی است.



«بانک سوال یاوران دانش»

۹- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$2a - b = 10 \Rightarrow b = 2a - 10$$

$$c^2 = a^2 - b^2 = a^2 - (2a - 10)^2 = -3a^2 + 40a - 100$$

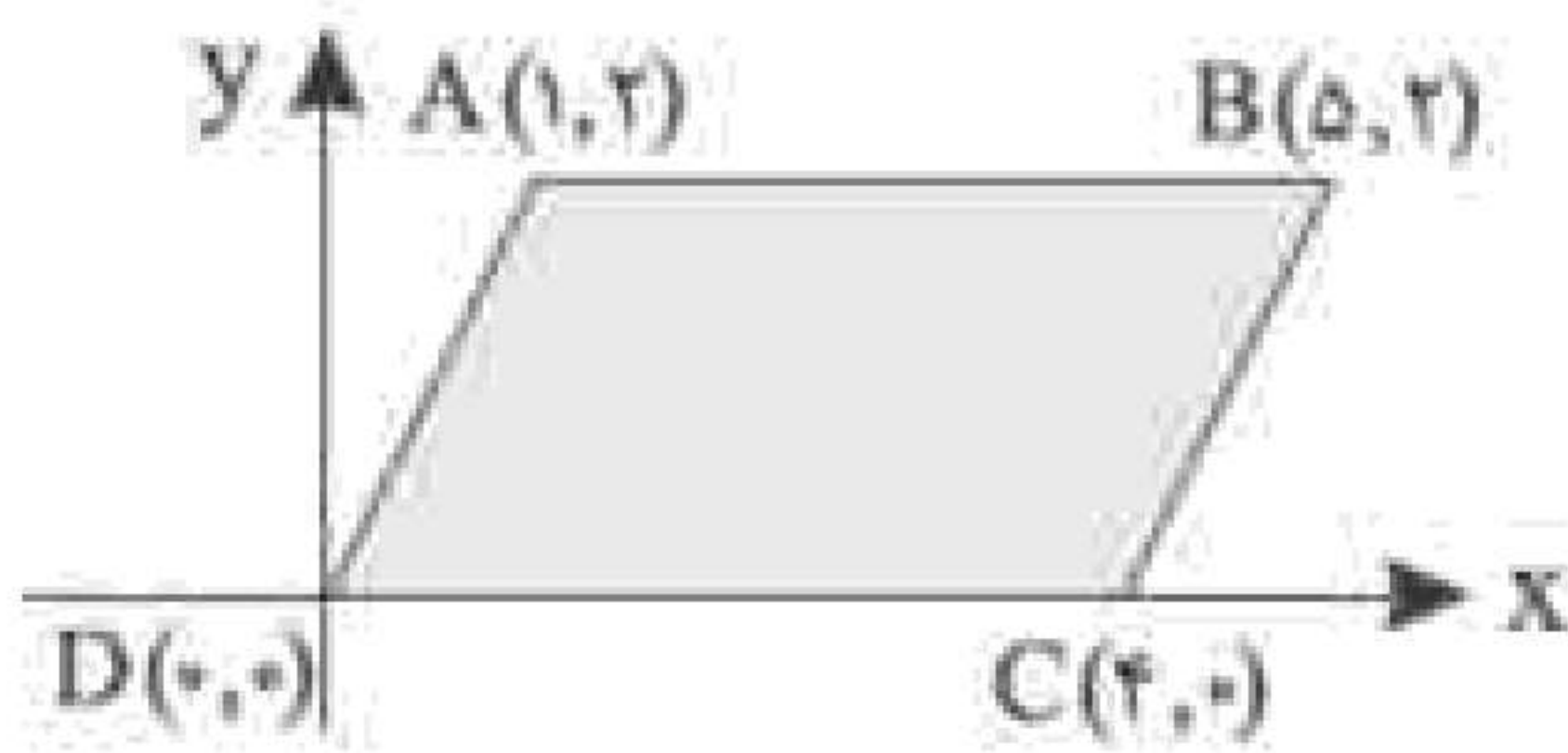
$$\Rightarrow c = \sqrt{-3a^2 + 40a - 100} \Rightarrow c' = \frac{-6a + 40}{2\sqrt{-3a^2 + 40a - 100}}$$

$$\Rightarrow a = \frac{40}{6} = \frac{20}{3} \Rightarrow b = \frac{10}{3}$$

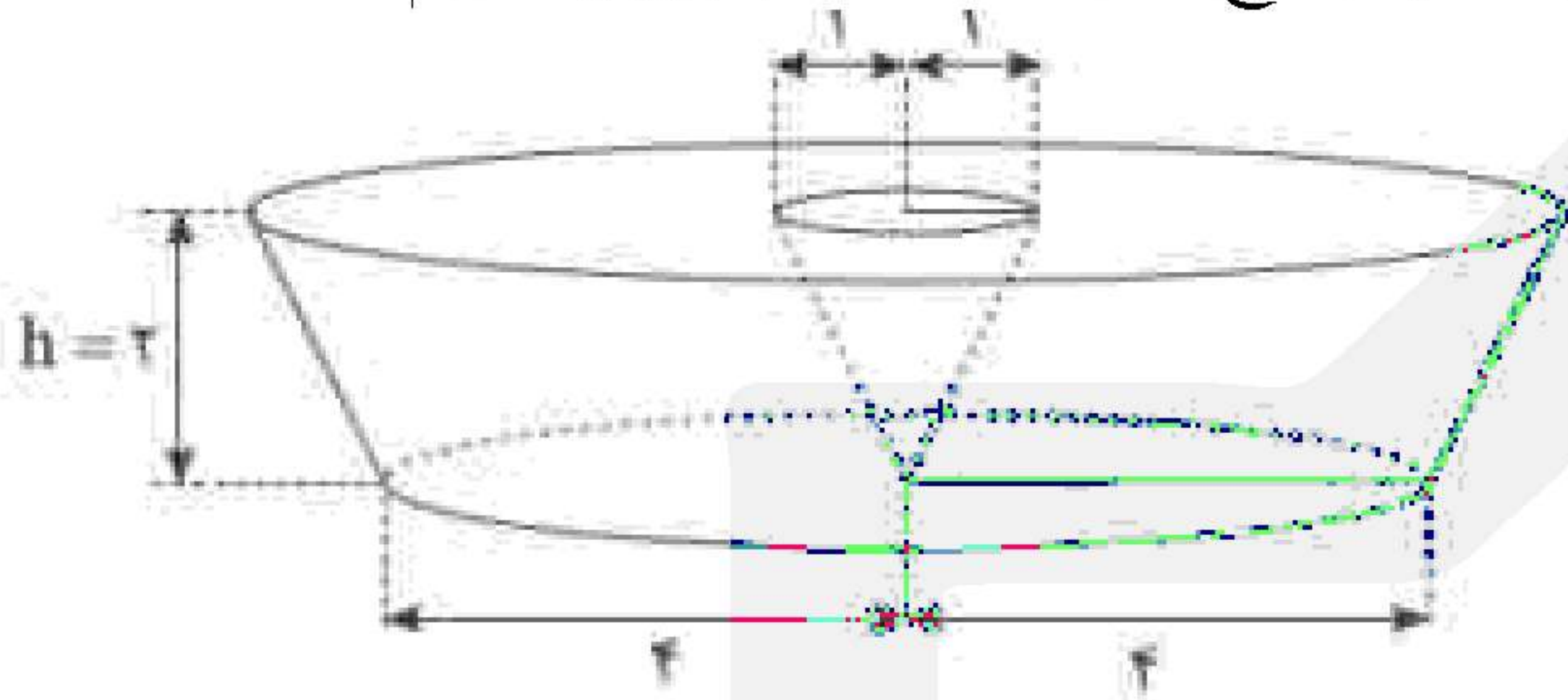
$$\Rightarrow c = \sqrt{\frac{400}{9} - \frac{100}{9}} = \sqrt{\frac{300}{9}} = \sqrt{\frac{100}{3}} = \frac{10}{\sqrt{3}} \Rightarrow 2c = \frac{20}{\sqrt{3}}$$



۱۰- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ابتدا متوازی‌الاضلاع ABCD را در دستگاه مختصات رسم می‌کنیم:



همانطور که در شکل زیر مشخص است، شکل حاصل از دوران، مخروط ناقصی است که یک مخروط از درون آن برداشته شده است و مخروط درونی، مخروطی به شعاع قاعده‌ی ۱ و ارتفاع ۲ واحد است. بنابراین داریم:



$$V_{\text{مخروط درونی}} = \frac{1}{3}(\pi r^2)h = \frac{1}{3}(\pi \times 1) \times 2 = \frac{2\pi}{3}$$

برای محاسبه‌ی حجم مخروط ناقص، مطابق شکل زیر ابتدا باید در مثلث BMN با استفاده از قضیه‌ی تالس مقدار X را محاسبه کنیم. پس:

$$\frac{MD}{MN} = \frac{CD}{BN}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{x+2} = \frac{4}{5} \Rightarrow x = 8$$

حالا طبق شکل بالا داریم:

$$V_{\text{مخروط ناقص}} = V_{\text{مخروط بزرگ}} - V_{\text{مخروط کوچک}}$$

$$V_{\text{مخروط ناقص}} = \left[\frac{1}{3}\pi(BN)^2 \times (MN) \right] - \left[\frac{1}{3}\pi(CD)^2 \times (MD) \right]$$

$$V_{\text{مخروط ناقص}} = \left[\frac{1}{3}\pi(5)^2 \times (8+2) \right] - \left[\frac{1}{3}\pi(4)^2 \times (8) \right] = \frac{122\pi}{3}$$

در نهایت حجم حاصل از دوران متوازی‌الاضلاع ABCD حول محور y برابر است با:

$$V = V_{\text{مخروط درونی}} - V_{\text{محور ناقص}}$$

$$V = \frac{122\pi}{3} - \frac{2\pi}{3} = 40\pi$$



۱۱- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\begin{cases} 2a = 4 \Rightarrow a = 2 \\ 2b = 2\sqrt{3} \Rightarrow b = \sqrt{3} \Rightarrow c^2 = a^2 - b^2 = 4 - 3 = 1 \Rightarrow c = 1 \end{cases}$$

$$AF = a - c = 2 - 1 = 1 \quad BF = a = 2$$

$$AB = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{4 + 3} = \sqrt{7}$$

$$\triangle AFB \text{ محیط مثلث} = AF + BF + AB = 1 + 2 + \sqrt{7} = 3 + \sqrt{7}$$

۱۲- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$C_1 : O_1(4, \alpha) \xrightarrow{\text{مماس بر محور } x \text{ ها}} r_1 = |\alpha|$$

$$C_2 : O_2(2, 5) \xrightarrow{\text{مماس بر محور } y \text{ ها}} r_2 = 2$$

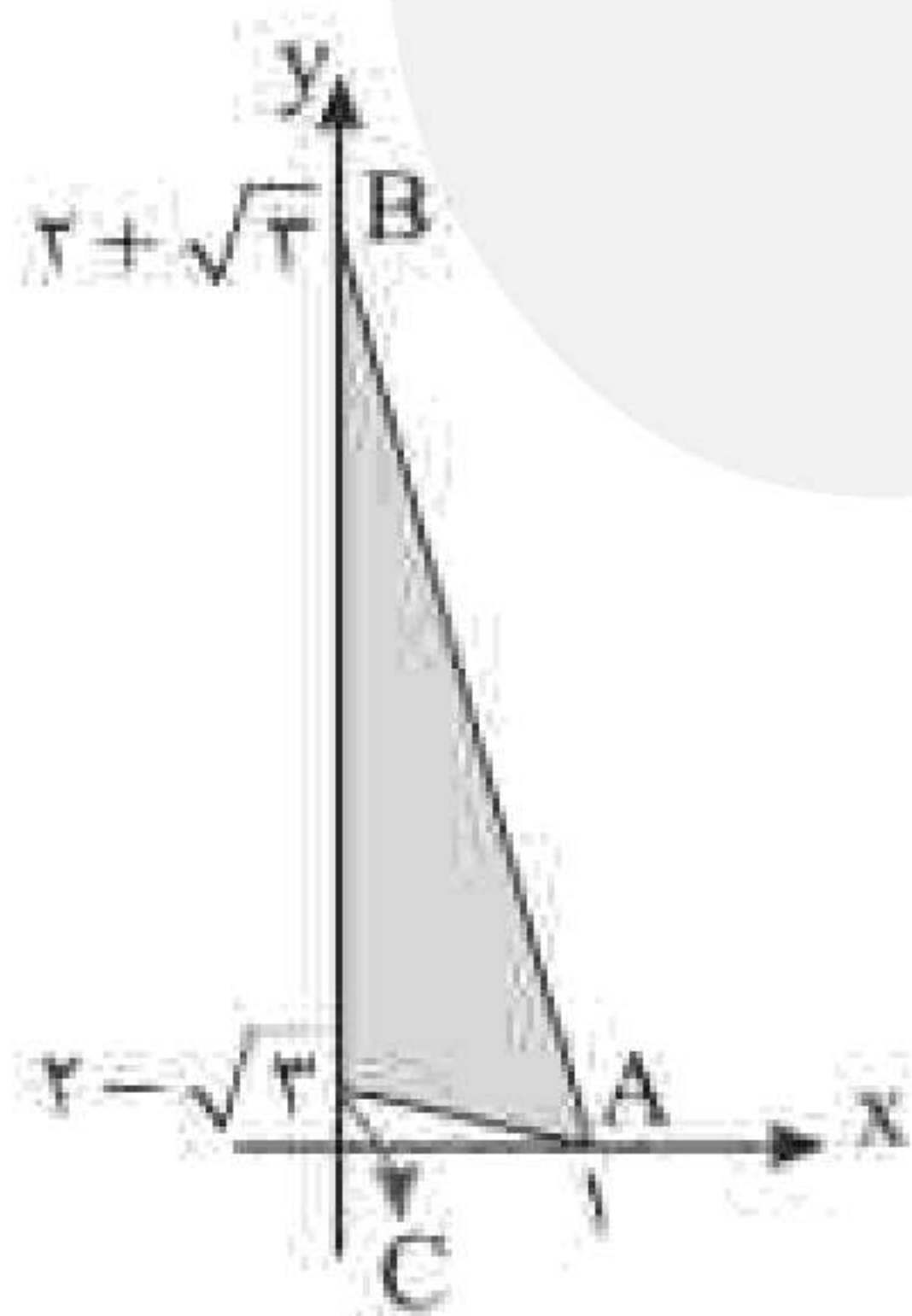
$$d = O_1 O_2 = \sqrt{2^2 + (\alpha - 5)^2}$$

$$\Rightarrow d = r_1 + r_2 \Rightarrow \sqrt{4 + (\alpha - 5)^2} = |\alpha| + 2$$

$$\Rightarrow \cancel{\alpha^2} - 10\alpha + 25 + 4 = \cancel{\alpha^2} + 4|\alpha| + 4 \Rightarrow 4|\alpha| + 10\alpha = 25$$

$$\Rightarrow \text{مماس خارج} \Rightarrow \begin{cases} \alpha > 0 \Rightarrow 14\alpha = 25 \Rightarrow \alpha = \frac{25}{14} \\ \alpha < 0 \Rightarrow 6\alpha = 25 \Rightarrow \alpha = \frac{25}{6} \text{ (غ ق ق)} \end{cases}$$

۱۳- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.



$$OH = r = \frac{|3(1) + 4(2) - 1|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{10}{5} = 2$$

$$\text{معادله دایره: } (x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 4$$

$$\text{برخورد با محور } x \text{ ها: } y = 0 \Rightarrow (x - 1)^2 + 4 = 4 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow A(1, 0)$$

$$\text{برخورد با محور } y \text{ ها: } x = 0 \Rightarrow 1 + (y - 2)^2 = 4 \Rightarrow (y - 2)^2 = 3$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y_1 = 2 + \sqrt{3} \Rightarrow B(0, 2 + \sqrt{3}) \\ y_2 = 2 - \sqrt{3} \Rightarrow C(0, 2 - \sqrt{3}) \end{cases}$$

$$S = \frac{(2 + \sqrt{3}) - (2 - \sqrt{3}) \times 1}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$



۱۴- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

همه اقطار دایره از مرکز آن عبور می‌کند. مرکز دایره نقطه $O(2, -3)$ است. همچنین شیب خط داده شده $-\frac{2}{3}$ است، پس شیب قطر مذکور $\frac{3}{2}$ است. بنابراین معادله آن به شکل روبه‌رو است:

$$y + 3 = \frac{3}{2}(x - 2) \xrightarrow{y=0} 3 = \frac{3}{2}(x - 2) \Rightarrow x - 2 = 2 \Rightarrow x = 4$$

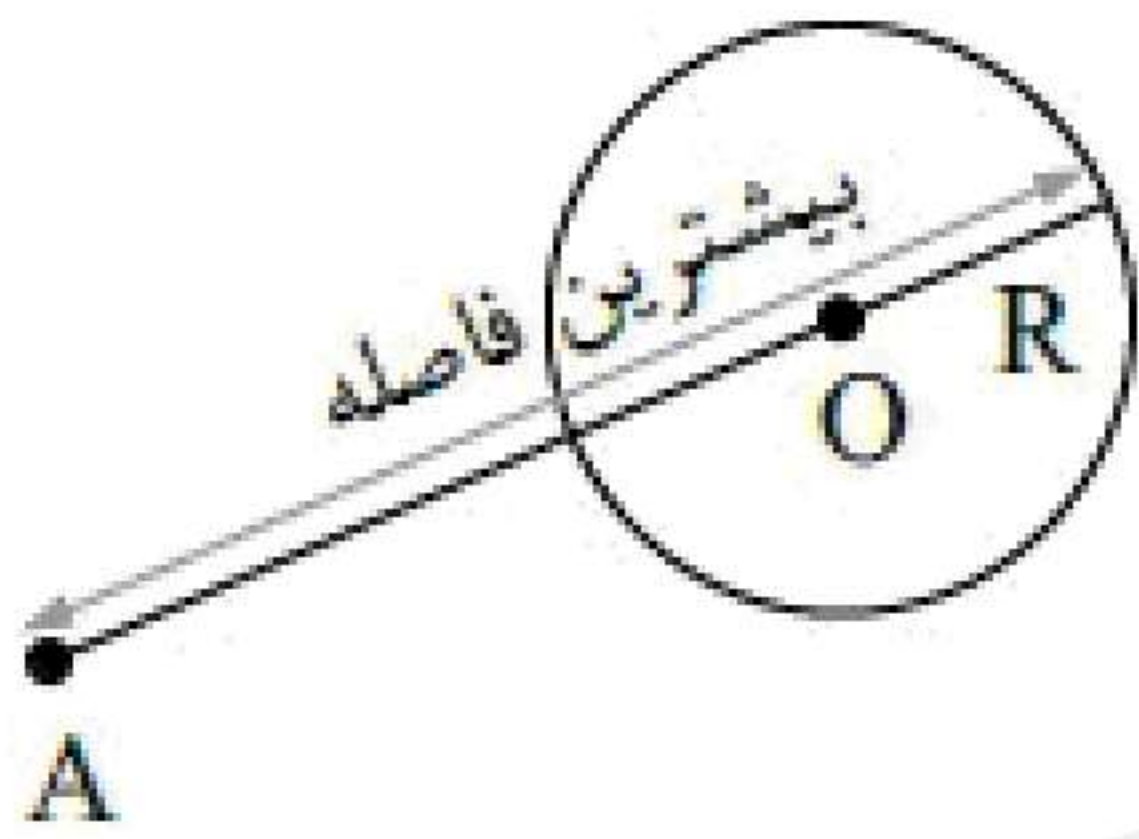
۱۵- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

بیشترین فاصله نقاط روی دایره دلخواه A برابر است با: $OA + R$

$$O(3, -1), A(-1, -4)$$

$$\Rightarrow OA = \sqrt{16 + 9} = 5$$

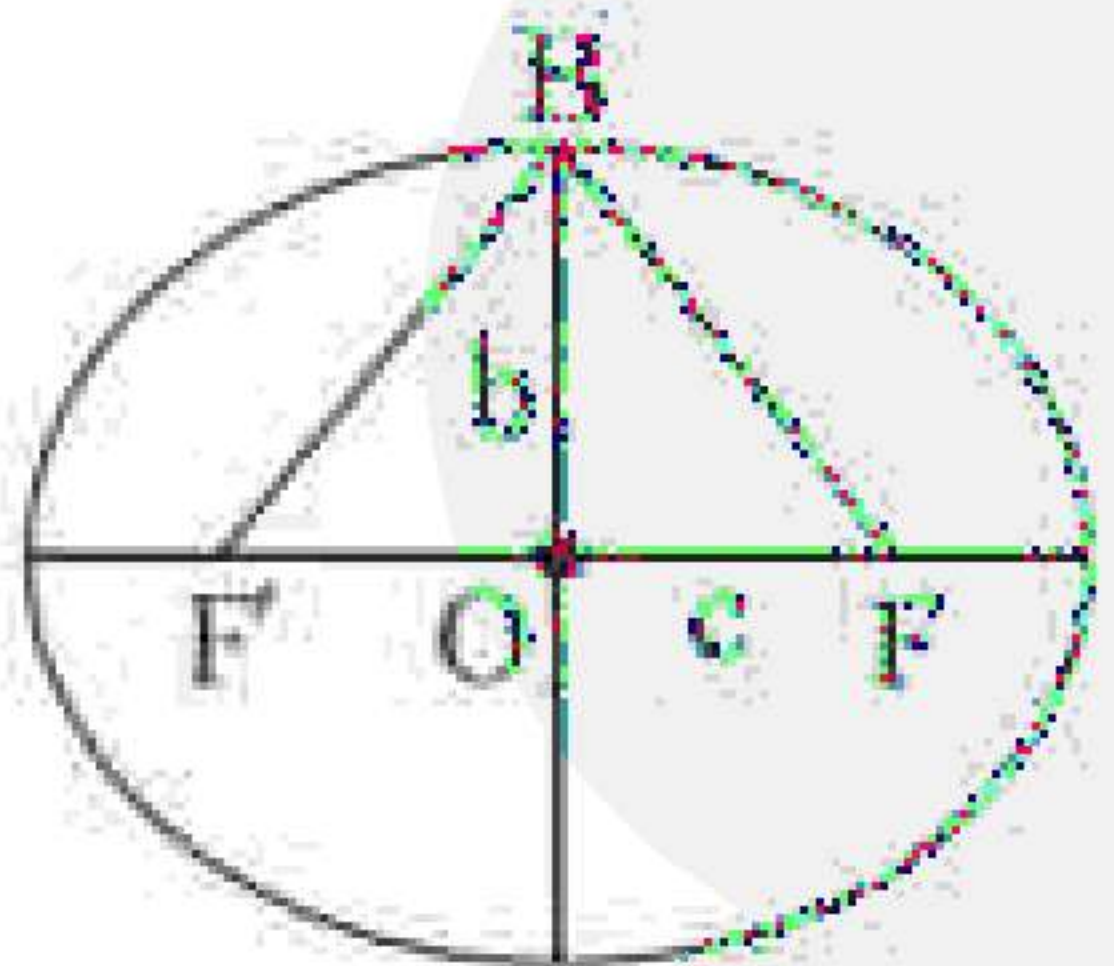
$$\Rightarrow OA + R = 5 + 4 = 9$$



۱۶- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

گزینه ۱ صحیح است. زیرا طبق شکل $OF = c$ و $OB = b$ است و بنابراین طبق رابطه‌ی فیثاغورس در مثلث OBF داریم:

$$BF^2 = b^2 + c^2 = a^2 \Rightarrow BF = a$$

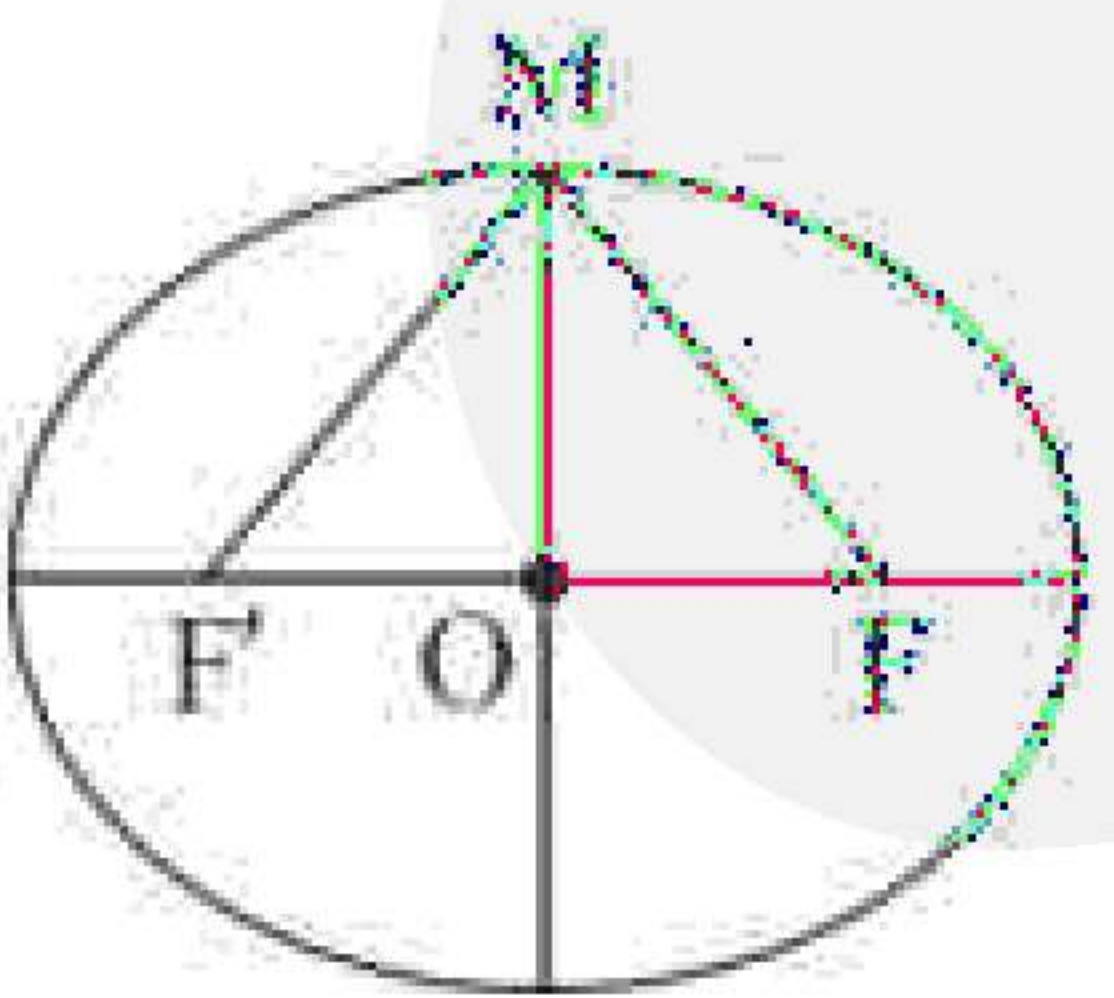


گزینه ۲ صحیح است. زیرا داریم:

$$e = \frac{c}{a} \Rightarrow e^2 = \frac{c^2}{a^2} = \frac{a^2 - b^2}{a^2} = 1 - \frac{b^2}{a^2} \Rightarrow e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$$

گزینه ۳ نادرست است. زیرا بیشترین مساحت مثلث MFF' زمانی اتفاق می‌افتد که M روی B واقع شود و بنابراین خواهیم داشت:

$$S_{MFF'} = \frac{1}{2} OM \times FF' = \frac{1}{2} \times b \times 2c = bc$$

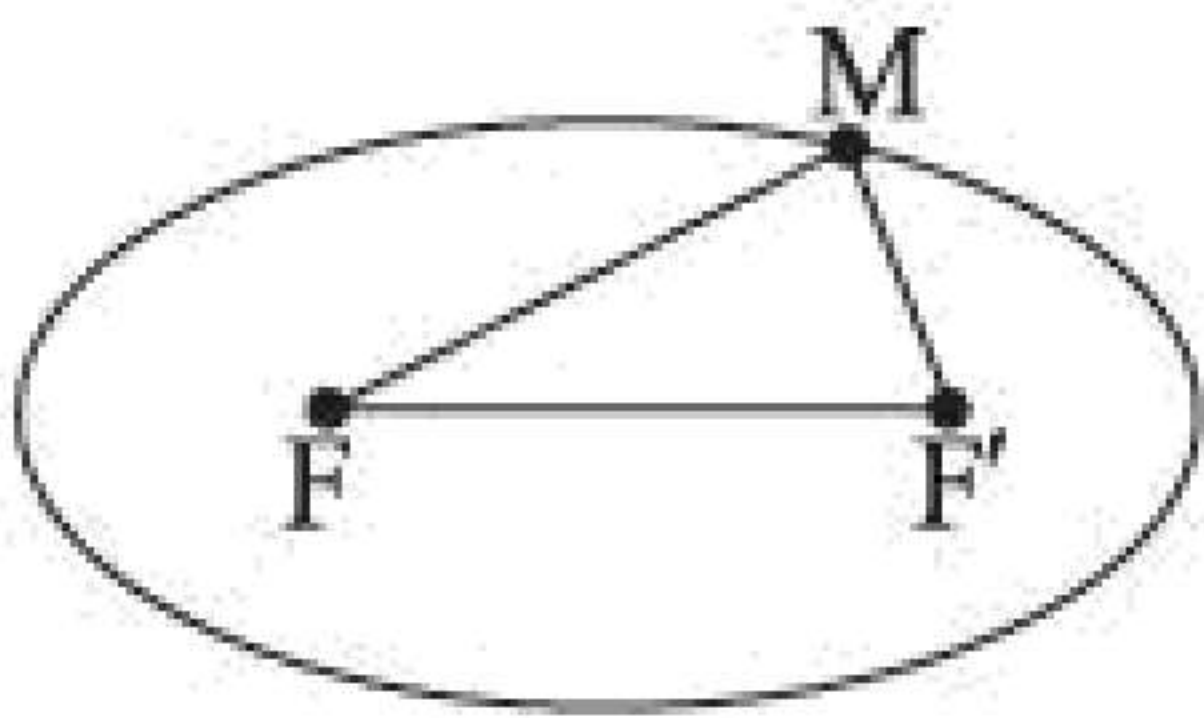


گزینه ۴ صحیح است. زیرا $e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$ و هر قدر a و b به هم نزدیک‌تر باشند، شکل بیضی به دایره

نزدیک‌تر است و در این صورت e به صفر نزدیک می‌شود.



۱۷- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.



$$MF + MF' = 2a$$

$$\text{محیط مثلث} = 2a + 2c$$

$$\Rightarrow 2b = 4\sqrt{2} \Rightarrow b = 2\sqrt{2}$$

$$c = \frac{1}{3} \Rightarrow \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} = \frac{1}{3} \Rightarrow 1 - \frac{b^2}{a^2} = \frac{1}{9} \Rightarrow \frac{b^2}{a^2} = \frac{8}{9}$$

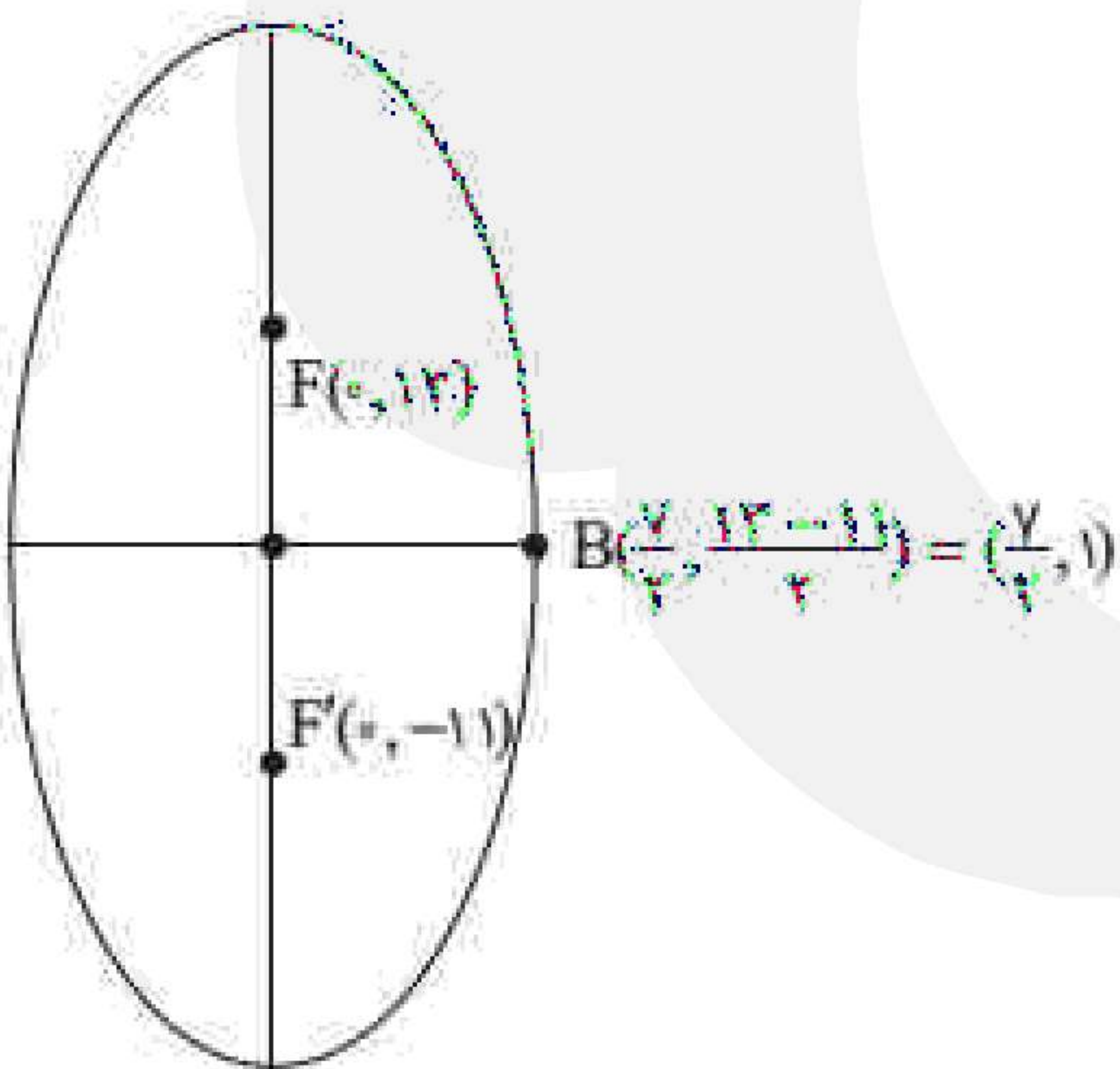
$$b = 2\sqrt{2} \rightarrow \frac{8}{a^2} = \frac{8}{9} \Rightarrow a^2 = 9 \Rightarrow a = 3$$

$$\Rightarrow c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{9 - 8} = 1 \Rightarrow 2a + 2c = 6 + 2 = 8$$

۱۸- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

مرکز بیضی $O = \frac{F+F'}{2} = (0, 1)$ است. $FF' = 2c = 24$ می‌باشد. پس $c = 12$ است. از طرفی فاصله‌ی مرکز تا B

برابر b است. $b = \frac{7}{2}$



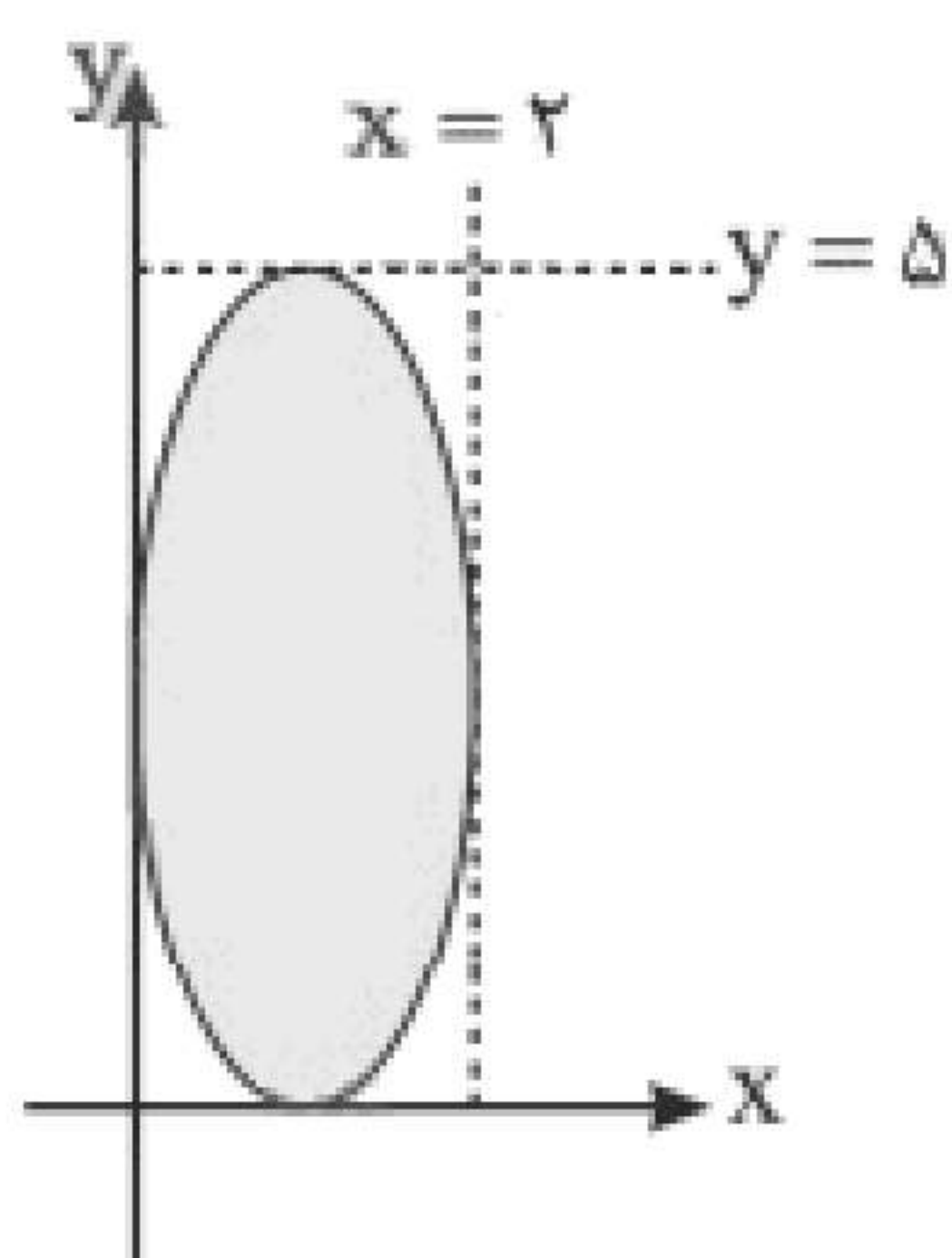
$$a^2 = b^2 + c^2 = \left(\frac{7}{2}\right)^2 + (12)^2$$

$$\frac{49}{4} + 144 = \frac{49 + 576}{4} = \frac{625}{4}$$

$$a = \sqrt{\frac{625}{4}} = \frac{25}{2} \Rightarrow 2a = 25$$



۱۹- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.



$$2a = 5 \Rightarrow a = \frac{5}{2}$$

$$2b = 2 \Rightarrow b = 1$$

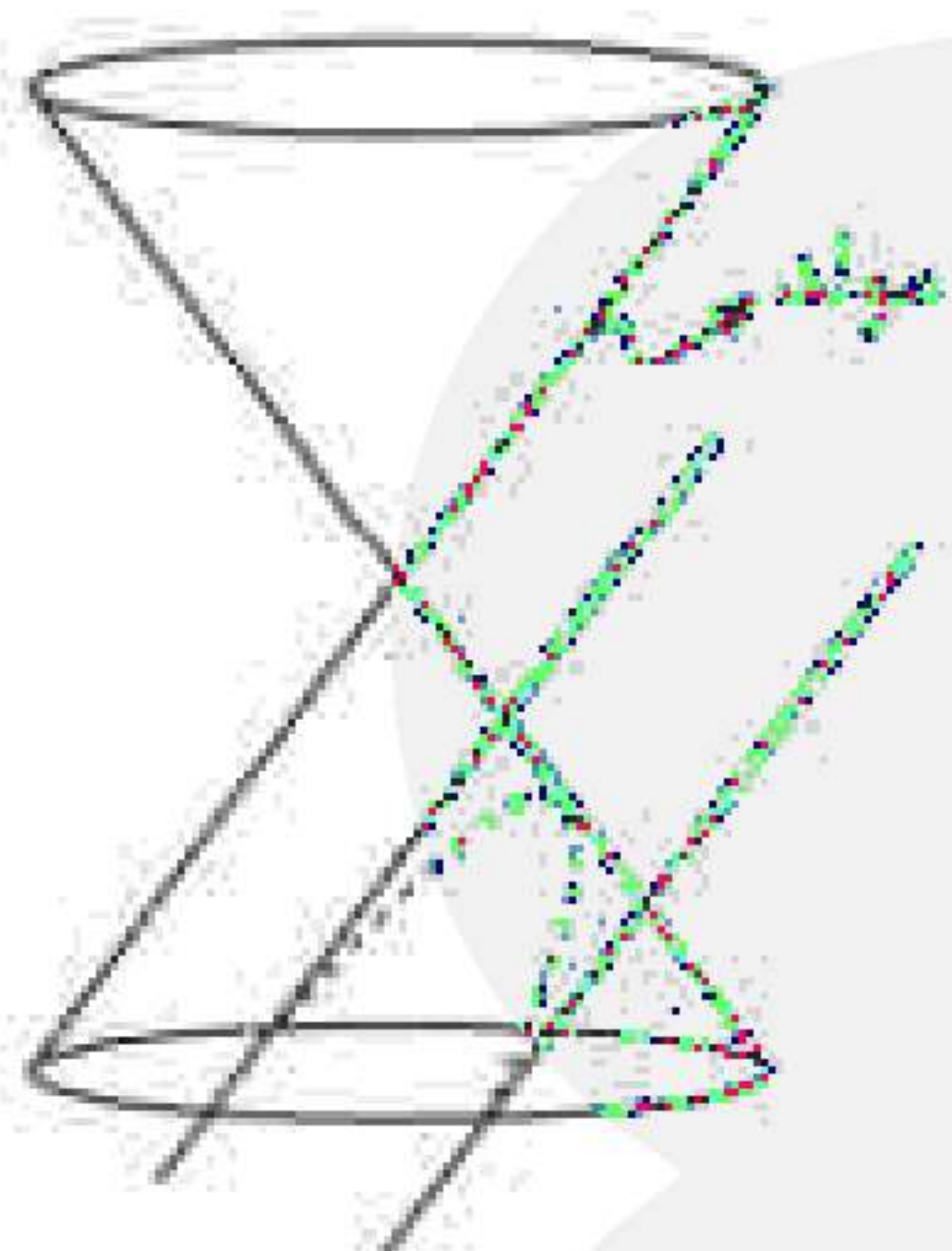
$$c^2 = a^2 - b^2 = \frac{25}{4} - 1 = \frac{21}{4}$$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{\frac{21}{4}}}{\frac{5}{2}} = \frac{\frac{\sqrt{21}}{2}}{\frac{5}{2}} = \frac{\sqrt{21}}{5}$$

«بانک سوال یاوران دانش»

۲۰- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

اگر صفحه‌ی موردنظر شامل مولد باشد، سطح مقطع یک خط و اگر موازی (و غیر منطبق) با مولد باشد، سطح مقطع سهمی است.



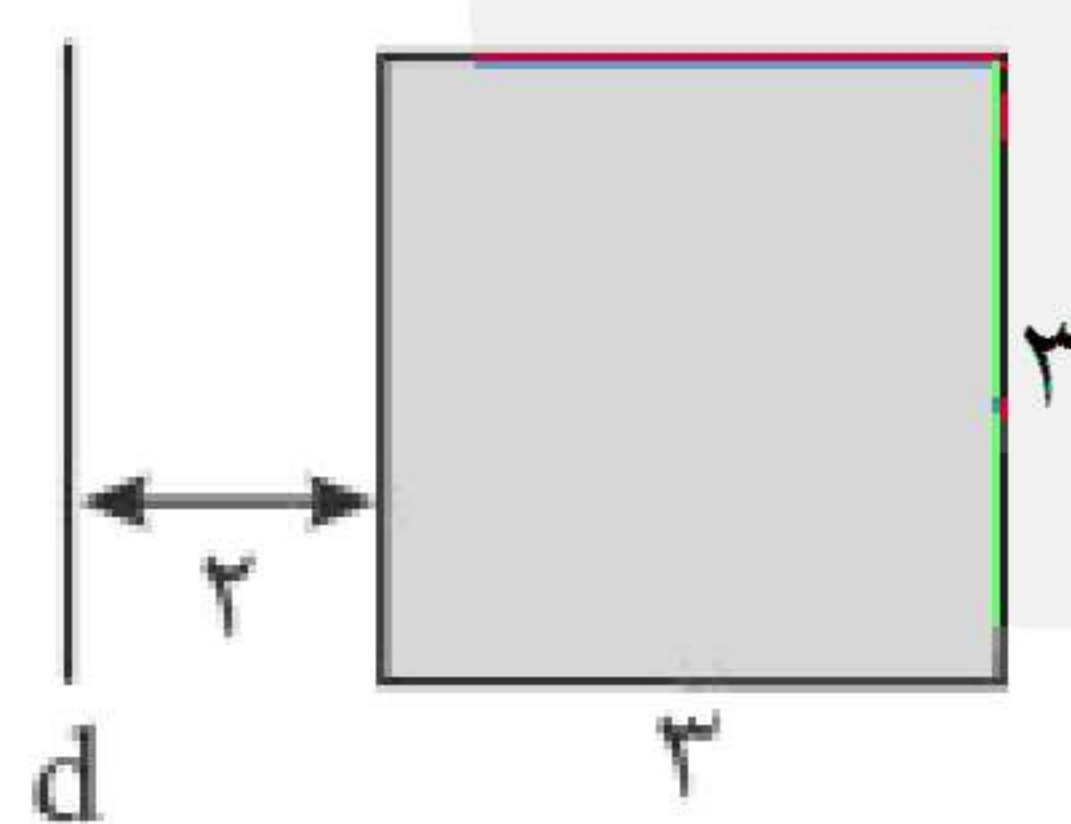
۲۱- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

از دوران مربع حول خط یک استوانه ایجاد می‌شود که داخل آن یک استوانه وجود دارد:

$$V = \pi(5)^2 \times 3 = 75\pi$$

$$V_1 = \pi(2)^2 \times 3 = 12\pi$$

$$V - V_1 = 75\pi - 12\pi = 63\pi$$

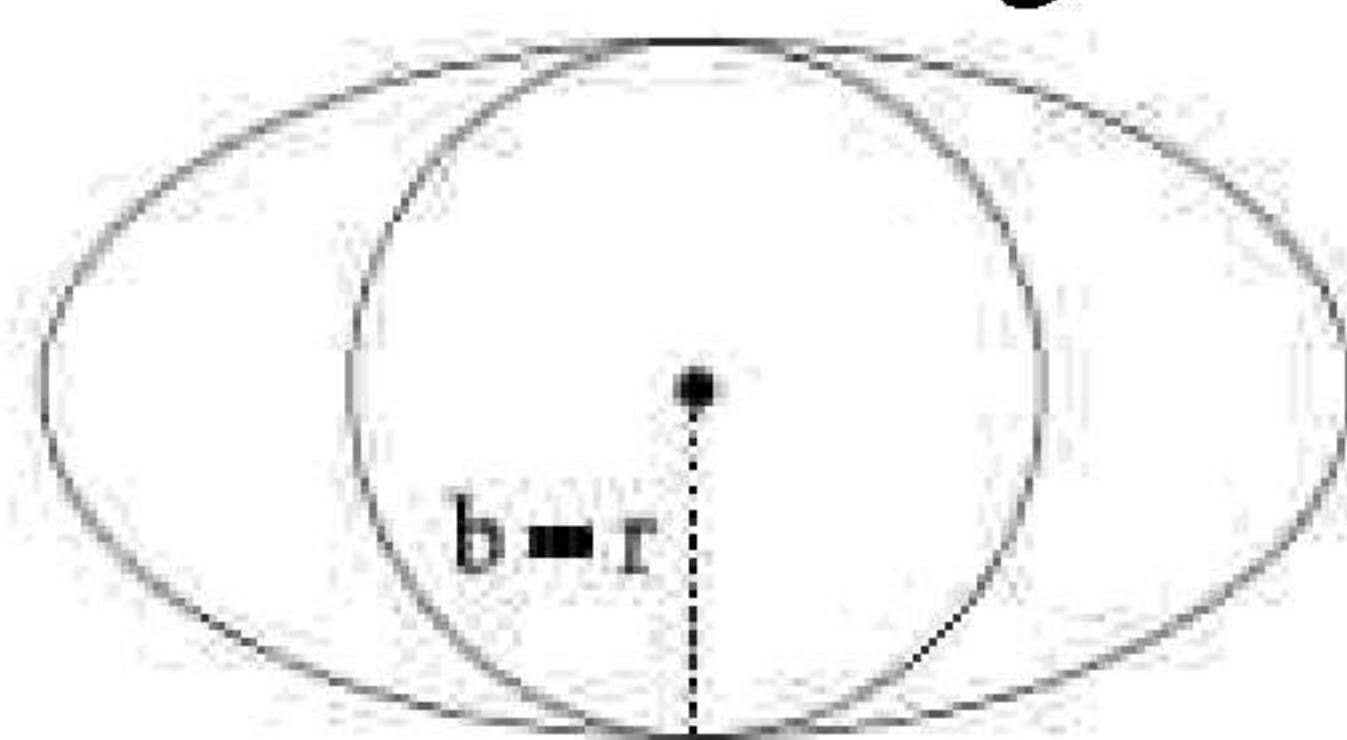




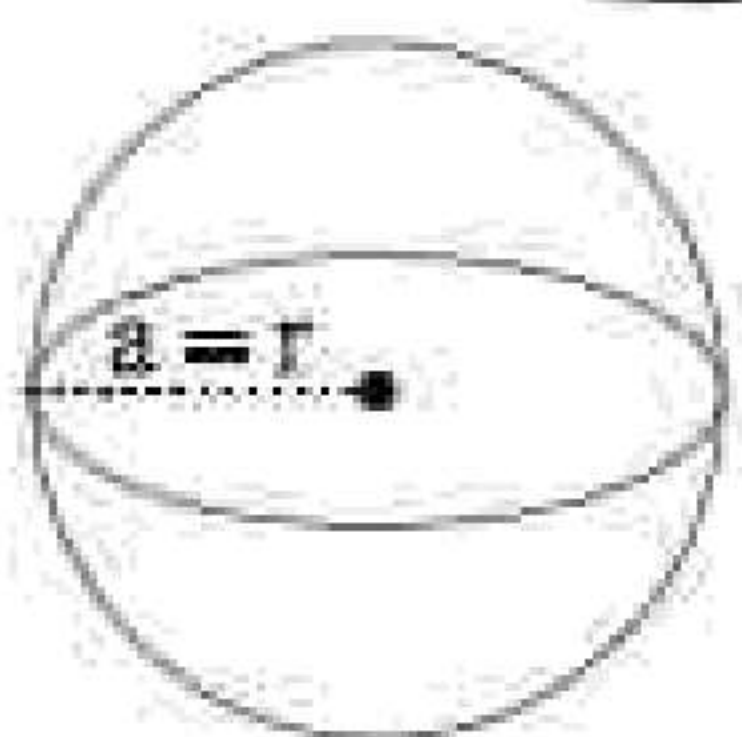
۲۲- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0 \Rightarrow r = \frac{\sqrt{4 + 16 + 16}}{2} = 3$$

اگر بیضی هم‌مرکز با دایره باشد و بر آن در دو نقطه مماس باشد، یکی از دو حالت زیر اتفاق می‌افتد:



$$\left. \begin{matrix} b=3 \\ c=1 \end{matrix} \right\} \Rightarrow a = \sqrt{10} \Rightarrow e = \frac{1}{\sqrt{10}}$$



$$\left. \begin{matrix} a=3 \\ c=1 \end{matrix} \right\} \Rightarrow e = \frac{1}{3}$$

۲۳- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. با توجه به اینکه طول کانون‌ها یکسان است، پس بیضی قائم است.

$$O = \frac{F + F'}{2} = (-2, 2)$$

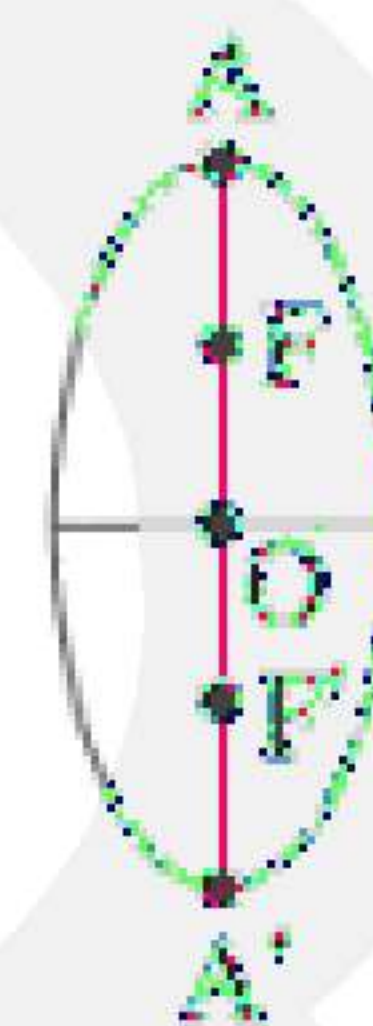
$$FF' = 2c = 6 - (-2) = 8 \Rightarrow c = 4$$

$$2b = 4 \Rightarrow b = 2$$

$$\Rightarrow a^2 = b^2 + c^2$$

$$\Rightarrow a^2 = 16 + 4 = 20 \Rightarrow a = 2\sqrt{5}$$

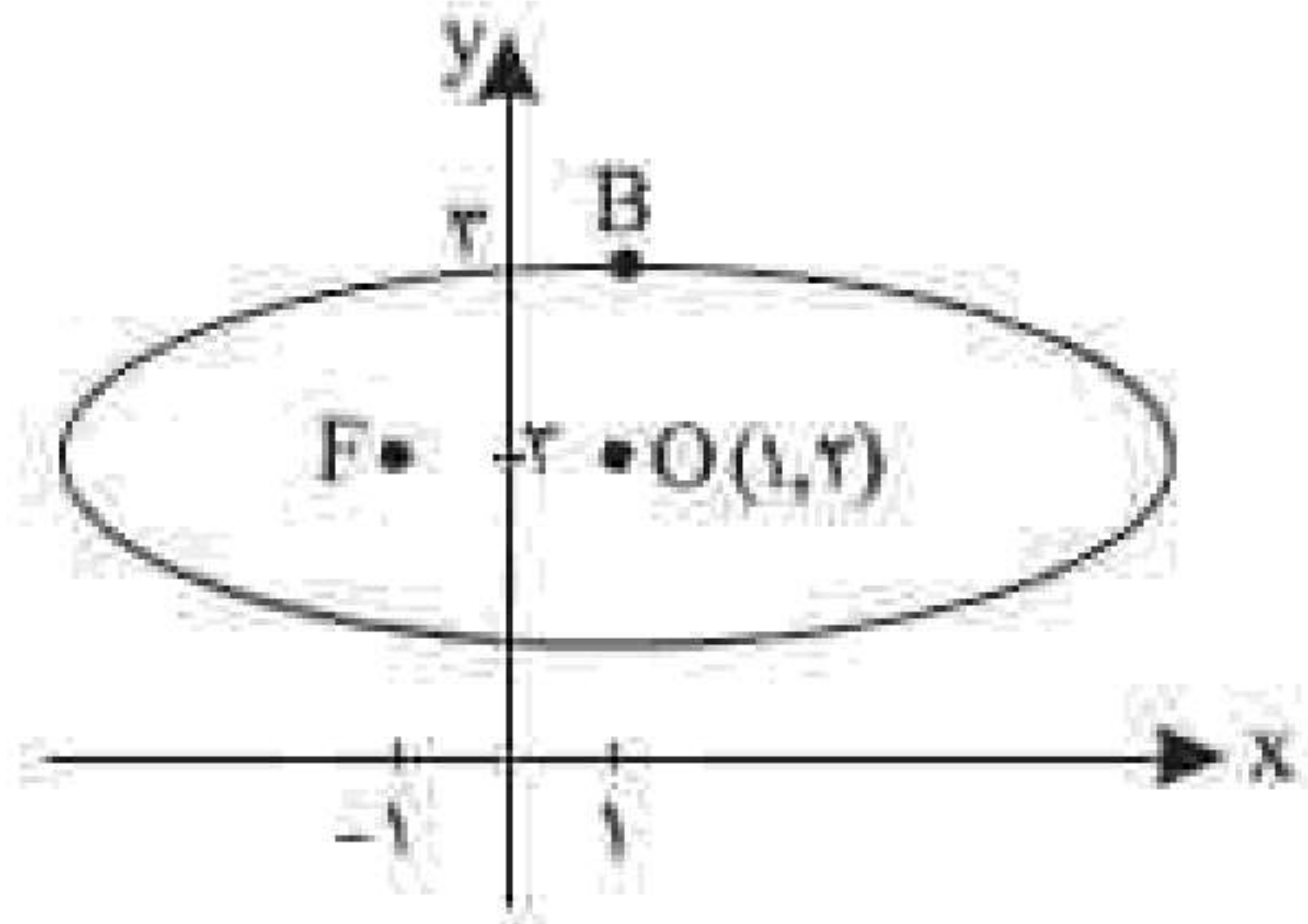
$$\text{بالا ترین نقطه: } A(-2, 2 + 2\sqrt{5})$$





۲۴- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

مرکز بیضی با کانون هم‌عرض و با رأس B هم‌طول است، پس مختصات آن $O(1, 2)$ است. در این صورت فاصله کانونی $OF = 2$ است و کانون دیگر $F'(3, 2)$ است. هم‌چنین $b = OB = 1$ و $c = OF = 2$ است، پس:



$$a^2 = b^2 + c^2 = 1 + 4 = 5 \Rightarrow a = \sqrt{5}$$

اگر نقطه‌ای خارج بیضی باشد، مجموع فواصل آن از دو کانون بیش‌تر از $2a$ است.

$$F(-1, 2), F'(3, 2), 2a = 2\sqrt{5} \approx 4.47$$

گزینه (۱):

$$\begin{aligned} M\left(3, \frac{5}{2}\right) &\Rightarrow MF + MF' = \sqrt{16 + \frac{1}{4}} + \sqrt{\frac{1}{4}} \\ &= \sqrt{\frac{65}{4}} + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{65} + 1}{2} \approx 4.53 > 2a \end{aligned}$$

گزینه (۲):

$$N(2, 2) \Rightarrow NF + NF' = 3 + 1 = 4 < 2a$$

گزینه (۳):

$$\begin{aligned} P\left(0, \frac{3}{2}\right) &\Rightarrow PF + PF' = \sqrt{1 + \frac{1}{4}} + \sqrt{9 + \frac{1}{4}} \\ &= \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{\sqrt{37}}{2} = \frac{\sqrt{37} + \sqrt{5}}{2} \approx 4.1 < 2a \end{aligned}$$

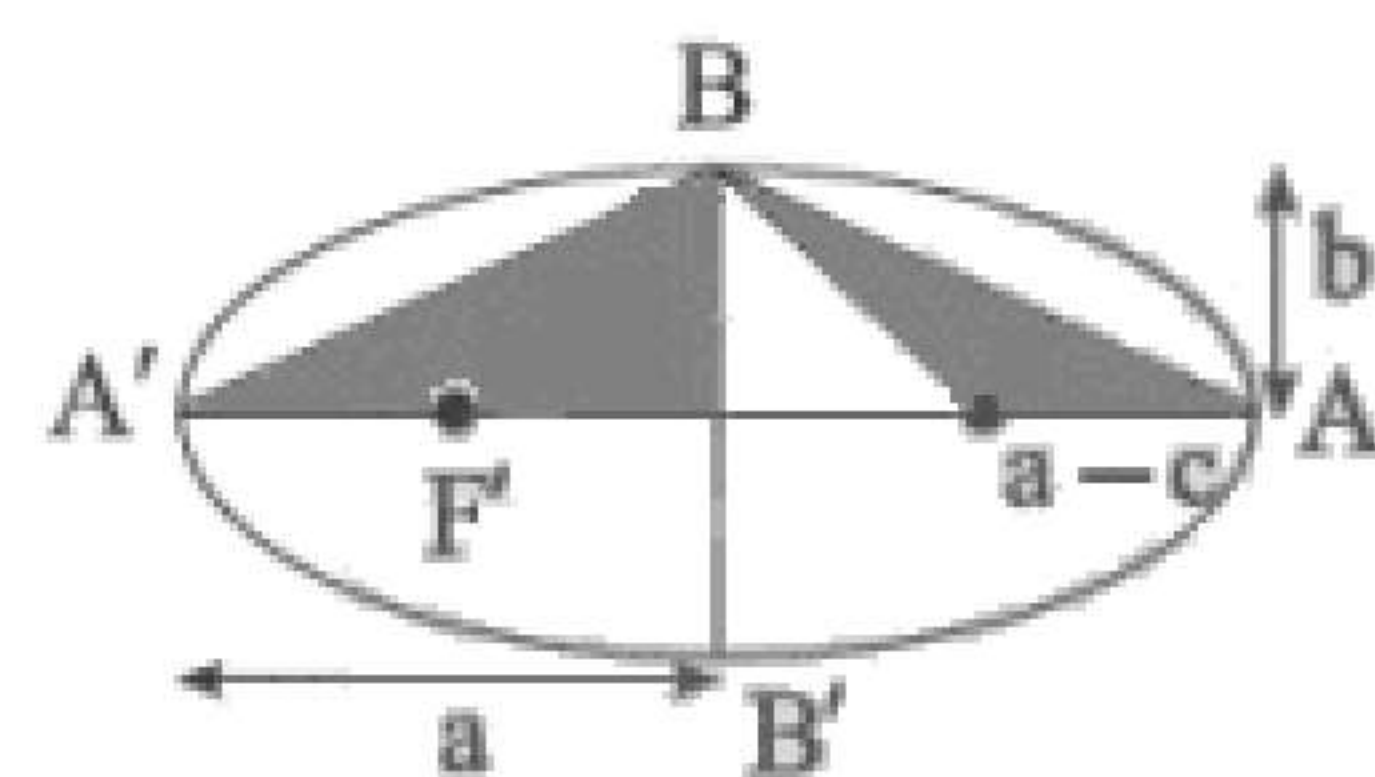
گزینه (۴):

$$Q\left(0, \frac{5}{2}\right) \Rightarrow QF + QF' = \sqrt{1 + \frac{1}{4}} + \sqrt{9 + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{37} + \sqrt{5}}{2} < 2a$$

۲۵- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\frac{S_y}{S_x} = \frac{\frac{b \times a}{2}}{\frac{b \times (a - c)}{2}} = \frac{a}{a - c} = 3 \Rightarrow a = 3a - 3c$$

$$\Rightarrow 2a = 3c \Rightarrow e = \frac{c}{a} = \frac{2}{3}$$





۲۶- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

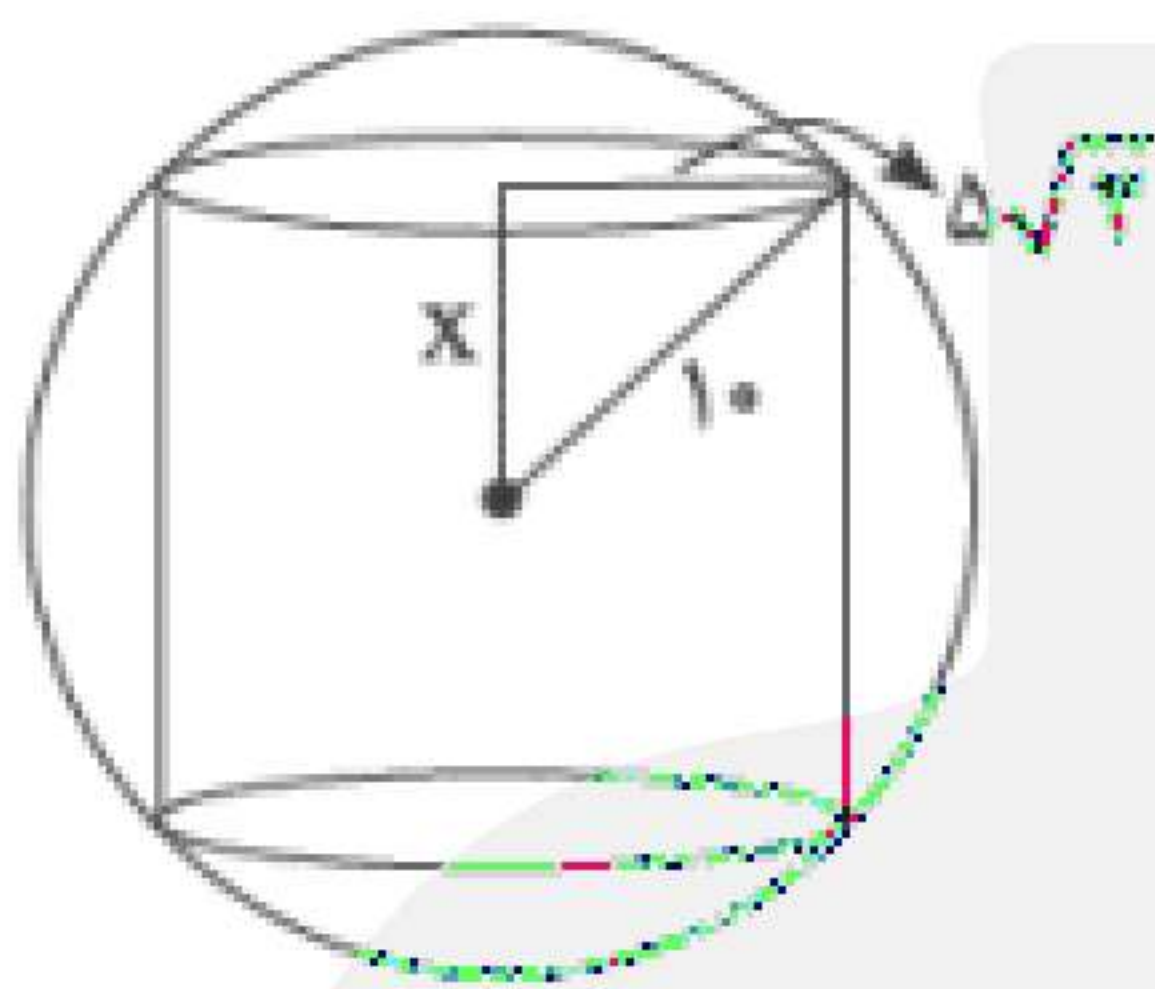
چون مرکز بیضی نقطه‌ی $O(-2, 2)$ و مختصات یکی از کانون‌ها $F'(-16, 2)$ است پس فاصله‌ی $OF' = 14$ مقدار پارامتر c را مشخص می‌کند یعنی $c = 14$ (فاصله‌ی مرکز بیضی تا یکی از کانون‌ها برابر c یعنی نصف فاصله‌ی کانونی است).

از طرفی چون طول قطر کوچک بیضی برابر $2b = 24$ است. پس $b = 12$ و در نتیجه داریم:

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow a^2 = 144 + 196 = 340 \Rightarrow a = \sqrt{340} = 2\sqrt{85}$$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{14}{2\sqrt{85}} = \frac{7}{\sqrt{85}} \Rightarrow \frac{7}{\sqrt{85}} \in \left(\frac{7}{10}, \frac{7}{9}\right)$$

۲۷- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.



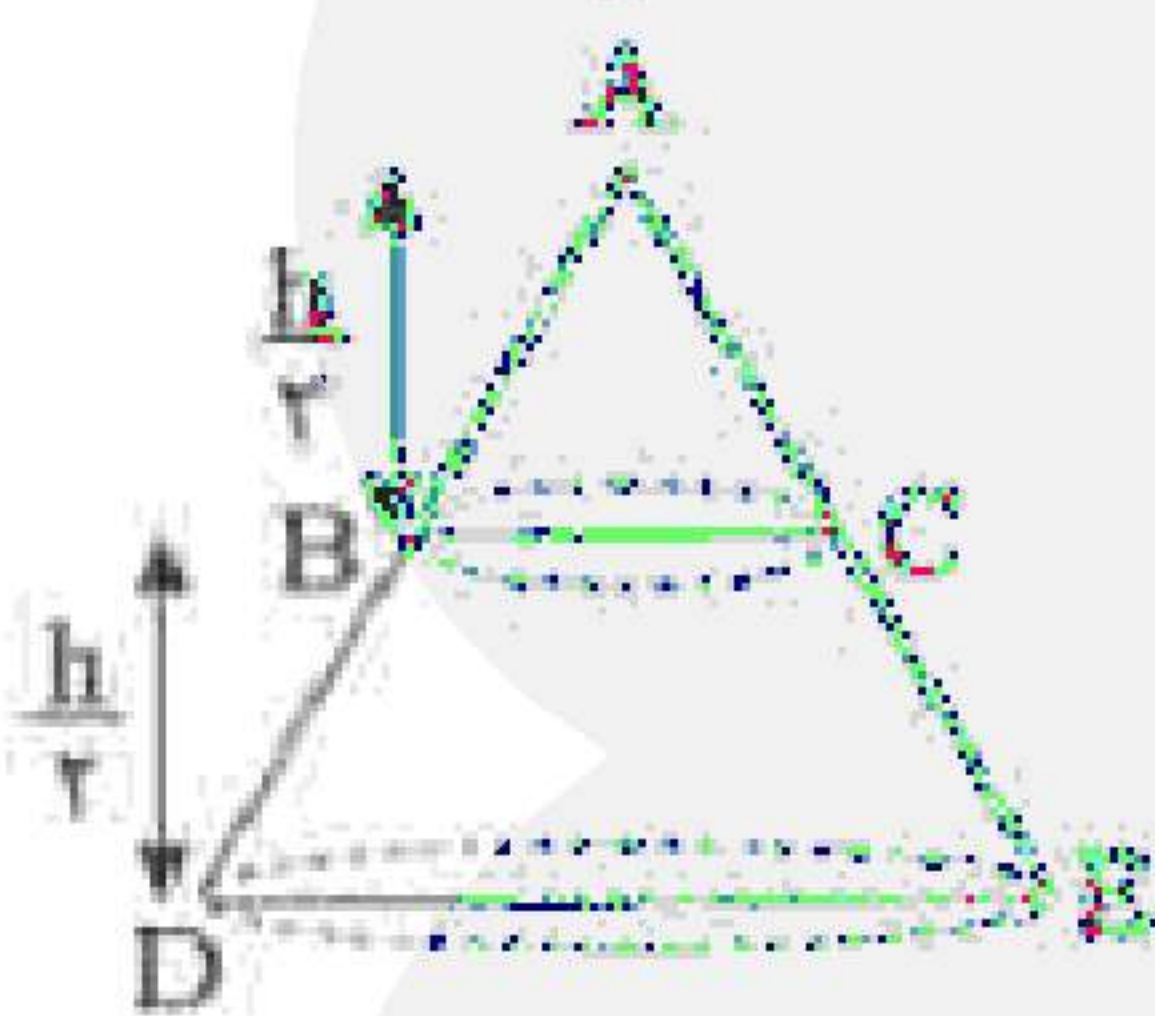
$$x^2 = 10^2 - (5\sqrt{3})^2 = 100 - 75 = 25 \\ \Rightarrow x = 5$$

ارتفاع استوانه: $2x = 10$

۲۸- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. مثلث ABC با مثلث ADE متشابه است و نسبت

تشابه $\frac{1}{2}$ می‌باشد. پس نسبت مساحت آن‌ها $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$ و نسبت حجم این دو

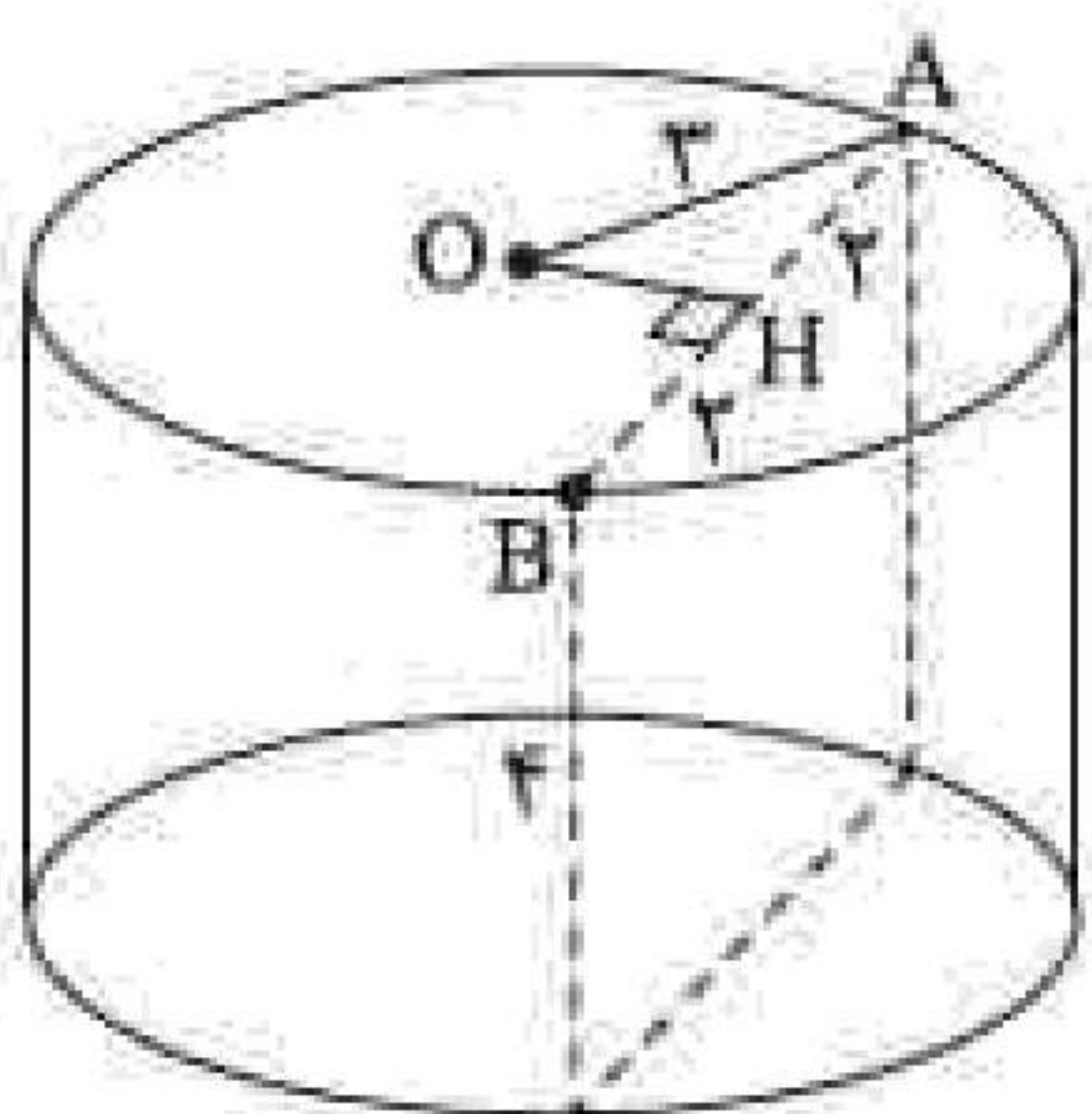
مخروط $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$ می‌باشد.



$$\frac{V_{ADE}}{V_{ABC}} = \frac{1}{8} \Rightarrow \frac{V_{BCDE}}{V_{ABC}} = \frac{7}{8}$$

۲۹- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

سطح مقطع استوانه با یک صفحه در حالتی که صفحه عمود بر قاعده باشد، مستطیل است. در این حالت ممکن است مستطیل مذکور، مربع باشد. با توجه به این که مستطیل مذکور مربع است، $AB = 4$ است، پس $AH = 2$. در مثلث قائم‌الزاویه OAH داریم:

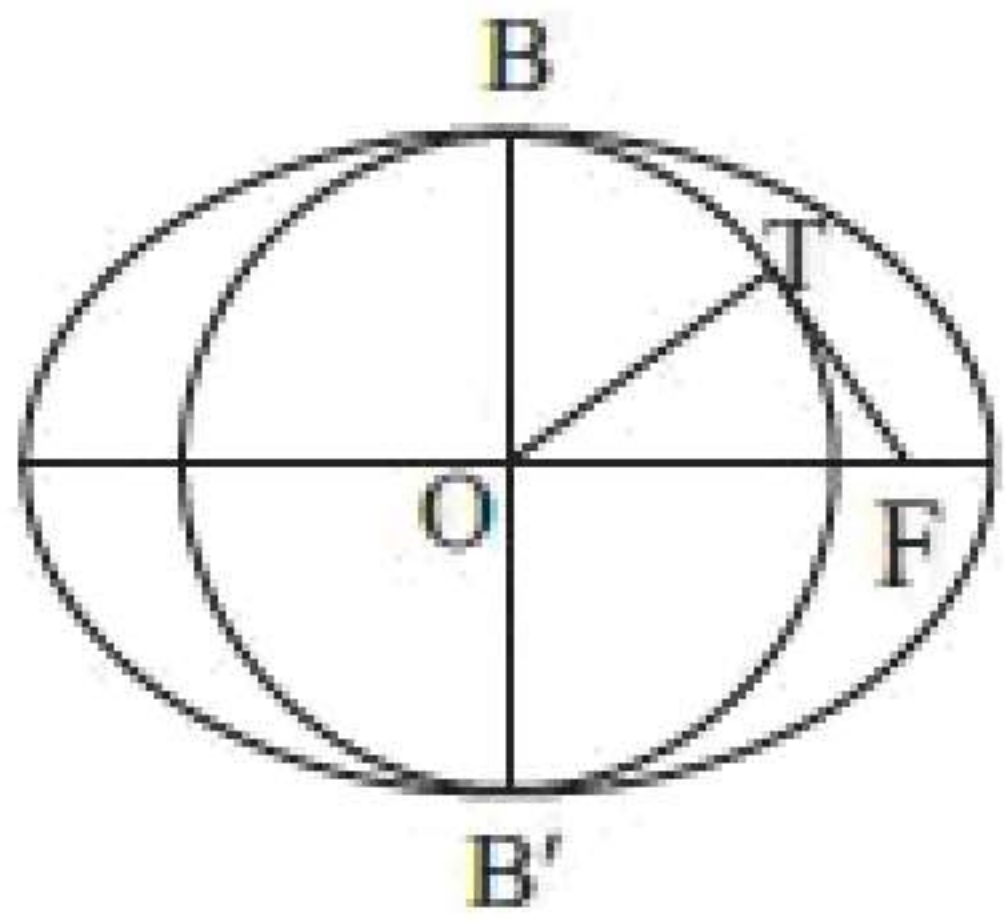


$$OA^2 = OH^2 + HA^2 \Rightarrow 9 = OH^2 + 4 \Rightarrow OH = \sqrt{5}$$



۳۰- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

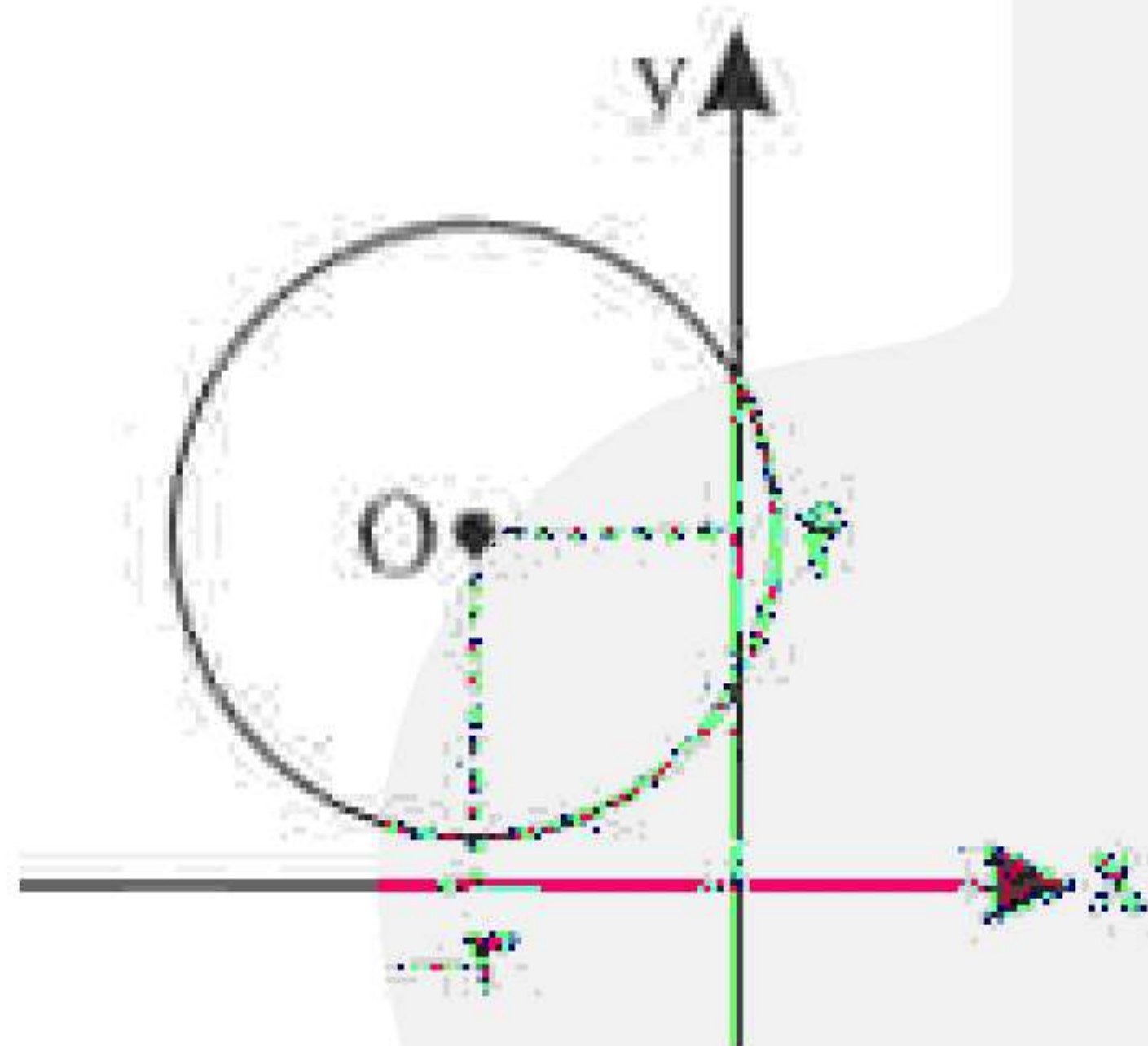
$$\begin{cases} 2a = \sqrt{34} \Rightarrow a = \frac{\sqrt{34}}{2} \Rightarrow b^2 = a^2 - c^2 = \sqrt{\frac{34}{4} - \frac{25}{4}} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2} \\ 2c = 5 \Rightarrow c = \frac{5}{2} \end{cases}$$



چون دایره به قطر BB' را رسم کرده‌ایم، پس شعاع آن برابر b است، یعنی OT = b و چون OF = c، پس طبق رابطه‌ی فیثاغورس داریم:

$$FT^2 = OF^2 - OT^2 = c^2 - b^2 = \frac{25}{4} - \frac{9}{4} = 4 \Rightarrow FT = 2$$

۳۱- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

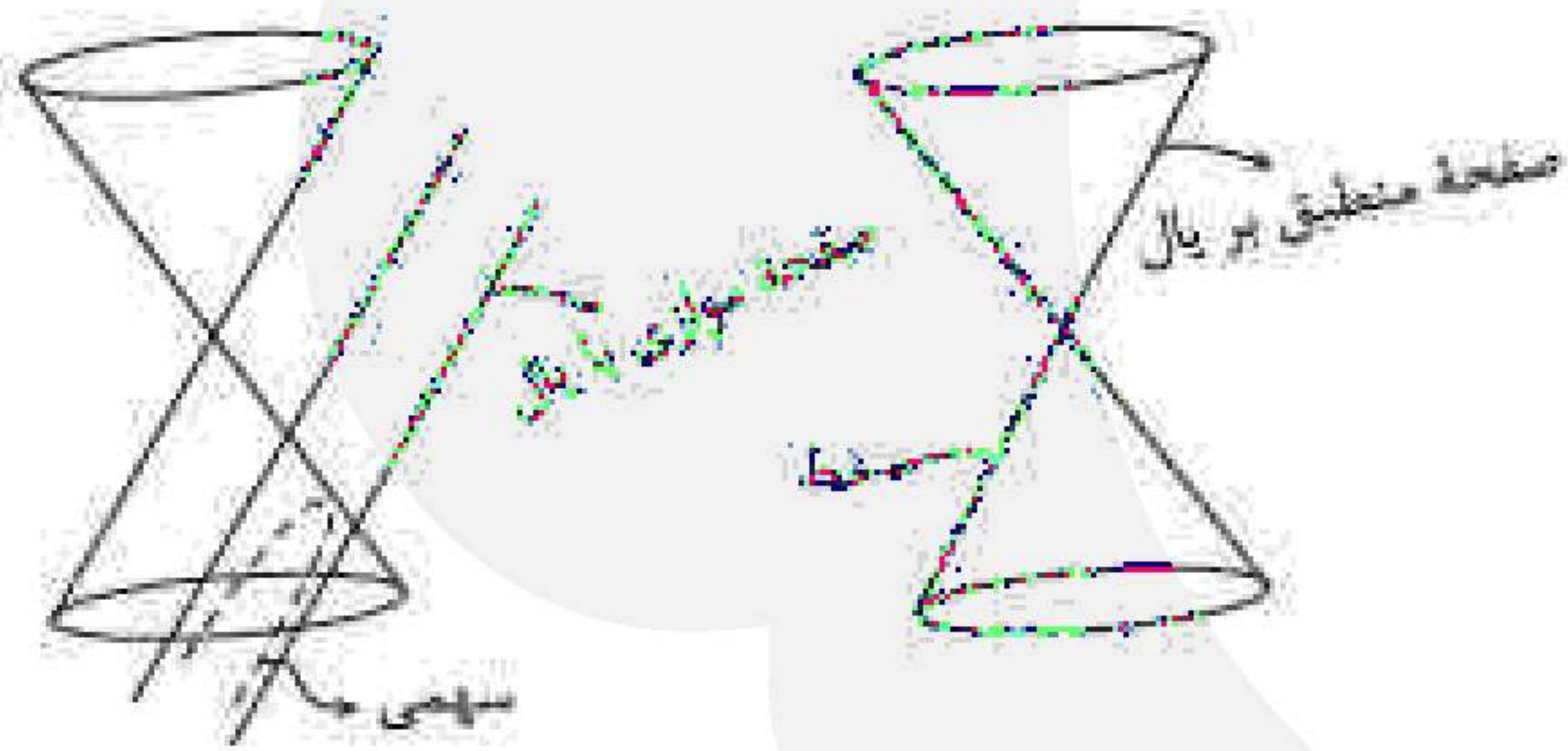


$$\begin{aligned} (2x + 6)^2 + (2y - 8)^2 &= 40 \\ \Rightarrow 4(x + 3)^2 + 4(y - 4)^2 &= 40 \\ \Rightarrow (x + 3)^2 + (y - 4)^2 &= 10 \\ \Rightarrow O(-3, 4), R &= \sqrt{10} \end{aligned}$$

با رسم دایره در دستگاه محورهای مختصات مشخص می‌شود که دایره از نواحی اول و دوم می‌گذرد.

«بانک سوال یاوران دانش»

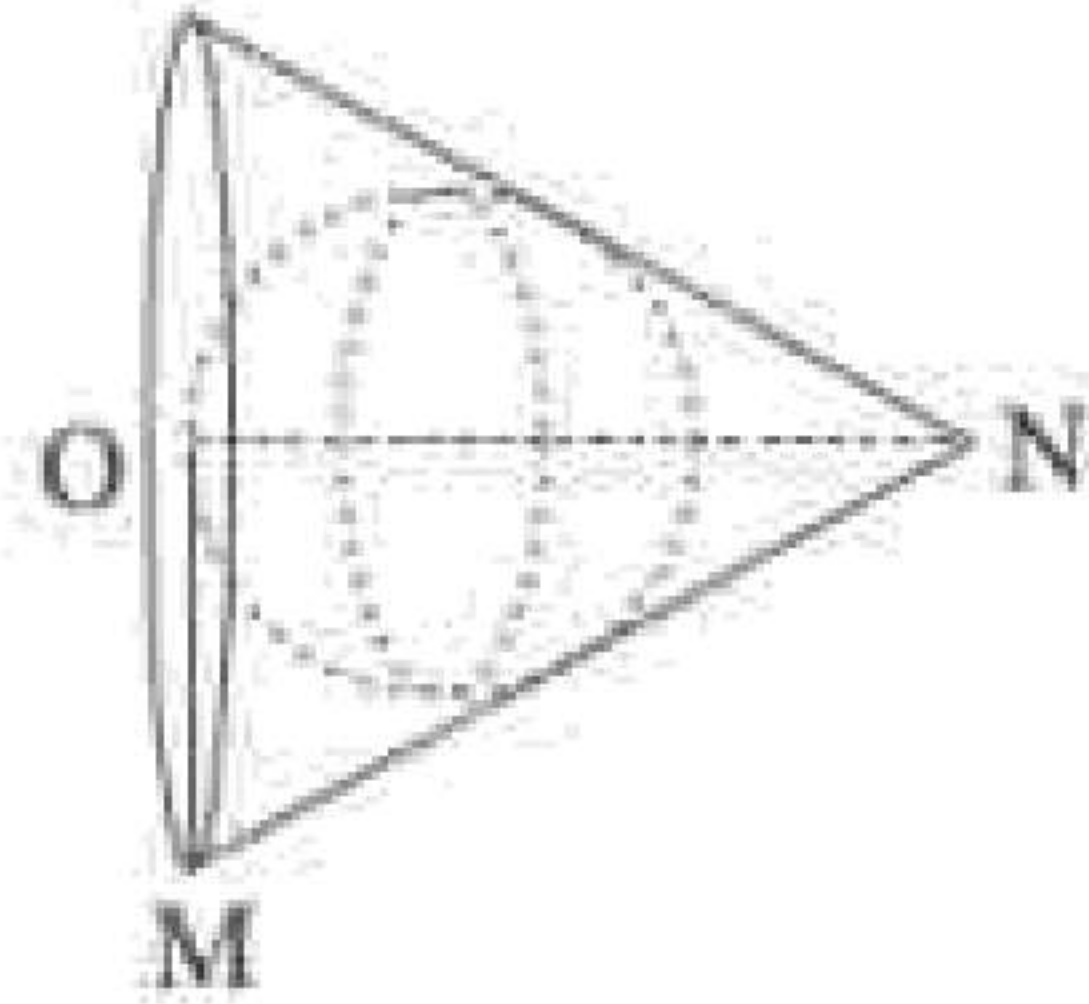
۳۲- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.





۳۳- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ابتدا با استفاده از معادله خط d ، محل برخورد این خط با محورهای مختصات را مشخص می‌کنیم:

$$3x - 4y - 12 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \text{محل برخورد با محور } x \text{ ها: } N(4, 0) \\ \text{محل برخورد با محور } y \text{ ها: } M(0, -3) \end{cases}$$



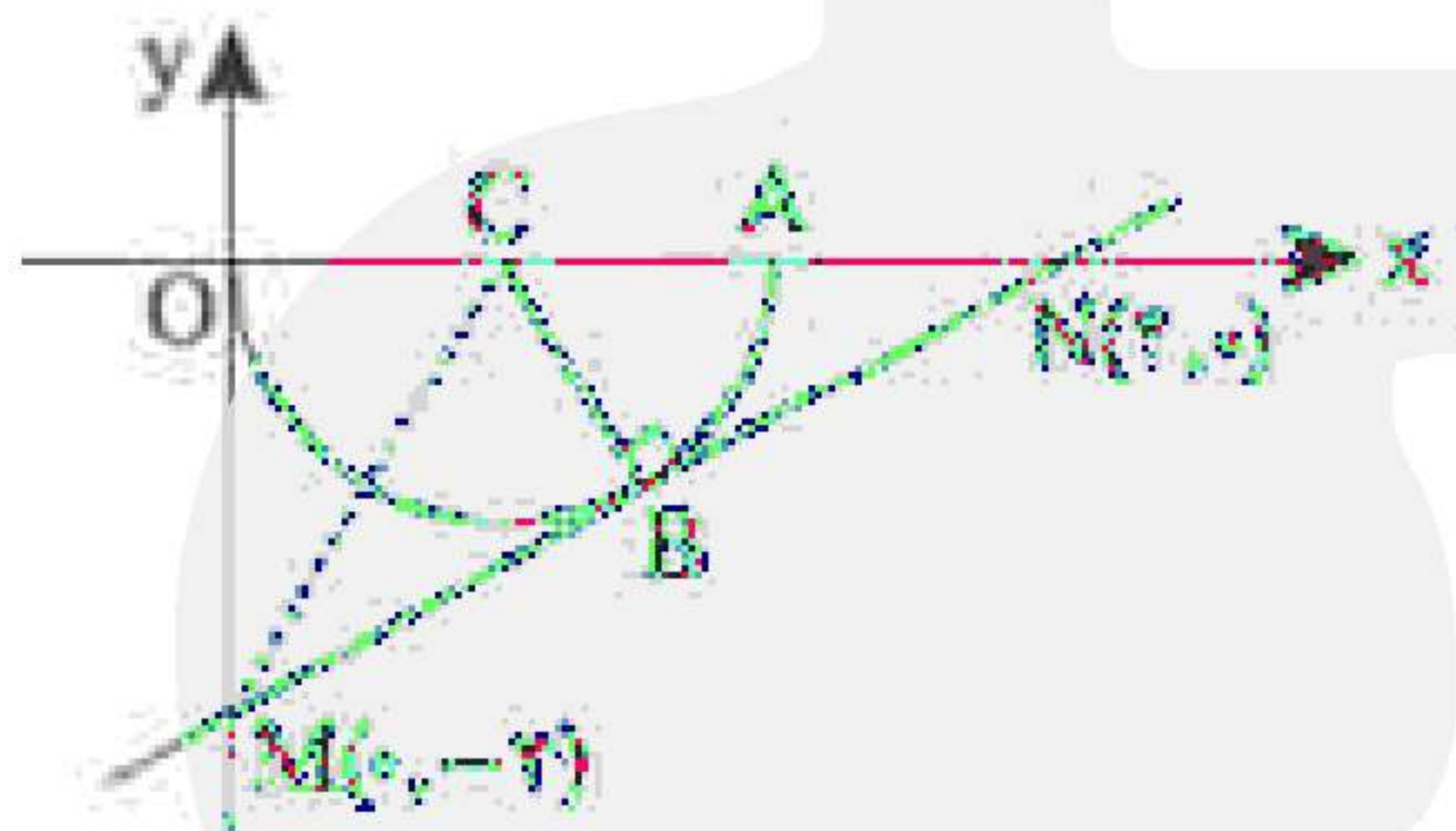
مطابق شکل زیر، حجم حاصل از دوران ناحیه‌ی سایه زده شده حول خط $y = 0$ ، یک مخروط با شعاع قاعده‌ی OM و ارتفاع ON است که یک کره با شعاع $OC = BC = r$ از آن جدا شده است، بنابراین برای محاسبه‌ی حجم ناحیه‌ی سایه زده باید ابتدا اندازه‌ی شعاع کره را به دست آوریم:

در شکل زیر و در مثلث قائم‌الزاویه‌ی OMN براساس رابطه‌ی فیثاغورث داریم:

$$MN^2 = OM^2 + ON^2 \Rightarrow MN = \sqrt{9 + 16} = 5$$

از طرفی دو مثلث MOC و MBC بنابر حالت (ض ض ض) هم‌نهشت هستند. بنابراین اجزای متناظر آن‌ها با هم برابر خواهد بود، پس:

$$OM = MB = 3$$



حال در مثلث قائم‌الزاویه‌ی BCN داریم:

$$\begin{cases} BN = MN - MB \xrightarrow{MN=5, MB=3} BN = 5 - 3 = 2 \\ CN = ON - OC = 4 - r \\ BC = r \end{cases}$$

$$\Rightarrow CN^2 = BC^2 + BN^2 \Rightarrow (4 - r)^2 = r^2 + 4 \Rightarrow r = \frac{3}{2}$$

حال حجم حاصل از دوران برابر است با:

$$V = V_{\text{مخروط}} - V_{\text{کره}}$$

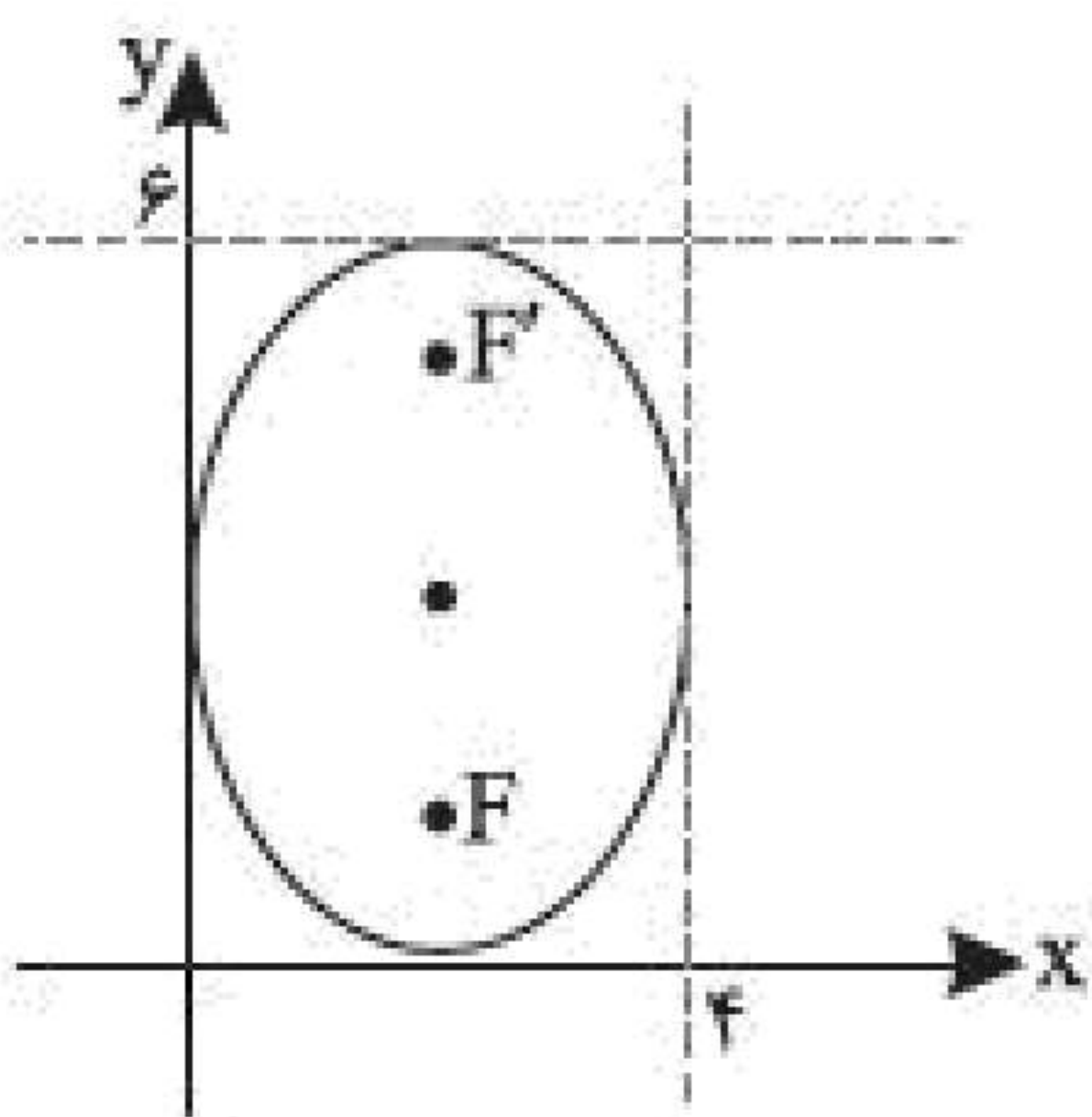
$$V_{\text{مخروط}} = \frac{1}{3}\pi(OM)^2 \times ON = \frac{1}{3}\pi \times 9 \times 4 = 12\pi$$

$$V_{\text{کره}} = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi \times \left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{4}{5}\pi$$

$$V = 12\pi - \frac{4}{5}\pi = \frac{7}{5}\pi$$

۳۴- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

مشخص است که مرکز بیضی نقطه‌ی $O(2, 3)$ است و بیضی قائم است.



$$2a = 6 \Rightarrow a = 3$$

$$2b = 4 \Rightarrow b = 2$$

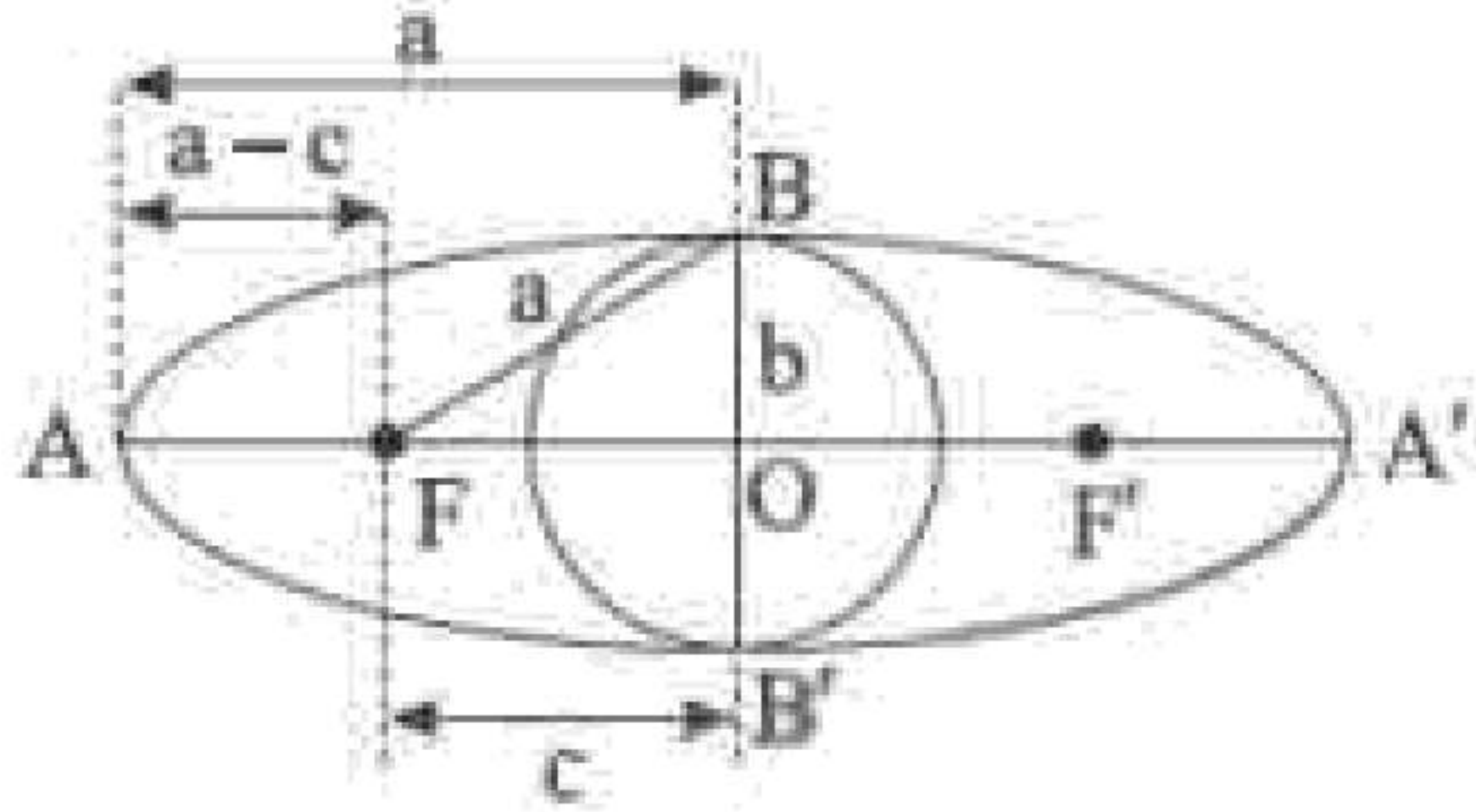
$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 9 = 4 + c^2 \Rightarrow c = \sqrt{5}$$

پس مختصات کانون‌ها $F(2, 3 - \sqrt{5})$ و $F'(2, 3 + \sqrt{5})$ است.



۳۵- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. می‌دانیم که بزرگ‌ترین وتر دایره همان قطر دایره است، بنابراین با توجه به شکل زیر اگر دو سر قطر یک دایره بر رئوس غیرکانونی یک بیضی منطبق باشد، در این صورت طول قطر کوچک بیضی (BB') با قطر دایره برابر است، پس:

$$b = ۴ = \text{شعاع دایره}$$



حال با استفاده از رابطه‌ی خروج از مرکز بیضی، داریم:

$$e = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2} \Rightarrow ۰/۶ = \sqrt{1 - \left(\frac{۴}{a}\right)^2} \Rightarrow \frac{۳۶}{۱۰۰} = 1 - \left(\frac{۴}{a}\right)^2$$

$$\Rightarrow \left(\frac{۴}{a}\right)^2 = \frac{۶۴}{۱۰۰} \Rightarrow a = ۵$$

در مثلث OBF براساس رابطه‌ی فیثاغورس، داریم:

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{۲۵ - ۱۶} = ۳$$

از طرفی مطابق شکل فوق، نزدیک‌ترین فاصله‌ی نقاط بیضی از کانون، برابر است با:

$$AF = A'F' = a - c \xrightarrow[c=۳]{a=۵} AF = A'F' = ۵ - ۳ = ۲$$

۳۶- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$x^2 + y^2 - ۴x - ۶y = ۳$$

$$O_2(۲, ۳) \quad R_2 = \sqrt{۴ + ۹ + ۳} = ۴$$

$$O_1(-۱, -۱) \quad d = O_1 O_2 = \sqrt{۹ + ۱۶} = ۵$$

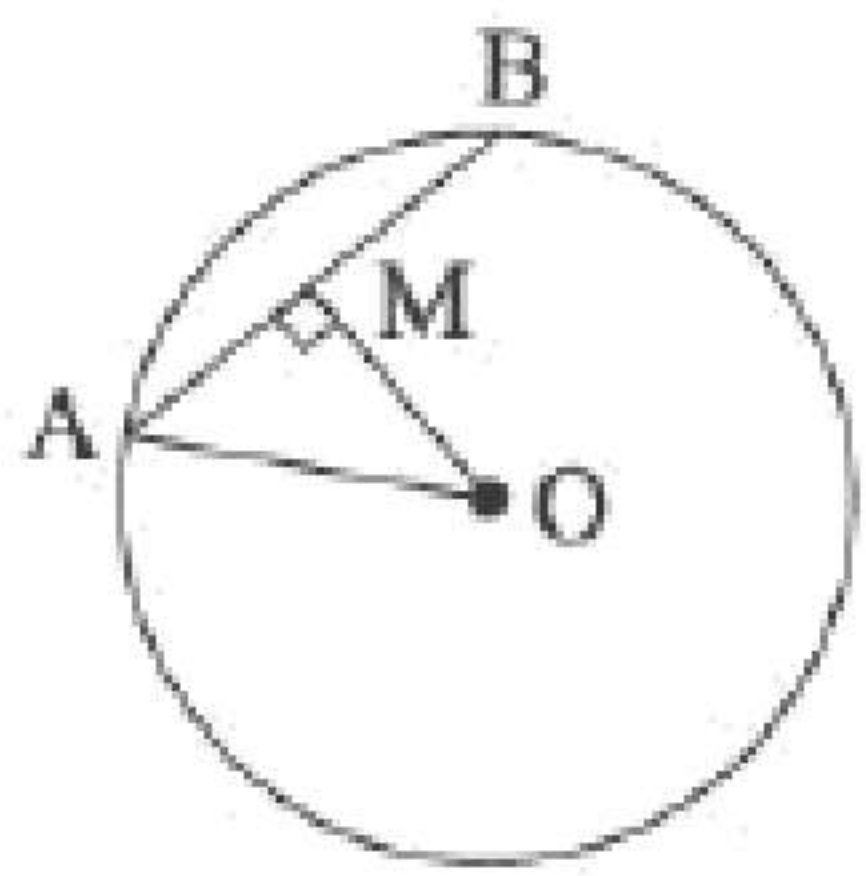
$$\text{مماس درون: } d = R_1 - R_2 \Rightarrow ۵ = R_1 - ۴ \Rightarrow R_1 = ۹$$

$$\text{معادله‌ی دایره: } (x+۱)^2 + (y+۱)^2 = ۸۱ \Rightarrow x^2 + ۲x + ۱ + y^2 + ۲y + ۱ = ۸۱$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + ۲x + ۲y - ۷۹ = ۰$$



۳۷- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. چون معادله‌ی $2x^2 + ay^2 - 12x + 8y + 8 = 0$ معادله‌ی یک دایره است، پس باید ضرایب x^2 و y^2 با هم برابر باشند، یعنی $a = 2$ است، در این صورت خواهیم داشت:



$$2x^2 + 2y^2 - 12x + 8y + 8 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 - 6x + 4y + 4 = 0$$

$$\text{مرکز } O(3, -2), R = \frac{1}{2}\sqrt{36 + 16 - 16} = 3$$

حال اگر از مرکز دایره به وسط وتر موردنظر وصل کنیم، OM بر AB عمود خواهد بود، زیرا مثلث OAB متساوی‌الساقین است و در نتیجه خواهیم داشت:

$$OM = \sqrt{(3-1)^2 + 0} = 2 \Rightarrow AM = \sqrt{9 - 4} = \sqrt{5} \Rightarrow AB = 2\sqrt{5}$$

۳۸- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

چون طول قطر بزرگ بیضی برابر ۲a و طول کوچک آن برابر ۲b است پس خواهیم داشت:

$$\begin{cases} 2a = 4(2b) \Rightarrow a = 4b \\ 2c = 10\sqrt{3} \Rightarrow c = 5\sqrt{3} \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 16b^2 = b^2 + 75 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 15b^2 = 75 \Rightarrow b^2 = 5 \Rightarrow b = \sqrt{5} \Rightarrow a = 4\sqrt{5}$$

$$ABB' \text{ مثلث } S = \frac{1}{2} \times BB' \times OA = \frac{1}{2} \times 2b \times a = ab$$

$$4\sqrt{5} \times \sqrt{5} = 20$$

۳۹- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

چون معادله‌ی داده‌شده معادله‌ی یک دایره است، پس باید ضرایب x^2 و y^2 با هم برابر باشند. از این رو داریم:

$$6 - 6a = 12a \Rightarrow 18a = 6 \Rightarrow a = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \text{معادله‌ی دایره: } 4x^2 + 4y^2 + 2bx + 3by + 12 = 0$$

چون دایره از نقطه‌ی (۱, ۶) می‌گذرد، باید مختصات این نقطه در معادله‌ی دایره صدق کند. بنابراین داریم:

$$4(1) + 4(36) + 2b + 3b(6) + 12 = 0 \Rightarrow 160 + 20b = 0 \Rightarrow b = -8$$

$$\Rightarrow \text{معادله‌ی دایره: } 4x^2 + 4y^2 - 16x - 24y + 12 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 - 4x - 6y + 3 = 0$$

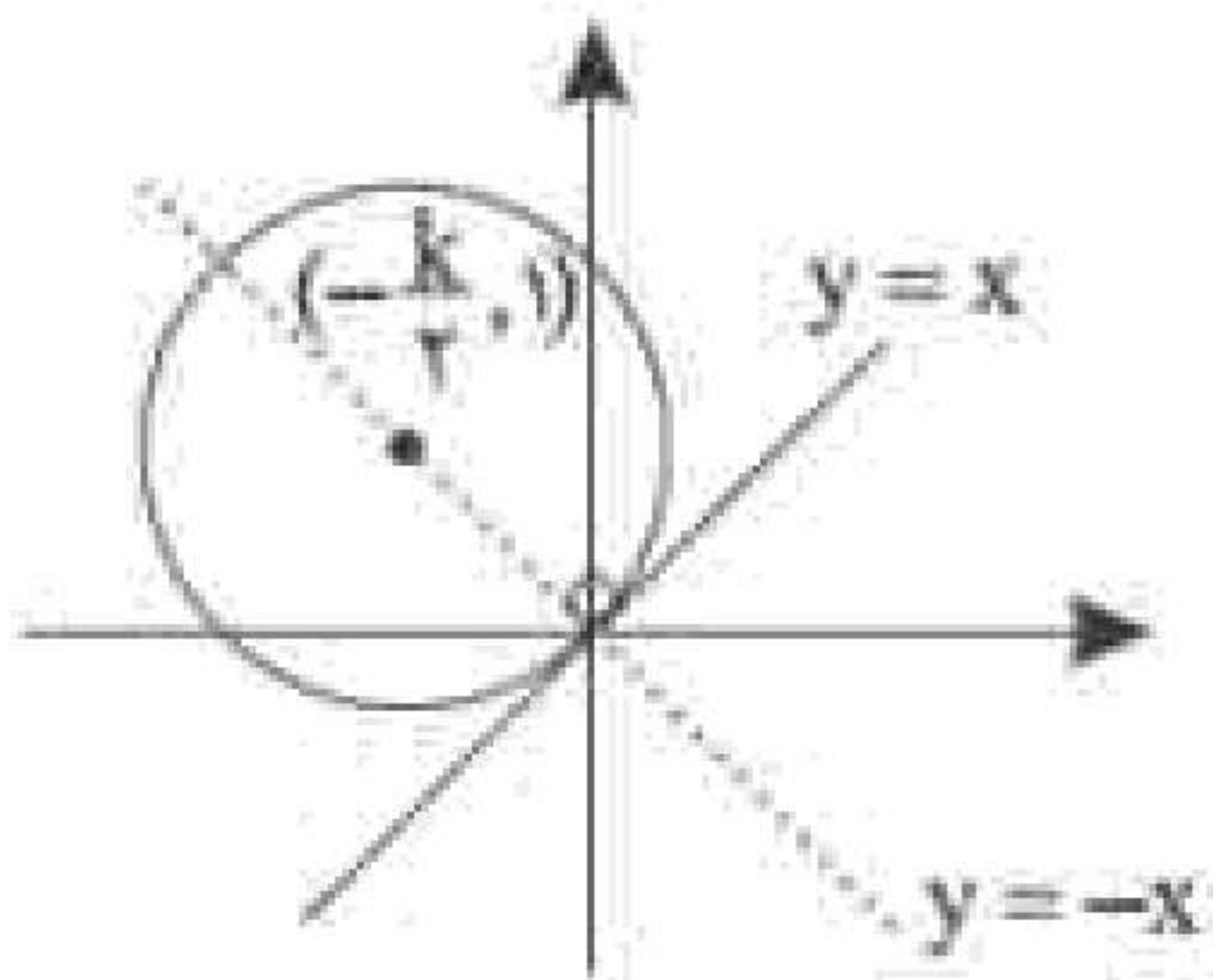
$$\Rightarrow R = \frac{1}{2}\sqrt{16 + 36 - 12} = \frac{1}{2}\sqrt{40} = \sqrt{10} \Rightarrow S = \pi R^2 = 10\pi$$



۴۰- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

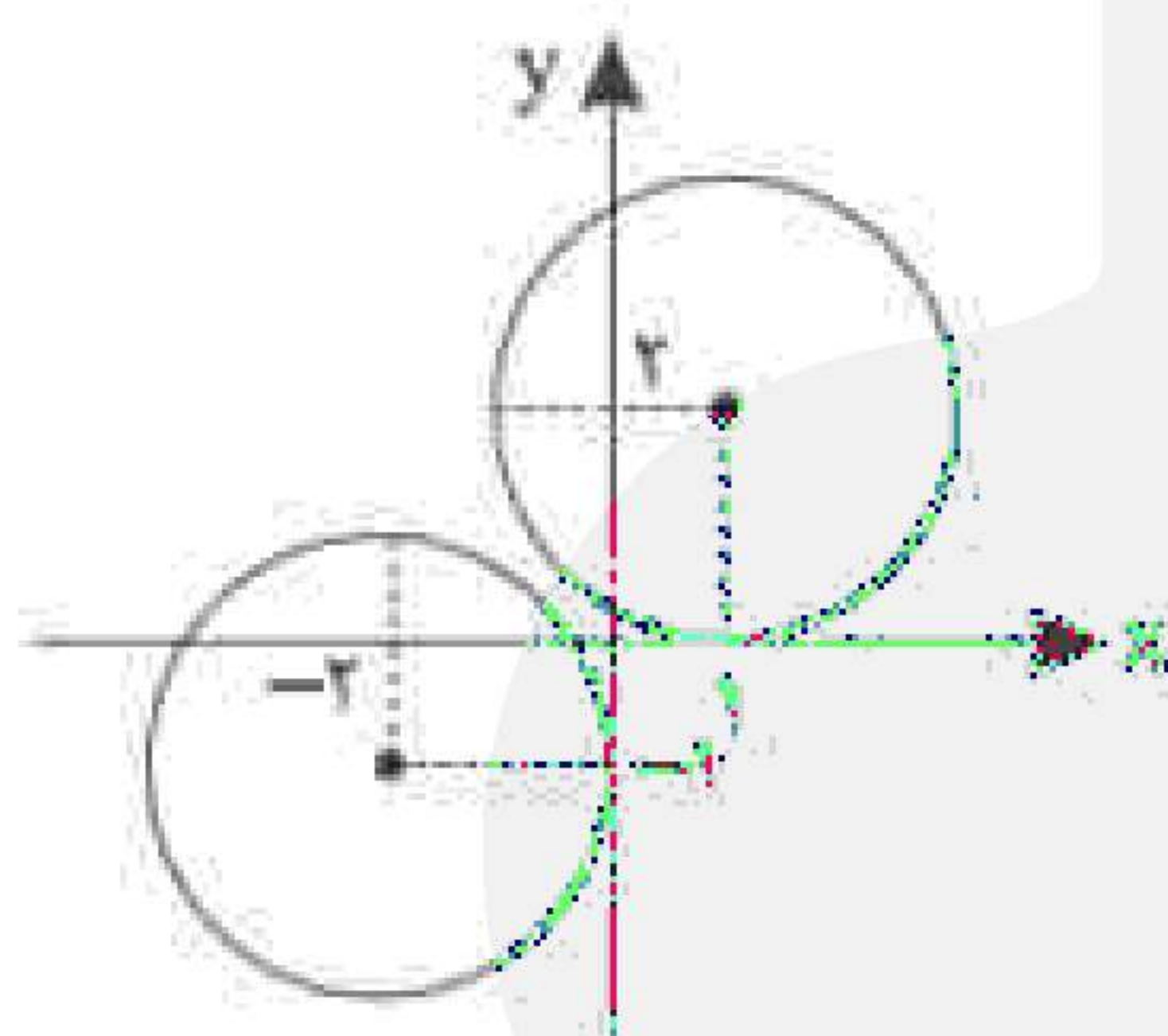
$$x^2 + y^2 + kx - 2y = 0 \Rightarrow \text{مرکز} = \left(-\frac{k}{2}, 1\right)$$

چون دایره در مبدأ مختصات بر خط $y = x$ مماس است، پس مرکز آن باید روی خط $y = -x$ قرار داشته باشد.



$$\begin{aligned} y = -x &\xrightarrow{\left(-\frac{k}{2}, 1\right)} 1 = -\left(-\frac{k}{2}\right) \Rightarrow k = 2 \\ \Rightarrow O(-1, 1) &\Rightarrow \text{شعاع} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2} \end{aligned}$$

۴۱- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.



$$\begin{aligned} O_1(1, 2), r_1 &= 2 \\ O_2(-2, -1), r_2 &= \sqrt{4+1+1} = 2 \\ O_1O_2 &= \sqrt{9+9} = 3\sqrt{2} \approx 4.24 \\ O_1O_2 &> r_1 + r_2 \Rightarrow \text{دو دایره متخارج هستند.} \end{aligned}$$

«بانک سوال یاوران دانش»

۴۲- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. MN وتر کانونی بیضی نامیده می‌شود (خطی که در کانون بیضی بر محور کانونی عمود

می‌شود و دو سر آن روی بیضی واقع می‌شود، وتر کانون بیضی نامیده می‌شود و اندازه‌ی آن از رابطه‌ی $MN = \frac{2b^2}{a}$

به دست می‌آید.) طبق شکل $AA' = 10$ و $BB' = 6$ است، پس خواهیم داشت:

$$2a = 10 \Rightarrow a = 5$$

$$2b = 6 \Rightarrow b = 3$$

$$\Rightarrow c^2 = a^2 - b^2 = 25 - 9 = 16 \Rightarrow c = 4$$

$$S_{\triangle MNF'} = \frac{1}{2} \times MN \times FF' = \frac{1}{2} \times \frac{2b^2}{a} \times 2c = \frac{2b^2c}{a} = \frac{2 \times 9 \times 4}{5} = \frac{72}{5} = 14\frac{2}{5}$$

۴۳- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

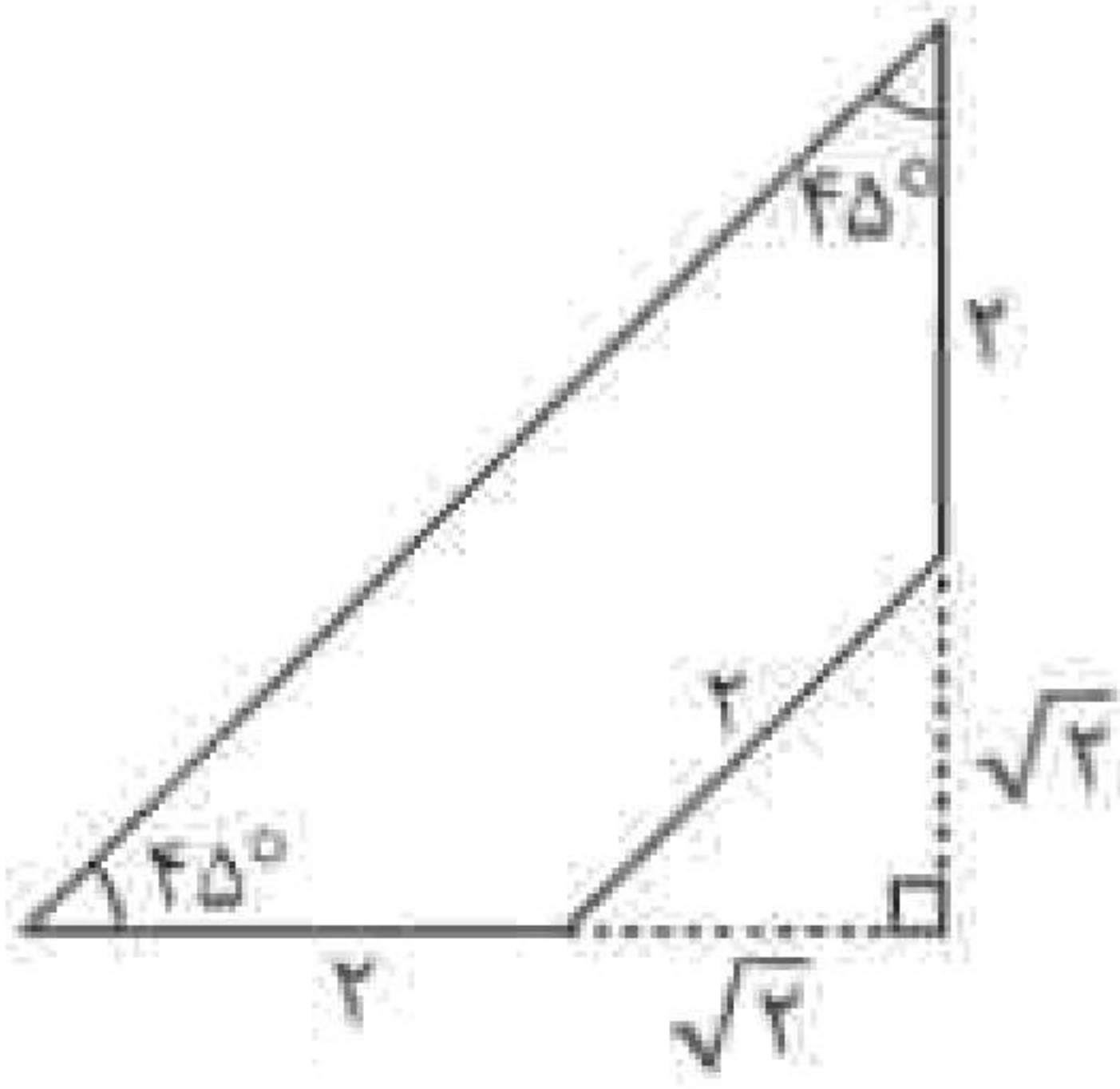
$$FA = a - c, BF = a \Rightarrow a - c = \frac{1}{2}a \Rightarrow c = \frac{a}{2} \Rightarrow e = \frac{c}{a} = \frac{1}{2}$$



۴۴- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

معلوم است که امتداد ساق‌ها بر هم عمود هستند.

حجم مخروط کوچک‌تر را از مخروط بزرگ‌تر کم می‌کنیم:



$$V = \frac{\pi}{3} (2 + \sqrt{2})^2 (2 + \sqrt{2}) - \frac{\pi}{3} (\sqrt{2})^2 \sqrt{2}$$

$$= \frac{\pi}{3} ((2 + \sqrt{2})^3 - \sqrt{2})^3 = \frac{\pi}{3} (8 + 12\sqrt{2} + 12 + 2\sqrt{2} - 2\sqrt{2})$$

$$= \frac{(20 + 12\sqrt{2})\pi}{3}$$

$$\frac{V}{\pi} = \frac{20}{3} + 4\sqrt{2} = \frac{20}{3} + \sqrt{32}$$

۴۵- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

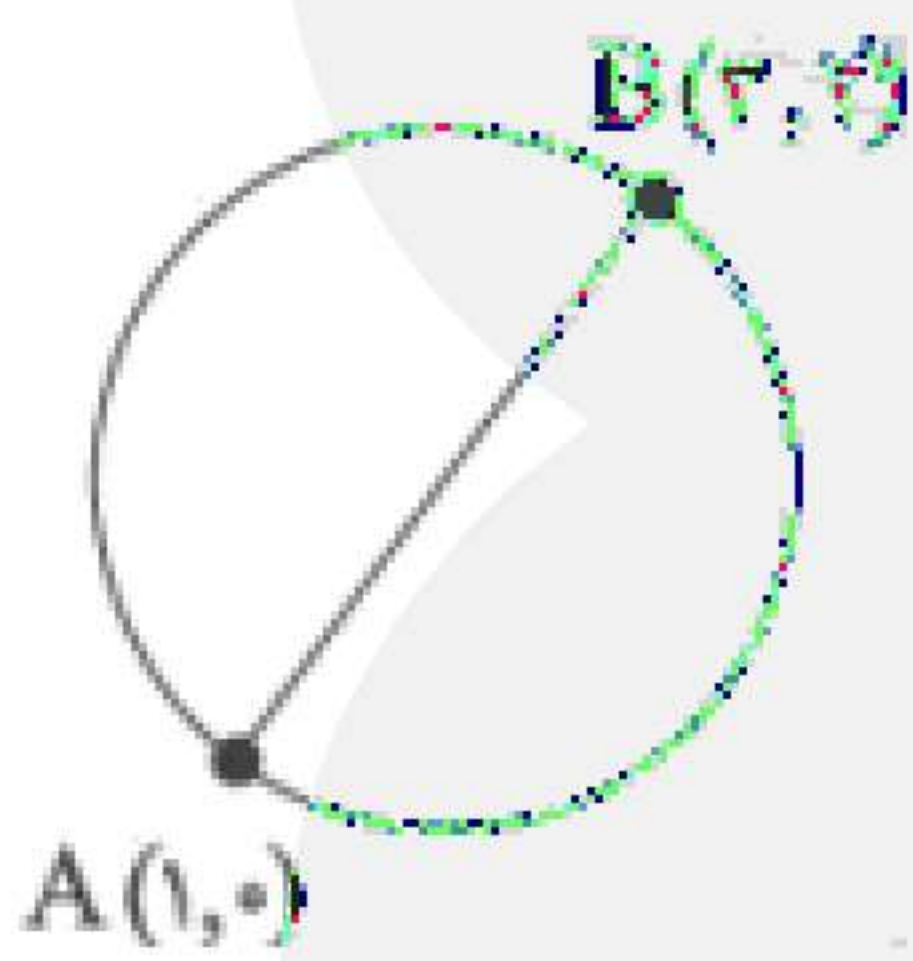
شکل حاصل از دوران، یک استوانه است که یک استوانه از آن خارج شده است. حجم آن برابر است با:

$$V = (5 + x)^2 \times 3\pi - x^2 \times 3 \times \pi = 3\pi (x^2 + 10x + 25 - x^2)$$

$$= 3\pi (25 + 10x) = 105\pi \Rightarrow 25 + 10x = 35 \Rightarrow x = 1$$

۴۶- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

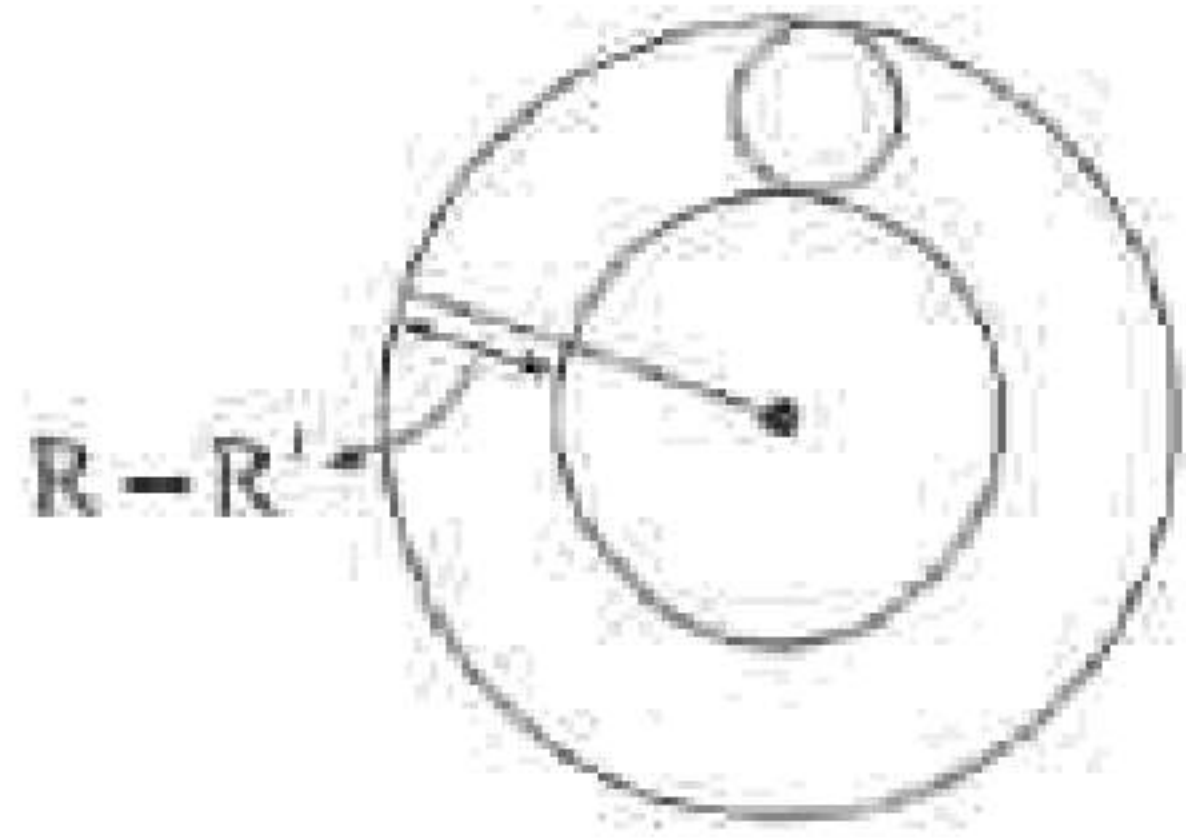
$$\text{مرکز دایره: } \frac{A+B}{2} = \left(\frac{3+1}{2}, \frac{2+0}{2} \right) = (2, 1)$$



$$2r = AB \Rightarrow 2r = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2} \Rightarrow r = \sqrt{2}$$

$$\text{معادله دایره: } (x-2)^2 + (y-1)^2 = (\sqrt{2})^2$$

$$x^2 - 4x + 4 + y^2 - 2y + 1 = 2 \Rightarrow x^2 + y^2 - 4x - 2y + 3 = 0$$



۴۷- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. اگر شعاع دایره بزرگتر را R و شعاع دایره کوچکتر را R' در نظر بگیریم، در این صورت چون دو دایره هم‌مرکز هستند، پس داریم:

$$x^2 + y^2 + ax + 4y - 4 = 0$$

$$O\left(-\frac{a}{2}, -2\right), R = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + 16 + 16} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + 32}$$

$$x^2 + y^2 - 2x + by - 11 = 0$$

$$O'\left(1, -\frac{b}{2}\right), R' = \frac{1}{2}\sqrt{4 + b^2 + 44} = \frac{1}{2}\sqrt{b^2 + 48}$$

$$\begin{cases} -\frac{a}{2} = 1 \Rightarrow a = -2 \Rightarrow R = \frac{1}{2}\sqrt{36} = 3 \\ -\frac{b}{2} = -2 \Rightarrow b = 4 \Rightarrow R' = \frac{1}{2}\sqrt{64} = 4 \end{cases}$$

$$R'' = \frac{R - R'}{2} = \frac{4 - 3}{2} = \frac{1}{2}$$
 شعاع دایره مطلوب

$$\pi R''^2 = \pi \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{4}$$
 مساحت دایره مطلوب

۴۸- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. فاصله‌ی مرکز دایره از هر خطی که به آن مماس است برابر با شعاع دایره است، ضمناً فاصله‌ی مرکز دایره از هر نقطه روی آن هم برابر شعاع است:

$|a| \rightarrow$ فاصله $D(\alpha, 2)$ از محور y ها

$$\Rightarrow \sqrt{(\alpha - 1)^2 + 2^2} \Rightarrow |a| = \sqrt{\alpha^2 - 2\alpha + 1 + 4} \Rightarrow \alpha^2 = \alpha^2 - 2\alpha + 5$$

$$\rightarrow \alpha = \frac{5}{2} \rightarrow R = \frac{5}{2}$$

پس معادله دایره به شکل زیر است:

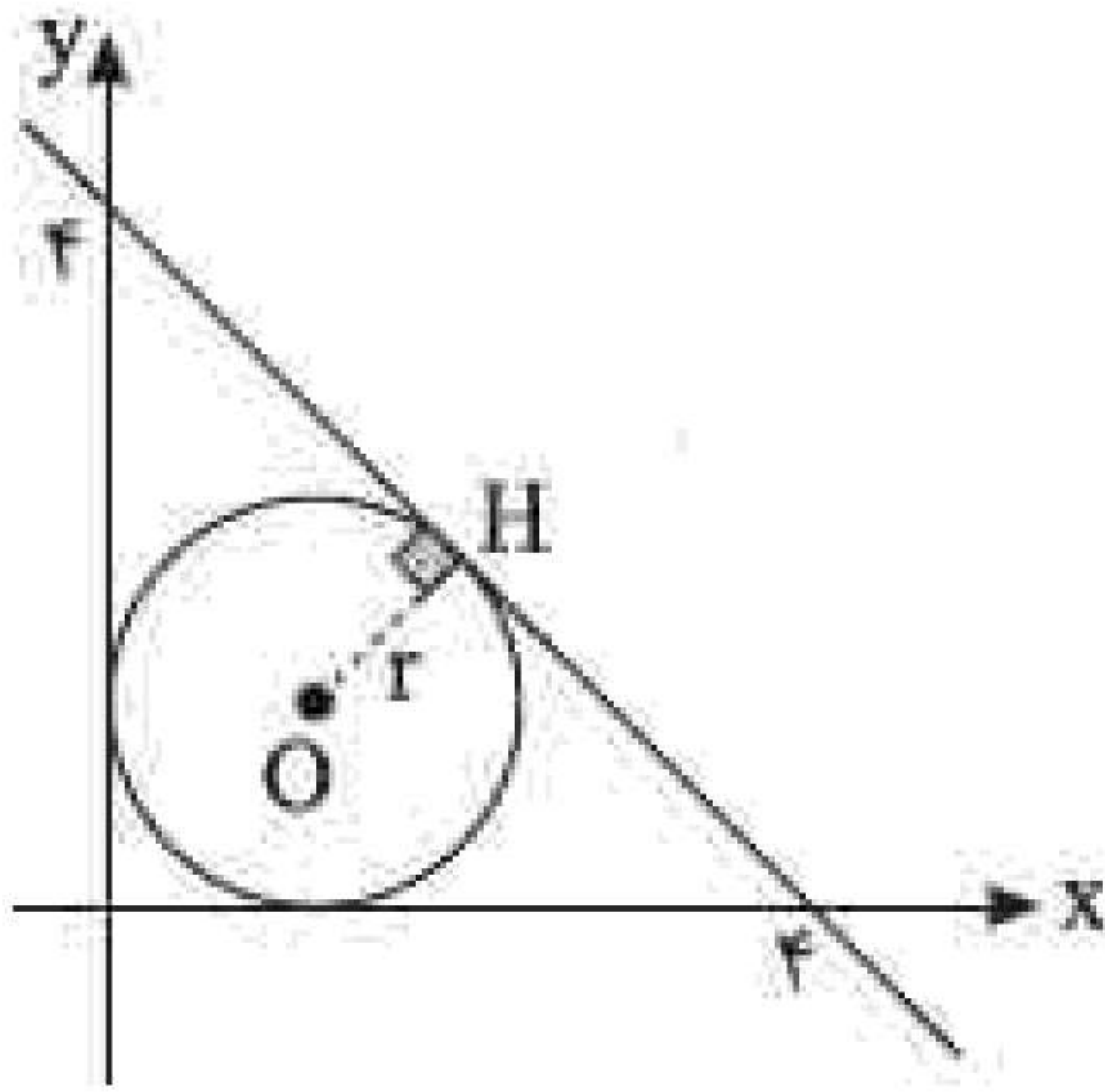
$$\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + (y - 2)^2 = \frac{25}{4} \xrightarrow{y=0} \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} \rightarrow x - \frac{5}{2} = \pm \frac{3}{2} \rightarrow x = 1, 4$$

پس $\beta = 4$ است.



۴۹- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

دایره بر محورهای مختصات مماس است. پس مرکز آن به صورت $O(r, r)$ می باشد. به علاوه بر خط $y = -x + 4$ هم مماس می باشد. پس فاصله ی آن از این خط هم برابر r می باشد.

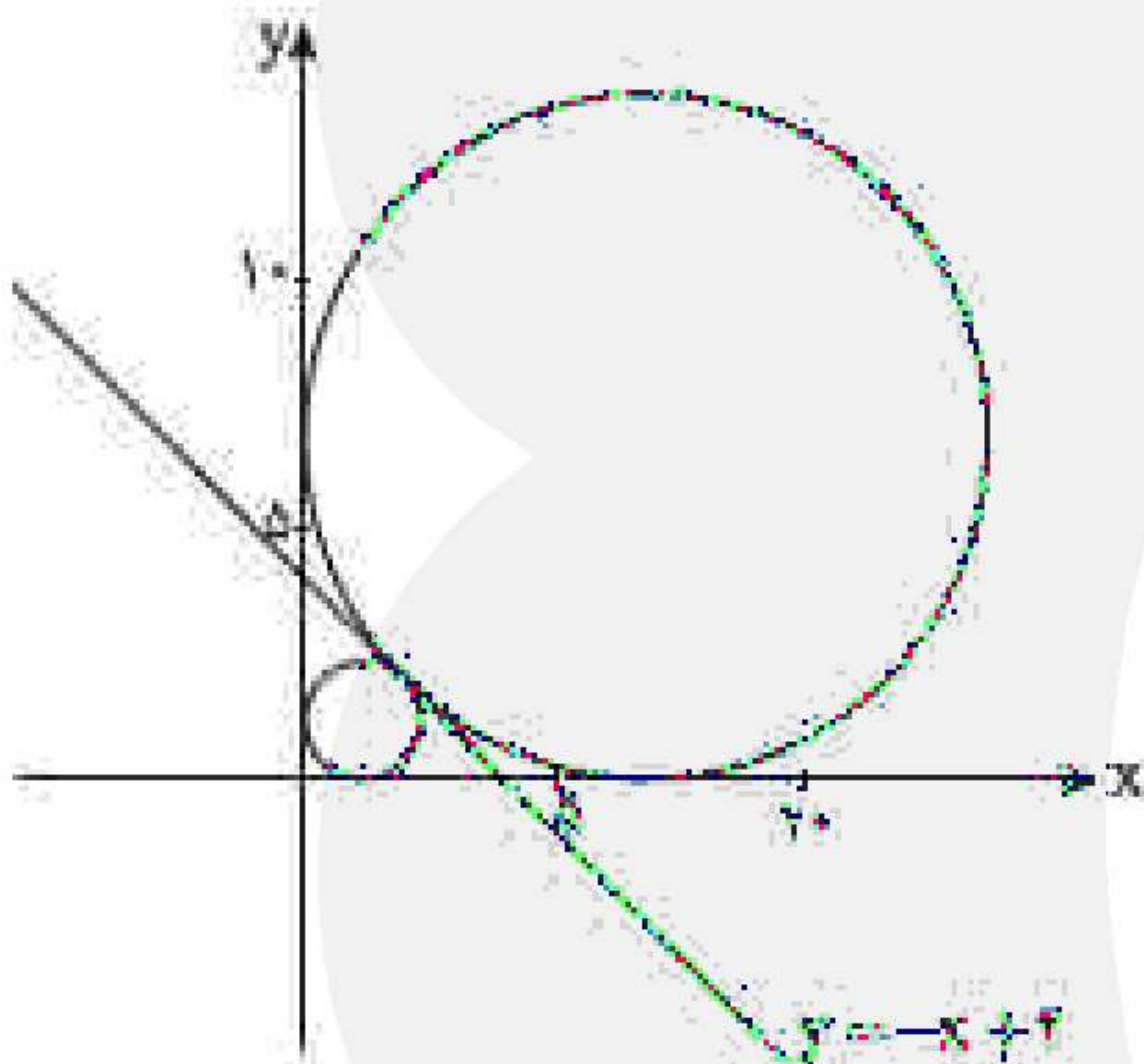


$$OH = r \Rightarrow \frac{|r + r - 4|}{\sqrt{1+1}} = \frac{|2r - 4|}{\sqrt{2}} = r$$

$$|2r - 4| = \sqrt{2}r \Rightarrow \begin{cases} 2r - 4 = \sqrt{2}r \Rightarrow 2r - \sqrt{2}r = 4 \\ 2r - 4 = -\sqrt{2}r \Rightarrow 2r + \sqrt{2}r = 4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} r = \frac{4}{2 - \sqrt{2}} = \frac{4(2 + \sqrt{2})}{2} = 2(2 + \sqrt{2}) \\ r = \frac{4}{2 + \sqrt{2}} = \frac{4(2 - \sqrt{2})}{2} = 2(2 - \sqrt{2}) \end{cases}$$

توجه کنید که ما دو دایره با این ویژگی داریم. تفاضل شعاع آنها برابر است با:



$$4 + 2\sqrt{2} - (4 - 2\sqrt{2}) = 4\sqrt{2}$$



۵۰- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

چون مرکز دایره روی خط $3x + y = 2$ قرار دارد، پس مختصات مرکز به صورت $O(\alpha, 2 - 3\alpha)$ است. چون دایره از نقاط A و B می‌گذرد، باید داشته باشیم: $OA = OB$ ، پس داریم:

$$\sqrt{(\alpha + 2)^2 + (3 - 3\alpha)^2} = \sqrt{(\alpha - 5)^2 + (2 - 3\alpha)^2}$$

$$\Rightarrow \alpha^2 + 4\alpha + 4 + 9 - 18\alpha + 9\alpha^2 = \alpha^2 - 10\alpha + 25 + 4 - 12\alpha + 9\alpha^2$$

$$\Rightarrow 8\alpha = 16 \Rightarrow \alpha = 2 \Rightarrow O(2, -4)$$

$$R = OA = \sqrt{(2 + 2)^2 + (-4 + 1)^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$$

$$\Rightarrow \text{معادله دایره مطلوب: } (x - 2)^2 + (y + 4)^2 = 25$$

$$x = 0 \Rightarrow 4 + (y + 4)^2 = 25 \Rightarrow (y + 4)^2 = 21$$

$$\Rightarrow y + 4 = \pm \sqrt{21} \Rightarrow \begin{cases} y = -4 + \sqrt{21} \\ y = -4 - \sqrt{21} \end{cases}$$