

# گنجینه سوال رایگان

+ پاسخ تشریحی

## یاوران دانش



راه های ارتباطی با ما:

[www.Dyavari.com](http://www.Dyavari.com)

۰۲۱-۷۶۷۰۳۸۵۸

۰۹۱۲-۳۴ ۹۴ ۱۳۴





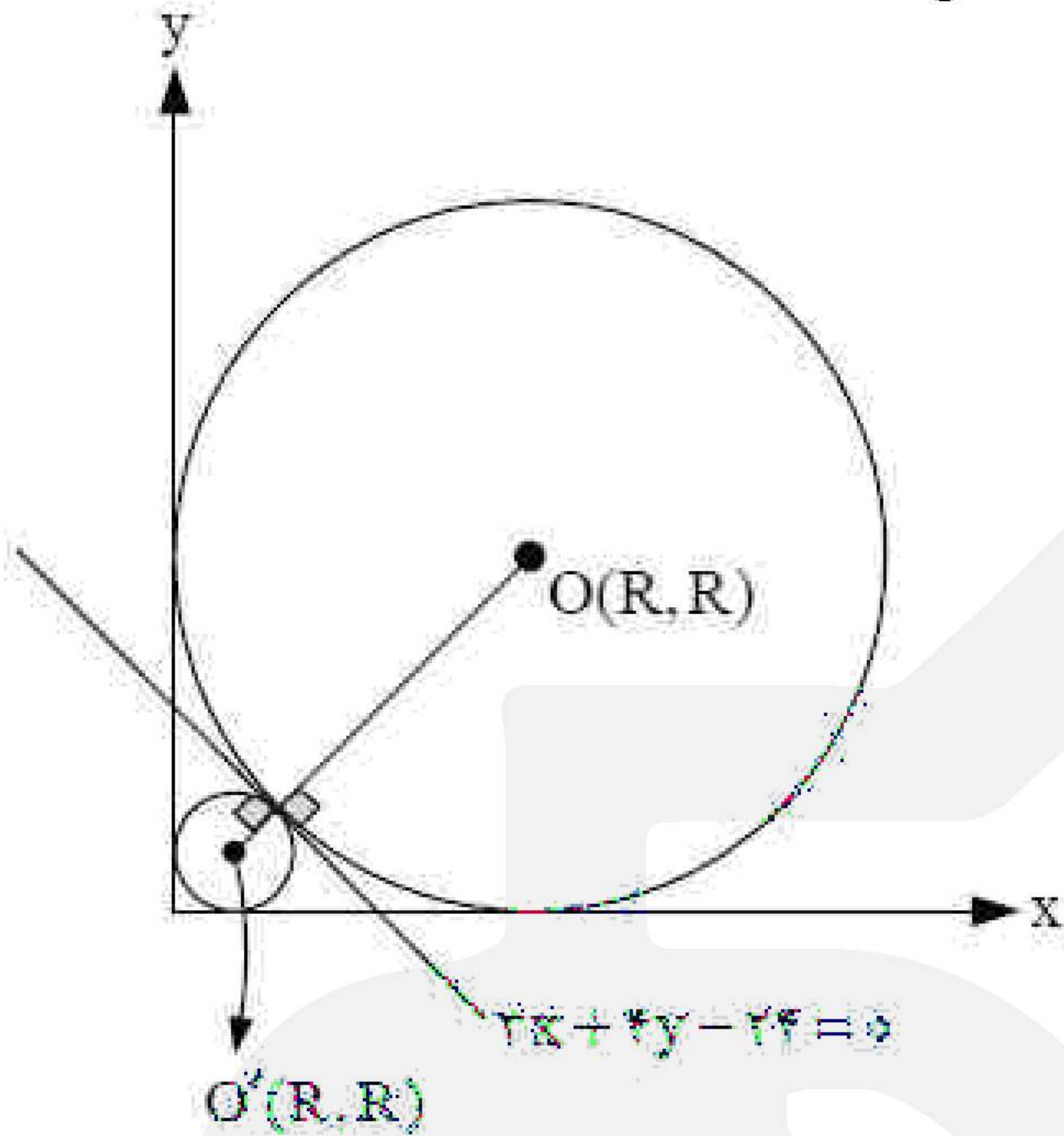
	۱	۲	۳	۴
۱ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۲ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۴ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۵ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۶ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۷ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۸ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۹ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۰ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۱ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۲ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۳ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۱۴ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۵ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۱۶ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۷ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۸ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>







- ۱- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. مختصات مرکز دایره‌ای که بر محورهای مختصات در ناحیه اول مماس است، به صورت  $O(R, R)$  بوده و فاصله  $O$  تا خط  $3x + 4y - 24 = 0$  همان شعاع دایره  $R$  است:

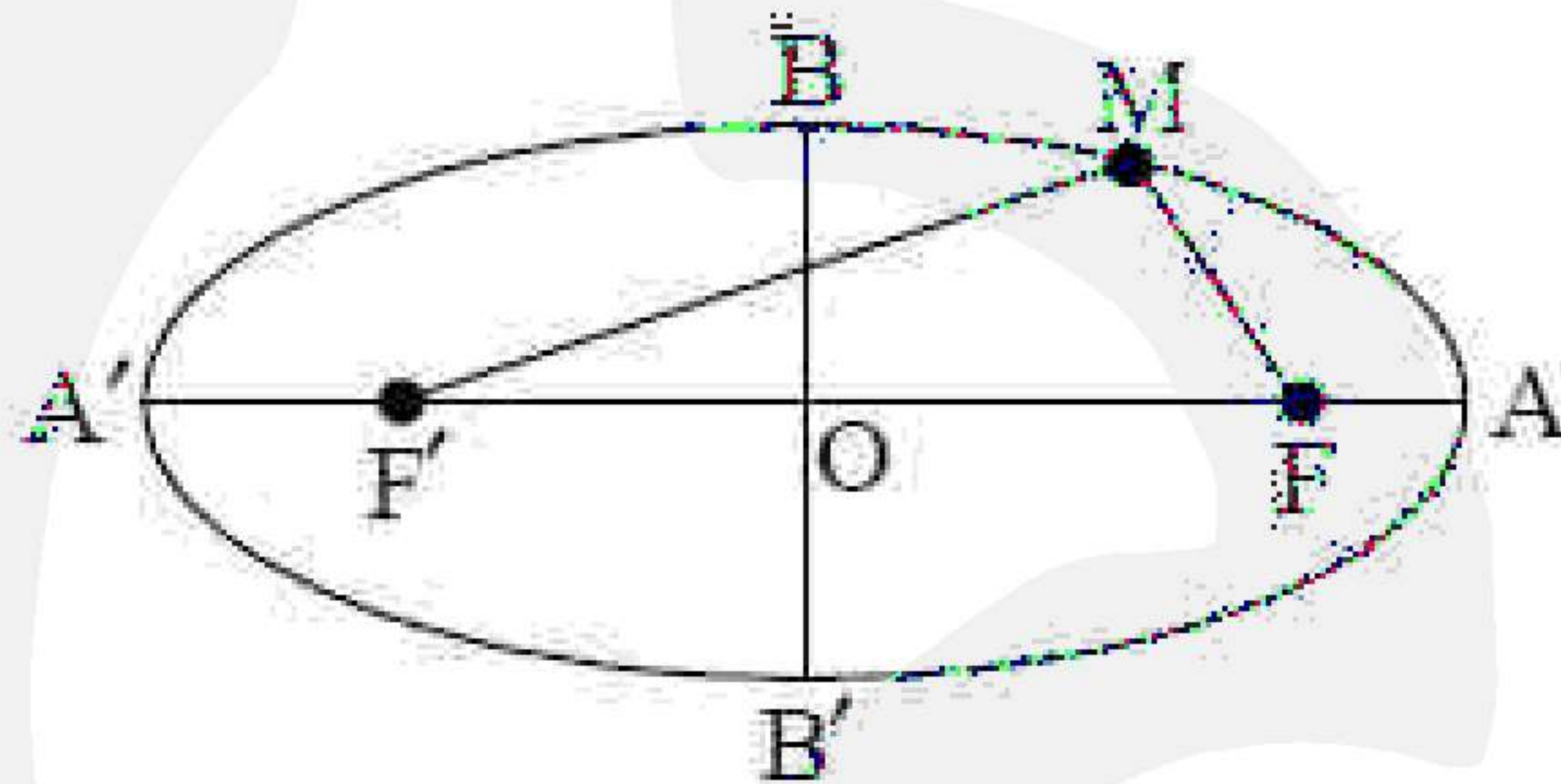


$$R = \frac{|3R + 4R - 24|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = R$$

$$|7R - 24| = 5R \Rightarrow \begin{cases} 7R - 24 = 5R \Rightarrow R = 12 \\ 7R - 24 = -5R \Rightarrow R = 2 \end{cases}$$

$$S_1 + S_2 = \pi(R_1^2 + R_2^2) = \pi(2^2 + 12^2) = 3 \times 148 = 444$$

- ۲- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.



مطابق تعریف مکان هندسی بیضی:

$$e = \frac{c}{a} \text{ (خروج از مرکز بیضی) و } MF + MF' = 2a \text{ و } FF' = 2C \text{ (فاصله کانونی)}$$

$$AA' = 2a \text{ (قطر بزرگ) و } BB' = 2b \text{ (قطر کوچک). بنابراین:}$$

$$\Delta MFF' \text{ محیط} = 32 = MF + MF' + FF' \Rightarrow 32 = 2a + 2C \Rightarrow a + c = 16 \quad (1)$$

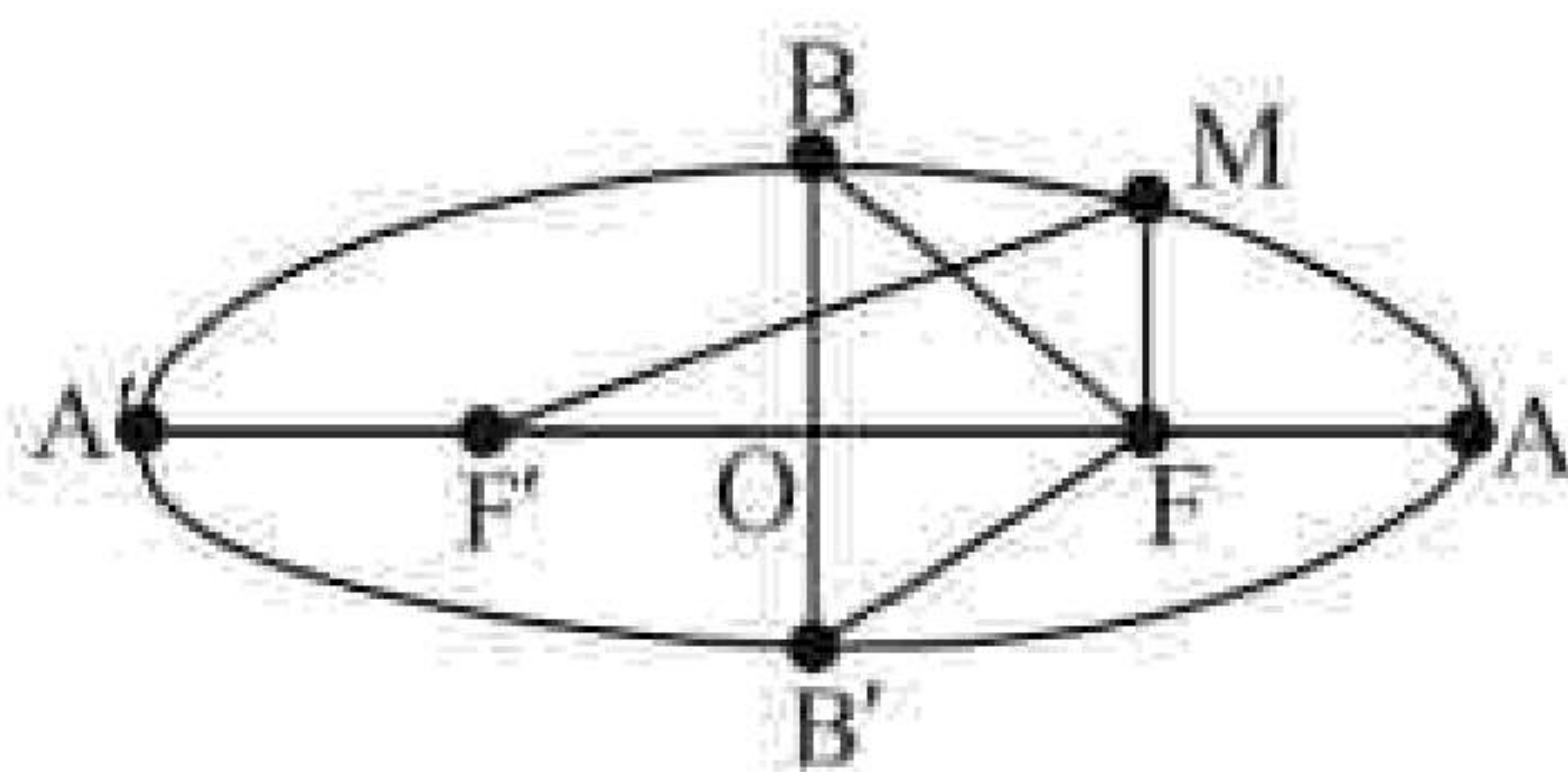
$$\text{جاگذاری (1)} \quad e = 5/6 = \frac{c}{a} \Rightarrow c = 5/6 a \xrightarrow{\quad} a = 10, C = 6$$

$$\text{در بیضی: } a^2 = b^2 + c^2 \leftarrow 100 = b^2 + 36 \leftarrow b = 8 \leftarrow 2b = 2(8) = 16 \text{ اندازه قطر کوچک بیضی}$$





۳- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.



$MF + MF' = 2a, a^2 = b^2 + c^2$  : مطابق تعریف بیضی

$\Delta MFF'$  محیط = ۳۲

$$\underbrace{MF + MF'}_{2a} + \underbrace{FF'}_{2c} = 32$$

$$2a + 2c = 32$$

$$\boxed{a + c = 16} \quad (1)$$

$$BF' = BF = \sqrt{b^2 + c^2} = a, BF + BF' = 2a = 20 \rightarrow \boxed{a = 10} \xrightarrow{\text{طبق (1)}} \boxed{c = 6}, \boxed{b = 8}$$

اندازه‌ی قطر کوچک بیضی  $2b = 16$

$$\text{اندازه‌ی خروج از مرکز بیضی} = \frac{c}{a} = \frac{6}{10} = 0.6$$

$$\text{اختلاف موردنظر سؤال} = 16 - 0.6 = 15.4$$

۴- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$x^2 + y^2 - 4x - 6y - 3 = 0$$

$$(x-2)^2 + (y-3)^2 = 16 \rightarrow O(2, 3), R = 4$$

$$OO' = |R - R'| \Rightarrow \sqrt{(2 - (-1))^2 + (3 - (-1))^2} = 4 - R' \Rightarrow 5 = |4 - R'| \Rightarrow R' = 9, O'(-1, -1)$$

$$(x+1)^2 + (y+1)^2 = 9^2 \rightarrow x^2 + y^2 + 2x + 2y - 79 = 0$$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ a=2 & b=2 & c=-79 \\ \hline a+b+c=-75 \end{array}$$

«بانک سوال یاوران دانش»

۵- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

مرکز دایره بر خط  $y = 2x$  واقع است، بنابراین فاصله  $O(x, 2x)$  از  $A$  و  $B$  یکسان و برابر شعاع دایره است:

$$OA = OB = R \Rightarrow \sqrt{(x-1)^2 + (2x-1)^2} = \sqrt{(x-4)^2 + (2x+2)^2}$$

$$\Rightarrow -2x + 1 - 4x + 1 = -8x + 16 + 8x + 4 \Rightarrow -6x = 18 \Rightarrow x = -3 \Rightarrow O(-3, -6)$$

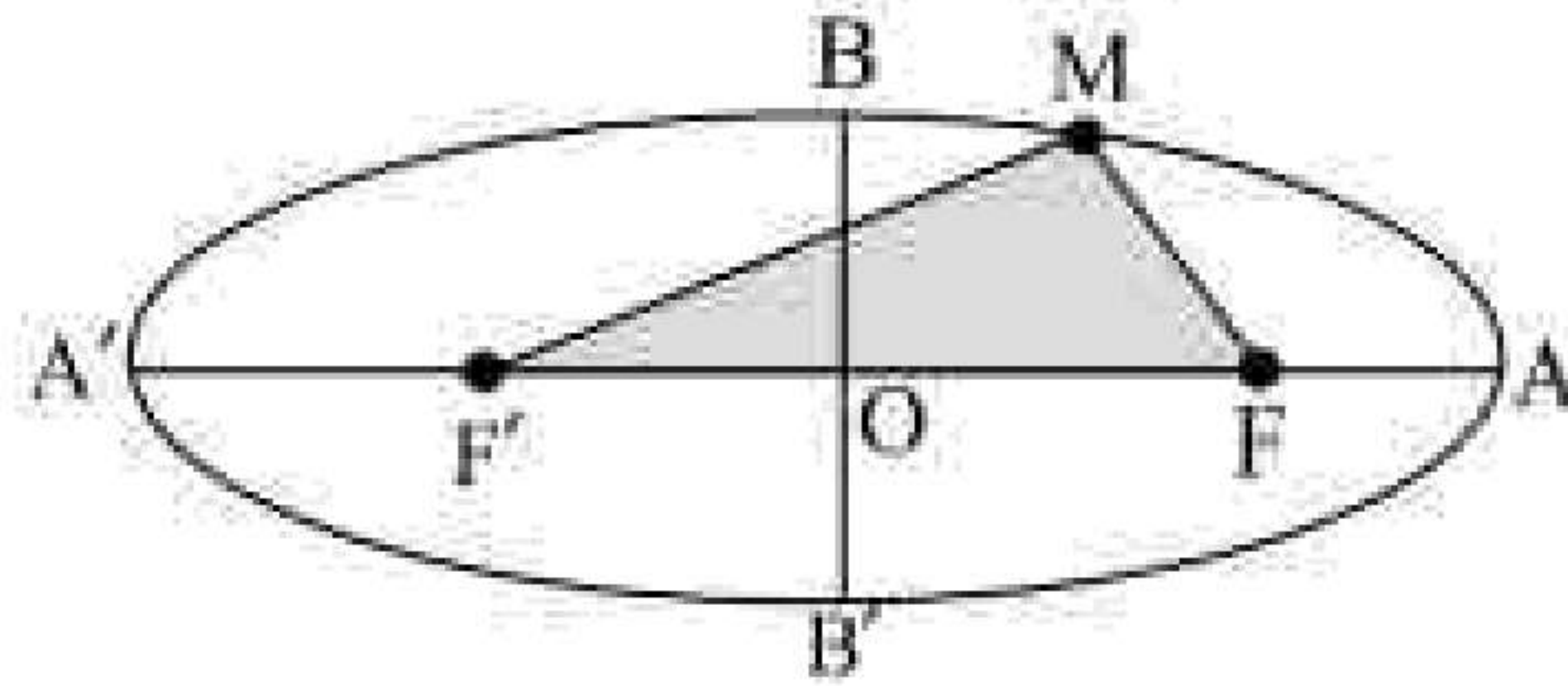
$$OA = \sqrt{(-3-1)^2 + (-6-1)^2} = \sqrt{65} = R$$

$$S \text{ دایره} = \pi R^2 = 65\pi$$





۶- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. مطابق تعریف مکان هندسی بیضی:



$MF + MF' = 2a$  و  $e = \frac{c}{a}$  (خروج از مرکز) و  $FF' = 2c$  (فاصله کانونی)

$AA' = 2a$  (قطر بزرگ) و  $BB' = 2b$  (قطر کوچک) بنابراین محیط  $MFF'$  برابر است با  $2a + 2c$ :

$$\begin{cases} 2a + 2c = 32 \\ e = \frac{c}{a} = 0.6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + c = 16 \\ c = 0.6a \end{cases} \Rightarrow a = 10, c = 6$$

از طرفی در بیضی:

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 10^2 = b^2 + 6^2 \Rightarrow b = 8 \text{ و } 2b = 16 \Rightarrow \text{اندازه قطر کوچک}$$

۷- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. مختصات سه نقطه A و B و C در معادله ضمنی دایره به صورت

$$x^2 + y^2 + ax + by + C = 0 \text{ صدق می کند، بنابراین:}$$

$$A(0, 2) \Rightarrow (0)^2 + (2)^2 + a(0) + b(2) + C = 0 \Rightarrow 2b + C = -4 \quad (1)$$

$$B(3, 1) \Rightarrow 3^2 + 1^2 + a(3) + b(1) + C = 0 \Rightarrow 3a + b + C = -10 \quad (2)$$

$$C(-1, 4) \Rightarrow (-1)^2 + 4^2 + a(-1) + b(4) + C = 0 \Rightarrow -a + 4b + C = -17 \quad (3)$$

$$\begin{aligned} 2, 3 &\Rightarrow \begin{cases} 4a - 3b = 7 \\ 3a - b = -6 \end{cases} \Rightarrow a = -5, b = -9, c = 14 \\ 1, 2 &\Rightarrow \end{aligned}$$

$$\text{محل برخورد با محور } y \text{ ها} \quad x^2 + y^2 - 5x - 9y + 14 = 0 \xrightarrow{x=0} y^2 - 9y + 14 = 0$$

$$(y - 7)(y - 2) = 0$$

$$\downarrow \quad \downarrow$$

$y = 7$  و  $y = 2$  فاصله بین این دو نقطه روی محور  $y$  ها برابر ۵ واحد است.

۸- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. شرط لازم و کافی برای آنکه نقطه  $M(x, y)$  روی محیط یا درون دایره

$$x^2 + y^2 + ax + by + C = 0 \text{ باشد، این است که } x^2 + y^2 + ax + by + C \leq 0 \text{ باشد:}$$

$$4 + K^2 + 2 + 5K - 12 \leq 0 \Rightarrow K^2 + 5K - 6 \leq 0$$

$K$  شامل ۸ عدد صحیح است.  $(K + 6)(K - 1) \leq 0 \Rightarrow -6 \leq K \leq 1$





۹- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. مرکز دایره محل برخورد دو قطر آن است:

$$\begin{cases} 3x + 4y = -1 \\ 5x + 2y = 3 \end{cases} \Rightarrow x = 1, y = -1 \Rightarrow O(1, -1)$$

فاصله  $O(1, -1)$  تا خط مماس  $-3x + 4y - 3 = 0$  برابر شعاع دایره است:

$$r = \frac{|-3(1) + 4(-1) - 3|}{\sqrt{(-3)^2 + 4^2}} = \frac{10}{5} = 2$$

$$(x-1)^2 + (y+1)^2 = 4 \Rightarrow x^2 + y^2 - 2x + 2y - 2 = 0 \quad \text{معادله دایره}$$

۱۰- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. برای آن که دو دایره دارای ۴ مماس مشترک باشند باید متخارج باشند یعنی:

$$d > R + R'$$

$$x^2 + y^2 = 9 \Rightarrow O(0, 0), R = 3 \quad \text{در دایره اول}$$

$$x^2 + (y-5)^2 = 8 - a \Rightarrow O'(0, 5), R' = \sqrt{8-a} \quad \text{در دایره دوم}$$

$$\begin{cases} d = OO' = 5 \\ R + R' = 3 + \sqrt{8-a} \end{cases}$$

$$5 > 3 + \sqrt{8-a} \Rightarrow 2 > \sqrt{8-a} \Rightarrow 4 > 8-a \Rightarrow a > 4$$

پس باید داشته باشیم:

$$a \leq 8$$

اما با توجه به حضور رادیکال در نامساوی، به شرط  $8-a \geq 0$  هم توجه کنید:

$$4 < a \leq 8$$

از اشتراک جواب‌های به دست آمده برای  $a$  داریم:

واضح است که چهار مقدار طبیعی  $5, 6, 7, 8$  در این نامساوی صدق می‌کنند.

۱۱- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. محیط مثلث  $MFF'$  برابر  $2a + 2c$  و مجموع فواصل  $F$  از دو نقطه انتهایی قطر کوچک

$2a$  است، بنابراین:

$$\begin{cases} 2a + 2c = 32 \\ 2a = 20 \end{cases} \Rightarrow a = 10, c = 6 \Rightarrow e = \frac{c}{a} = 0.6 \quad \text{خروج از مرکز بیضی}$$

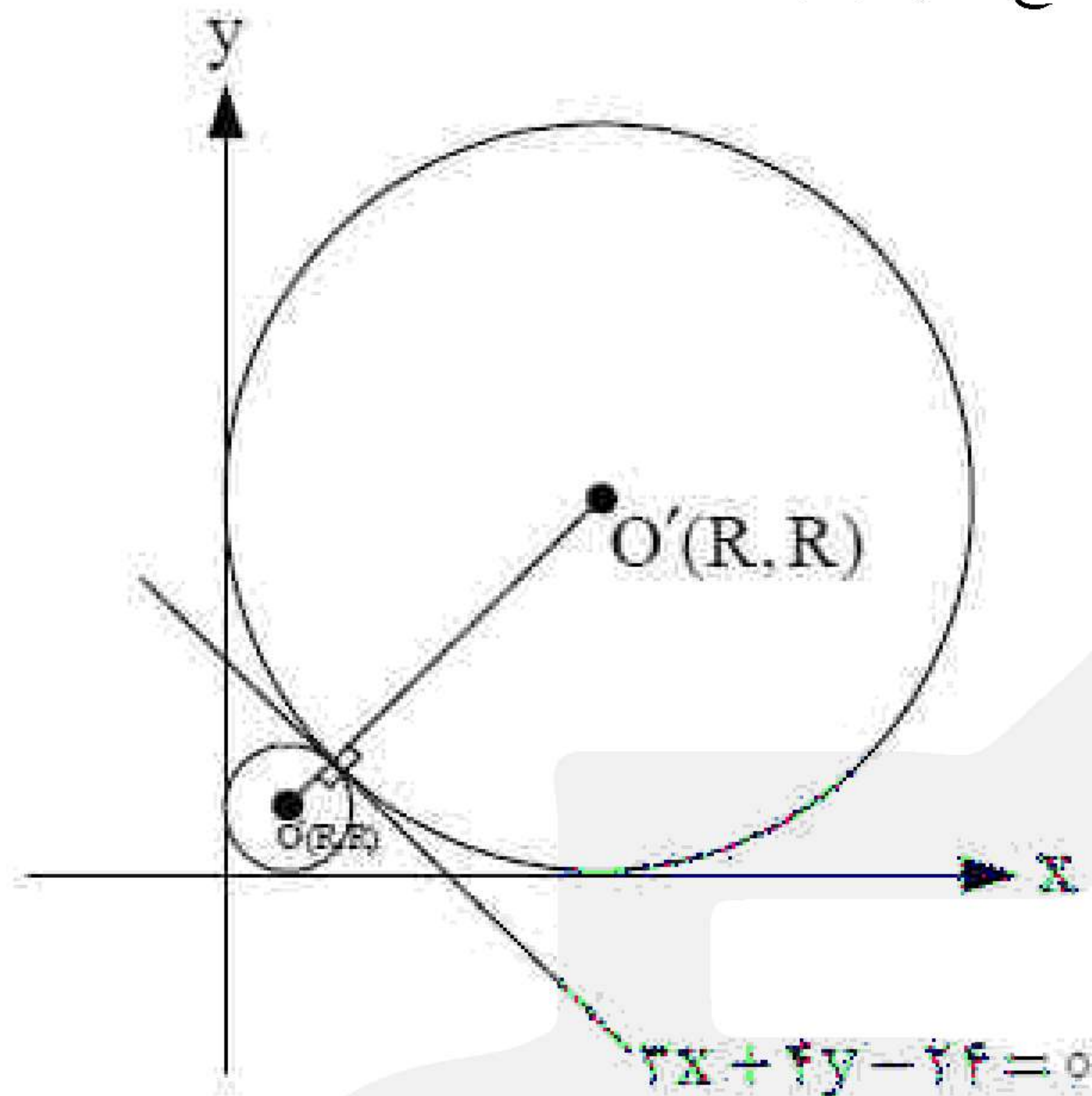
$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 100 = b^2 + 36 \Rightarrow b^2 = 64 \Rightarrow b = 8 \Rightarrow 2b = 16 = \text{اندازه قطر کوچک بیضی}$$

$$\text{اختلاف موردنظر} = 16 - 0.6 = 15.4$$





۱۲- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. مختصات مرکز دایره‌ای که بر محورهای مختصات در ناحیه اول مماس است، به صورت  $O(R, R)$  بوده و فاصله  $O$  تا خط  $3x + 4y - 24 = 0$  همان شعاع دایره  $(R)$  است:



$$OH = \frac{|3R + 4R - 24|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = R \Rightarrow |7R - 24| = 5R$$

$$\begin{cases} 7R - 24 = 5R \Rightarrow R = 12 \\ 7R - 24 = -5R \Rightarrow R = 2 \end{cases}$$

$$\Delta S = \pi(12)^2 - \pi(2)^2 = 140\pi \xrightarrow{\pi=3} \Delta S = 420$$

۱۳- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. فاصله‌ی مرکز بیضی از نزدیک‌ترین نقاط بیضی برابر  $b$  و فاصله‌ی یک کانون بیضی از نزدیک‌ترین نقاط آن  $a - c$  می‌باشد، پس:

$$\begin{cases} b = 2\sqrt{2} \\ a - c = 2 \end{cases} \xrightarrow{a^2 = b^2 + c^2} a^2 = 8 + c^2 \Rightarrow a^2 - c^2 = 8 \Rightarrow (a - c)(a + c) = 8$$

$$\xrightarrow{a - c = 2} a + c = 4$$

حال مقادیر  $a$  و  $c$  را به دست می‌آوریم.

$$\begin{cases} a - c = 2 \\ a + c = 4 \end{cases} \Rightarrow a = 3, c = 1 \Rightarrow e = \frac{c}{a} = \frac{1}{3}$$





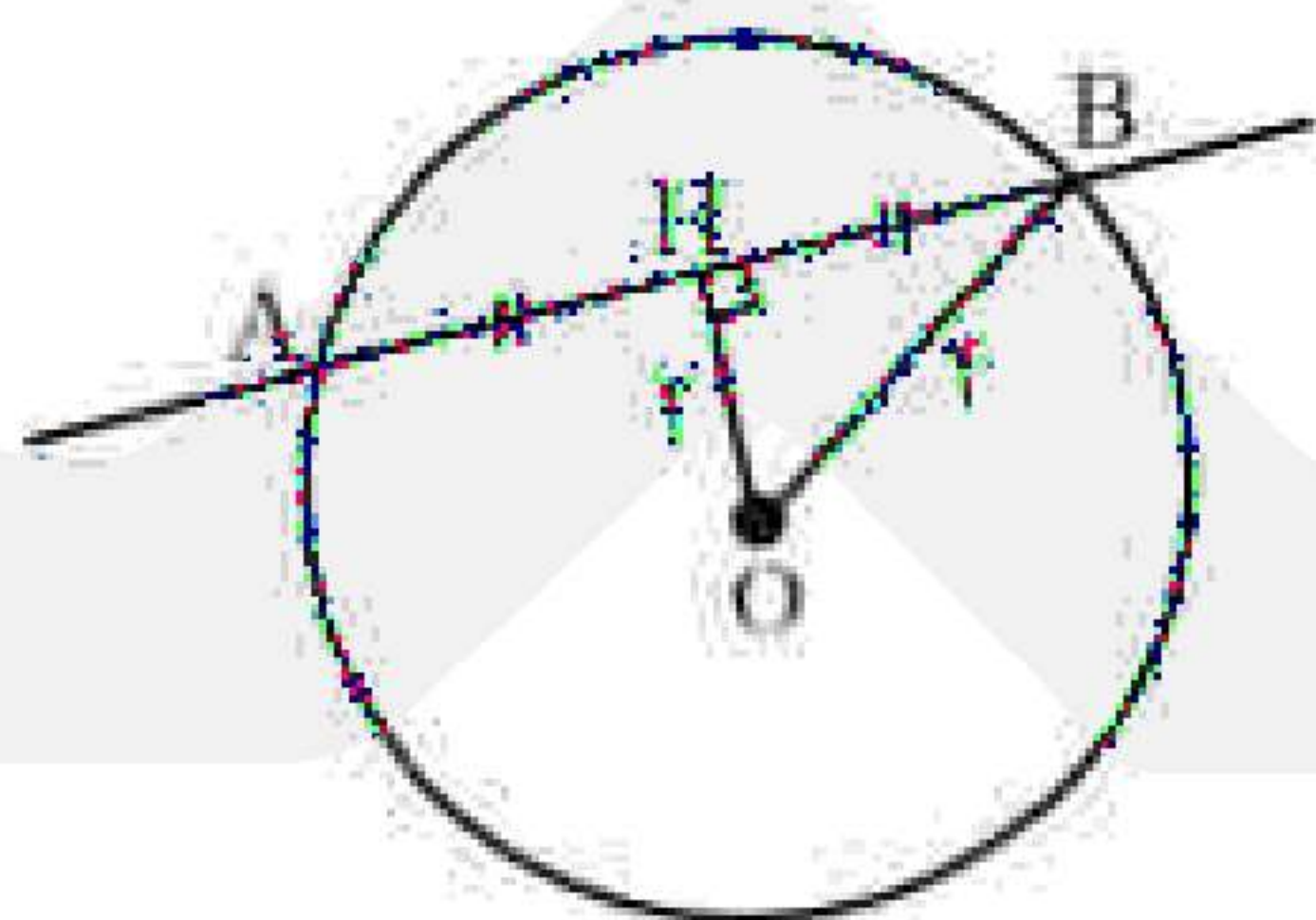
«بانک سوال یاوران دانش»

۱۴- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

باید معادله‌ی دو دایره را در یک دستگاه دو معادله و دو مجهول حل کنیم تا نقاط A و B معلوم شود.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + x + 2y = 11 \\ x^2 + y^2 - 2x - 2y = 14 \end{cases} \rightarrow 3x + 4y = -3$$

بنابراین نقاط A و B، نقاط تلاقی خط  $3x + 4y = -3$  و هر یک از دایره‌ها است، حال باید طول وتر AB را به کمک یکی از دایره‌ها به دست آوریم:



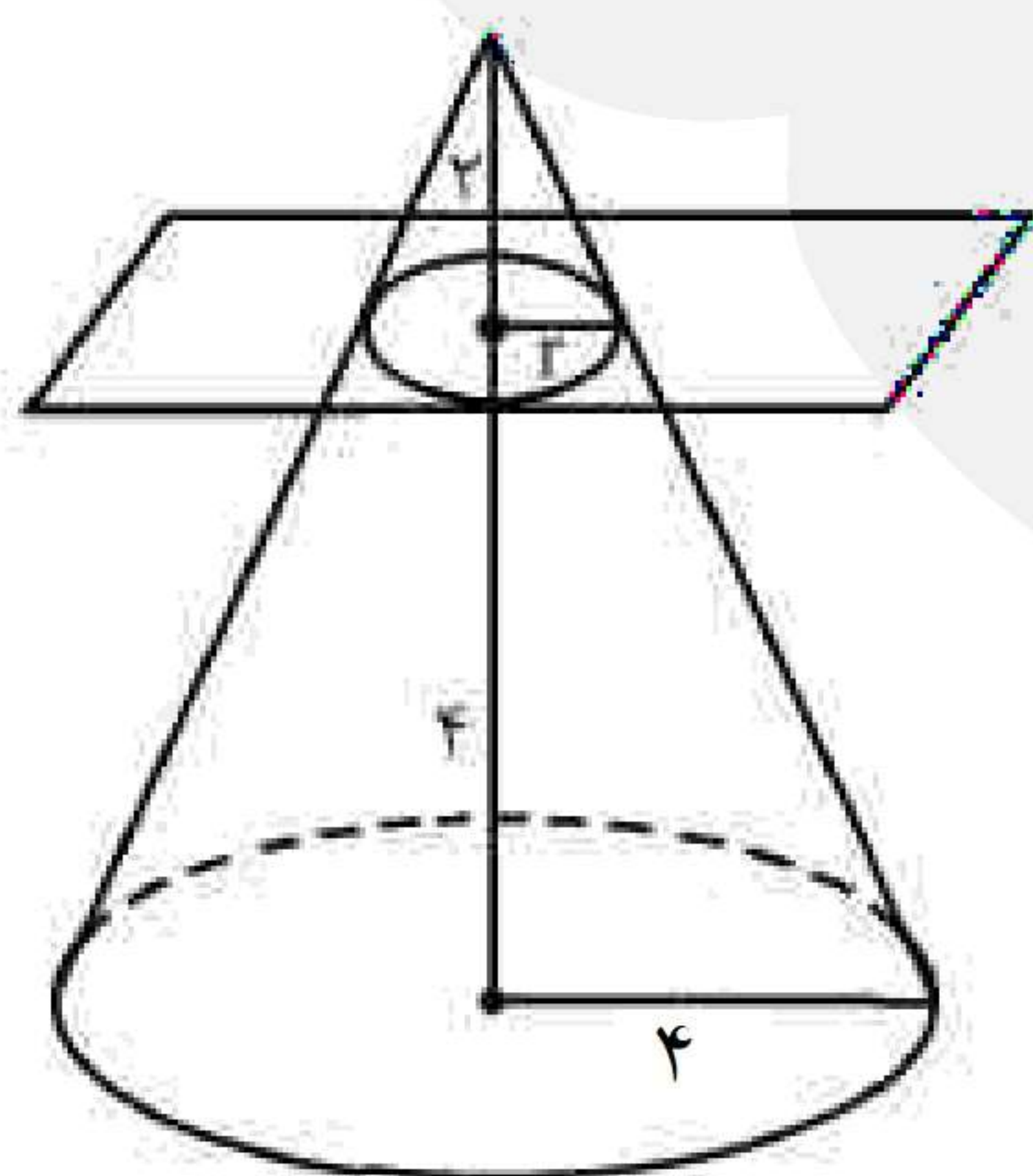
$$\begin{cases} O(1,1); r = \sqrt{1+1+14} = 4 \\ OH = \frac{|3+4+3|}{\sqrt{9+16}} = 2 \end{cases} \Rightarrow BH^2 + 2^2 = 4^2 \Rightarrow BH = \sqrt{12}$$

$$\Rightarrow AB = 2BH = 2\sqrt{12} = 4\sqrt{3}$$

۱۵- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. چون دایره در ربع اول بر محورهای مختصات مماس است، پس مرکز آن  $O(\alpha, \alpha)$  و شعاع آن  $\alpha$  است. از طرفی فاصله‌ی مرکز دایره تا خط مماس  $3x + 4y = 12$ ، برابر شعاع دایره است. پس:

$$\alpha = \frac{|3\alpha + 4\alpha - 12|}{\sqrt{9+16}} \Rightarrow 5\alpha = |7\alpha - 12| \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 6 \\ \alpha = 1 \end{cases}$$

۱۶- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.



$$\frac{2}{6} = \frac{r}{4} \Rightarrow r = \frac{4}{3} \Rightarrow S = \pi \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{16}{9}\pi$$





۱۷- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

محیط مثلث MFF' برابر  $2a + 2c$  و مجموع فواصل F از دو نقطه‌ی انتهایی قطر کوچک برابر  $2a$  می‌باشد پس:

$$\begin{cases} 2a + 2c = 32 \\ 2a = 20 \end{cases} \Rightarrow 2c = 12 \Rightarrow c = 6, a = 10 \Rightarrow e = \frac{c}{a} = 0.6$$

۱۸- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. فاصله‌ی مرکز دایره تا خط مماس برابر شعاع دایره است پس:

$$r = \frac{|2 + 1 - 1|}{\sqrt{1+1}} = \sqrt{2} \Rightarrow (x-2)^2 + (y+1)^2 = 2 \xrightarrow{y=0} (x-2)^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} x-2=1 \\ x-2=-1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ x=1 \end{cases} \Rightarrow \text{طول وتر} = 3 - 1 = 2$$

