

# گنجینه سوال رایگان

+ پاسخ تشریحی

## یاوران دانش



راه های ارتباطی با ما:

[www.Dyavari.com](http://www.Dyavari.com)

۰۲۱-۷۶۷۰۳۸۵۸

۰۹۱۲-۳۴ ۹۴ ۱۳۴





	۱	۲	۳	۴
۱ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۴ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۵ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۶ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۷ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۸ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۹ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۰ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۱ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۱۲ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۳ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۴ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۵ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۶ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۷ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۸ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۹ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۲۰ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۲۱ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۲۲ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۲۳ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۴ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۵ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۲۶ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۲۷ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۲۸ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۹ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۰ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۱ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۳۲ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۳ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۴ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

	۱	۲	۳	۴
۳۵ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۶ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۳۷ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۸ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۹ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۴۰ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۴۱ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۴۲ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۴۳ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۴۴ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۴۵ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۴۶ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۴۷ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۴۸ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۴۹ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۵۰ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>





۱- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. نقطه‌ی M وسط AB را می‌یابیم:

$$A(1, 3), B(-1, 5) \Rightarrow M = \frac{A+B}{2} \Rightarrow M(0, 4)$$

فاصله‌ی نقطه‌ی M تا خط  $3x - 4y + k = 0$  را یافته و برابر ۴ قرار می‌دهیم.

$$MH = \frac{|3 \times 0 - 4 \times 4 + k|}{\sqrt{9 + 16}} = 4 \Rightarrow \frac{|k - 16|}{\sqrt{25}} = 4$$

$$\Rightarrow |k - 16| = 20 \Rightarrow k - 16 = \pm 20 \Rightarrow \begin{cases} k = 36 \\ k = -4 \end{cases}$$

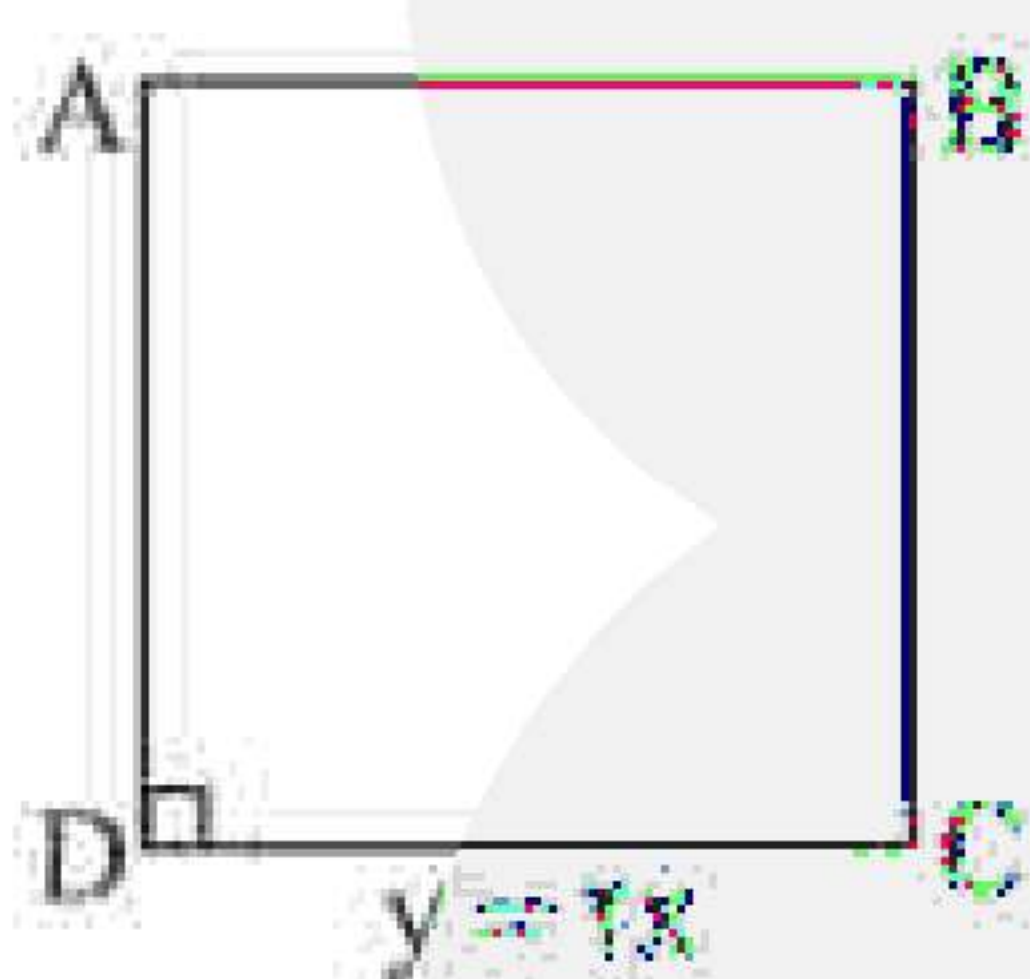
مجموع مقادیر فوق برابر است با:

$$36 + (-4) = 32$$

۲- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$y = \frac{3}{4}x - 1 \Rightarrow 4y = 3x - 4 \Rightarrow 4y - 3x + 4 = 0$$

$$d = \frac{|4(3) - 3(-2) + 4|}{\sqrt{(4)^2 + (-3)^2}} = \frac{22}{5} = 4\frac{2}{5}$$



۳- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. اولاً چون مساحت مربع ۲۰ است، ضلع آن برابر  $2\sqrt{5}$  واحد

است. نقطه‌ی A روی نیمساز ربع اول  $(y = x)$  قرار دارد، پس مختصات آن به صورت  $A(\alpha, \alpha)$  می‌باشد.

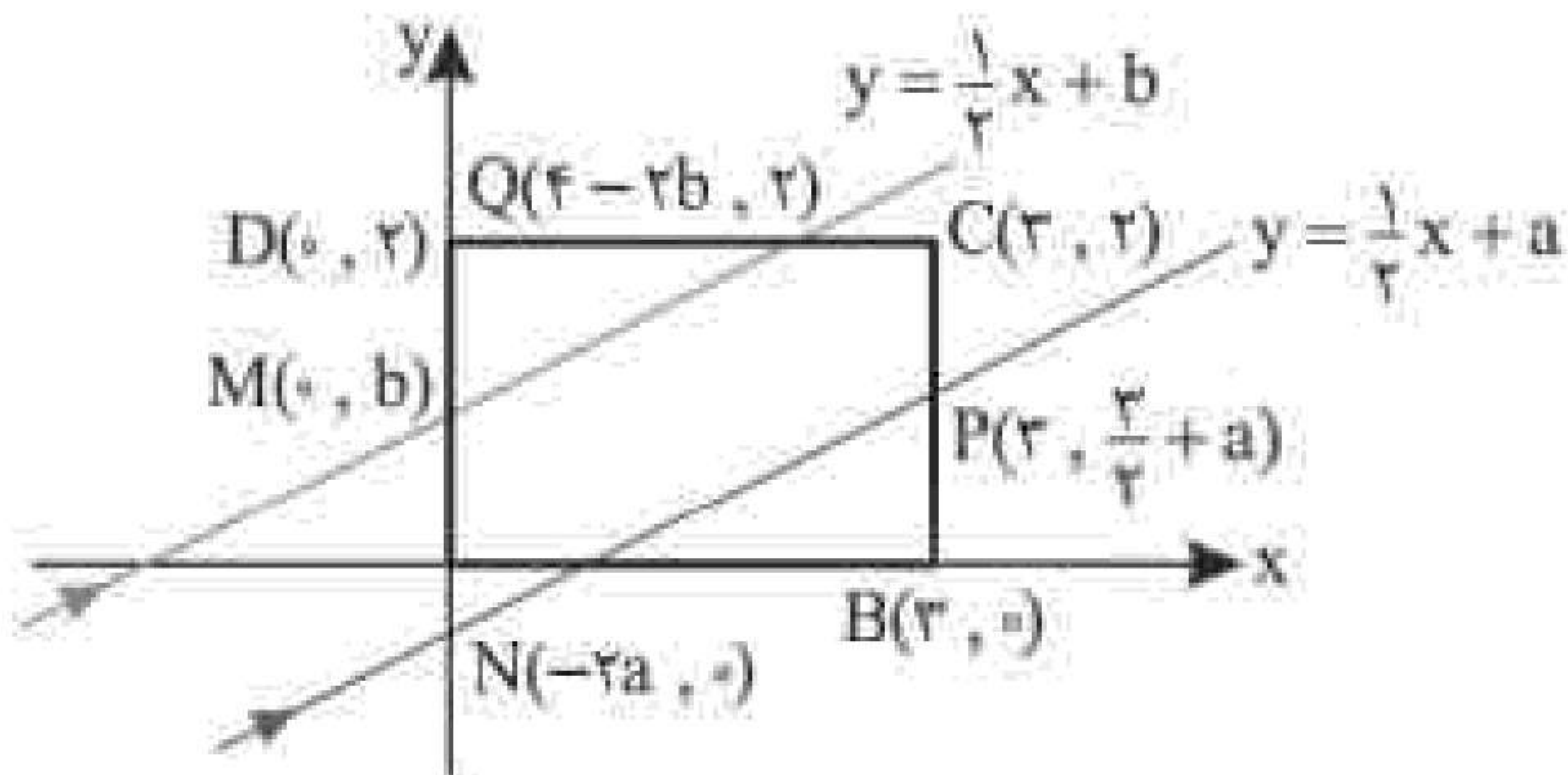
حال فاصله‌ی A تا خط  $y - 2x = 0$  باید برابر ضلع مربع باشد، پس داریم:

$$2\sqrt{5} = \frac{|\alpha - 2\alpha|}{\sqrt{1 + 4}} \Rightarrow |- \alpha| = 10 \Rightarrow \alpha = \pm 10 \xrightarrow{\text{ناحیه اول}} \alpha = 10$$

ضلع AD بر DC عمود است، پس شیب آن  $-\frac{1}{2}$  است و از نقطه‌ی  $A(10, 10)$  می‌گذرد.

$$y - y_1 = a(x - x_1) \Rightarrow y - 10 = -\frac{1}{2}(x - 10) \Rightarrow y = -\frac{x}{2} + 15$$





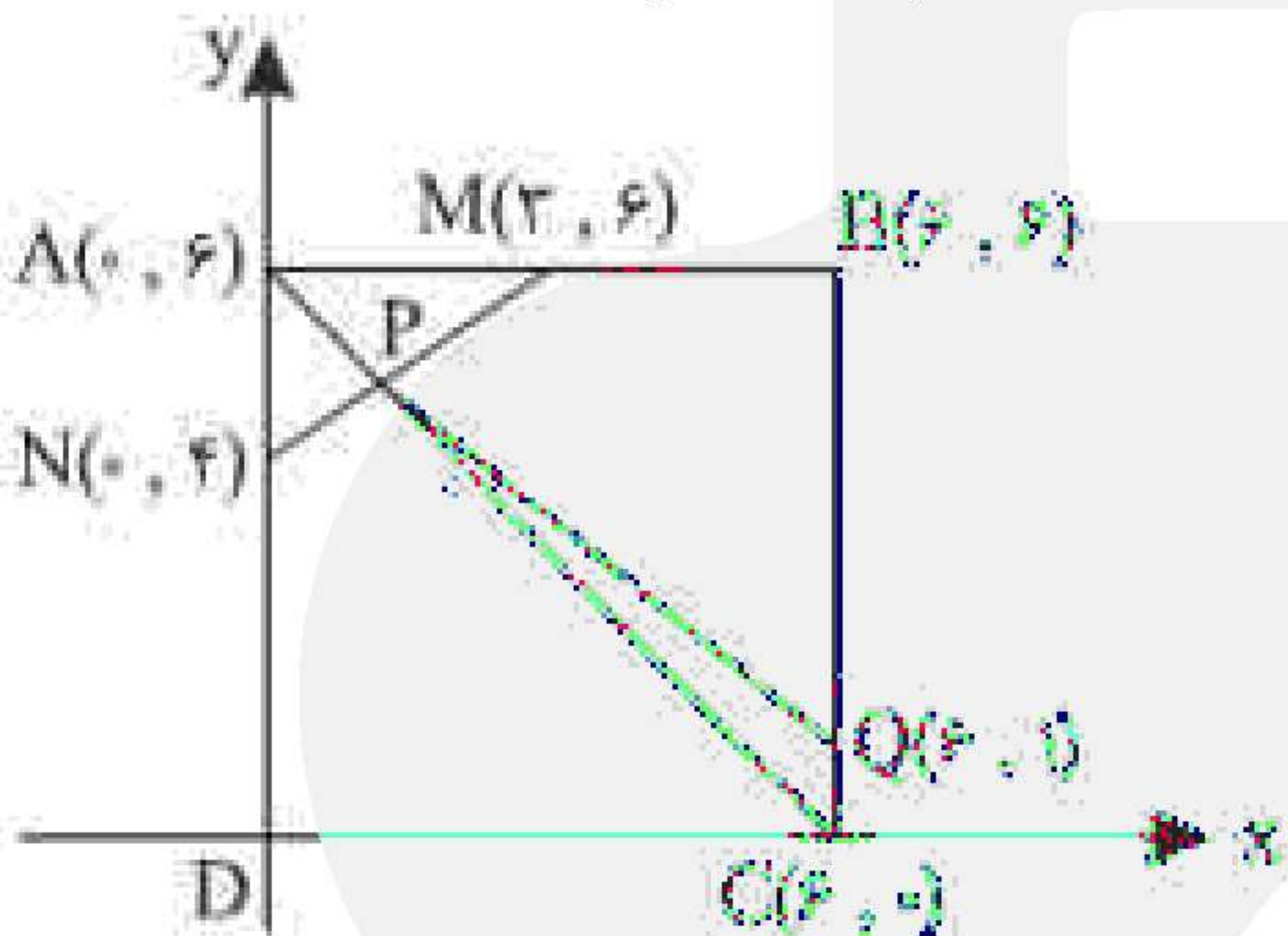
۴- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. مطابق شکل مقابل مختصات نقاط را معین کرده‌ایم. چون مساحت مستطیل برابر  $6 = 3 \times 2$  است، پس مساحت مثلث‌های NBP و MDQ برابر ۲ است، پس:

$$S_{\triangle NDP} = \frac{1}{2}(3 + 2a)\left(\frac{3}{2} + a\right) = 2$$

$$\Rightarrow (3 + 2a)^2 = 8 \Rightarrow a = \frac{\sqrt{8} - 3}{2}$$

$$S_{\triangle MDQ} = \frac{(2 - b)(4 - 2b)}{2} = 2 \Rightarrow (2 - b)^2 = 2 \Rightarrow b = 2 - \sqrt{2}$$

۵- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. با توجه به شکل مقابل معادله‌ی خط‌های MN و AC به صورت زیر است:



$$MN : y - 4 = \frac{6 - 4}{3 - 0}(x - 0) \Rightarrow y = \frac{2}{3}x + 4$$

$$AC : y - 0 = \frac{6 - 0}{0 - 6}(x - 6) \Rightarrow y = -x + 6$$

بنابراین مختصات نقطه‌ی P که محل تلاقی این دو خط است، به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\begin{cases} y = \frac{2}{3}x + 4 \\ y = -x + 6 \end{cases} \Rightarrow \frac{2}{3}x_P + 4 = -x_P + 6 \Rightarrow \frac{5}{3}x_P = 2 \Rightarrow x_P = \frac{6}{5}, y_P = \frac{24}{5}$$

بنابراین طول پاره‌خط PQ برابر است با:

$$PQ = \sqrt{\left(\frac{6}{5} - 6\right)^2 + \left(\frac{24}{5} - 0\right)^2} = \frac{\sqrt{937}}{5}$$





۶- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. برای موازی بودن دو خط رابطه‌ی  $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$  را بررسی می‌کنیم:

$$\frac{k}{1} = \frac{4}{2} \neq \frac{k^4}{5} \Rightarrow k = 2 \Rightarrow \text{با مقدار } k = 2 \text{ نامساوی نیز برقرار است}$$

با مقدار  $k = 2$  معادله‌ی خطوط را مشخص می‌کنیم:

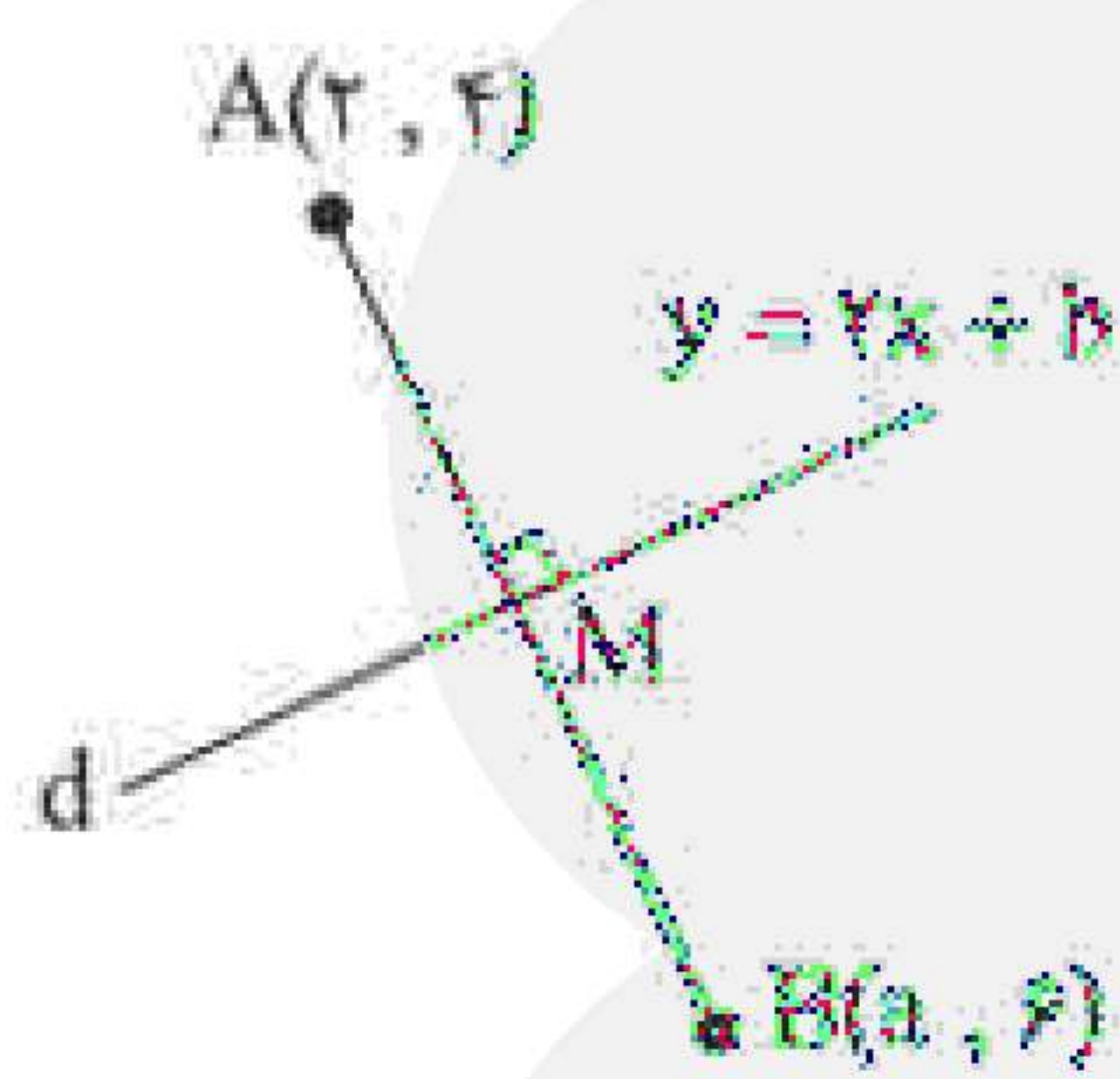
$$\begin{cases} x + 2y = 16 \\ 4y + 2x = 5 \end{cases} \xrightarrow{\times 2} \begin{cases} 2x + 4y = 32 \\ 4y + 2x = 5 \end{cases}$$

فاصله خطوط

$$d = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|32 - 5|}{\sqrt{2^2 + 4^2}} = \frac{27}{\sqrt{20}}$$

$$= \frac{27}{2\sqrt{5}} = \frac{27\sqrt{5}}{10} = 2.7\sqrt{5}$$

۷- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. با توجه به شکل مقابل، نقطه‌ی  $M$  وسط پاره‌خط  $AB$  است و مختصات آن به صورت زیر است:



$$x_M = \frac{2+a}{2}, y_M = \frac{4+6}{2} = 5$$

مختصات نقطه‌ی  $M$  در معادله‌ی خط  $d$  صدق می‌کند، پس:

$$5 = 2\left(\frac{2+a}{2}\right) + b \Rightarrow b = 3 - a$$

از طرف دیگر خط  $d$  بر خط  $AB$  عمود است، پس حاصل ضرب شیب این خط‌ها برابر -۱ است.

$$2\left(\frac{6-4}{a-2}\right) = -1 \Rightarrow a-2 = -4 \Rightarrow a = -2 \Rightarrow b = 3 - (-2) = 5$$

در نتیجه  $ab = -10$ .

۸- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. اگر نقطه‌ی  $C$  قرینه‌ی نقطه‌ی  $A$  نسبت به نقطه‌ی  $B$  باشد، نقطه‌ی  $B$  وسط پاره‌خط  $AC$  است، پس:

$$x_B = \frac{x_A + x_C}{2} \Rightarrow 3 = \frac{2a + x_C}{2} \Rightarrow x_C = 6 - 2a$$

$$y_B = \frac{y_A + y_C}{2} \Rightarrow 2 = \frac{-a + y_C}{2} \Rightarrow y_C = 4 + a$$

چون نقطه‌ی  $C$  روی خط  $y = 2ax - a$  قرار دارد، پس مختصات آن در معادله‌ی این خط صدق می‌کند، یعنی:

$$4 + a = 2a(6 - 2a) - a \Rightarrow 4 + a = 12a - 4a^2 - a \Rightarrow 4a^2 - 10a + 4 = 0$$

$$\Rightarrow 2a^2 - 5a + 2 = 0 \Rightarrow (2a - 1)(a - 2) = 0 \Rightarrow a = 2, a = \frac{1}{2}$$

عرض از مبدأ خط  $y = 2ax - a$  برابر  $-a$  است که برابر است با  $-2$  یا  $-\frac{1}{2}$ .





۹- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. فرض کنید نقطه‌ی موردنظر نقطه‌ی  $B(a, 2a)$  باشد، در این صورت فاصله‌ی  $A$  از  $B$  برابر است با:

$$AB = \sqrt{(a-2)^2 + (2a+2)^2} = \sqrt{5a^2 + 4a + 8}$$

همچنین فاصله‌ی  $B$  از خط  $3x - 4y - 20 = 0$  برابر است با:

$$BH = \frac{|3a - 8a + 20|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{|5a + 20|}{5} = |a + 4|$$

بنابراین:

$$AB = BH \Rightarrow \sqrt{5a^2 + 4a + 8} = |a + 4| \xrightarrow{\text{توان ۲}} 5a^2 + 4a + 8 = a^2 + 8a + 16$$

$$\Rightarrow 4a^2 - 4a - 8 = 0 \Rightarrow a^2 - a - 2 = 0 \Rightarrow (a+1)(a-2) = 0 \Rightarrow a = -1, a = 2$$

$$\Rightarrow a_1 + a_2 = 1$$

«بانک سوال یاوران دانش»

۱۰- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

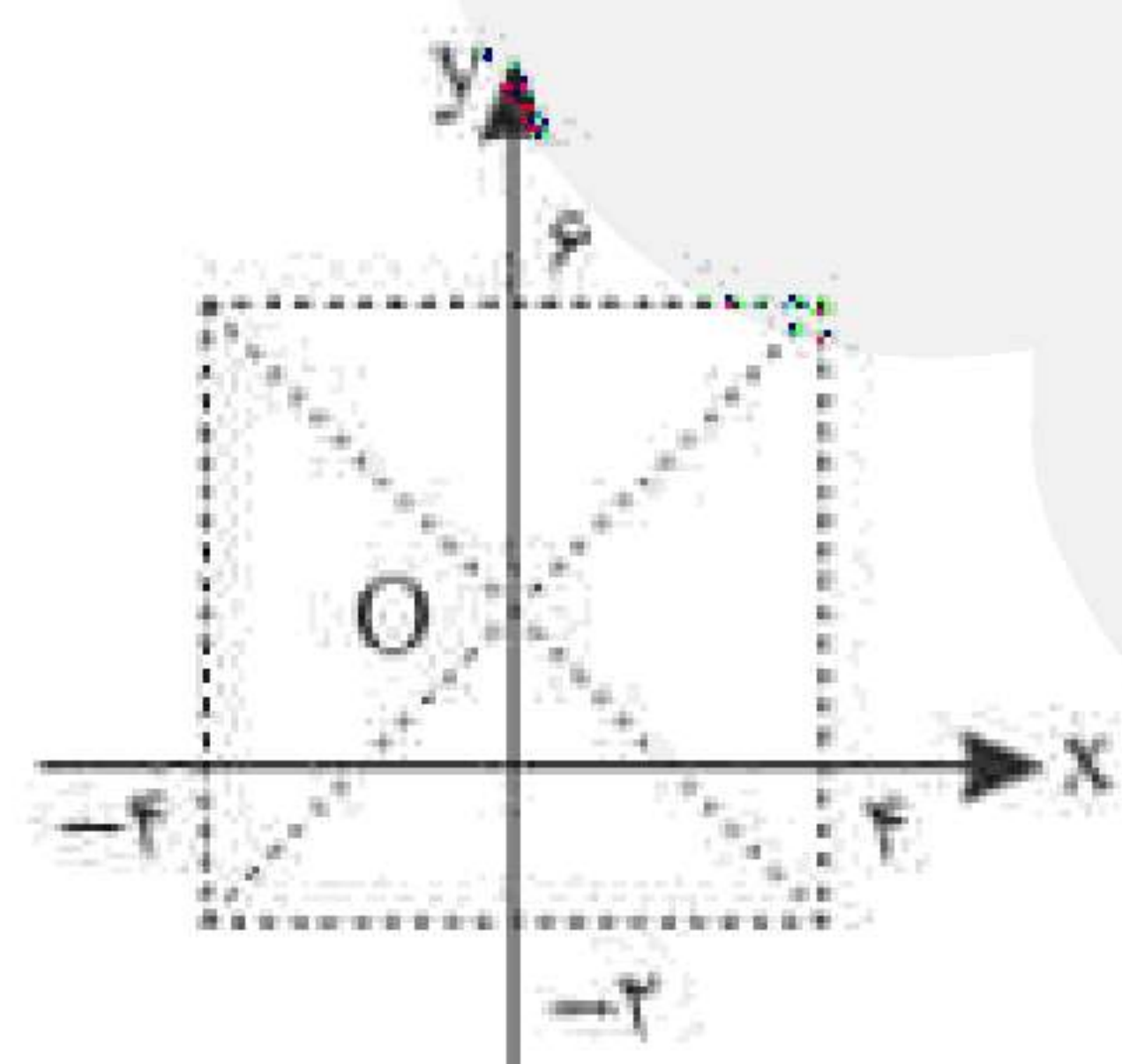
$$|x| = a \xrightarrow{a > 0} x = \pm a \xrightarrow{\text{فاصله از هم}} \text{طول چهارضلعی} = 2a$$

$$y = \frac{a}{2} \pm 4 \xrightarrow{\text{فاصله از هم}} \text{عرض چهارضلعی} = \left| \frac{a}{2} + 4 - \left( \frac{a}{2} - 4 \right) \right| = 4 - (-4) = 8$$

$$\xrightarrow{\text{مربع}} \text{عرض} = \text{طول} \Rightarrow 2a = 8 \Rightarrow a = 4$$

پس اضلاع مربع خطوط  $x = \pm 4$  و  $y = 6$  هستند.

اقطار دارای شیب‌های ۱ و -۱ هستند و از مرکز مربع  $O(0, 2)$  عبور می‌کنند. بنابراین معادله خط اقطار مربع به صورت زیر هستند:

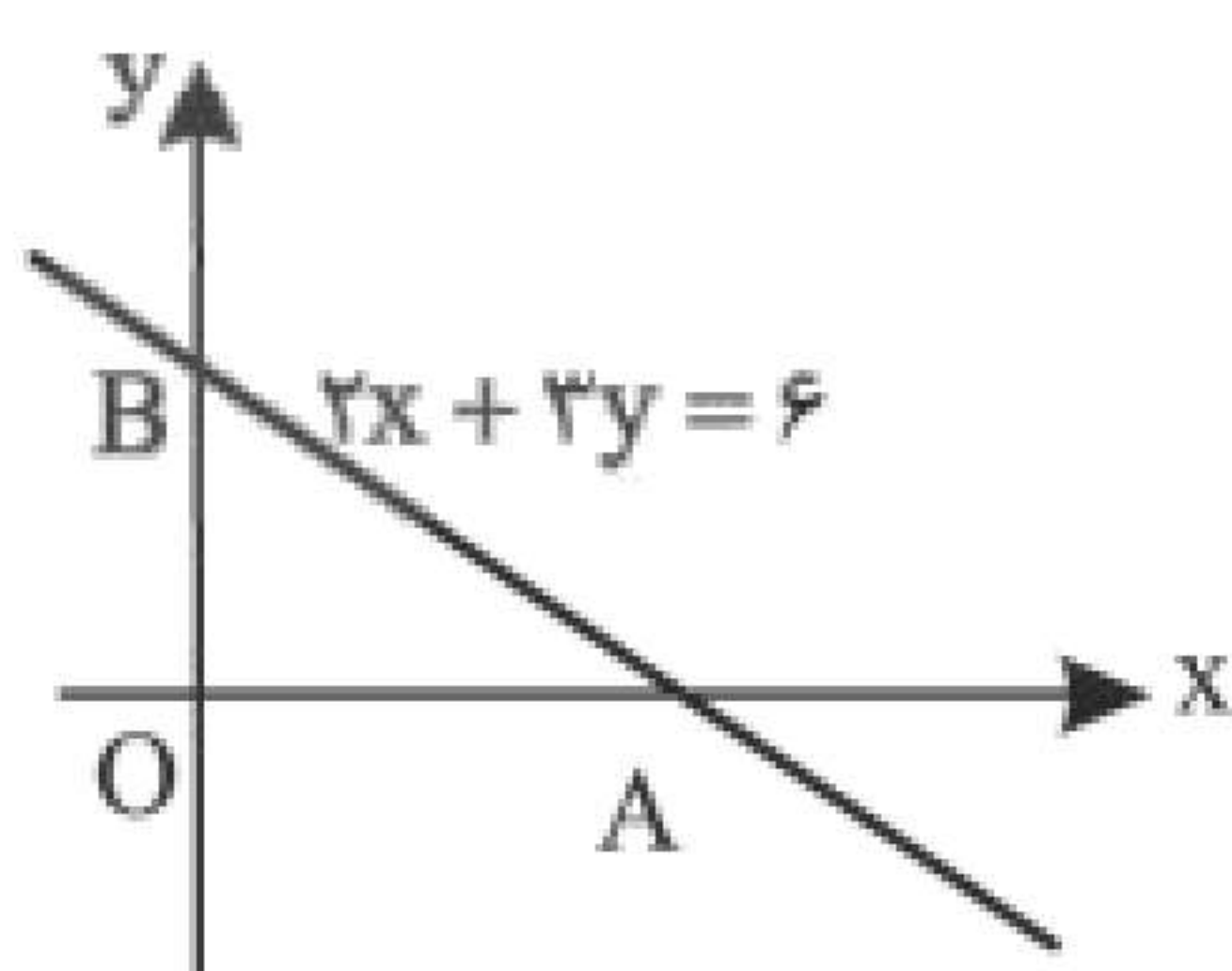


$$\begin{cases} y = x + 2 \\ y = -x + 2 \end{cases}$$

۱۱- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. با توجه به شکل داریم:

$$2x + 3y = 6 \quad \begin{cases} x_B = 0 \rightarrow y_B = 2 \Rightarrow B(0, 2) \\ y_A = 0 \rightarrow x_A = 3 \Rightarrow A(3, 0) \end{cases}$$

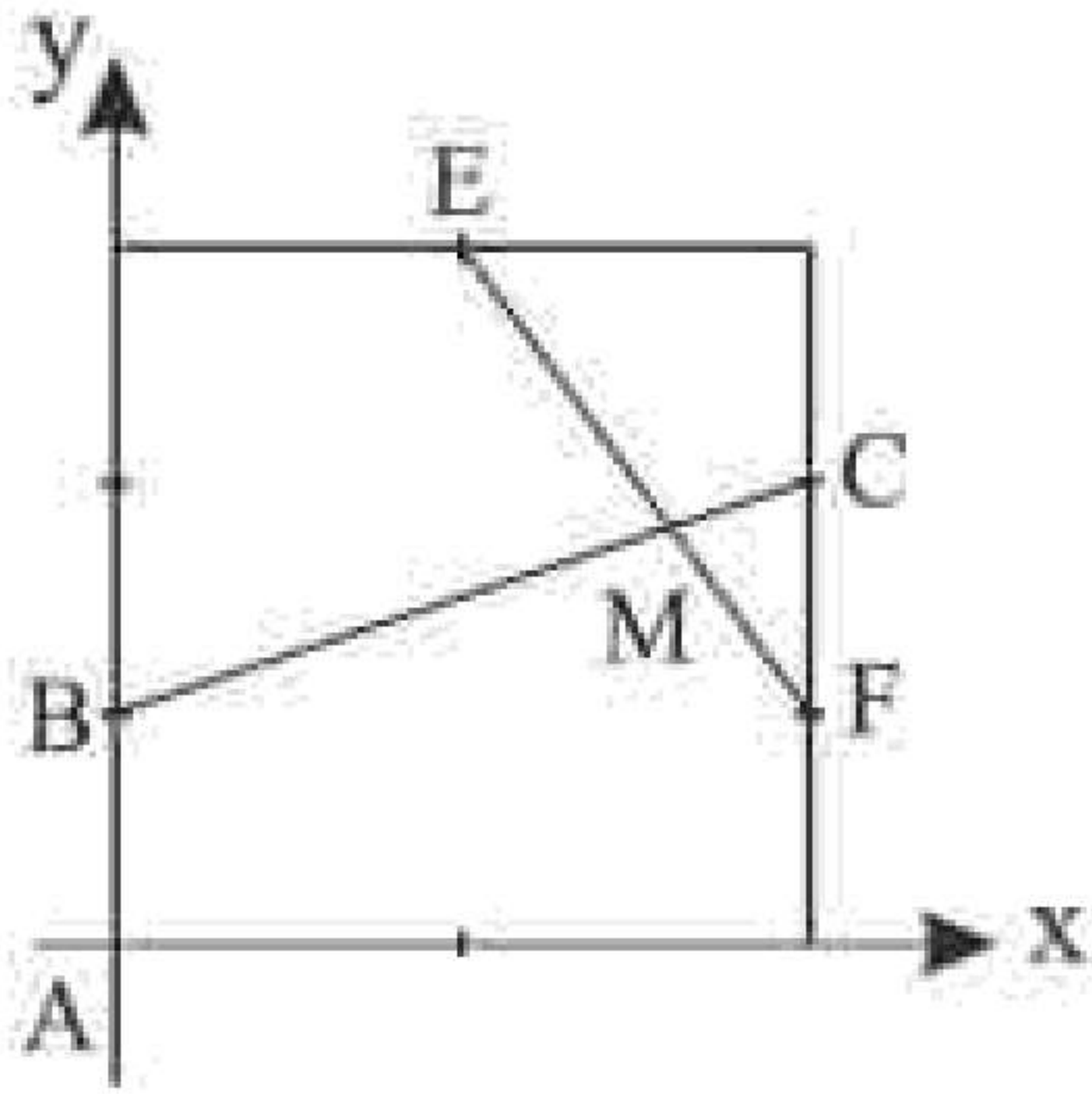
$$\Rightarrow S_{\triangle OAB} = \frac{1}{2} \times 2 \times 3 = 3$$







۱۲- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.



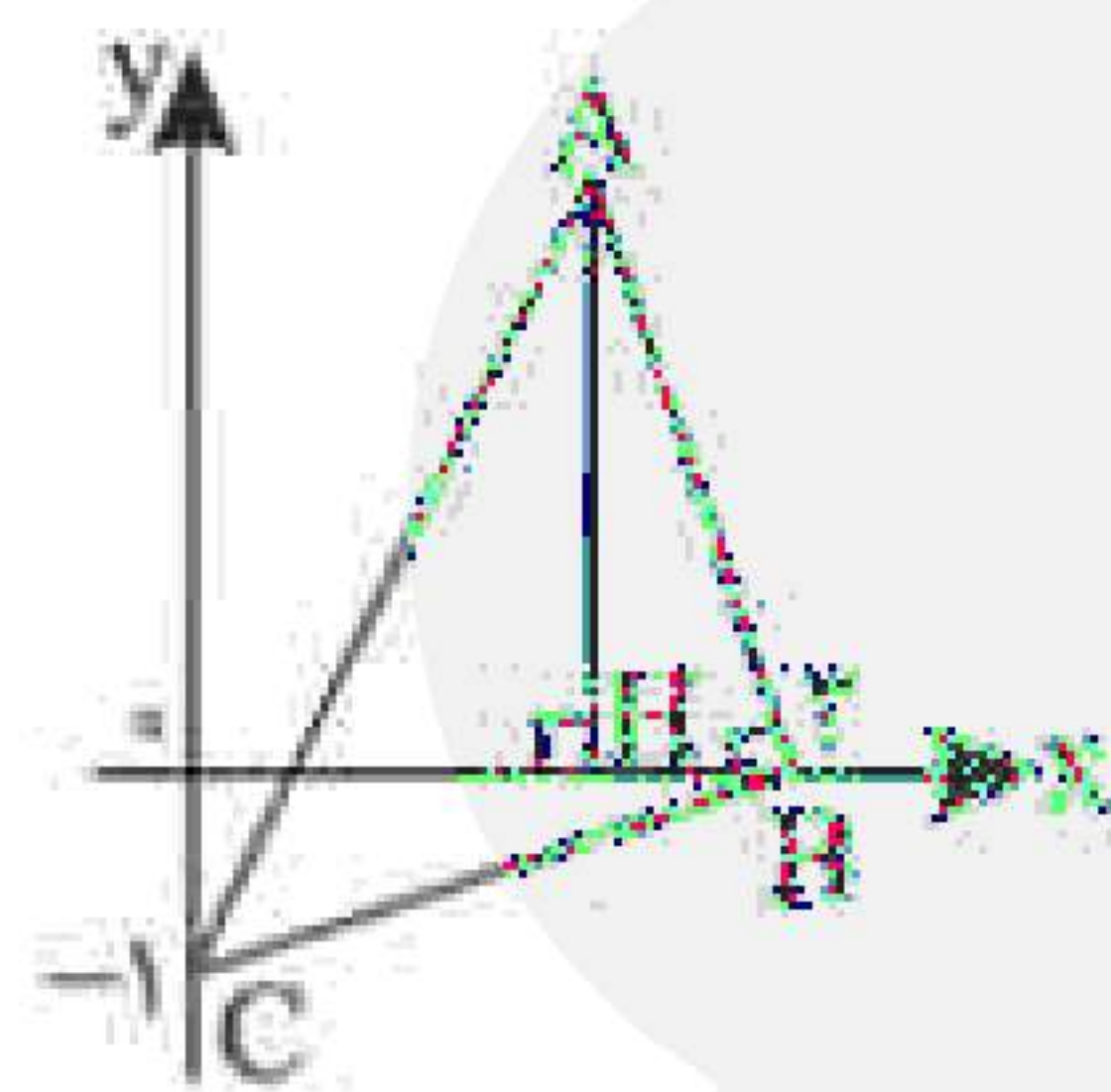
$$\begin{cases} B(0, 2) \\ C(6, 2) \end{cases} \Rightarrow BC \text{ معادله: } y = \frac{1}{3}x + 2$$

$$\begin{cases} E(3, 6) \\ F(6, 2) \end{cases} \Rightarrow EF \text{ معادله: } y = -\frac{4}{3}x + 10$$

$$M: \begin{cases} y = \frac{1}{3}x + 2 \\ y = -\frac{4}{3}x + 10 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{3}x + 2 = -\frac{4}{3}x + 10$$

$$\Rightarrow x = \frac{24}{5} \Rightarrow y = \frac{18}{5}$$

$$AM = \sqrt{\left(\frac{24}{5}\right)^2 + \left(\frac{18}{5}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{6}{5}\right)^2 (4^2 + 3^2)} = 6$$



۱۳- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. شیب BC برابر  $\frac{1}{3}$  است. پس شیب AB برابر -۳ است.

معادله AB به صورت  $y = -3x + 9$  می باشد:

$$A(a, 9 - 3a)$$

$$AB = BC = \sqrt{(a - 3)^2 + (9 - 3a)^2} = \sqrt{9 + 1}$$

$$\Rightarrow 10a^2 - 60a + 90 = 10 \Rightarrow a^2 - 6a + 8 = 0 \Rightarrow a = 2$$

دقت کنید به ازای  $a = 4$  عرض نقطه A منفی می شود.

$$A = (2, 3)$$

۲ = فاصله A از محور y ها

راه دوم:

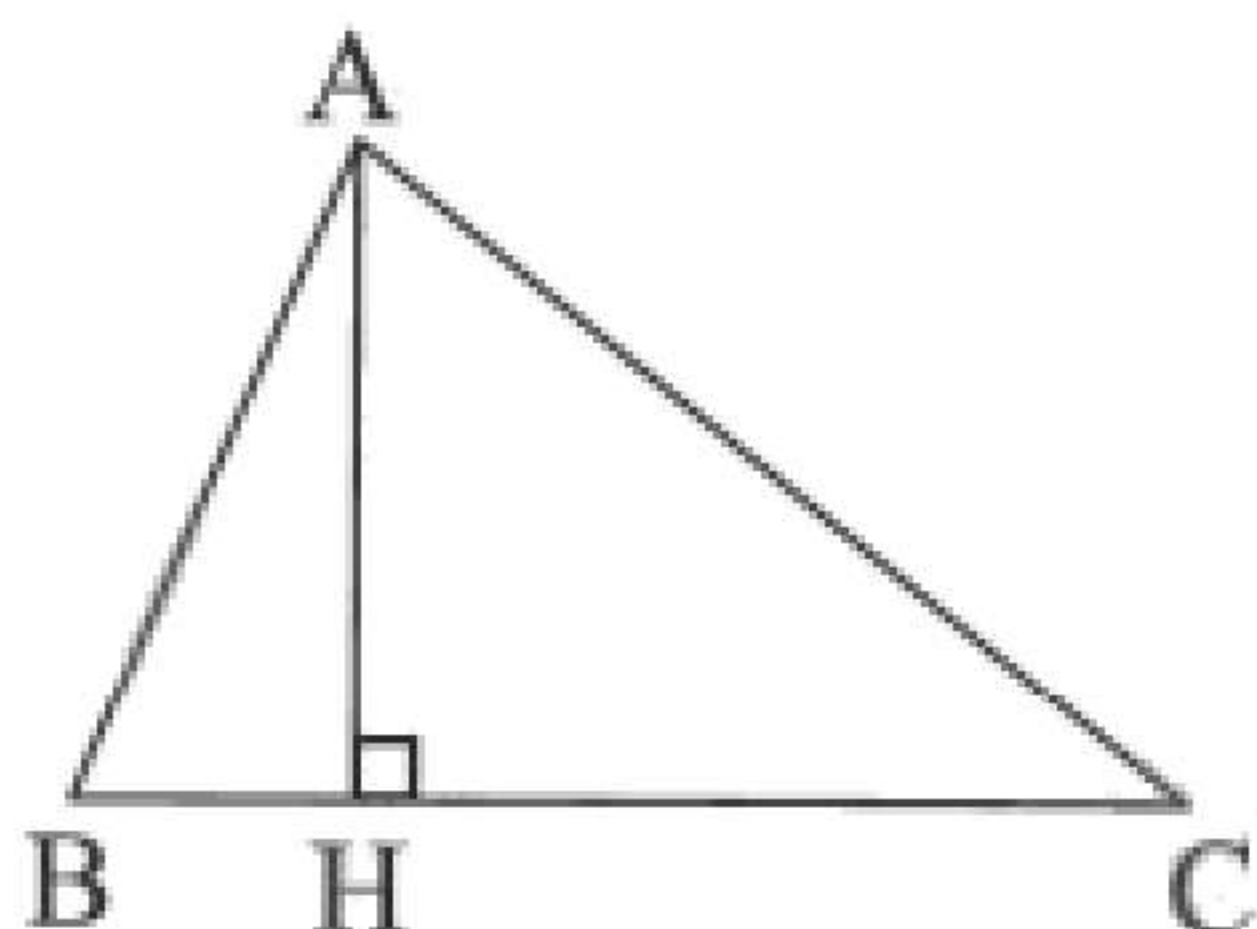
$$\triangle AHB = \triangle BOC \Rightarrow HB = OC = 1 \Rightarrow OH = 2$$

۱۴- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. فاصله A از ضلع BC همان AH است.

$$m_{BC} = \frac{4 - 1}{5 - 1} = \frac{3}{4}$$

$$BC \text{ معادله: } y - 1 = \frac{3}{4}(x - 1) \Rightarrow 4y - 3x - 1 = 0$$

$$\Rightarrow AH = \frac{|8 - 0 - 1|}{\sqrt{16 + 9}} = \frac{7}{5} = 1\frac{2}{5}$$

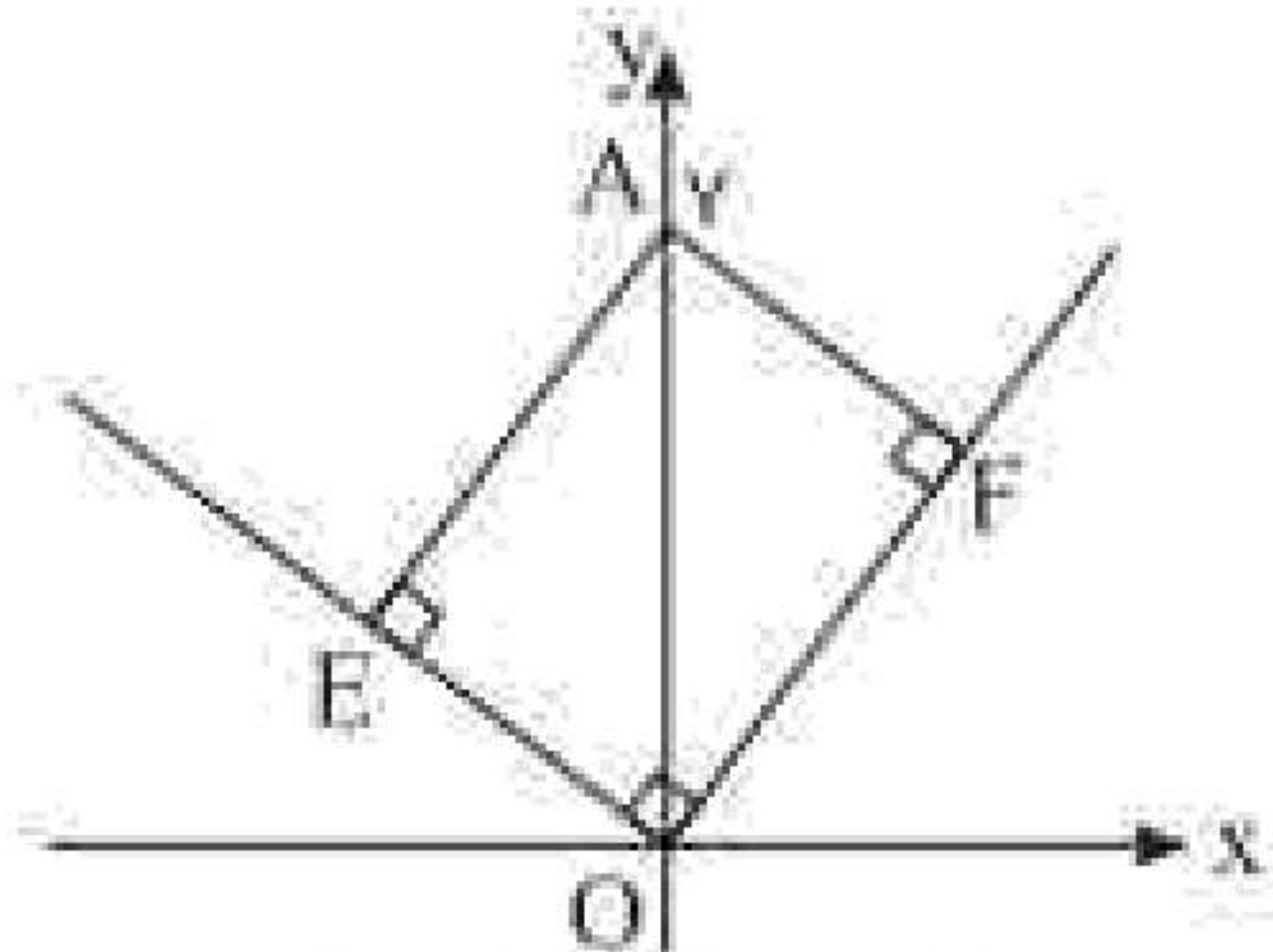






۱۵- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

توجه شود که دو خط  $3x + 4y = 0$  و  $4x - 3y = 0$  هر دو از مبدأ مختصات می‌گذرند و بر هم عمودند (زیرا شیب آنها عکس و قرینه‌ی یکدیگر است) پس اگر از نقطه‌ی A عمودهایی بر دو خط فوق رسم کنیم، چهارضلعی OFAE مستطیل خواهد بود. برای محاسبه‌ی محیط آن کافی است طول دو ضلع مجاور آن یعنی AF و AE را محاسبه کنیم.



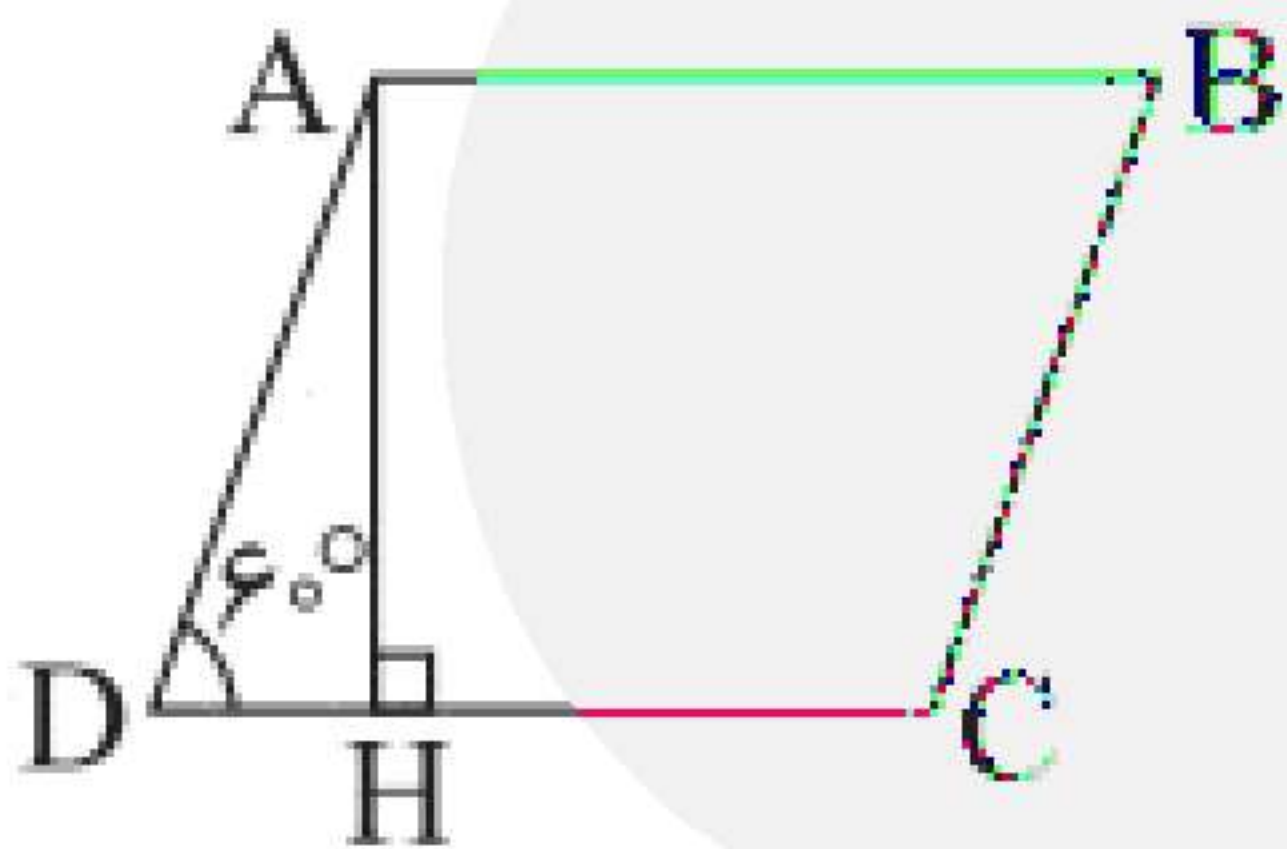
$$AF = \frac{|0 + 28|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{28}{5}$$

$$AE = \frac{|0 - 21|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{21}{5}$$

$$\text{محیط چهارضلعی OFAE} = 2 \left( \frac{28}{5} + \frac{21}{5} \right) = \frac{98}{5} = 19\frac{4}{5}$$

۱۶- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

اولاً باید دو خط موازی باشند.



$$\frac{2}{a} = \frac{a}{1} \Rightarrow a = \sqrt{2}$$

ثانیاً فاصله‌ی بین دو خط را پیدا می‌کنیم.

$$\begin{cases} \sqrt{2}x - y = 5 \\ 2x - \sqrt{2}y = 2\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{2}x - y = 5 \\ \sqrt{2}x - y = 2 \end{cases}$$

$$AH = \frac{|5 - 2|}{\sqrt{2 + 1}} = \sqrt{3}$$

$$\text{tg } 60^\circ = \frac{AH}{DH} \Rightarrow DH = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 1$$

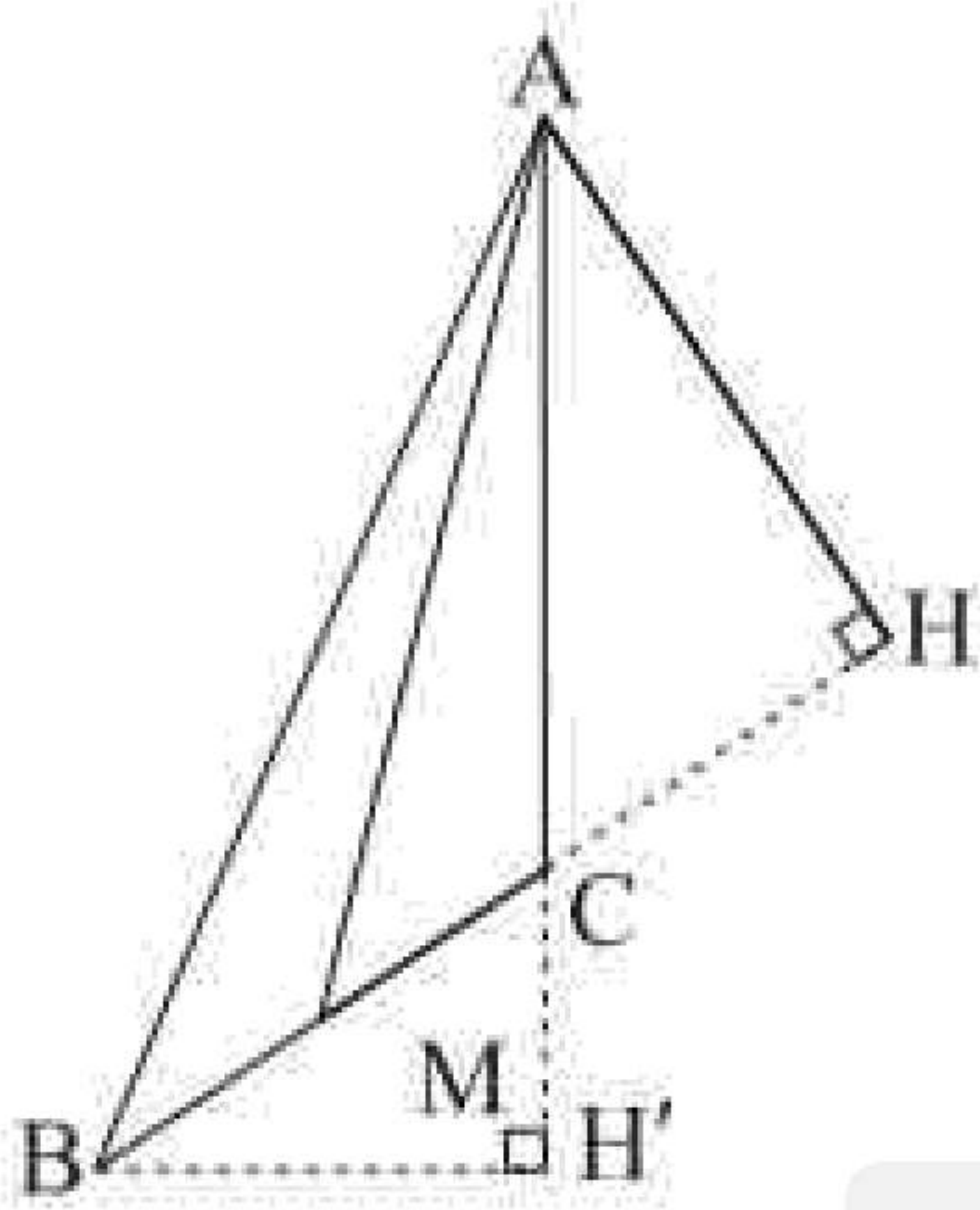
$$AD = \sqrt{AH^2 + DH^2} = \sqrt{3 + 1} = 2$$

$$\text{محیط} = 4AD = 8$$





۱۷- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.  
شکل فرضی مقابل را در نظر بگیرید.



$$\begin{cases} x_{H'} = x_A \\ y_{H'} = y_B \end{cases} \Rightarrow H'(2, -4)$$

$$\Rightarrow BH' = \sqrt{(2-0)^2 + (-4+4)^2} = 2$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} BH' \cdot AC = \frac{1}{2} BC \cdot AH$$

$$2 \times 5 = \sqrt{20} \times AH \Rightarrow AH = \sqrt{5}$$

$$\begin{cases} M = (1, -2) \\ AM = \sqrt{1+49} = 5\sqrt{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow MH = \sqrt{AM^2 - AH^2}$$

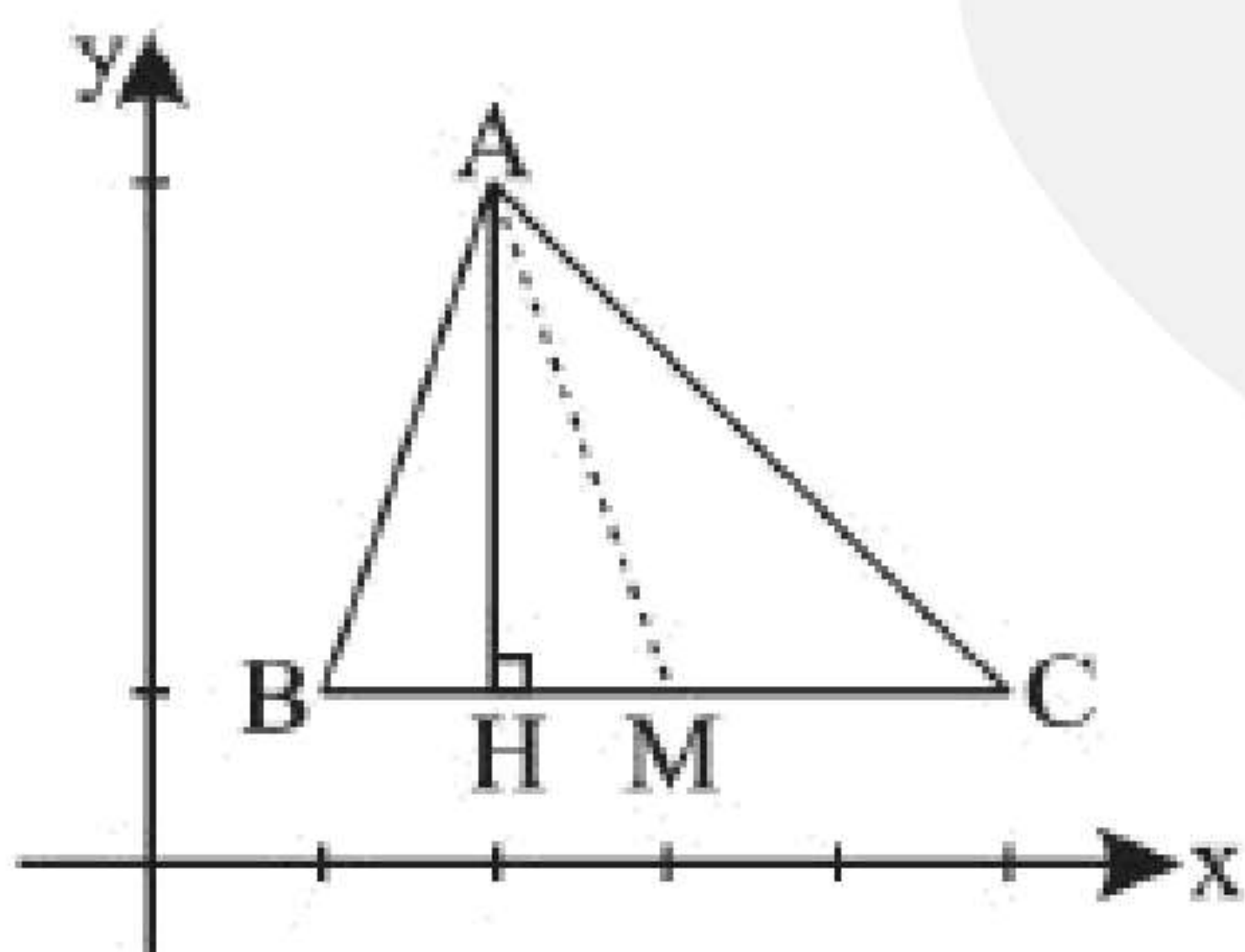
$$= \sqrt{50 - 5} = 3\sqrt{5}$$

۱۸- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$y = \frac{4}{3}x - 5 \Rightarrow 3y = 4x - 15 \Rightarrow 3y - 4x + 15 = 0$$

$$A(1, -2) \quad d = \frac{|3(-2) - 4(1) + 15|}{\sqrt{(3)^2 + (-4)^2}} = \frac{5}{5} = 1$$

۱۹- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.



$$BC : y = 1 \Rightarrow H(2, 1)$$

$$AH : x = 2$$

$$B(1, 1) \Rightarrow x_M = \frac{1+5}{2} = 3$$

$$C(5, 1) \Rightarrow y_M = \frac{1+1}{2} = 1 \Rightarrow M(3, 1)$$

$$\Rightarrow MH = 3 - 2 = 1$$





۲۰- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\begin{cases} (a, \cdot) \in l \\ (\cdot, b) \in l \end{cases} \Rightarrow m = \frac{b - \cdot}{\cdot - a} = -\frac{b}{a}$$

$$l: y - b = -\frac{b}{a}(x - \cdot) \Rightarrow ay - ab = -bx$$

$$\Rightarrow ay + bx = ab \Rightarrow \frac{y}{b} + \frac{x}{a} = 1$$

۲۱- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$D(\alpha, \cdot) \Rightarrow A(\alpha, 3\alpha) \Rightarrow \text{ضلع مربع} = 3\alpha$$

$$C(4\alpha, \cdot), B(4\alpha, 3\alpha)$$

$$\Rightarrow OB = \sqrt{16\alpha^2 + 9\alpha^2} = 5\alpha \Rightarrow 5\alpha = 10 \Rightarrow \alpha = 2$$

بدین ترتیب مساحت مربع:

$$S = (3\alpha)^2 = 9\alpha^2 = 36$$

«بانک سوال یاوران دانش»

۲۲- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.  
وسط AM روی خط قرار دارد.

$$2\left(\frac{\alpha + 3}{2}\right) = 3\left(\frac{\beta - 2}{2}\right) - 3 \Rightarrow 2\alpha - 3\beta = -18$$

۲۳- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.  
ابتدا عمود منصف AB را به دست می آوریم:

$$A(3, 2), B(1, 4) \Rightarrow m_{AB} = \frac{2}{-2} = -1 \Rightarrow m_{\text{عمود منصف}} = 1$$

$$M(2, 3) \Rightarrow y = x + 1$$

حال عمود منصف AB را با خط  $y = 2x - 1$  قطع می دهیم:

$$2x - 1 = x + 1 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow M(2, 3)$$

۲۴- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$m_{BC} = \frac{4}{-1} = -4 \Rightarrow m_{\text{ارتفاع}} = \frac{1}{4}$$

$$y = \frac{1}{4}x + \frac{1}{4} \Rightarrow 4y = x + 1 \Rightarrow 4y - x = 1$$





۲۵- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\begin{cases} AB: 2y + x = 6 \\ AC: y + 3x = -2 \end{cases} \Rightarrow A(-2, 4)$$

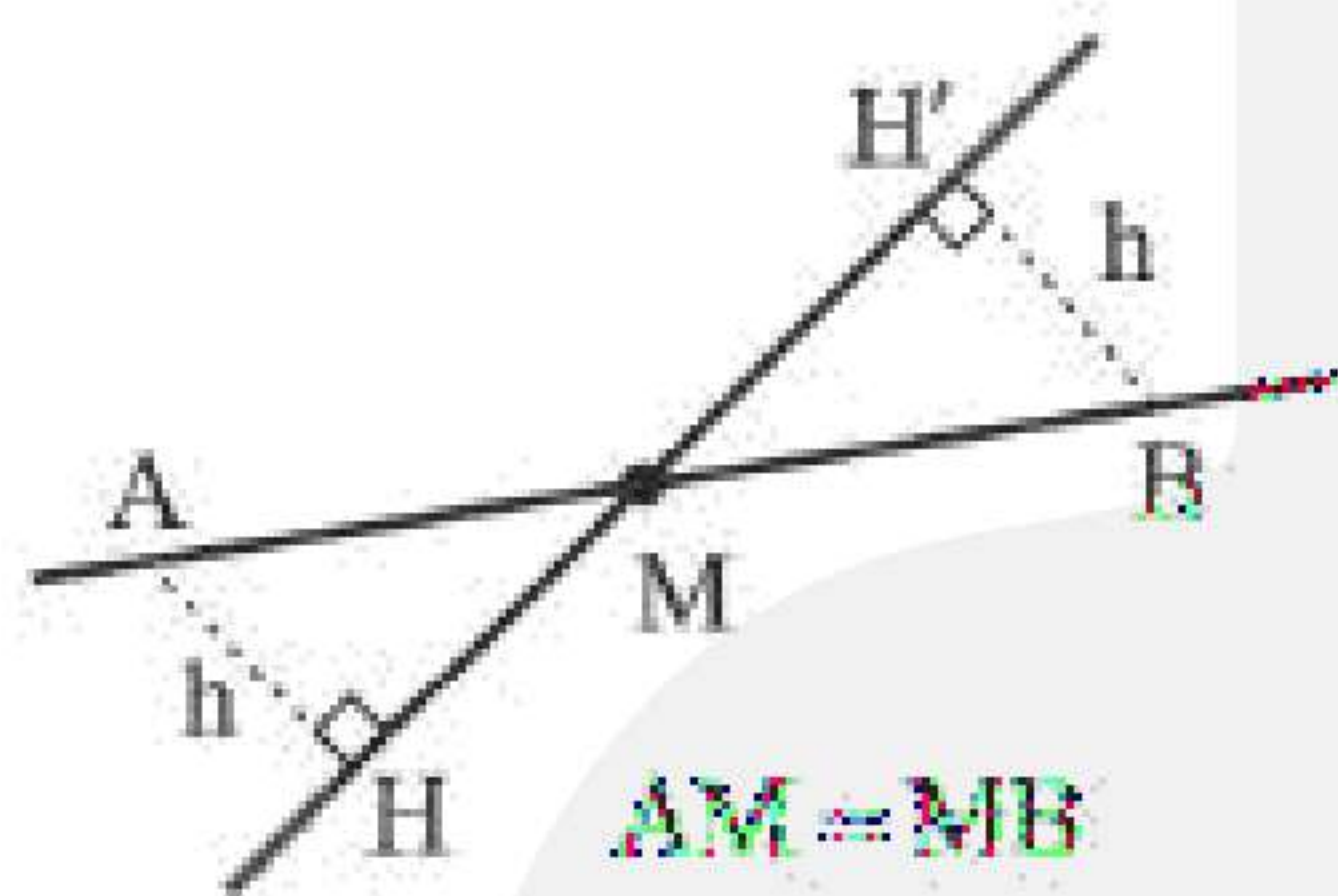
$$\begin{cases} AB: 2y + x = 6 \\ BC: y - 2x = -2 \end{cases} \Rightarrow B(2, 2)$$

$$\begin{cases} AC: y + 3x = -2 \\ BC: y - 2x = -2 \end{cases} \Rightarrow C(0, -2)$$

$$\Rightarrow x_A + x_B + x_C = 0$$

۲۶- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

چون دو خط مذکور متقاطع اند، پس طبق شکل زیر M نقطه تقاطع دو خط است، پس کافی است دستگاه زیر را حل کنیم:

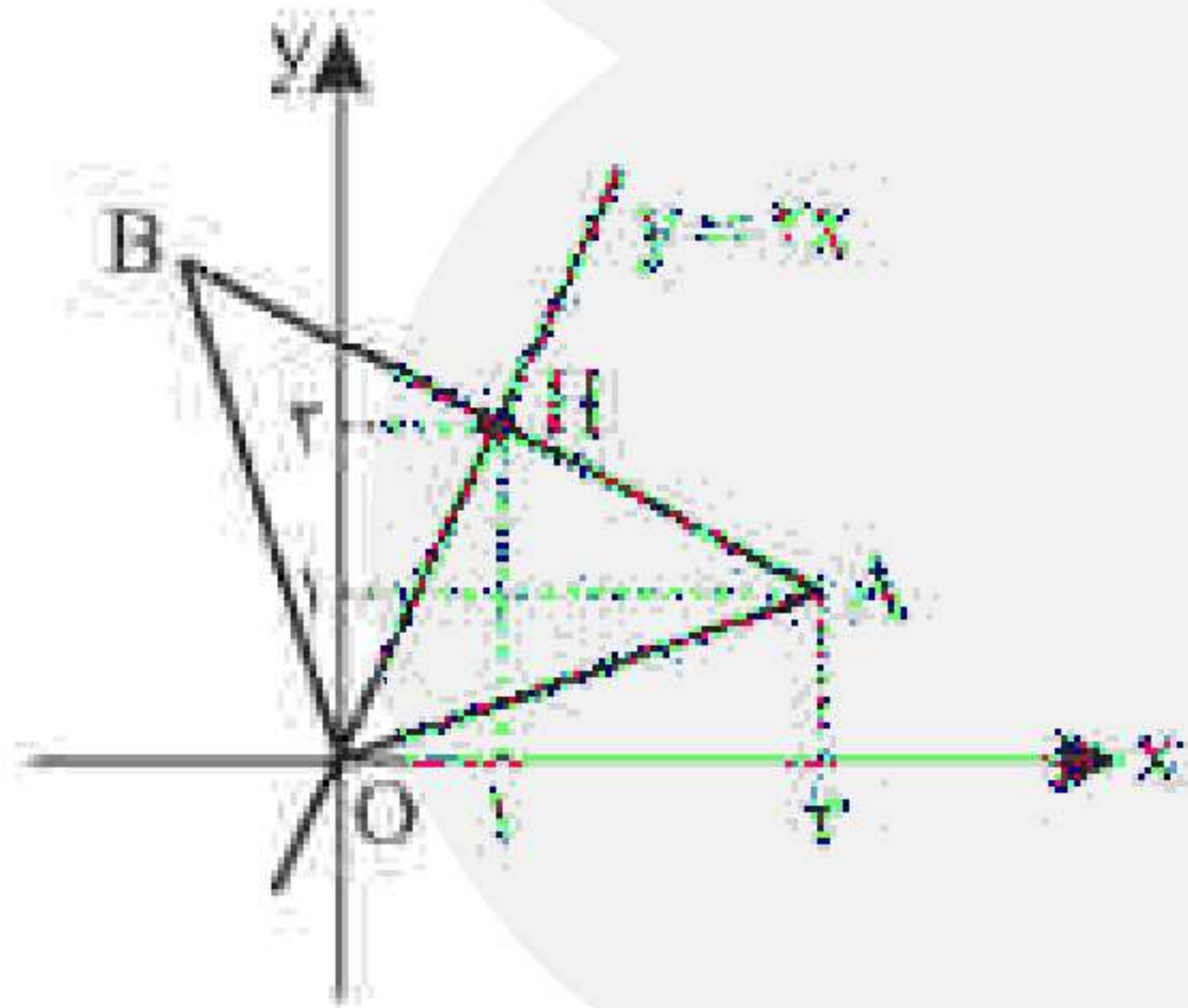


$$\begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ -x + 2y + 3 = 0 \end{cases}$$

$$y + 4 = 0 \Rightarrow y = -4 \Rightarrow x = -5 \Rightarrow M(-5, -4)$$

۲۷- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

اگر B قرینه نقطه A نسبت به خط  $y = 2x$  باشد، خط  $y = 2x$  عمود منصف پاره خط AB است، بنابراین با توجه به شکل  $AB = 2AH$  خواهد بود. AH نیز فاصله نقطه A از خط  $y = 2x$  است.



$$AH = \frac{|1 - 6|}{\sqrt{4 + 1}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5} \Rightarrow AB = 2\sqrt{5} \quad (1)$$

شیب خط شامل پاره خط AB برابر  $-\frac{1}{2}$  است. حالا با استفاده از نقطه A می توانیم معادله آن را بنویسیم:

$$y - 1 = -\frac{1}{2}(x - 3) \Rightarrow 2y + x = 5$$

OH ارتفاع مثلث و برابر فاصله مبدأ مختصات از خط شامل AB است.

$$\Rightarrow OH = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5} \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2} AB \cdot OH = 5$$





۲۸- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.  
اولاً: قطرهای لوزی بر هم عمودند، بنابراین:

$$y = (2k + 1)x + 1 \xrightarrow[\text{ضریب } x]{\text{شیب را بخوان}} m = 2k + 1$$

$$(k + 1)y = x + 2 \xrightarrow{y \text{ را تنها کن}} y = \frac{1}{k + 1}x + \frac{2}{k + 1}$$

$$\xrightarrow[\text{شیب را بخوان}]{\text{شرط عمود بودن}} m' = \frac{1}{k + 1} \rightarrow m = -\frac{1}{m'}$$

$$2k + 1 = -(k + 1) \Rightarrow 2k + 1 = -k - 1 \Rightarrow 3k = -2 \Rightarrow k = -\frac{2}{3}$$

$$\xrightarrow[\text{قرار بده}]{\text{در هر دو خط}} \begin{cases} y = -\frac{1}{3}x + 1 \\ y = 3x + 6 \end{cases} \xrightarrow{\text{تلاقی دو خط}} -\frac{1}{3}x + 1 = 3x + 6$$

$$\xrightarrow[\text{مرتب کن}]{\text{در اولی قرار بده}} -5 = \frac{10}{3}x \Rightarrow x = -\frac{3}{2} \xrightarrow{\text{در اولی قرار بده}} y = -\frac{1}{3}\left(-\frac{3}{2}\right) + 1$$

$$= \frac{1}{2} + 1 \xrightarrow{\text{نقطه تلاقی دو خط}} O\left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$$

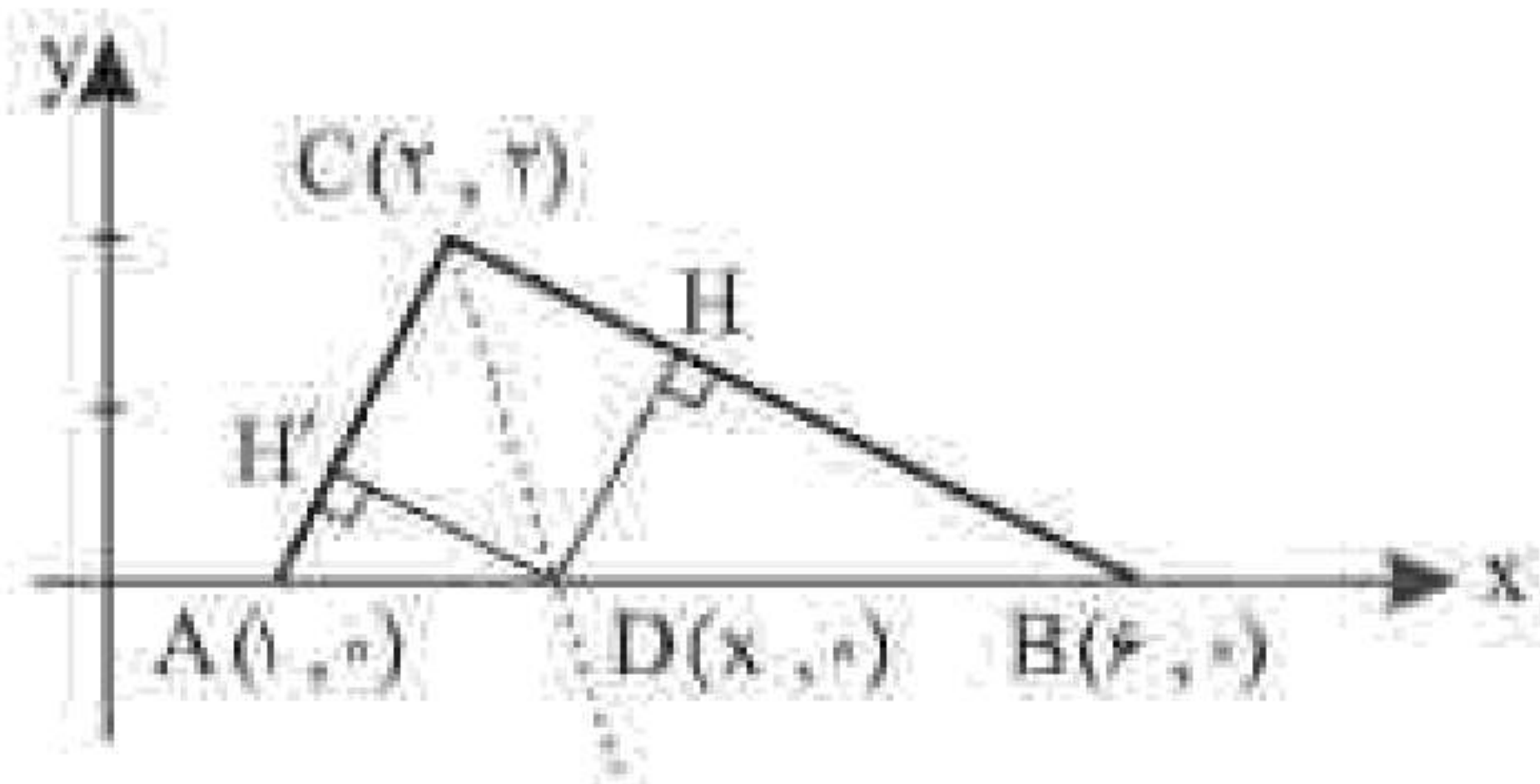
لوزی محل تلاقی دو قطر همان مرکز تقارن لوزی است، پس نقطه  $\left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$  مرکز تقارن لوزی است.





۲۹- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

طبق اطلاعات سؤال، نقاط A، B و C را مشخص می‌کنیم و نیمساز داخلی زاویه C را رسم می‌کنیم. می‌دانیم که هر نقطه‌ای روی نیمساز یک زاویه قرار بگیرد (D)، از دو ضلع آن به یک اندازه است. لذا  $DH = DH'$ .



با نوشتن معادله خط BC و AC می‌توان فاصله نقطه از خط را نوشت:

$$BC \text{ خط معادله: } y = -\frac{1}{5}x + 3 \Rightarrow 2y + x - 6 = 0$$

$$AC \text{ خط معادله: } y = 2x - 2 \Rightarrow y - 2x + 2 = 0$$

$$DH = DH' \Rightarrow \frac{|x - 6|}{\sqrt{5}} = \frac{|-2x + 2|}{\sqrt{5}} \Rightarrow |x - 6| = |2x - 2|$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - 6 = 2x - 2 \Rightarrow x = -4 & \text{غ ق ق} \\ x - 6 = -2x + 2 \Rightarrow 3x = 8 \Rightarrow x = \frac{8}{3} & \text{ق ق} \end{cases}$$

لذا مختصات نقطه D به صورت  $(\frac{8}{3}, 0)$  خواهد بود.

۳۰- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

طبق تعریف دایره، فاصله هر نقطه روی دایره از مرکز دایره برابر با شعاع دایره است. شعاع دایره را R می‌نامیم. با محاسبه فاصله نقطه  $(a, 2a)$  از هر یک از نقاط  $(1, 1)$  و  $(-2, 4)$ ، ابتدا مقدار a و سپس مقدار R را به دست می‌آوریم.

$$\left. \begin{aligned} R &= \sqrt{(a - 4)^2 + (2a + 2)^2} \\ R &= \sqrt{(a - 1)^2 + (2a - 1)^2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \sqrt{(a - 4)^2 + (2a + 2)^2} = \sqrt{(a - 1)^2 + (2a - 1)^2}$$

$$\Rightarrow a^2 - 8a + 16 + 4a^2 + 8a + 4 = a^2 - 2a + 1 + 4a^2 - 4a + 1$$

$$\Rightarrow 20 = -6a + 2 \Rightarrow -6a = 18 \Rightarrow a = -3$$

$$R = \sqrt{(-3 - 4)^2 + (-6 + 2)^2} = \sqrt{49 + 16} = \sqrt{65}$$





۳۱- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

دو ضلع AB و BC بر هم عمودند، پس شیب BC، قرینه و معکوس شیب AB است.

$$m_{BC} = \frac{-1}{m_{AB}} = \frac{-1}{1} = -1 \Rightarrow BC: y = -x + b$$

فاصله رأس D را از دو ضلع AB و BC حساب می‌کنیم:

$$\left. \begin{array}{l} BC: y + x - b = 0 \\ D = (2, 6) \end{array} \right\} \Rightarrow \text{فاصله D تا BC: } \frac{|6 + 2 - b|}{\sqrt{2}} = \frac{|8 - b|}{\sqrt{2}}$$

$$\left. \begin{array}{l} AB: y - x = 0 \\ D = (2, 6) \end{array} \right\} \Rightarrow \text{فاصله D تا AB: } \frac{|6 - 2|}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$$

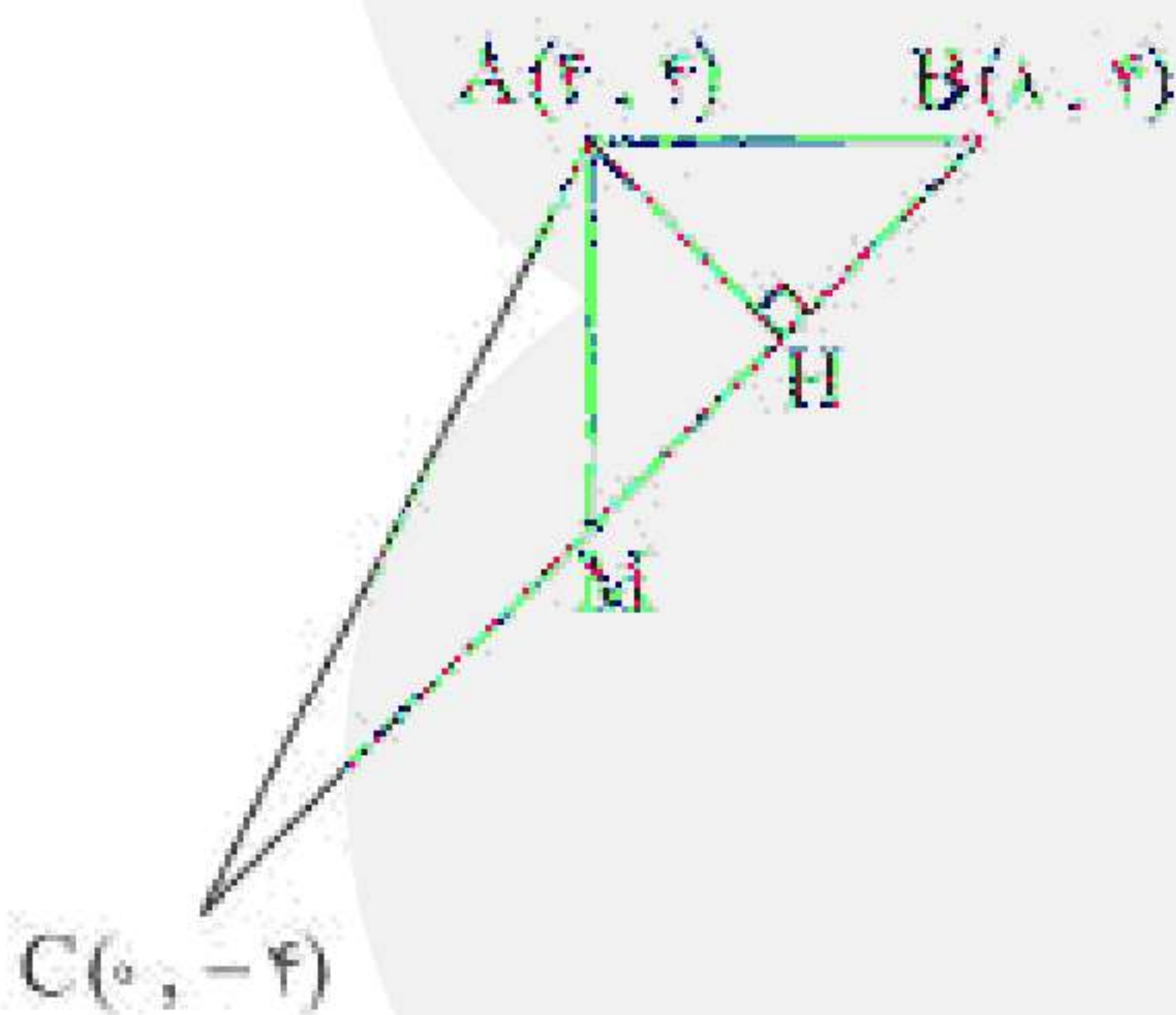
مساحت مستطیل ۱۲ است پس:

$$\text{طول} \times \text{عرض} = ۱۲ \Rightarrow 2\sqrt{2} \times \frac{|8 - b|}{\sqrt{2}} = ۱۲ \Rightarrow |8 - b| = ۶$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 8 - b = ۶ \Rightarrow b = ۲ \\ 8 - b = -۶ \Rightarrow b = ۱۴ \end{cases}$$

۳۲- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

ابتدا طول میانه AM را به دست می‌آوریم:



$$\text{وسط BC } M\left(\frac{8+0}{2}, \frac{4-4}{2}\right) = (4, 0)$$

$$AM = \sqrt{(4-4)^2 + (4-0)^2} = 4 \quad (۱)$$

سپس طول ارتفاع AH را به کمک فاصله رأس A از ضلع BC به دست می‌آوریم:

$$m_{BC} = \frac{-4-4}{0-8} = ۱ \Rightarrow y - (-4) = ۱(x - 0) \Rightarrow BC: x - y - 4 = 0$$

$$AH = \frac{|4 - 4 - 4|}{\sqrt{1+1}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2} \quad (۲)$$

اینک به کمک قضیه فیثاغورس در مثلث AHM و روابط (۱) و (۲) خواهیم داشت:

$$MH = \sqrt{AM^2 - AH^2} = \sqrt{۱۶ - ۸} = \sqrt{۸} = 2\sqrt{2}$$





۳۳- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

معادله خط را  $y = ax + b$  در نظر می‌گیریم و چون فاصله نقطه  $(0, 0)$  از آن ۲ است، می‌نویسیم:

$$2 = \frac{|-b|}{\sqrt{a^2 + 1}} \quad (1)$$

و نقطه  $(2, 3)$  روی این خط قرار دارد پس:

$$3 = 2a + b \Rightarrow b = 3 - 2a \quad (2)$$

$$(1), (2): 2 = \frac{|3 - 2a|}{\sqrt{a^2 + 1}} \xrightarrow{\text{توان } 2} 4(a^2 + 1) = (3 - 2a)^2$$

$$\Rightarrow 4a^2 + 4 = 4a^2 - 12a + 9 \Rightarrow a = \frac{5}{12} \xrightarrow{(2)} b = \frac{13}{6}$$

۳۴- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

با توجه به این که نقطه تقارن یافته روی خط  $y = x$  است، آن را  $(\alpha, \alpha)$  در نظر می‌گیریم و می‌دانیم:

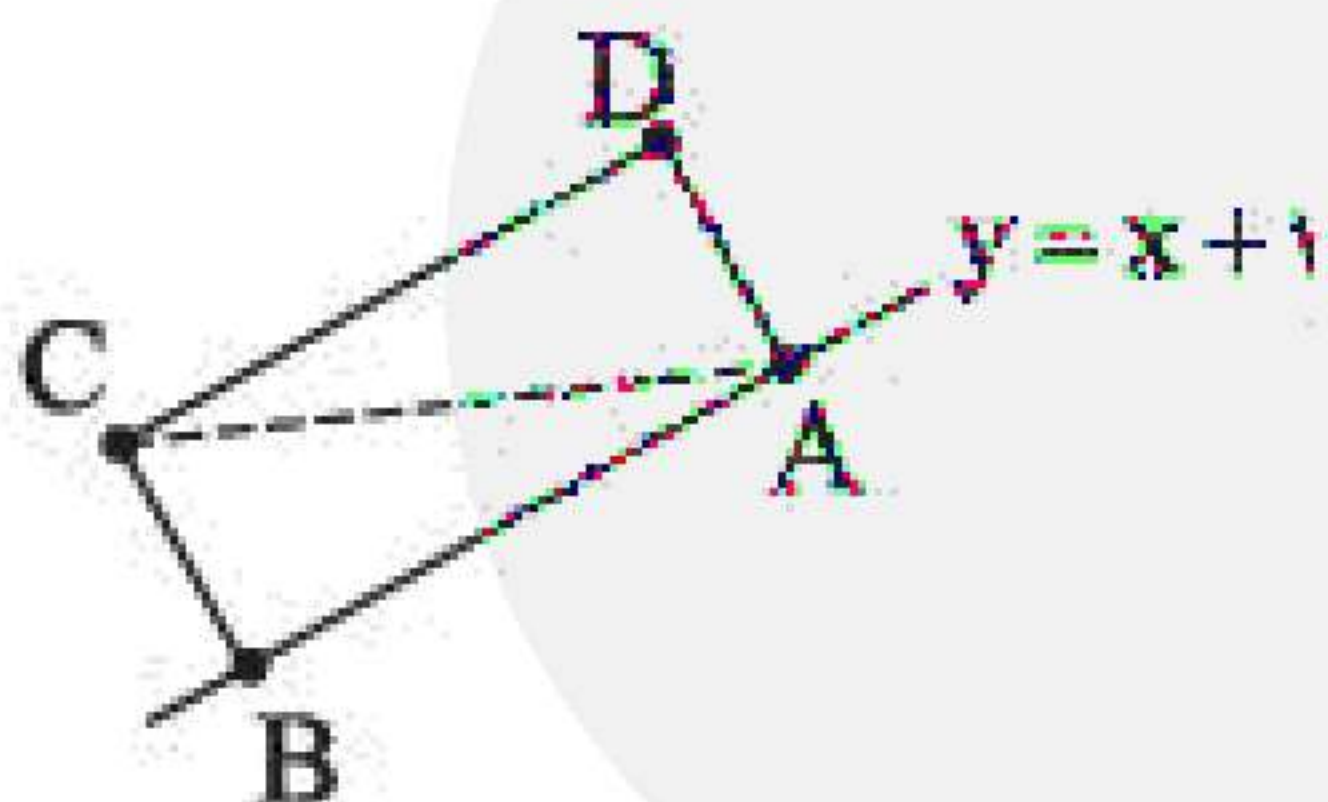
$$\frac{\alpha + 1}{2} = 5 \Rightarrow \alpha = 9$$

$$\frac{9 + K + 2}{2} = K \Rightarrow K = 11$$

پس:

«بانک سوال یاوران دانش»

۳۵- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.



نقطه  $(3, 4)$  در معادله خط  $y = x + 1$  صدق می‌کند پس روی آن قرار دارد که آن را A می‌نامیم. سر دیگر قطر یعنی  $(-3, 2)$  را C می‌نامیم.

$$AC = \sqrt{(x_A - x_C)^2 + (y_A - y_C)^2} = \sqrt{6^2 + 2^2} = \sqrt{40}$$

طول ضلع BC با فاصله نقطه C از خط  $x - y + 1 = 0$  برابر است.

$$BC = \frac{|-3 - 2 + 1|}{\sqrt{1 + 1}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$$

طبق قضیه فیثاغورس در مثلث ABC داریم:

$$AC^2 = BC^2 + AB^2 \Rightarrow 40 = 8 + AB^2 \Rightarrow AB = 4\sqrt{2}$$

$$S_{\text{مستطیل}} = AB \times BC = 4\sqrt{2} \times 2\sqrt{2} = 16$$





۳۶- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

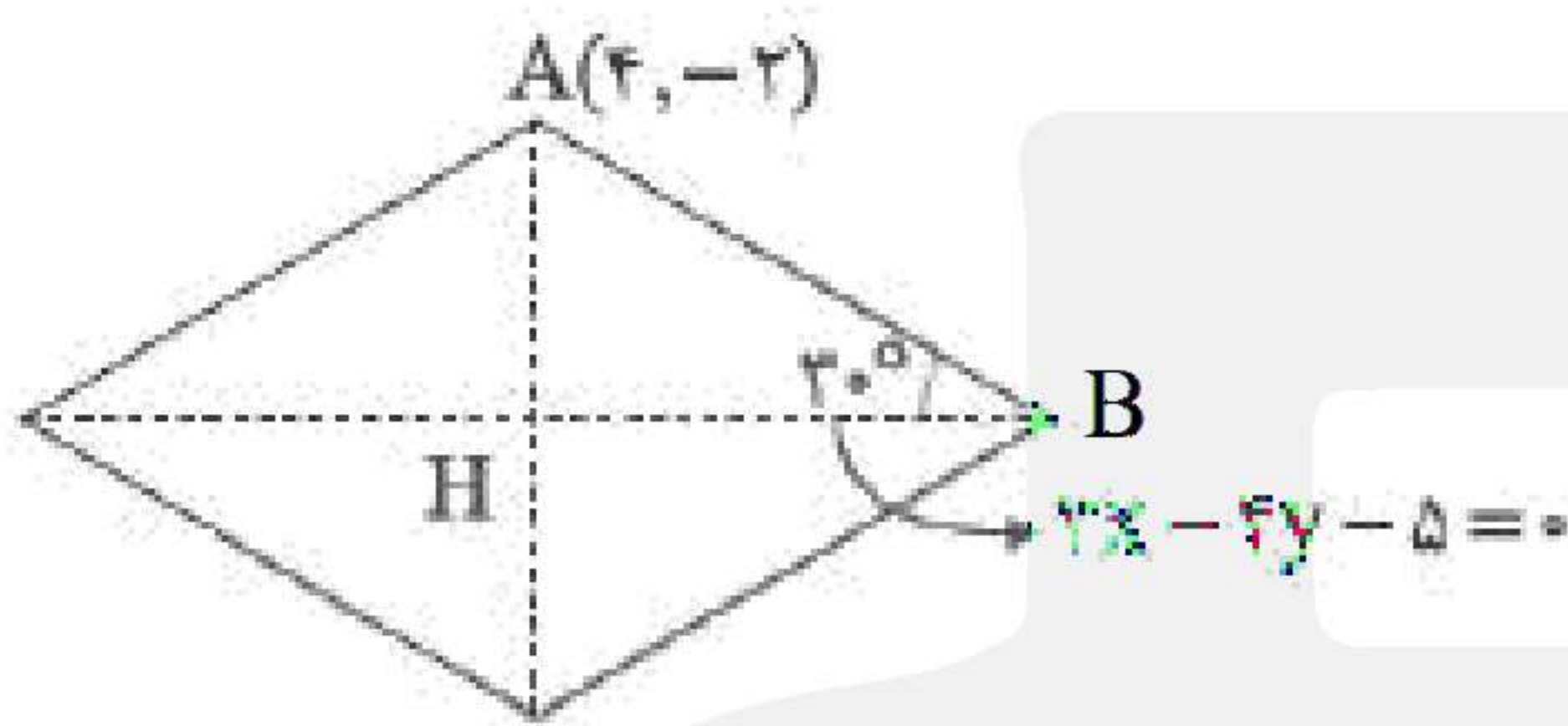
ارتفاع نظیر رأس A با عبور از نقطه A بر خط BC عمود است.

$$m_{BC} = \frac{y_B - y_C}{x_B - x_C} = \frac{2 + 1}{1 - 4} = -1$$

$$\begin{cases} m = 1 \\ A \left( \begin{matrix} 0 \\ -3 \end{matrix} \right) \Rightarrow y + 3 = 1(x - 0) \end{cases}$$

$$y = x - 3 \Rightarrow -3 = \text{عرض از مبدا}$$

۳۷- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.



$$AH = \frac{|3(4) - 4(-2) - 5|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{|12 + 8 - 5|}{5} = \frac{15}{5} = 3$$

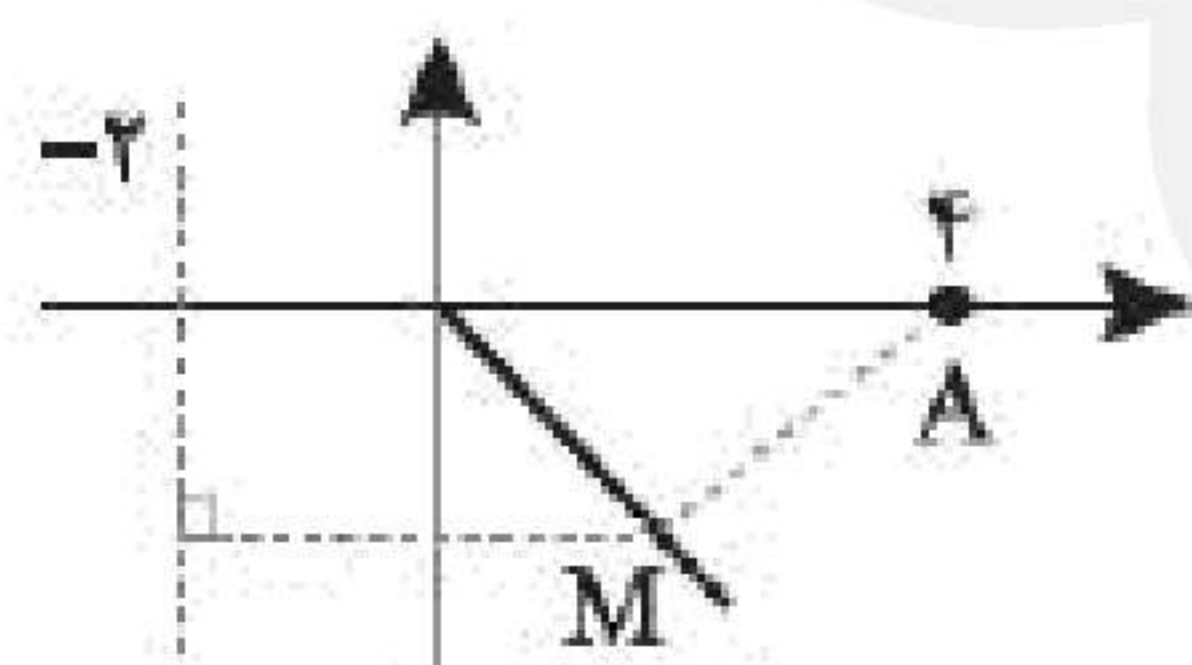
در مثلث ABH داریم:

$$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{AH}{BH} = \frac{3}{BH} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{3}{BH} \Rightarrow BH = 3\sqrt{3}$$

$$S_{\triangle ABH} = \frac{AH \times BH}{2} = \frac{3 \times 3\sqrt{3}}{2} = \frac{9\sqrt{3}}{2}$$

$$S_{\text{کل}} = 4 \left( \frac{9\sqrt{3}}{2} \right) = 18\sqrt{3}$$

۳۸- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.



$$M(\alpha, -\alpha)$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} AM = |\alpha + 2| \Rightarrow \frac{1}{2} ((\alpha - 4)^2 + \alpha^2) = \alpha^2 + 4\alpha + 4$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} (2\alpha - 8\alpha + 16) = \alpha^2 + 4\alpha + 4$$

$$\Rightarrow \alpha^2 - 4\alpha + 8 = \alpha^2 + 4\alpha + 4 \Rightarrow 8\alpha = 4 \Rightarrow \alpha = \frac{1}{2}$$





۳۹- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

۱)  $AB = BC$

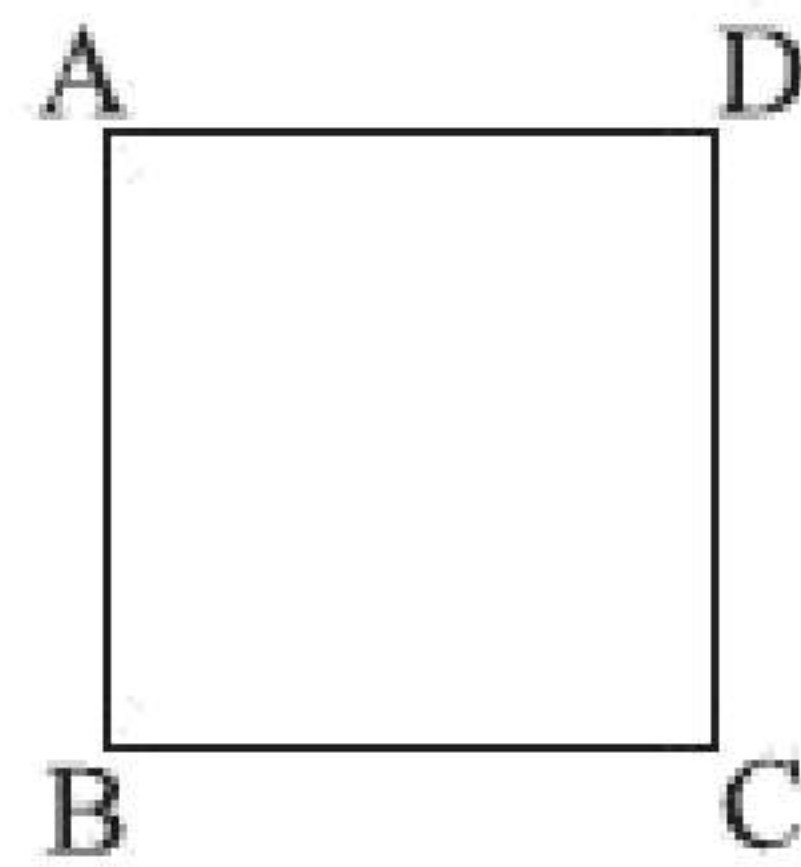
$$\sqrt{4+9} = \sqrt{(a-1)^2 + (b+1)^2}$$

$$\Rightarrow (a-1)^2 + (b+1)^2 = 13$$

۲)  $m_{AB} \times m_{BC} = -1 \Rightarrow \frac{3}{-2} \times \frac{b+1}{a-1} = -1 \Rightarrow b+1 = \frac{2(a-1)}{3}$

(۱), (۲)  $\Rightarrow (a-1)^2 + \frac{4}{9}(a-1)^2 = 13 \Rightarrow (a-1)^2 = 9$

$$\Rightarrow \begin{cases} a=4 \Rightarrow b=1 \\ a=-2 \Rightarrow b=-3 \end{cases} \Rightarrow b-a = -1 \text{ یا } -3$$



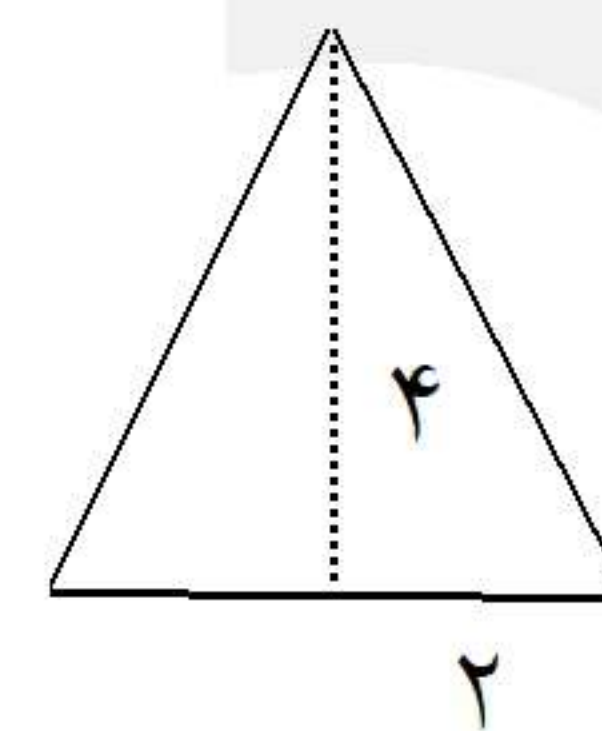
۴۰- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

ابتدا فاصله A تا خط  $3x + 4y = 8$  را به دست می آوریم:

$$h = \frac{|16 + 12 - 8|}{\sqrt{9 + 16}} \Rightarrow h = \frac{20}{5} = 4$$

$S = 8, h = 4 \Rightarrow \frac{1}{2}h \times \text{قاعده} = 8$

قاعده = ۴  $\Rightarrow$  طول ساق =  $\sqrt{16 + 4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$



۴۱- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\begin{cases} x_B = \frac{x_A + x_C}{2} \Rightarrow -1 = \frac{2 + x_C}{2} \Rightarrow x_C = -4 \\ y_B = \frac{y_A + y_C}{2} \Rightarrow 3 = \frac{5 + y_C}{2} \Rightarrow y_C = 1 \end{cases}$$



۴۲- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

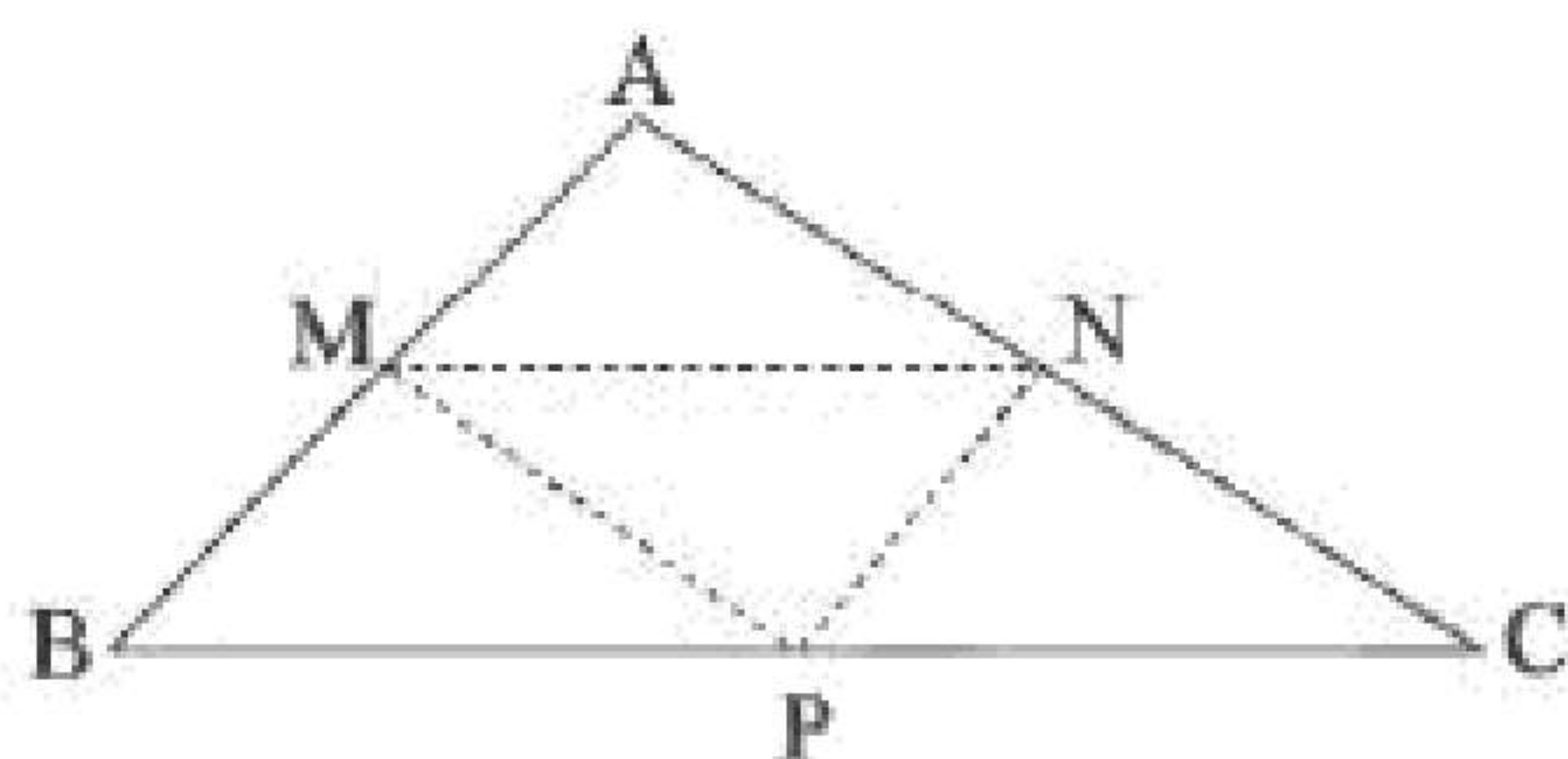
قرینه نقطه  $(x, y)$  نسبت به نیمساز ربع دوم و چهارم برابر  $(-y, -x)$  است، پس قرینه  $A(2, -1)$  نسبت به خط  $y = -x$  برابر  $A'(1, -2)$  می باشد. فاصله آن را از خط  $y = x$  یا همان  $y - x = 0$  پیدا می کنیم.

$$A'H = \frac{|1 - 2 - 1|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$





۴۳- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.



دقت کنید که  $NP \parallel AB$  است پس  $m_{NP} = m_{AB}$  می باشد.

$$m_{NP} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4 - (-2)}{1 - (-1)} = \frac{6}{2} = 3$$

نقطه M هم روی ضلع AB است، پس با داشتن یک نقطه از AB و شیب آن، معادله آن را می نویسیم:

$$m(3, 2)$$

$$y - 2 = 3(x - 3) \Rightarrow y - 3x + 7 = 0$$

۴۴- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

کافی است قرینه  $(2, 3)$  را نسبت به خط داده شده پیدا کنیم تا به نقطه A برسیم.

$$y = x - 1 \Rightarrow m = 1 \Rightarrow m_{AB} = -1$$

$$AB \text{ معادله } y - 3 = (-1)(x - 2) \Rightarrow y = -x + 5$$

$$\begin{cases} y = x - 1 \\ y = -x + 5 \end{cases} \Rightarrow x - 1 = 5 - x \Rightarrow x = 3 \Rightarrow y = 2$$

$M \left( \frac{3}{2}, \frac{3}{2} \right)$  نقطه میانی A و B است.

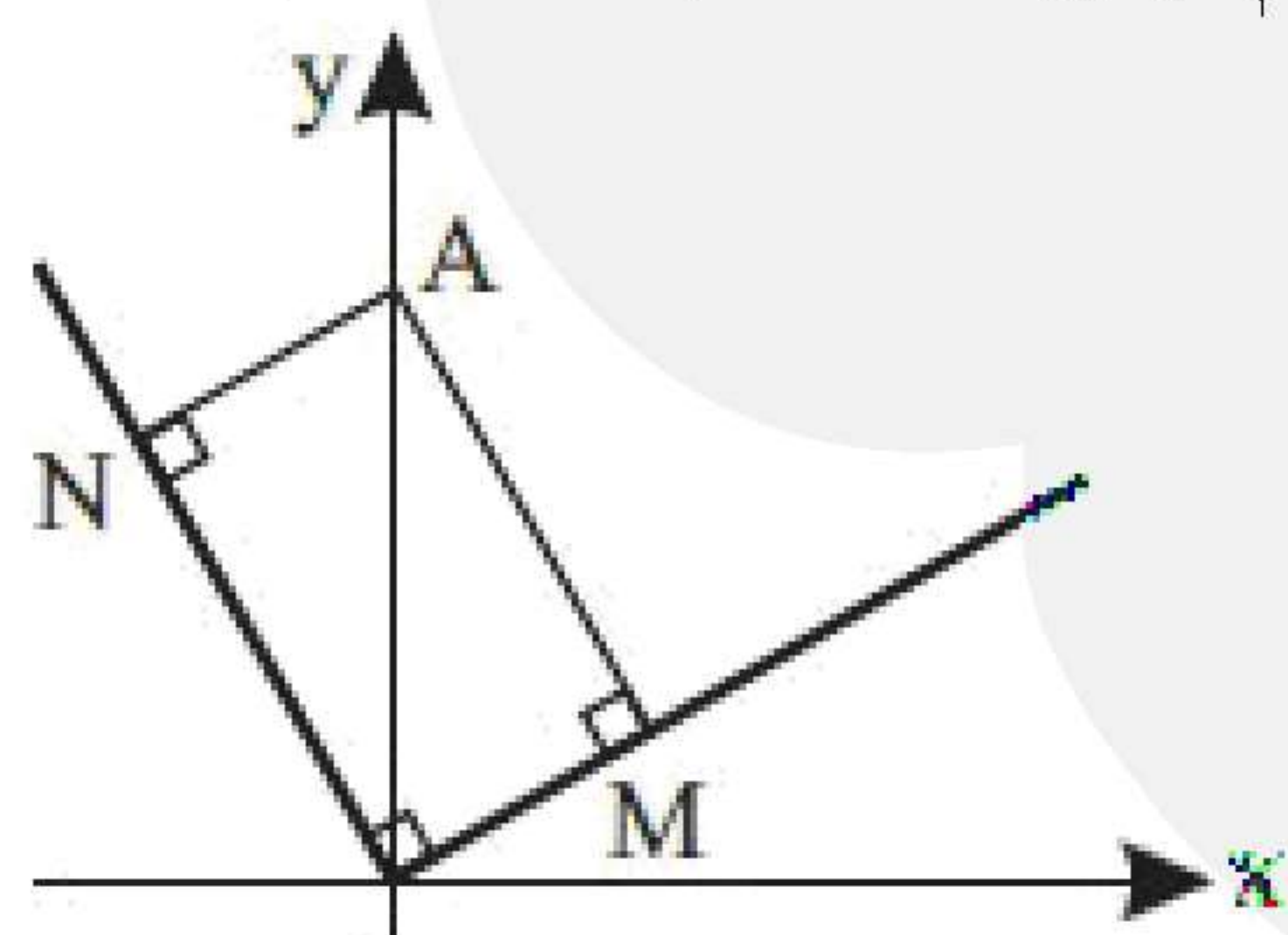
$$\begin{cases} x_A + x_B = 6 \Rightarrow x_A = 4 \\ y_A + y_B = 4 \Rightarrow y_A = 1 \end{cases} \Rightarrow x_A y_A = 4$$

۴۵- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. دو خط داده شده برهم عمودند. بنابراین مثلث  $\triangle AMN$  قائم الزاویه است ( $\hat{A} = 90^\circ$ ).

$$2x - 3y = 0$$

$$\Rightarrow AM = \frac{|0 - 12|}{\sqrt{4 + 9}} = \frac{12}{\sqrt{13}}$$

$$3x + 2y = 0 \Rightarrow AN = \frac{|0 + 8|}{\sqrt{4 + 9}} = \frac{8}{\sqrt{13}}$$



$$S_{\triangle AMN} = \frac{1}{2} AM \cdot AN = \frac{1}{2} \times \frac{8 \times 12}{13} = \frac{48}{13}$$





۴۶- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

نیمساز ناحیه چهارم  $y = -x$  با شرط  $x > 0$  است پس نقطه فرضی  $A \begin{vmatrix} \alpha \\ -\alpha \end{vmatrix}$  را روی نیمساز در نظر می گیریم:

$$y - 2x - 4 = 0 \Rightarrow d = \frac{|-\alpha - 2\alpha - 4|}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}(\alpha)$$

$$|3\alpha + 4| = 5\alpha \Rightarrow \begin{cases} 3\alpha + 4 = -5\alpha \Rightarrow \alpha = -\frac{1}{2} \times \\ 3\alpha + 4 = +5\alpha \Rightarrow \alpha = +2 \checkmark \end{cases}$$

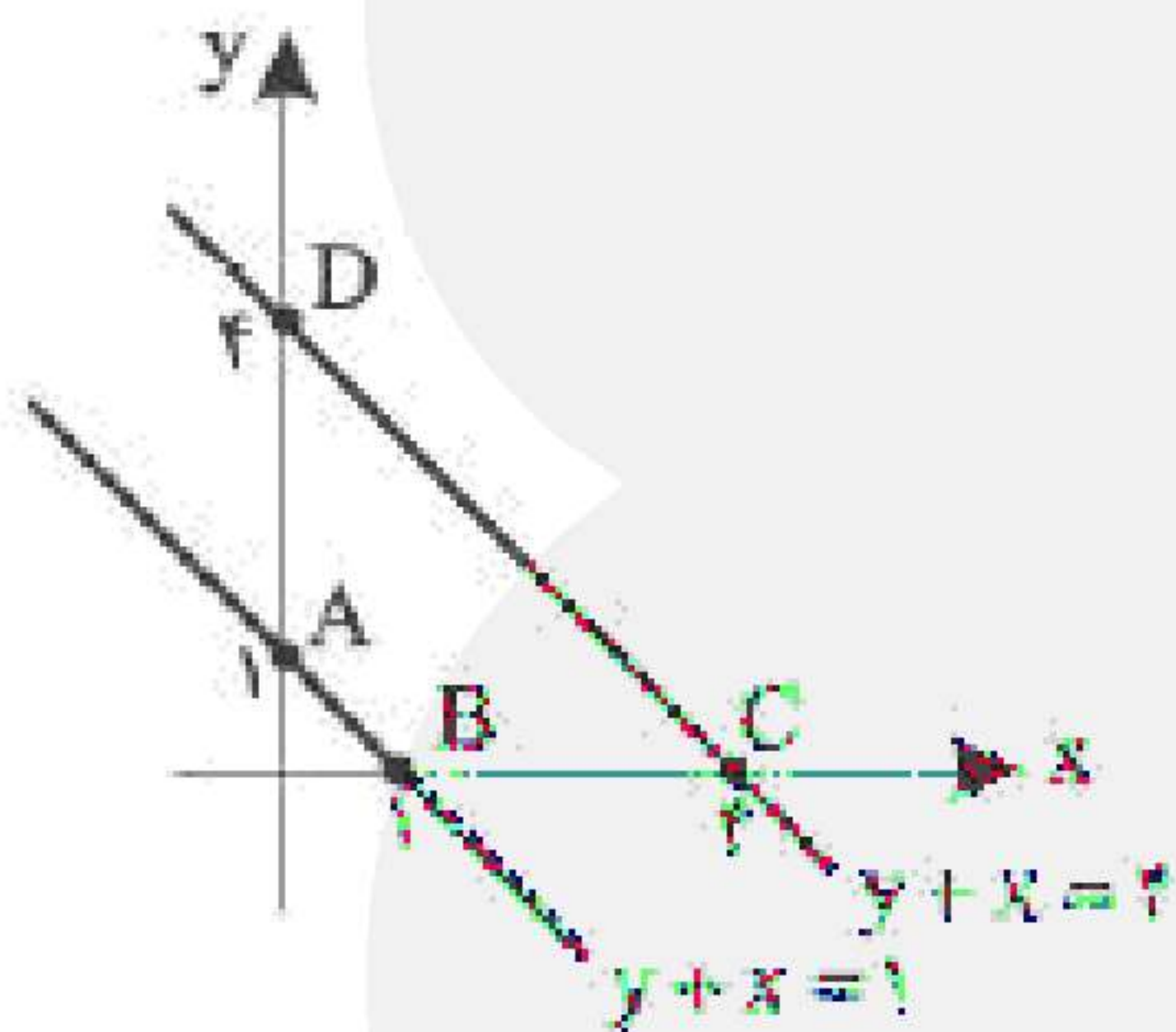
«بانک سوال یاوران دانش»

۴۷- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

قرینه نقطه  $A(2, 3)$  نسبت به مبدأ مختصات  $A'(-2, -3)$  است. فاصله این نقطه از خط را پیدا می کنیم.

$$h = \frac{|2(-2) + 3(-3)|}{\sqrt{2^2 + 3^2}} = \frac{13}{\sqrt{13}} = \sqrt{13}$$

۴۸- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.



مطابق شکل مساحت ذوزنقه ABCD را می خواهیم:

قاعده کوچک:  $AB = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

قاعده بزرگ:  $DC = \sqrt{16+16} = 4\sqrt{2}$

ارتفاع هم برابر فاصله ۲ خط موازی است:

$$h = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|4 - 1|}{\sqrt{1+1}} = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

$$S = \frac{(AB + CD) \times h}{2} = \frac{(\sqrt{2} + 4\sqrt{2}) \times \frac{3}{\sqrt{2}}}{2} = \frac{15}{2} = 7.5$$





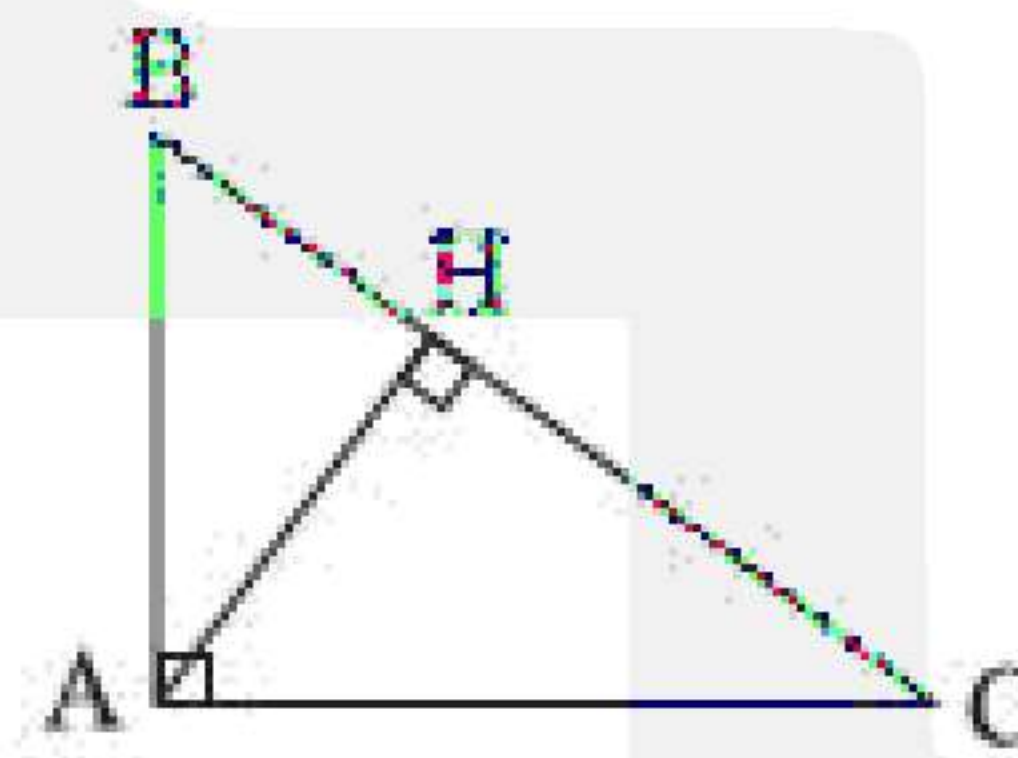
۴۹- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.  
ابتدا وسط ضلع BC را به دست می آوریم:

$$M\left(\frac{-1+3}{2}, \frac{1-1}{2}\right) \Rightarrow M(1, 0)$$

حالا معادله خطی که از  $A(2, 4)$  و  $M(1, 0)$  می گذرد را می نویسیم:

$$\text{شیب} = \frac{4-0}{2-1} = 4 \Rightarrow y = 4x + b \xrightarrow{(1,0)} 0 = 4 + b \Rightarrow b = -4 \Rightarrow y = 4x - 4$$

۵۰- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.  
شکل فرضی به صورت زیر در نظر می گیریم:



$$\hat{A} = 90^\circ \Rightarrow m_{AB} \cdot m_{AC} = -1$$

$$\Rightarrow \frac{2-1}{a+2} \times \frac{2-(-1)}{a-2} = -1 \Rightarrow a^2 - 4 = -3$$

$$\Rightarrow a = \pm 1 \xrightarrow{\text{در ربع دوم}} a = -1$$

$$m_{BC} = \frac{1-(-1)}{-2-2} = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2} \Rightarrow m_{AH} = 2$$

$$AH \text{ معادله } y - 2 = 2(x + 1) \Rightarrow y = 2x + 4$$

پس عرض از مبدأ برابر ۴ است.