

گنجینه سوال رایگان

+ پاسخ تشریحی

یاوران دانش



راه های ارتباطی با ما:

www.Dyavari.com

۰۲۱-۷۶۷۰۳۸۵۸

۰۹۱۲-۳۴ ۹۴ ۱۳۴

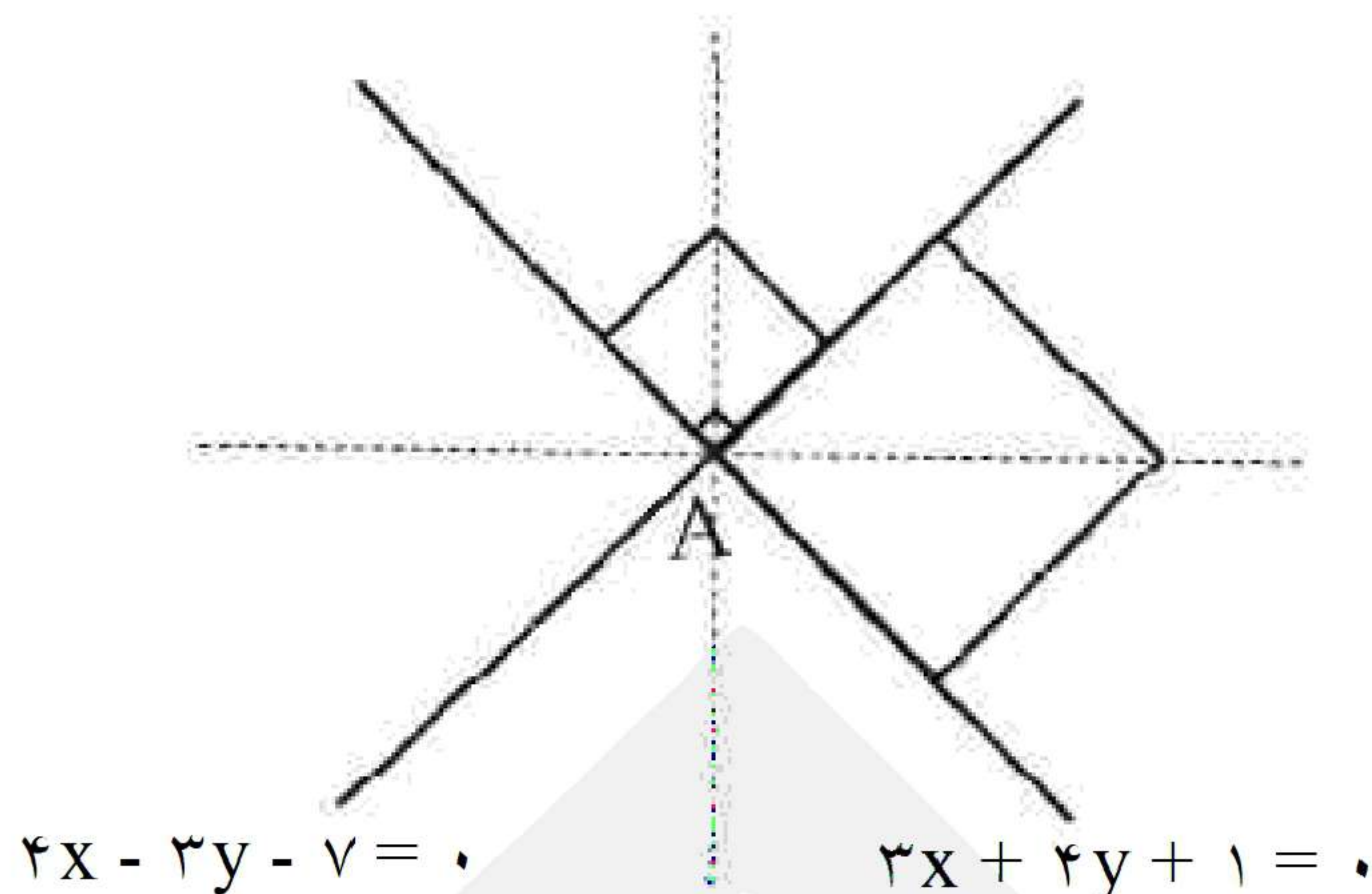


	۱	۲	۳	۴
۱ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۴ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۵ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۶ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۷ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۸ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۹ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۰ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۱ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۱۲ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۳ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۱۴ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۵ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۱۶ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۱۷ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۱۸ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۹ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۲۰ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۱ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۲ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۳ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۴ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۵ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۶ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۷ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۸ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۲۹ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۰ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۳۱ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۳۲ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۳ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۴ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>

	۱	۲	۳	۴
۳۵ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۶ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۷ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۳۸ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۹ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۴۰ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۴۱ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۴۲ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۴۳ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۴۴ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۴۵ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۴۶ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۴۷ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۴۸ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۴۹ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۵۰ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



۱- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. با توجه به شکل فرضی، قطرهای مربع‌ها، نیم‌سازهای دو خط هستند.



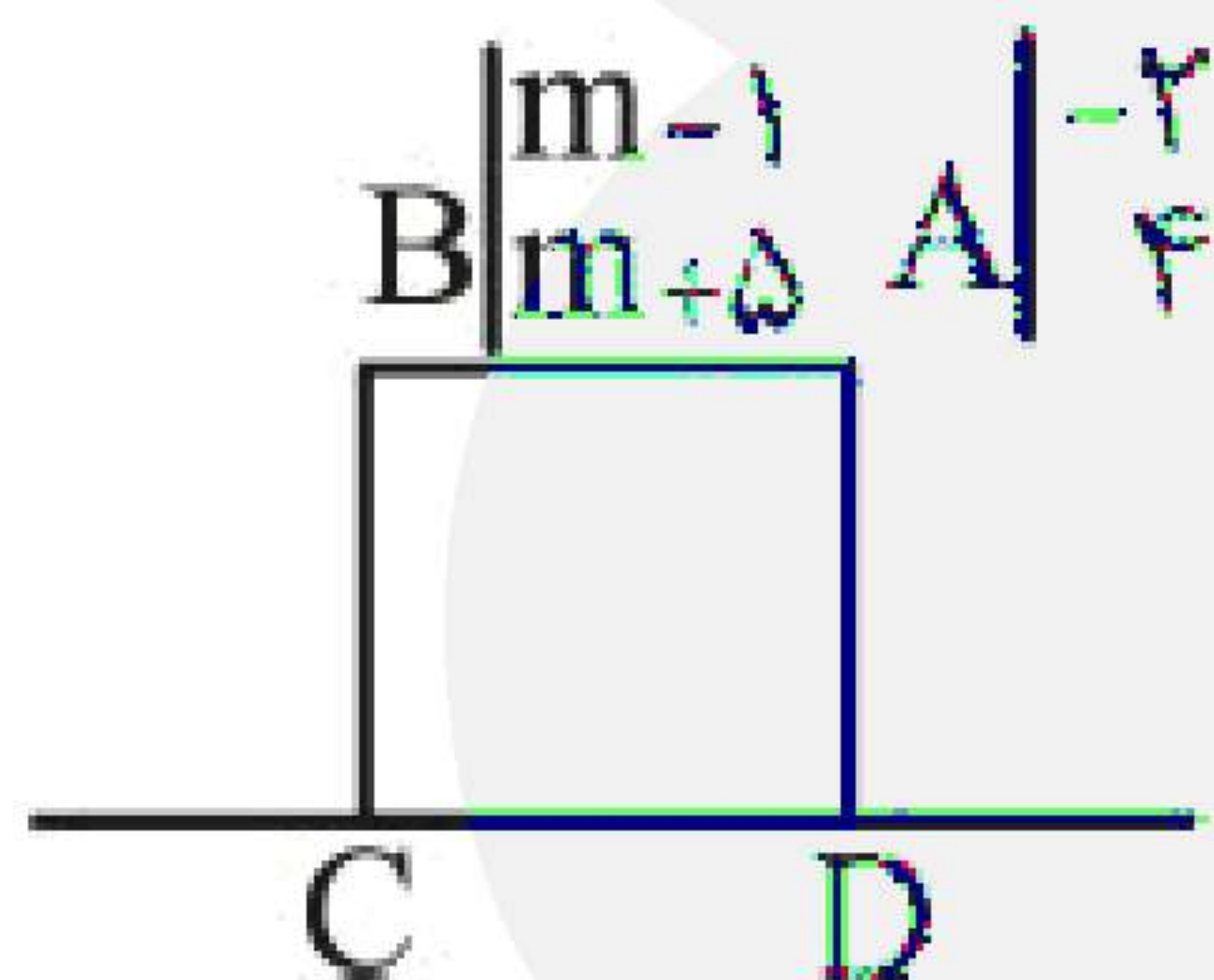
معادله نیم‌سازهای دو خط را می‌یابیم:

$$\frac{|4x - 3y - 7|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = \frac{|3x + 4y + 1|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} \Rightarrow |4x - 3y - 7| = |3x + 4y + 1|$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4x - 3y - 7 = 3x + 4y + 1 \Rightarrow x - 7y - 8 = 0 \\ 4x - 3y - 7 = -(3x + 4y + 1) \Rightarrow 7x + y - 6 = 0 \end{cases}$$

۲- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. مختصات A و B در معادله خط صدق نمی‌کنند، پس هر دو نقطه خارج خط قرار دارند.

پس شیب AB برابر یک است. پس $\frac{m+1}{m+1} = 1$ بنابراین $m \neq -1$ است.



$$\begin{aligned} AB = BC = AD &\Rightarrow \sqrt{(m+1)^2 + (m+1)^2} \\ &= \frac{|m-1 - m - 5 - 2|}{\sqrt{2}} = \frac{|-2 - 4 - 2|}{\sqrt{2}} \Rightarrow \sqrt{2}|m+1| = \frac{8}{\sqrt{2}} \\ |m+1| &= 4 \Rightarrow m = 3 \text{ یا } -5 \end{aligned}$$



۳- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. طول ارتفاع نظیر قاعده (AB) برابر با فاصله نقطه C از خط گذرنده از نقاط A(۰, ۲) و B(-۲, ۰) است که معادله این خط، $y = x + ۲$ است.

حالا برای پیدا کردن مختصات نقطه C به صورت زیر عمل می‌کنیم:
از آنجا که مساحت مثلث OBE برابر با یک واحد مربع است، به سادگی نتیجه می‌شود که $|OE| = ۱$ و مختصات E به صورت (۰, -۱) است.

نقطه C روی خط گذرنده از نقاط B(-۲, ۰) و E(۰, -۱) یعنی خط $y = -\frac{1}{2}x - ۱$ است، پس می‌توان آن را به صورت $C(\alpha, -\frac{1}{2}\alpha - ۱)$ در نظر گرفت.

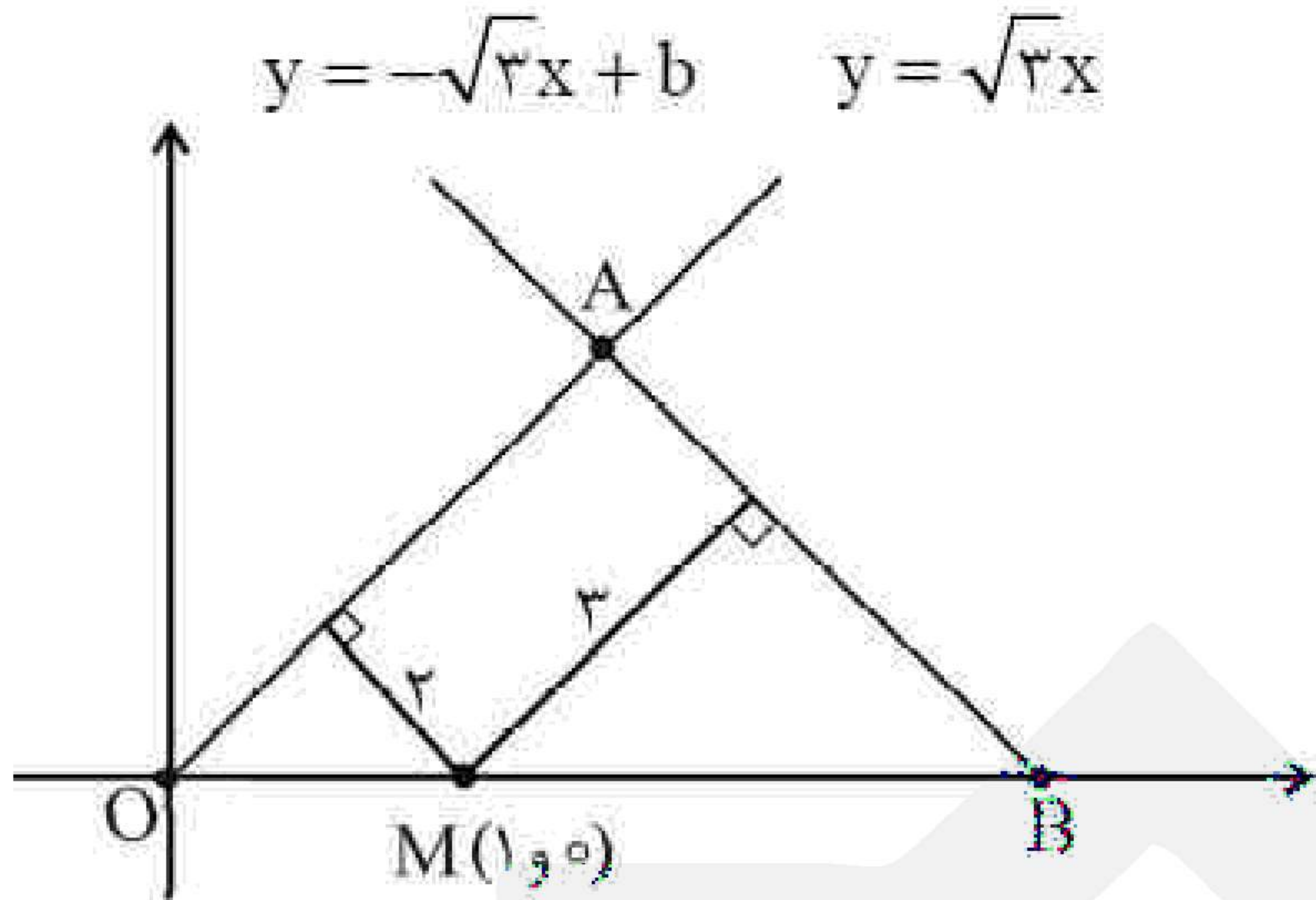
از آنجا که مثلث $\triangle ABC$ در رأس C متساوی‌الساقین است، فاصله نقطه $C(\alpha, -\frac{1}{2}\alpha - ۱)$ از نقاط A(۰, ۲) و B(-۲, ۰) برابر است، یعنی:

$$|BC| = |AC| \Rightarrow \sqrt{(\alpha + ۲)^2 + \left(-\frac{1}{2}\alpha - ۱\right)^2} = \sqrt{\alpha^2 + \left(-\frac{1}{2}\alpha - ۳\right)^2}$$

$$\Rightarrow (\alpha + ۲)^2 + \left(-\frac{1}{2}\alpha - ۱\right)^2 = \alpha^2 + \left(-\frac{1}{2}\alpha - ۳\right)^2 \Rightarrow ۵\alpha + ۵ = ۳\alpha + ۹ \Rightarrow \alpha = ۲ \Rightarrow C(۲, -۲)$$

نهایتاً کافی است فاصله نقطه $C(۲, -۲)$ را از خط گذرنده از AB به معادله $y - x - ۲ = ۰$ به دست آوریم:

$$\frac{|-۲ - ۲ - ۲|}{\sqrt{۱^2 + (-۱)^2}} = \frac{۶}{\sqrt{۲}} = \frac{۶\sqrt{۲}}{۲} = ۳\sqrt{۲}$$



۴- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. با توجه به شکل مقابل، خط با شیب مثبت $y = \sqrt{3}x + a$ است که با توجه به اینکه از مبدأ مختصات می‌گذرد، $a = 0$ است. خط با شیب منفی نیز $y = -\sqrt{3}x + b$ است.

چون شیب این دو خط، قرینه یکدیگر است، زاویه این دو خط با جهت مثبت محور x ها مکمل هم هستند، به عبارتی در مثلث OAB زوایای \hat{O} و \hat{B} برابرند و این مثلث، متساوی الساقین است ($OA = AB$).

می‌دانیم که در هر مثلث متساوی الساقین، مجموع فواصل هر نقطه روی قاعده از دو ساق، برابر با ارتفاع نظیر ساق است، پس در اینجا ارتفاع نظیر ساق برابر با $5 = 2 + 3$ است.

حالا کافی است فاصله نقطه $O(0, 0)$ از خط $y + \sqrt{3}x - b = 0$ را برابر با ۵ قرار دهیم:

$$\frac{|0 + 0 - b|}{\sqrt{1+3}} = 5 \Rightarrow |b| = 10 \Rightarrow b = \pm 10$$

با توجه به شکل، عرض از مبدأ این خط مثبت است و $b = 10$ قابل قبول است، پس: $a + b = 0 + 10 = 10$

۵- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$m_{BC} = \frac{11-3}{7-3} = 2 \Rightarrow BC \text{ معادله: } y - 3 = 2(x - 3) \Rightarrow 2x - y - 3 = 0$$

$$BC \text{ تا } A \text{ فاصله} = AH = \frac{|2(1) - 9 - 3|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{10}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5} \Rightarrow AH = 2\sqrt{5}$$

$$AC \text{ وسط } M\left(\frac{1+7}{2}, \frac{11+9}{2}\right) \Rightarrow M(4, 10) \Rightarrow \text{میانه } BM = \sqrt{(4-3)^2 + (10-3)^2}$$

$$BM = 5\sqrt{2}$$

$$AH \times BM = 2\sqrt{5} \times 5\sqrt{2} = 10\sqrt{10}$$



۶- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. با فرض آنکه طول ضلع مربع a باشد، آنگاه $D(x, 0)$ ، $C(x+a, 0)$ و در نتیجه

$$OA = \sqrt{x^2 + (3x)^2} = x\sqrt{10}$$

$A(x, 3x)$ و $B(x+a, 3x)$ خواهد بود:

$$OB = 10 \Rightarrow \sqrt{(x+a)^2 + (3x)^2} = 10 \Rightarrow x^2 + a^2 + 2ax + 9x^2 = 100 \quad (1)$$

$$\triangle OAD \text{ در رابطه فیثاغورث: } x^2 + a^2 = (x\sqrt{10})^2 \Rightarrow a^2 = 9x^2 \xrightarrow{\substack{x>0 \\ a>0}} a = 3x \quad (2)$$

$$x = \frac{1}{3}a \xrightarrow{1, 2} \frac{1}{9}a^2 + a^2 + 2a\left(\frac{1}{3}a\right) + a^2 = 100 \Rightarrow \frac{25}{9}a^2 = 100$$

$$a^2 = 36 \Rightarrow S_{\square} = a^2 = 36 \quad \text{مساحت مربع}$$

۷- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

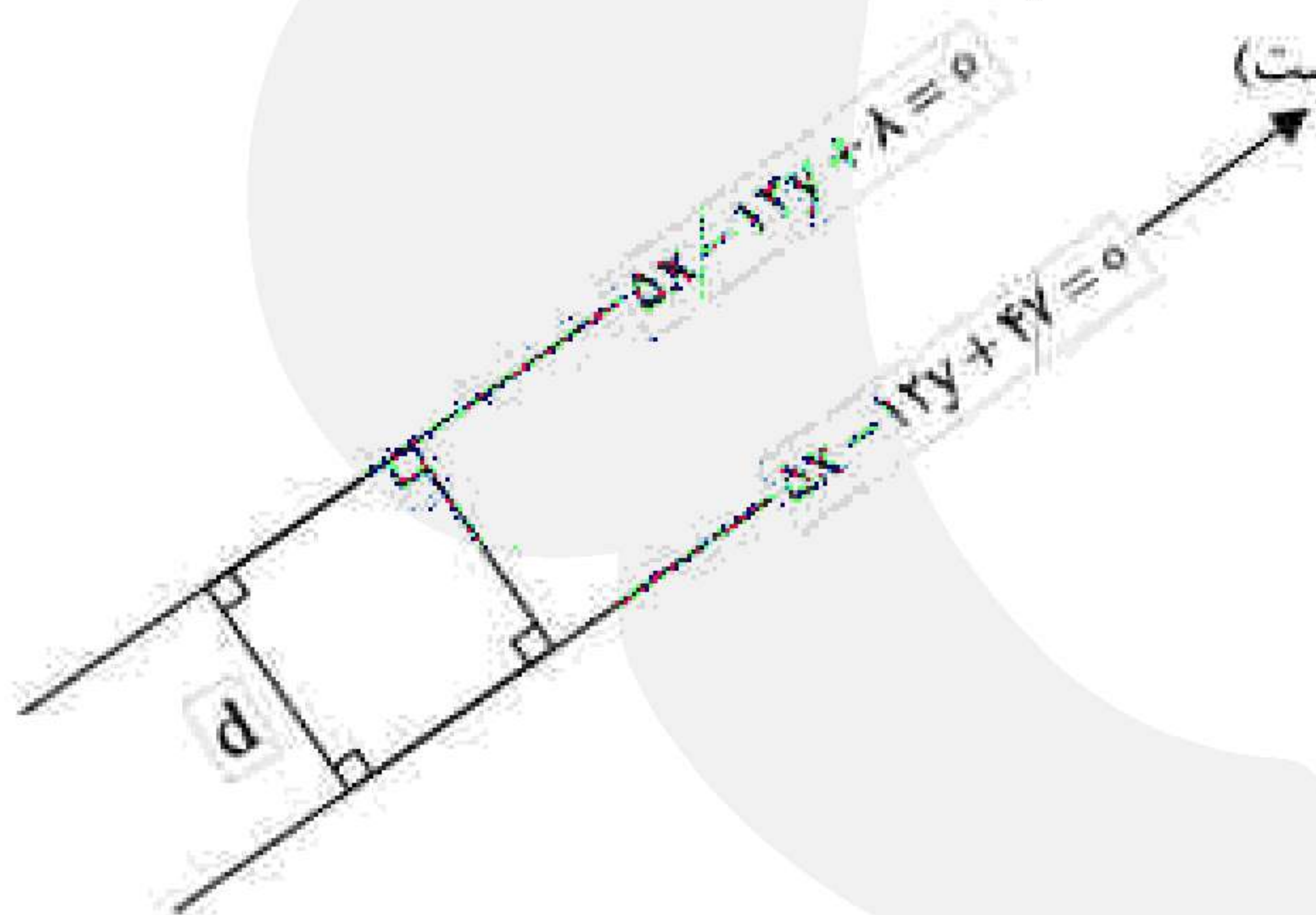
چون دایره در ناحیه اول مختصات بر محور x ها و y ها همزمان مماس است، پس مرکز آن $O(\alpha, \alpha)$ و شعاع هم $R = \alpha$ است. از طرف دیگر، فاصله‌ی مرکز دایره تا خط $3x + 4y - 12 = 0$ برابر شعاع دایره است:

$$\alpha = \frac{|3\alpha + 4\alpha - 12|}{\sqrt{9 + 16}} \Rightarrow 5\alpha = |7\alpha - 12| \quad \begin{cases} \alpha = 6 \Rightarrow S_1 = 36\pi \\ \alpha = 1 \Rightarrow S_2 = \pi \end{cases}$$

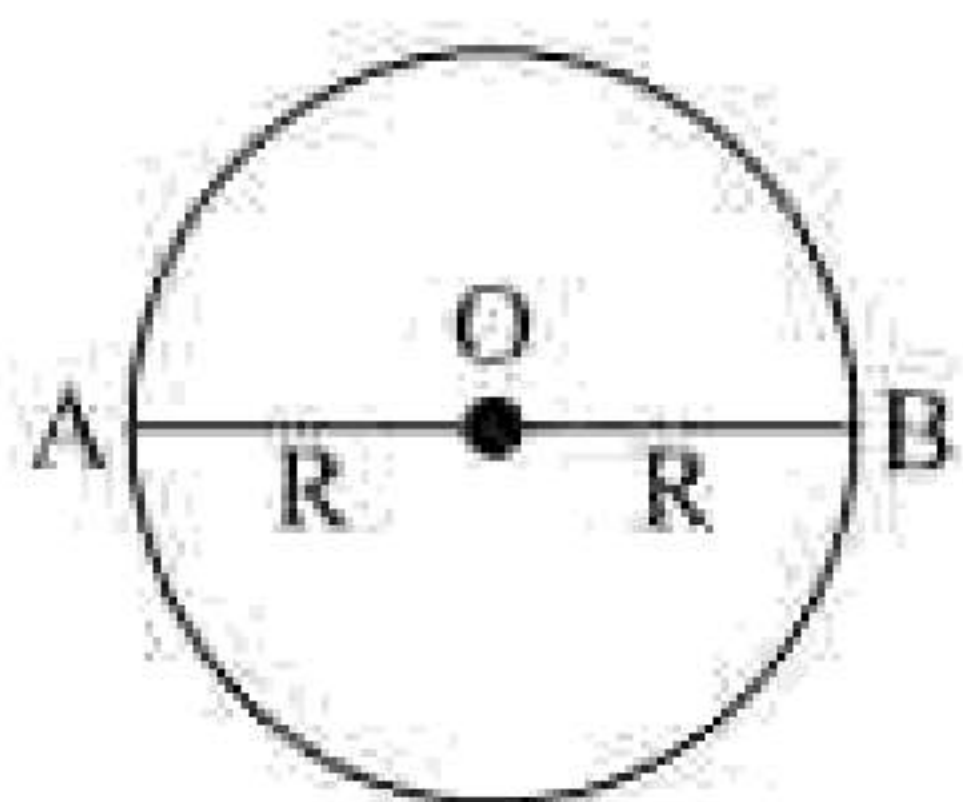
$$\Delta S = S_1 - S_2 = 105 \quad \text{اختلاف مساحت دو دایره ممکن با فرض } \pi = 3 \text{ برابر است با:}$$

۸- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. براساس نتیجه تمرین ۸ صفحه‌ی ۹ کتاب ریاضی (۲):

(دو طرف معادله خط بر ۲ تقسیم شده است)



$$d = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|47 - 1|}{\sqrt{5^2 + (-12)^2}} \Rightarrow d = 3 \Rightarrow S_{\square} = d^2 = 9$$



$$AB = 2R = \sqrt{(6 - (-2))^2 + (4 - (-2))^2} = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$$

$$\Rightarrow R = 5 \rightarrow S_{\bigcirc} = \pi R^2 = 3(5)^2 = 75$$

$$\text{اختلاف ۲ مساحت} = 75 - 9 = 66$$



۹- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

مرکز دایره محل برخورد قطرهایست. بنابراین دو قطر دلخواه انتخاب و محل تلاقی آن دو را به دست می آوریم:

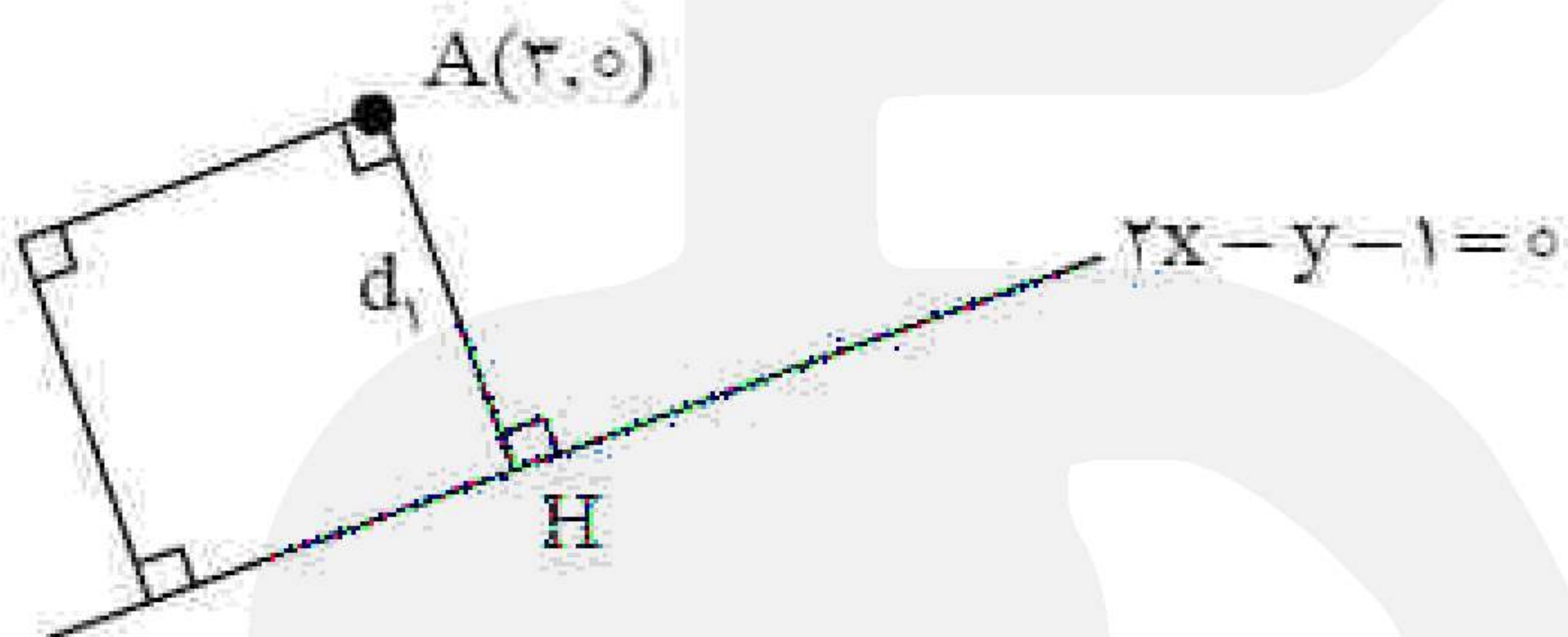
$$\begin{cases} m = 0 \Rightarrow y = -1 \\ m = 1 \Rightarrow x = 1 \end{cases} \Rightarrow O(1, -1)$$

فاصله نقطه‌ی O (مرکز دایره) تا خط مماس $3x + 4y = 9$ همان شعاع دایره است:

$$R = \frac{|3(1) + 4(-1) - 9|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{10}{5} = 2$$

$$S = \pi R^2 = \pi (2)^2 = 4\pi \xrightarrow{\text{با فرض } \pi = 3} S = 12$$

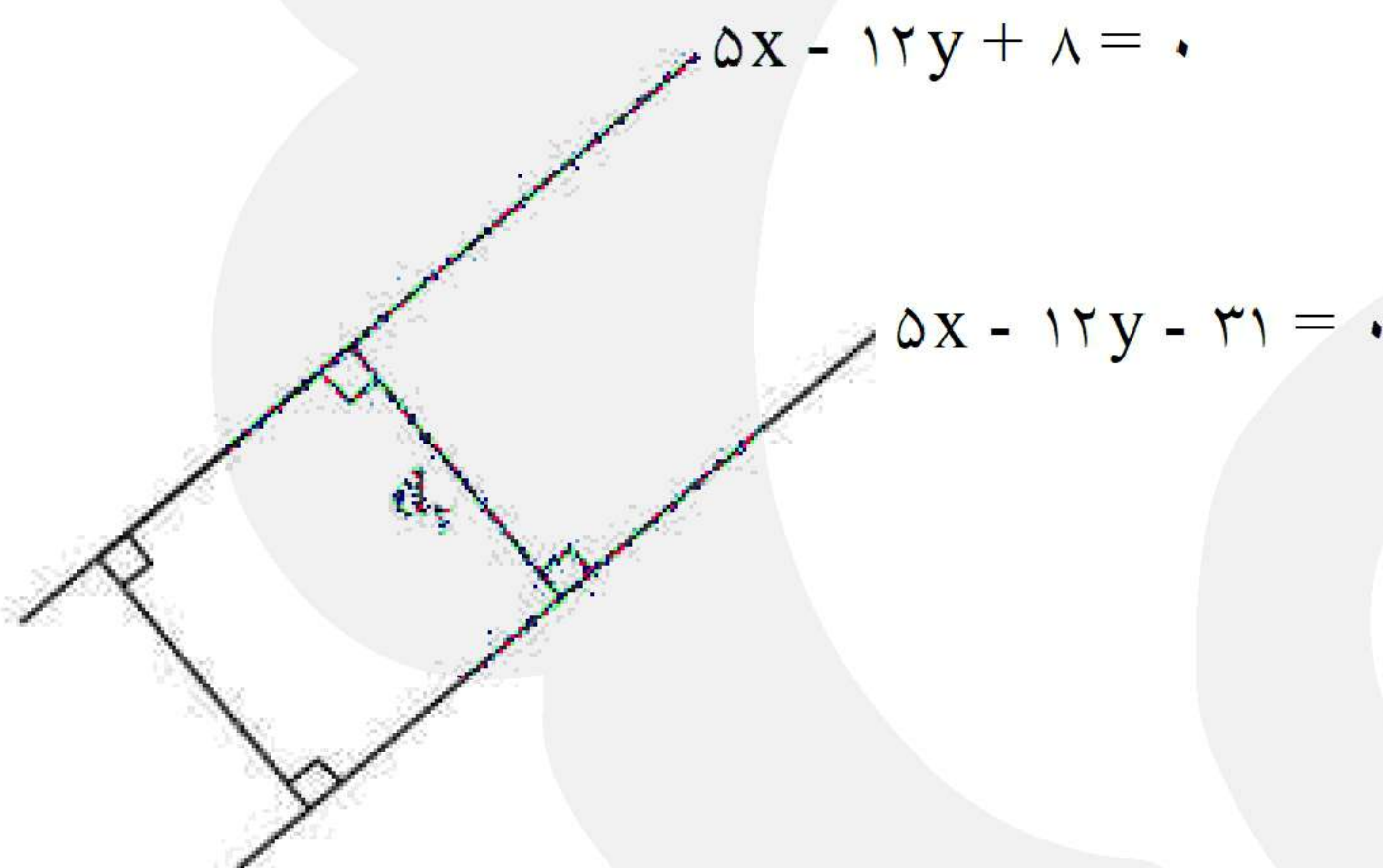
۱۰- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.



$$\Rightarrow d_1 = \frac{|2(3) - 0 - 1|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$

$$\Rightarrow S_1 = d_1^2 = 5$$

برای محاسبه S_2 معادله خط دوم را بر (-2) تقسیم می کنیم تا از فرمول فاصله دو خط موازی به صورت زیر استفاده کنیم:



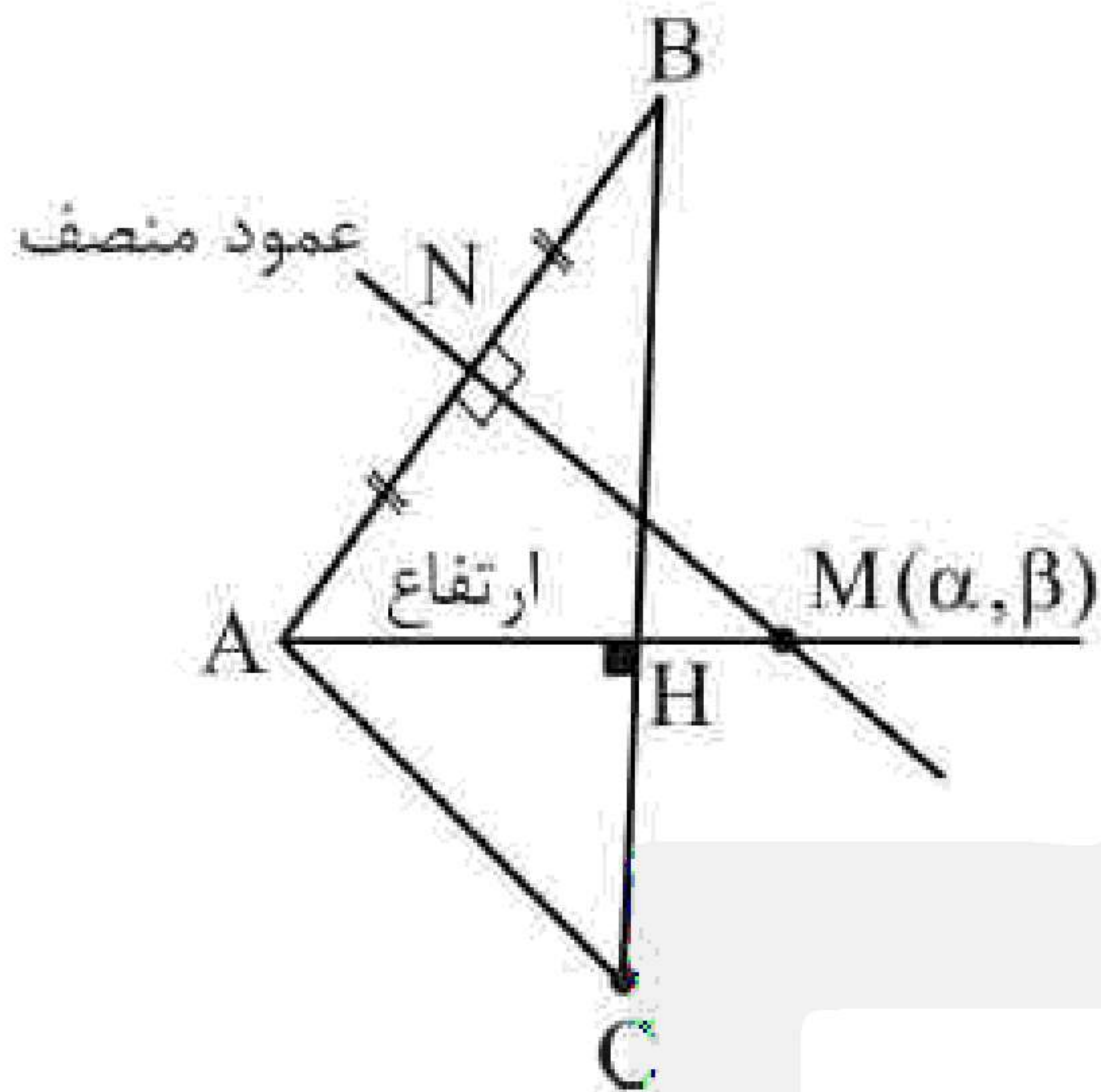
$$\Rightarrow d_2 = \frac{|C - C'|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|8 - (-31)|}{\sqrt{5^2 + (-12)^2}}$$

$$= \frac{39}{13} = 3 \Rightarrow S_2 = d_2^2 = 9$$

$$S_1 + S_2 = 5 + 9 = 14$$



۱۱- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. معادله خطوط عمودمنصف و ارتفاع موردنظر را نوشته و با هم قطع می‌دهیم تا M به دست آید:



$$AB_{\text{وسط}} N\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right) \Rightarrow m = \frac{-1}{m_{AB}} = \frac{-1}{\frac{4-1}{3+2}} = \frac{-5}{3}$$

$$y - \frac{5}{2} = \frac{-5}{3}\left(x - \frac{1}{2}\right)$$

$$\Rightarrow 5x + 3y - 10 = 0 \quad (1) \quad \text{معادله عمودمنصف AB}$$

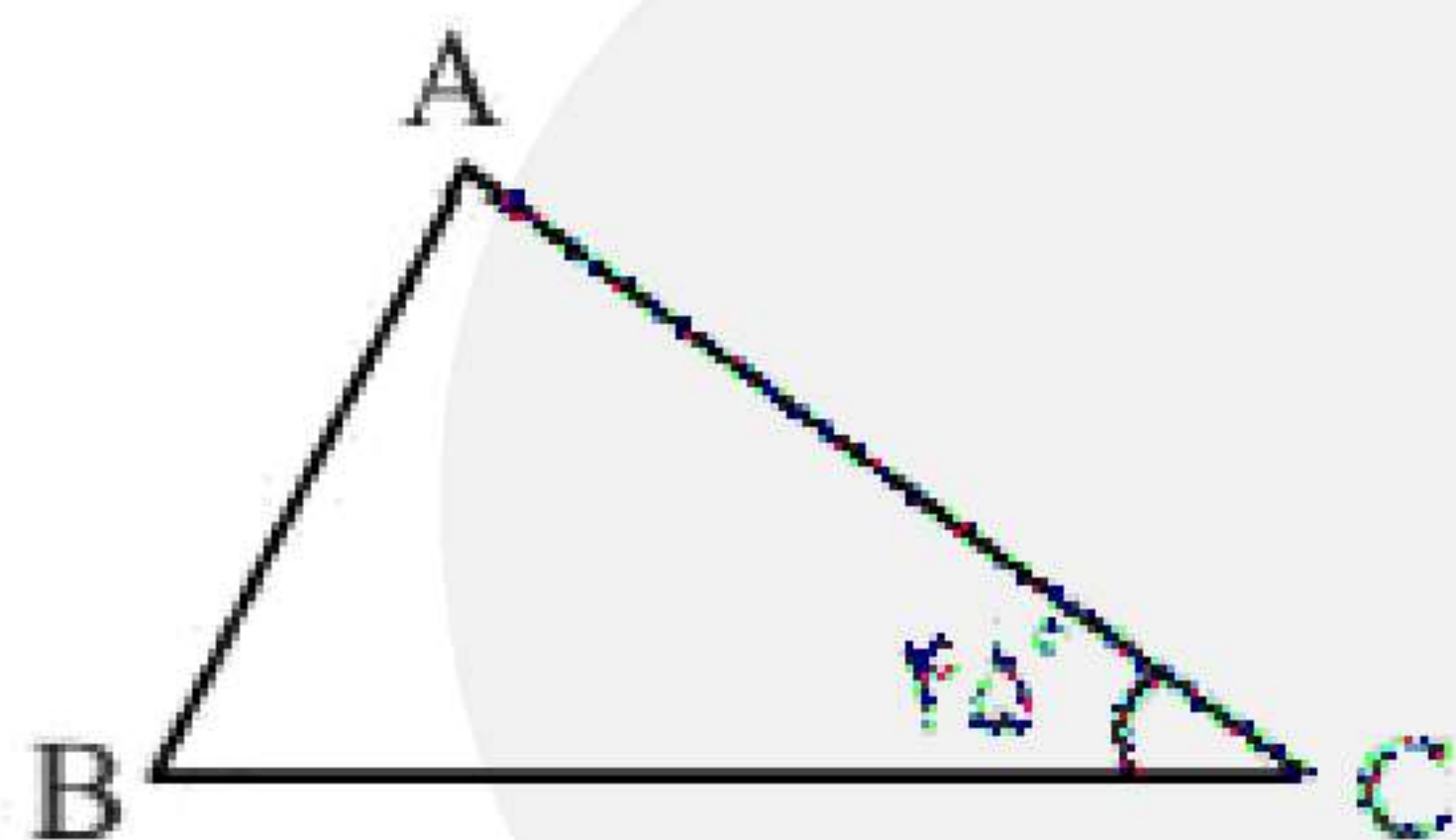
$$AH \text{ ارتفاع : } m = \frac{-1}{m_{BC}} = \frac{-1}{\frac{-3-4}{2-3}} = \frac{-1}{7}$$

$$y - 1 = \frac{-1}{7}(x + 2) \Rightarrow x + 7y - 5 = 0 \quad (2)$$

$$1, 2 \Rightarrow \begin{cases} 5x + 3y - 10 = 0 \\ x + 7y - 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{55}{32} \Rightarrow \alpha \\ y = \frac{15}{32} \Rightarrow \beta \end{cases} \Rightarrow 32(\alpha + \beta) = 70$$

۱۲- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$AC = \sqrt{(5-2)^2 + (1-4)^2} = 3\sqrt{2}, \quad BC = \sqrt{(5-1)^2 + (1-1)^2} = 4$$

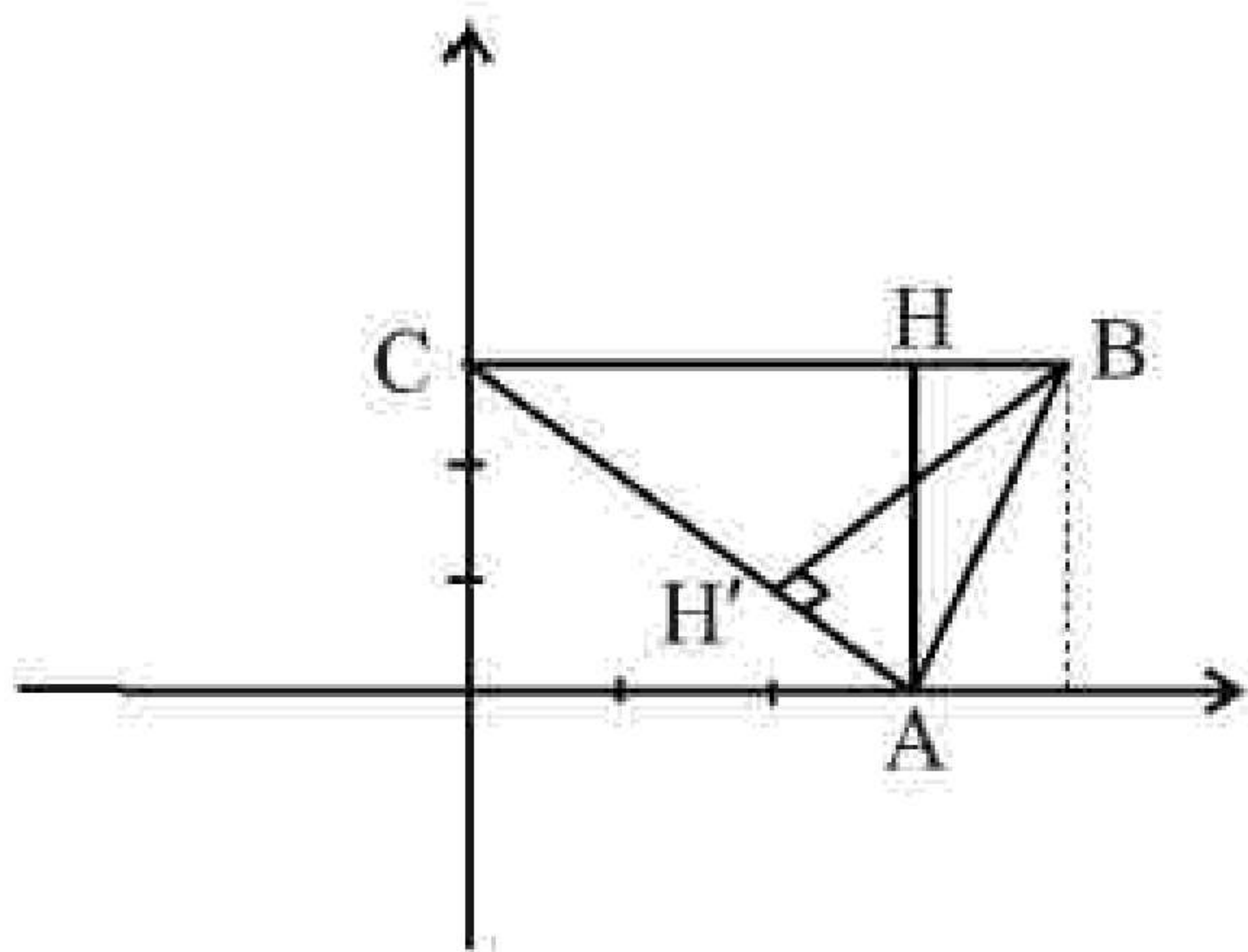


$$m_{BC} = \frac{1-1}{5-1} = 0, \quad m_{AC} = \frac{4-1}{2-5} = -1 \Rightarrow \hat{C} = 45^\circ$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BC \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} \times 4 \times 3\sqrt{2} \times \sin 45^\circ = 6\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 6$$



۱۳- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.



AH : معادله ارتفاع $x = 3$

$$M_{AC} = \frac{3 - 0}{0 - 3} = -1 \Rightarrow m_{BH'} = 1$$

BH' : معادله ارتفاع $y - 3 = 1(x - 4) \Rightarrow y = x - 1$

مختصات نقطه برخورد سه ارتفاع مثلث $\begin{cases} x = 3 \\ y = x - 1 \Rightarrow y = 3 - 1 = 2 \end{cases} \Rightarrow (3, 2)$

$$AB = \sqrt{(-2 - 2)^2 + (0 - 3)^2} = \sqrt{25} = 5$$

AB : معادله $3x - 4y + 6 = 0$

$$CH = \frac{|3 \times 0 + (-4)(-1) + 6|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{10}{5} = 2$$

$$S_{ABCD} = 5 \times 2 = 10$$

۱۴- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

«بانک سوال یاوران دانش»

۱۵- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. محیط دایره برابر 8π است، بنابراین $2\pi R = 8\pi \leftarrow R = 4$ از طرفی فاصله بین دو خط موازی برابر قطر دایره یعنی ۸ می شود:

$$\begin{cases} 3x - 4y = 1 \\ 8y + ax = b \end{cases} \xrightarrow{\times(-2)} \begin{cases} 8y - 6x = -2 \\ 8y + ax = b \end{cases} \xrightarrow{\text{موازی}} a = -6$$

$$8 = \frac{|b - (-2)|}{\sqrt{(-6)^2 + 8^2}} \Rightarrow |b + 2| = 8 \Rightarrow \begin{cases} b = 78 \\ b = -82 \end{cases}$$

$$\left. \begin{aligned} 3a + b &= 3(-6) + 78 = 60 \\ 3a + b &= 3(-6) - 82 = -100 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{اختلاف دو مقدار} = 60 - (-100) = 160$$



۱۶- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. برای پیدا کردن محل برخورد میانه‌ها کافی است معادله دو میانه را نوشته و قطع دهیم:

$$\begin{aligned} \text{AB وسط } M(3, 3) &\Rightarrow y - 3 = \frac{-2-3}{-2-3}(x-3) \Rightarrow y = x \\ \text{AC وسط } N(1, 0) &\Rightarrow y - 0 = \frac{4-0}{2-1}(x-1) \Rightarrow y = 4x - 4 \end{aligned} \Rightarrow O\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$$

محل برخورد میانه‌ها

برای یافتن محل برخورد عمودمنصف‌های اضلاع AB و AC کافی است معادله دو عمودمنصف را نوشته و قطع دهیم:

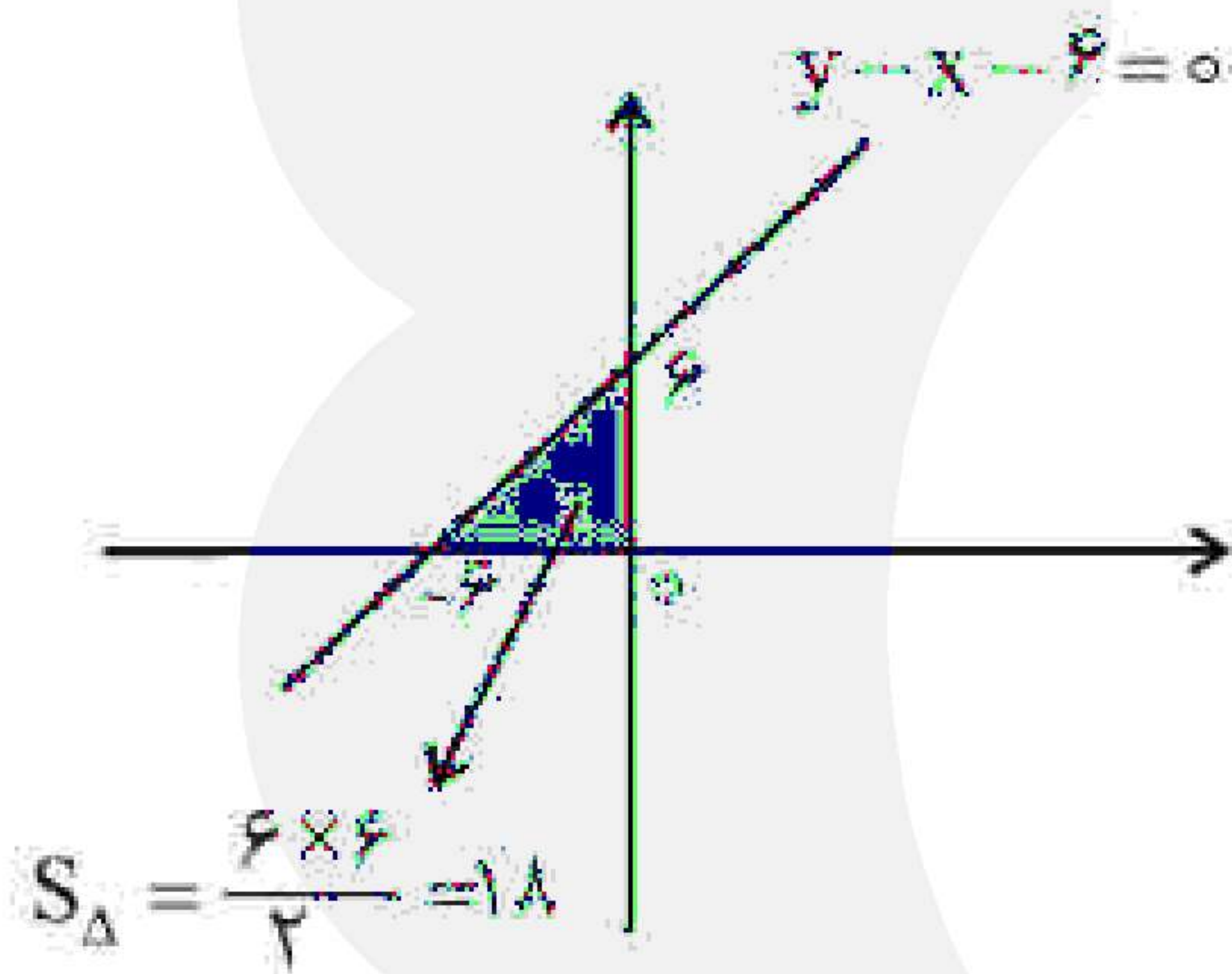
$$\text{AB وسط } M(3, 3), m_{AB} = \frac{4-2}{2-4} = -1 \xrightarrow{\text{عکس و قرینه}} m_{\Delta \text{ عمودمنصف}} = 1 \Rightarrow$$

$$\text{AC وسط } N(1, 0), m_{AC} = \frac{-2-2}{-2-4} = \frac{2}{3} \Rightarrow m_{\Delta'} = \frac{-3}{2} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} y = x \\ y = \frac{-3}{2}x + \frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow I\left(\frac{3}{5}, \frac{3}{5}\right)$$

محل برخورد عمودمنصف‌ها

$$IO = \sqrt{\left(\frac{4}{3} - \frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{3} - \frac{3}{5}\right)^2} = \frac{11\sqrt{2}}{15}$$



۱۷- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. عمودمنصف یک پاره‌خط شامل تمامی نقاطی است که فاصله آن‌ها از دو سر پاره‌خط به یک اندازه است. اگر این نقاط را به صورت $P(x, y)$ در نظر بگیریم آن‌گاه $PM = PN$:

$$\sqrt{(x-2)^2 + (y-6)^2} = \sqrt{(x+1)^2 + (y-8)^2}$$

$$\Rightarrow y - x - 6 = 0$$

معادله خط عمودمنصف MN

$$\begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = 6 \\ y = 0 \Rightarrow x = -6 \end{cases}$$

محل برخورد با محورها

$$\frac{a}{3} = -\frac{8}{4} \Rightarrow a = -6$$

۱۸- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. چون دو خط موازی هستند پس:

بنابراین معادله خط دوم به صورت $6x - 8y = 6$ و یا ساده شده‌اش $3x + 4y = -3$ است. فاصله این دو خط

$$\pi r^2 = \pi$$

موازی همان قطر دایره است بنابراین:

$$r = 1 \Rightarrow d = 2r = 2$$

$$d = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \Rightarrow 2 = \frac{|b + 3|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} \Rightarrow |b + 3| = 10 \Rightarrow b = 7 \text{ یا } -13$$

$$\Rightarrow b = -91 = \text{حاصل ضرب مقادیر}$$



۱۹- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$AC = \sqrt{(-2-2)^2 + (2-0)^2} = 2\sqrt{5} \text{ طول قطر کوچک}$$

$$AC \text{ ی معادله ی } \frac{y-2}{x+2} = \frac{0-2}{2+2} = -\frac{1}{2} \Rightarrow 2y-4 = -x-2 \Rightarrow x+2y-2=0$$

$$BH = \frac{|1 \times 2 + 2 \times 5 - 2|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{10}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5} \Rightarrow BD = 4\sqrt{5}$$

$$\text{مساحت لوزی} = 2\sqrt{5} \times 4\sqrt{5} = 40$$

۲۰- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$m_{AC} = \frac{0-3}{2+2} = -\frac{3}{4}, m_{BC} = \frac{0-4}{2-5} = \frac{4}{3} \Rightarrow \hat{C} = 90^\circ, \widehat{ABC} \text{ قائم الزاویه}$$

$$M\left(\frac{-2+5}{2}, \frac{3+4}{2}\right) \Rightarrow M\left(\frac{3}{2}, \frac{7}{2}\right)$$

$$AB = \sqrt{7^2 + 1^2} = 5\sqrt{2}$$

$$AM = MB = CM = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

$$AC = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5, BC = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \Rightarrow \widehat{ABC} \text{ قائم الزاویه متساوی الساقین}$$

$$\frac{P_{\widehat{AMC}}}{P_{\widehat{BMC}}} = 1$$



۲۱- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$AB = \sqrt{(4-1)^2 + (5-1)^2} = 5$$

$$BC = \sqrt{(4-0)^2 + (y-5)^2} = 5$$

$$16 + y^2 - 10y + 25 = 25$$

$$y^2 - 10y + 16 = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = 8 & \text{قابل قبول} \\ y = 2 & \text{غیر قابل قبول} \end{cases}$$

C مختصات رأس: $C(0, 8)$

$$m_{AB} = \frac{5-1}{4-1} = \frac{4}{3} \Rightarrow m_{BC} = -\frac{3}{4} \Rightarrow \begin{cases} AB \text{ معادله: } 4x - 3y - 1 = 0 \\ BC \text{ معادله: } 3x + 4y - 32 = 0 \\ AD \text{ معادله: } 3x + 4y - 7 = 0 \\ CD \text{ معادله: } 4x - 3y + 24 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x + 4y = 7 \\ 4x - 3y = -24 \end{cases} \Rightarrow 25x = -75$$

$$x = -3 \Rightarrow y = 4 \Rightarrow D(-3, 4) \Rightarrow y_C + y_D = 8 + 4 = 12$$

۲۲- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\begin{cases} y = 2x^2 + 4x - 3 \Rightarrow x_S = \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{2(2)} = -1 \\ x = -1 \end{cases} \Rightarrow S(-1, -5)$$

حالا فاصله ی S را از مبدأ مختصات یعنی $O(0, 0)$ می یابیم:

$$OS = \sqrt{x_S^2 + y_S^2} = \sqrt{(-1)^2 + (-5)^2} = \sqrt{1 + 25} = \sqrt{26}$$



«بانک سوال یاوران دانش»

۲۳- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. فاصله‌ی دو خط موازی $ax + by = c$ و $ax + by = c'$ برابر است با:

$$d = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

اولاً دو خط موازی‌اند، در نتیجه شیب آن‌ها با هم برابر است.

$$\begin{cases} y = \alpha x - \alpha + 1 \\ y = \frac{4}{\alpha} x + 3 \end{cases} \Rightarrow \alpha = \frac{4}{\alpha} \Rightarrow \alpha^2 = 4 \Rightarrow \alpha = \pm 2$$

$$d = \frac{|3 + \alpha - 1|}{\sqrt{1^2 + \alpha^2}} = \frac{|2 + \alpha|}{\sqrt{1 + \alpha^2}}$$

اگر $\alpha = -2$ باشد، $d = 0$ به دست می‌آید و در نتیجه غیرقابل قبول می‌باشد.

$$d = \frac{|2 + 2|}{\sqrt{1 + 4}} = \frac{4}{\sqrt{5}} = \frac{4\sqrt{5}}{5}$$

پس $\alpha = 2$ قابل قبول است و داریم:

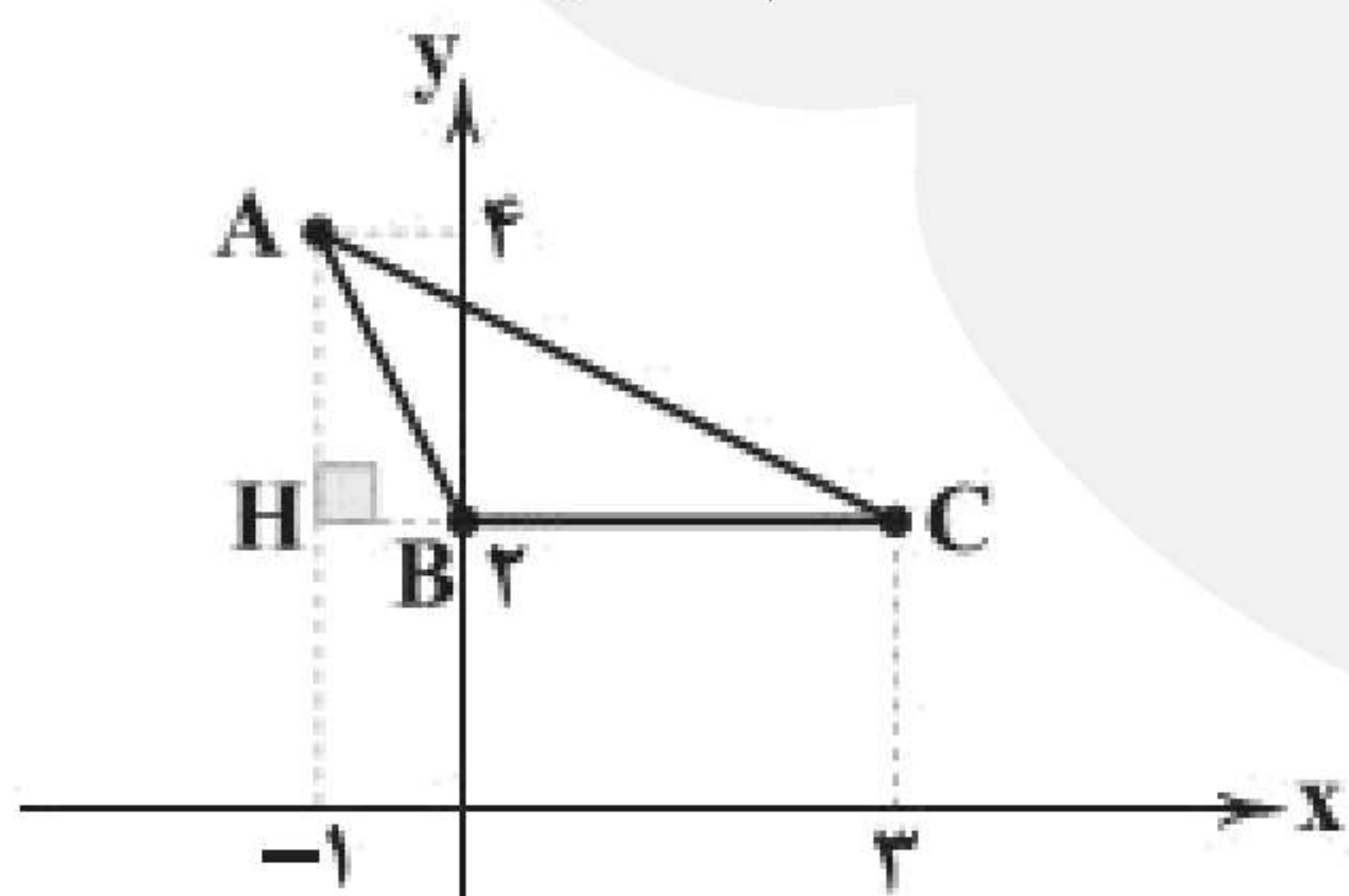
$$2y - 6x = 1 \Rightarrow 2y = 6x + 1 \Rightarrow \text{شیب خط} = \frac{6}{2} = 3$$

۲۴- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

در دو خط موازی، شیب‌ها با هم برابرند، پس:

$$\begin{aligned} &\begin{cases} m = 3 \\ A(2, -1) \end{cases} \xrightarrow{\text{معادله ی خط}} y - (-1) = 3(x - 2) \\ &\xrightarrow{\text{عرض از مبدا}} y + 1 = 3(0 - 2) \Rightarrow y = -7 \\ &x = 0 \end{aligned}$$

۲۵- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. به دلیل آن‌که دو نقطه‌ی B و C هم‌عرض هستند، بهترین روش رسم شکل است:



$$\Rightarrow S = \frac{1}{2} AH \times BC = \frac{1}{2} \times 2 \times 3 = 3$$



۲۶- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

فاصله‌ی نقطه‌ی $A(x_0, y_0)$ از خط $ax + by + c = 0$ از رابطه‌ی $\frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ به دست می‌آید.

نقطه‌ای دلخواه روی خط $y = 2x + 2$ به مختصات $(x, 2x + 2)$ در نظر می‌گیریم و فاصله‌ی آن را از خط $3x - y + 3 = 0$ برابر $\sqrt{40}$ قرار می‌دهیم:

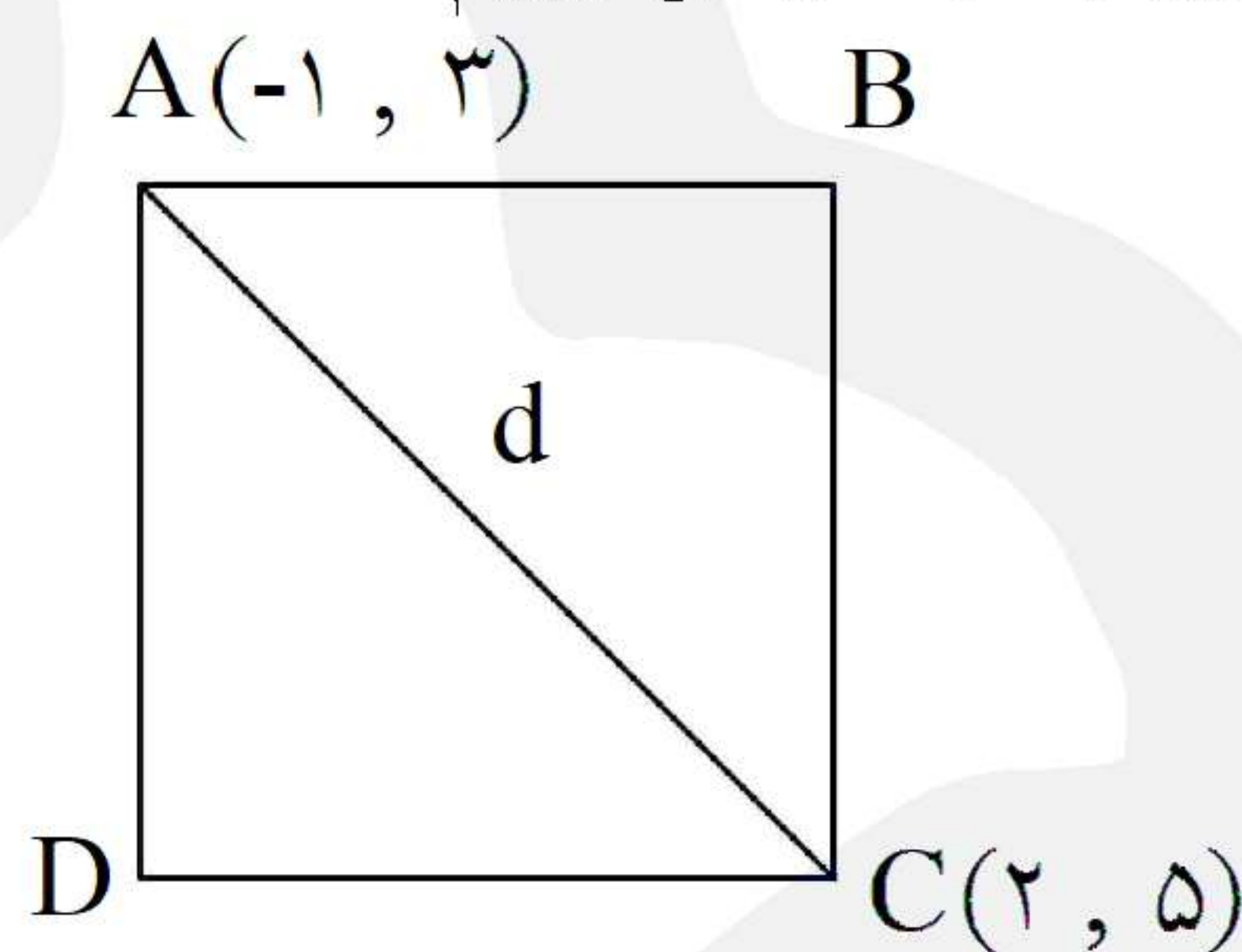
$$\frac{3x - (2x + 2) + 3}{\sqrt{9 + 1}} = \sqrt{40} \Rightarrow |x + 1| = 20$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + 1 = 20 \Rightarrow x = 19 \Rightarrow y = 40 \Rightarrow A(19, 40) \\ x + 1 = -20 \Rightarrow x = -21 \Rightarrow y = -40 \Rightarrow B(-21, -40) \end{cases}$$

فاصله‌ی دو نقطه A و B از رابطه‌ی $\sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$ به دست می‌آید داریم:

$$|AB| = \sqrt{40^2 + 80^2} = \sqrt{40^2 (1 + 4)} = 40\sqrt{5}$$

۲۷- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. شکل فرضی زیر را در نظر می‌گیریم:

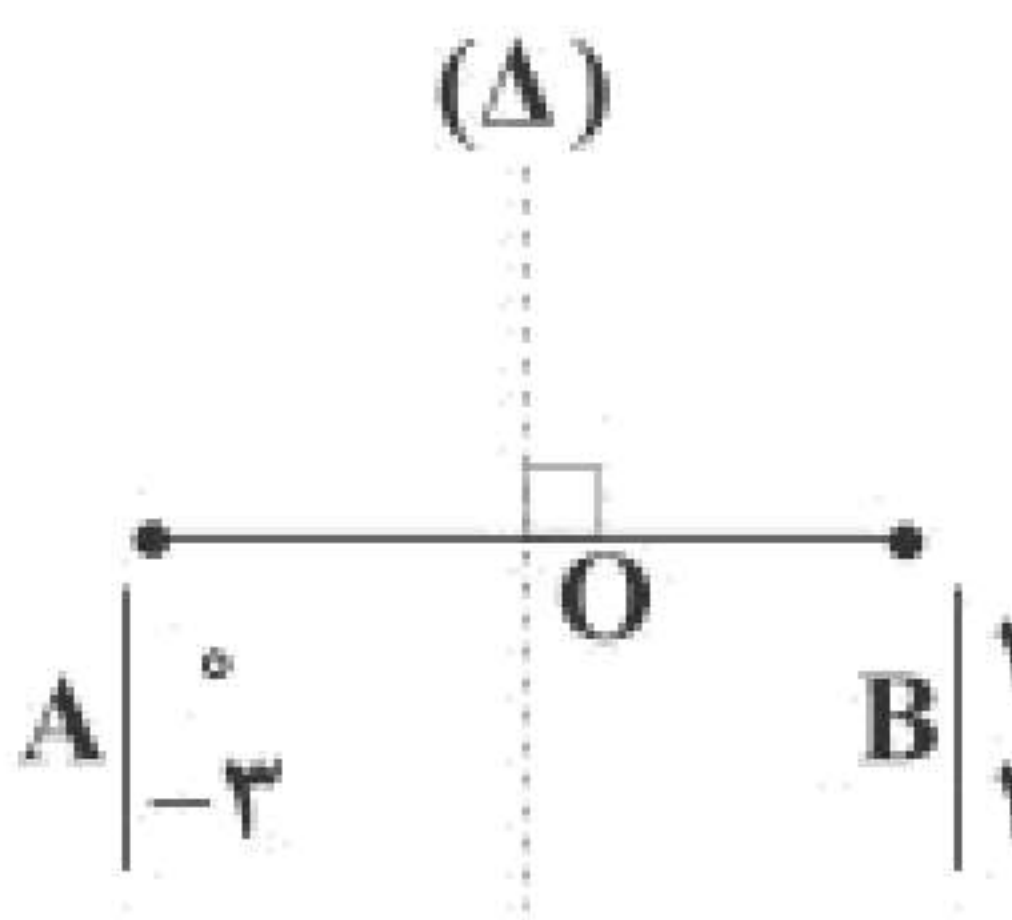


$$\Rightarrow AC = \sqrt{(2 - (-1))^2 + (5 - 3)^2} = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13}$$

$$\Rightarrow S = \frac{1}{2} d^2 = \frac{1}{2} (AC)^2 = \frac{1}{2} \times 13 = 6.5$$



۲۸- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ابتدا معادله ی خط Δ یعنی عمودمنصف پاره خط AB را می نویسیم:



$$\Rightarrow O = \frac{A+B}{2} \Rightarrow O\left(1, \frac{1}{2}\right)$$

$$m_{AB} = \frac{4 - (-3)}{2 - 0} = \frac{7}{2} \xrightarrow{\Delta \perp AB} m_{\Delta} = -\frac{2}{7}$$

$$\Delta: \begin{cases} O\left(1, \frac{1}{2}\right) \\ m = -\frac{2}{7} \end{cases} \Rightarrow y - \frac{1}{2} = -\frac{2}{7}(x - 1)$$

$$\xrightarrow{\times 14} 14y - 7 = -2x + 4 \Rightarrow 2x + 14y = 11 \quad (\Delta \text{ معادله ی})$$

$$\xrightarrow{\text{تلاقی با محورها}} \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = \frac{11}{14} \Rightarrow M\left(0, \frac{11}{14}\right) \\ y = 0 \Rightarrow x = \frac{11}{4} \Rightarrow N\left(\frac{11}{4}, 0\right) \end{cases}$$

$$\xrightarrow[\text{را P می نامیم}]{\text{وسط M و N}} P = \frac{M+N}{2} \Rightarrow P\left(\frac{11}{8}, \frac{11}{28}\right)$$

۲۹- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. باید نقطه ی $(1, 4)$ ، وسط نقاط $(3, -2)$ و (α, β) باشد:

$$\begin{cases} 1 = \frac{\alpha + 3}{2} \Rightarrow \alpha + 3 = 2 \Rightarrow \alpha = -1 \\ 4 = \frac{\beta + (-2)}{2} \Rightarrow \beta - 2 = 8 \Rightarrow \beta = 10 \end{cases} \Rightarrow \alpha + \beta = 10 + (-1) = 9$$



۳۰- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. اگر نقطه‌ی $M(x, y)$ را نقطه‌ای دلخواه روی عمودمنصف پاره‌خط AB فرض کنیم فاصله‌ی این نقطه از نقاط A و B برابر است با:

$$|MA| = |MB| \Rightarrow \sqrt{(x-a)^2 + (y-1)^2} = \sqrt{(x-2)^2 + (y-a)^2}$$

$$\Rightarrow x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2y + 1 = x^2 - 4x + 4 + y^2 - 2ay + a^2$$

$$\Rightarrow (4-2a)x + (2a-2)y - 3 = 0$$

فاصله‌ی مبدأ مختصات یعنی نقطه‌ی $(0, 0)$ از عمودمنصف برابر است با:

$$\frac{|(4-2a)(0) + (2a-2)(0) - 3|}{\sqrt{(4-2a)^2 + (2a-2)^2}} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{3}{\sqrt{16-16a+4a^2+4a^2-8a+4}} = 1 \Rightarrow \sqrt{8a^2-24a+20} = 3$$

$$\Rightarrow 8a^2 - 24a + 11 = 0 \Rightarrow a_1 + a_2 = \frac{24}{8} = 3$$

۳۱- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. فاصله نقطه $A(2, 1)$ از خط $2x - y + 3 = 0$ برابر است با طول ضلع:

$$d = \frac{|2(2) - 1 + 3|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{6}{\sqrt{5}} \Rightarrow S = d^2 = \frac{36}{5}$$

۳۲- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. با توجه به این‌که مختصات هر نقطه مانند A ، روی خط $y = x + 1$ به صورت $A(a, a+1)$ است، داریم:

$$AH = \frac{|3a - a - 1 + 4|}{\sqrt{3^2 + (-1)^2}} = \sqrt{10} \Rightarrow \frac{|2a + 3|}{\sqrt{10}} = \sqrt{10}$$

$$\Rightarrow |2a + 3| = 10 \Rightarrow \begin{cases} 2a + 3 = 10 \Rightarrow a = \frac{7}{2} \\ 2a + 3 = -10 \Rightarrow a = -\frac{13}{2} \end{cases}$$

$$\frac{7}{2} + \left(-\frac{13}{2}\right) = -3$$

مجموع مقادیر a یا مجموع طول نقاط موردنظر برابر است با:



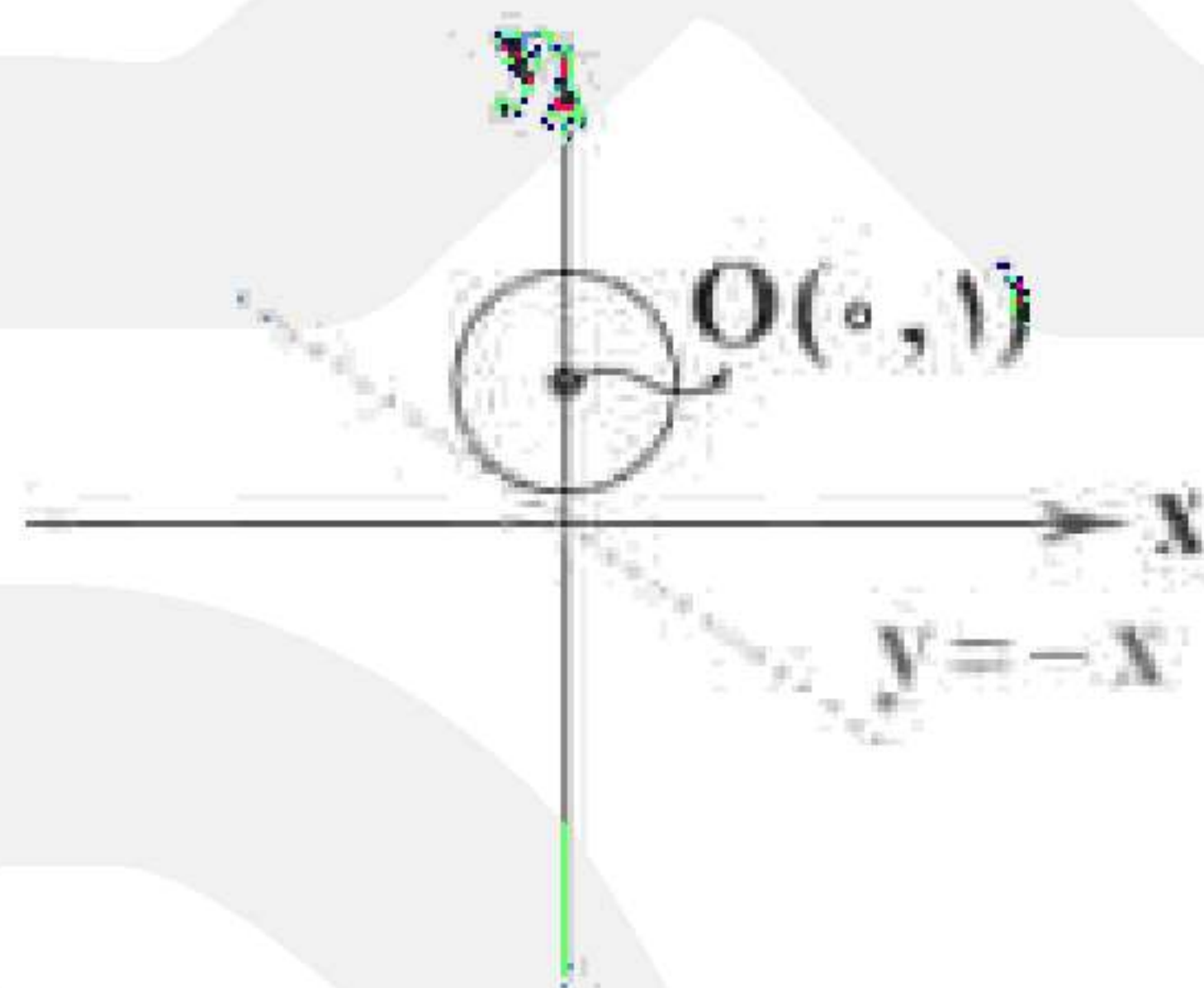
۳۳- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. فاصله‌ی مرکز دایره از خط مماس بر آن، برابر شعاع دایره است، بنابراین داریم:

$$\begin{cases} y = -x \Rightarrow y + x = 0 \\ \text{معادله ی نیمساز ربع دوم و چهارم} \\ \text{مرکز دایره : } O(0, 1) \end{cases}$$

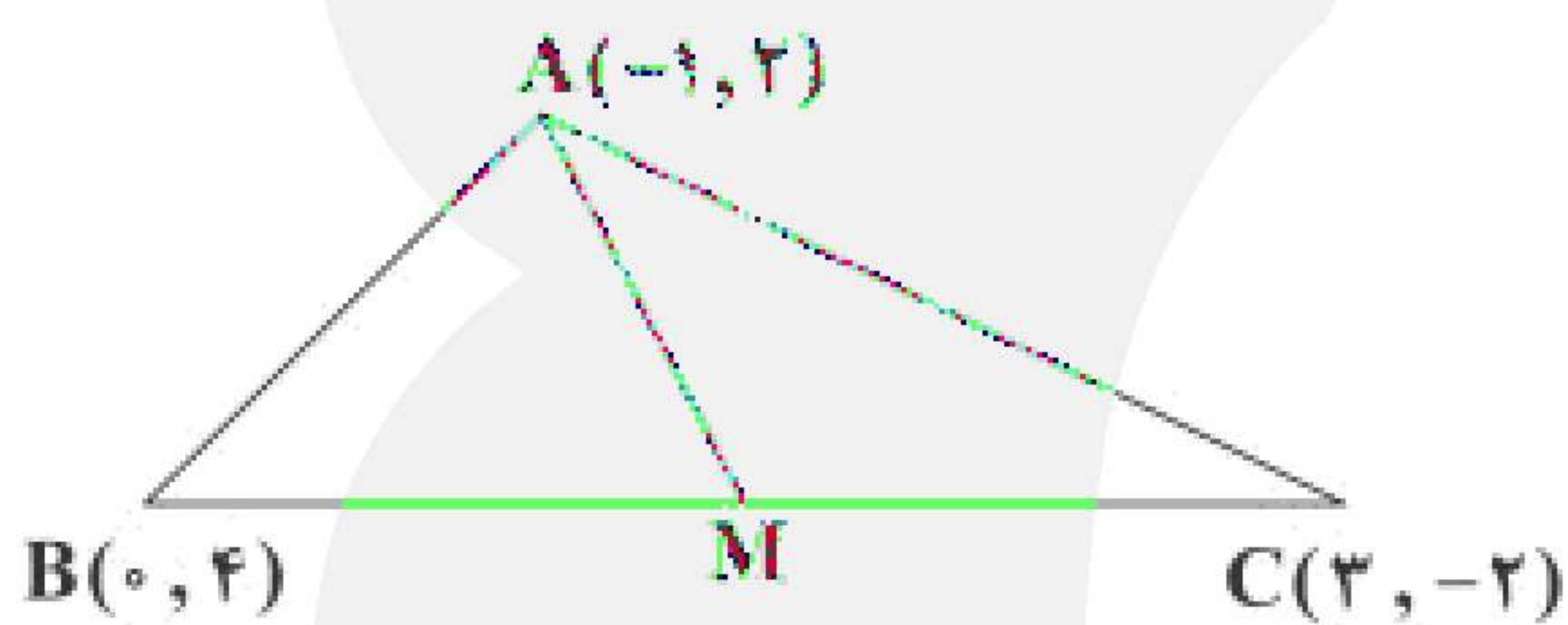
$$R = \frac{|1 + 0|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

فاصله‌ی مرکز دایره از خط مماس

با توجه به این که مرکز دایره روی محور y ها قرار دارد، فاصله‌ی مرکز دایره از محل برخورد دایره با محور عرض‌ها برابر شعاع دایره است، پس طول پاره‌خطی که دایره روی محور عرض‌ها جدا می‌کند، همان قطر دایره یا $2R$ است که برابر است با $\sqrt{2}$.



۳۴- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. شکل فرضی زیر را در نظر می‌گیریم:



$$\Rightarrow M = \frac{B + C}{2} \Rightarrow M\left(\frac{3}{2}, 1\right)$$

حالا شیب پاره‌خط AM را درمی‌یابیم:

$$m_{AM} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1 - 2}{\frac{3}{2} - (-1)} = \frac{-1}{\frac{5}{2}} = -\frac{2}{5}$$

$$\begin{cases} m = -\frac{2}{5} \\ A(-1, 2) \end{cases} \xrightarrow{\text{معادله ی خط}} y - 2 = -\frac{2}{5}(x - (-1)) \xrightarrow{\times 5} 5y - 10 = -2x - 2 \Rightarrow 2x + 5y = 8$$

۳۵- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

y ها برابر \Rightarrow محل برخورد ۲ خط

$$\Rightarrow 3x - 2 = 2x \Rightarrow x = 2 \Rightarrow y = 2x = 4 \Rightarrow (2, 4)$$

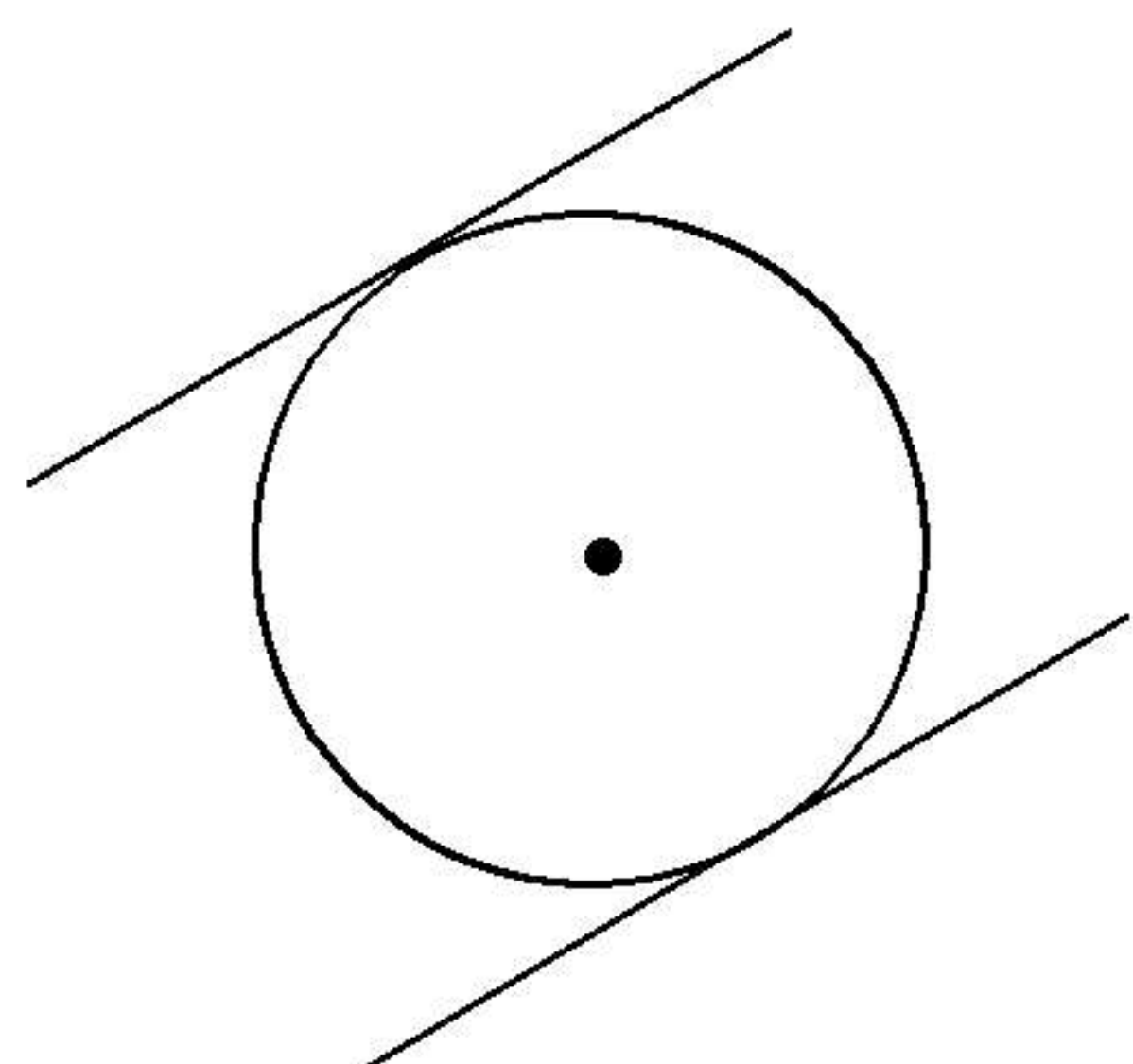
$$3y = 2x + 5 \xrightarrow{\div 3} y = \frac{2}{3}x + \frac{5}{3} \Rightarrow \text{شیب} = \frac{2}{3} \Rightarrow \text{شیب خط عمود} = -\frac{3}{2}$$

$$y - 4 = -\frac{3}{2}(x - 2) \xrightarrow{\times 2} 2y - 8 = -3x + 6 \Rightarrow 2y + 3x = 14$$



۳۶- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. اگر به معادلات دو خط دقت کنیم، شیب هر دو برابر $\frac{3}{2}$ است، پس آنها موازی‌اند. در

نتیجه همچنین شکلی داریم:



پس فاصله‌ی دو خط، قطر دایره را می‌دهد.

برای محاسبه‌ی فاصله‌ی دو خط، ابتدا یک نقطه‌ی دلخواه روی

یکی از خطوط، مثلاً $2y - 3x = 4$ می‌گیریم:

$$x = 0 \Rightarrow 2y - 0 = 4 \Rightarrow y = 2$$

حال فاصله‌ی نقطه‌ی $(0, 2)$ را از خط $2y - 3x - 8 = 0$ حساب می‌کنیم.

$$d = \frac{|2(2) - 3(0) - 8|}{\sqrt{2^2 + 3^2}} = \frac{4}{\sqrt{13}} \Rightarrow \text{شعاع} = \frac{2}{\sqrt{13}}$$

$$\text{مساحت} = \pi r^2 = \pi \times \left(\frac{2}{\sqrt{13}}\right)^2 = \frac{4\pi}{13}$$

$$d = \frac{|ax' + by' + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

نکته: فاصله‌ی نقطه‌ی $A'(x', y')$ از خط $ax + by + c = 0$ برابر است با:

۳۷- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

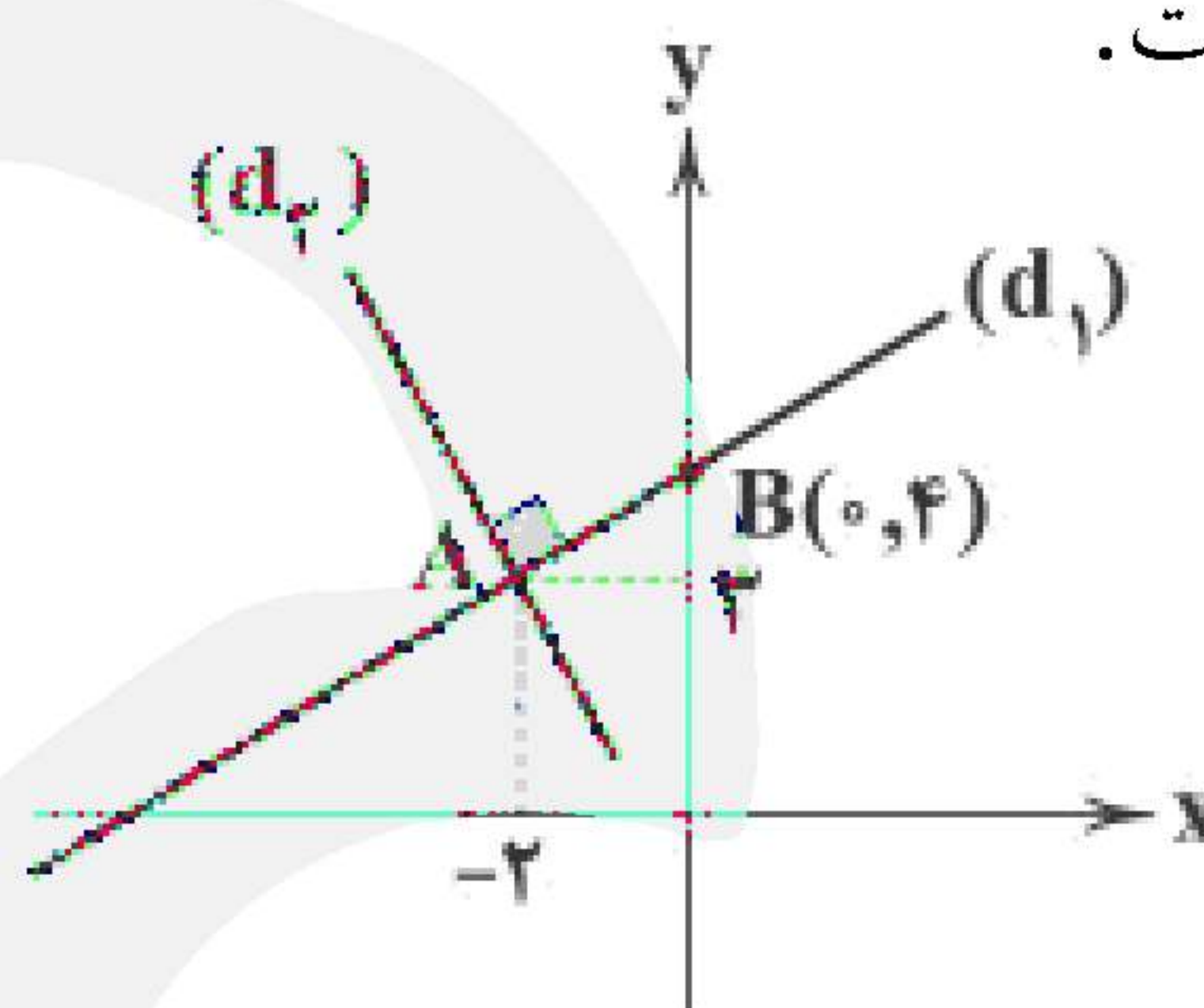
$$\begin{cases} A(-2, 3) \\ B(0, 4) \end{cases} \Rightarrow m_{d_1} = \frac{4 - 3}{0 + 2} = \frac{1}{2} \Rightarrow m_{d_2} = -2$$

معادله‌ی خط d_2 با A

$$\xrightarrow{\hspace{1cm}} y - 3 = -2(x + 2)$$

تلاقی با y ها

$$\xrightarrow{\hspace{1cm}} y - 3 = -2(0 + 2) \Rightarrow y = -1$$





«بانک سوال یاوران دانش»

۳۸- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. در دو خط موازی، شیب دو خط با هم برابر است:

$$\begin{cases} 2x - y + 5 = 0 \Rightarrow m_1 = 2 \\ ax + 2y = b \Rightarrow m_2 = -\frac{a}{2} \Rightarrow -\frac{a}{2} = 2 \Rightarrow a = -4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x - y + 5 = 0 \\ -4x + 2y - b = 0 \xrightarrow{\div (-2)} 2x - y + \frac{b}{2} = 0 \end{cases}$$

$$\text{فاصله‌ی دو خط موازی} = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{\left|5 - \frac{b}{2}\right|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{\left|5 - \frac{b}{2}\right|}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{10}$$

$$\Rightarrow \left|5 - \frac{b}{2}\right| = \frac{\sqrt{5} \times \sqrt{5}}{10} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2} \Rightarrow 5 - \frac{b}{2} = \pm \frac{1}{2} \Rightarrow b = 10 \pm 1 \Rightarrow \begin{cases} b = 11 \\ b = 9 \end{cases}$$

۳۹- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. مختصات نقطه‌ی گذرنده در معادله‌ی خط صدق می‌کند:

$$\xrightarrow{(-1, 1)} 4(-1) - 3a(1) + a - 2 = 0 \Rightarrow -4 - 3a + a - 2 = 0 \Rightarrow -2a = 6 \Rightarrow a = \frac{6}{-2} = -3$$

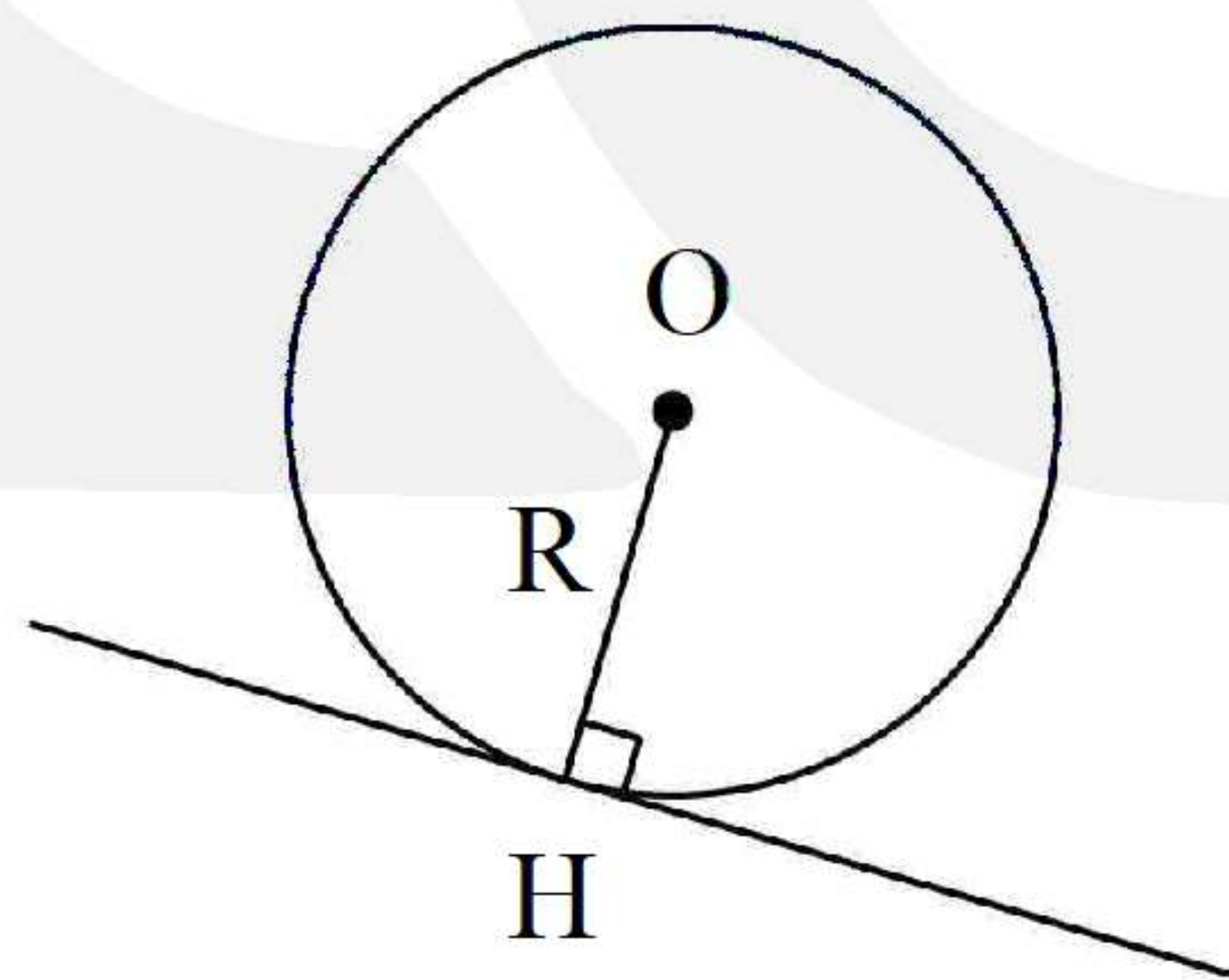
$$\xrightarrow{a = -3} 4x - 3(-3)y + (-3) - 2 = 0 \Rightarrow 4x + 9y - 5 = 0$$

جایگزین

$$\Rightarrow 9y = -4x + 5 \xrightarrow{\div 9} y = -\frac{4}{9}x + \frac{5}{9}$$

محل تلاقی با محور y ها، همان عرض از مبدأ است که برابر $\frac{5}{9}$ است.

۴۰- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. مطابق شکل فاصله‌ی مرکز دایره تا خط برابر شعاع دایره است، پس کافی است فاصله‌ی مرکز دایره تا خط داده‌شده را بیابیم:



$$OH = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \Rightarrow OH = \frac{|3 \times (-4) + 2\sqrt{10} \times \sqrt{10} + 6|}{\sqrt{3^2 + (2\sqrt{10})^2}} = \frac{14}{7} = 2 = r$$

$$\text{محیط دایره} = 2\pi r = 2\pi \times 2 = 4\pi$$



۴۱- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. رأس C روی خط $y = 3x + 5$ قرار دارد، پس $C(\alpha, 3\alpha + 5)$ را در نظر می‌گیریم:

$$S = \frac{1}{2} CH \times AB = 11 \quad (*)$$

CH همان فاصله‌ی نقطه‌ی C از خط گذرنده از نقاط A و B است، پس:

$$\begin{cases} AB = \sqrt{(6-4)^2 + (4-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \\ m_{AB} = \frac{4-2}{6-4} = 1 \xrightarrow{\text{معادله ی خط}} y-4 = (x-6) \Rightarrow x-y-2=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow CH = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|\alpha - (3\alpha + 5) - 2|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{|2\alpha + 7|}{\sqrt{2}}$$

$$\xrightarrow{(*)} 11 = \frac{1}{2} \times \frac{|2\alpha + 7|}{\sqrt{2}} \times 2\sqrt{2} \Rightarrow |2\alpha + 7| = 11 \Rightarrow 2\alpha + 7 = \pm 11$$

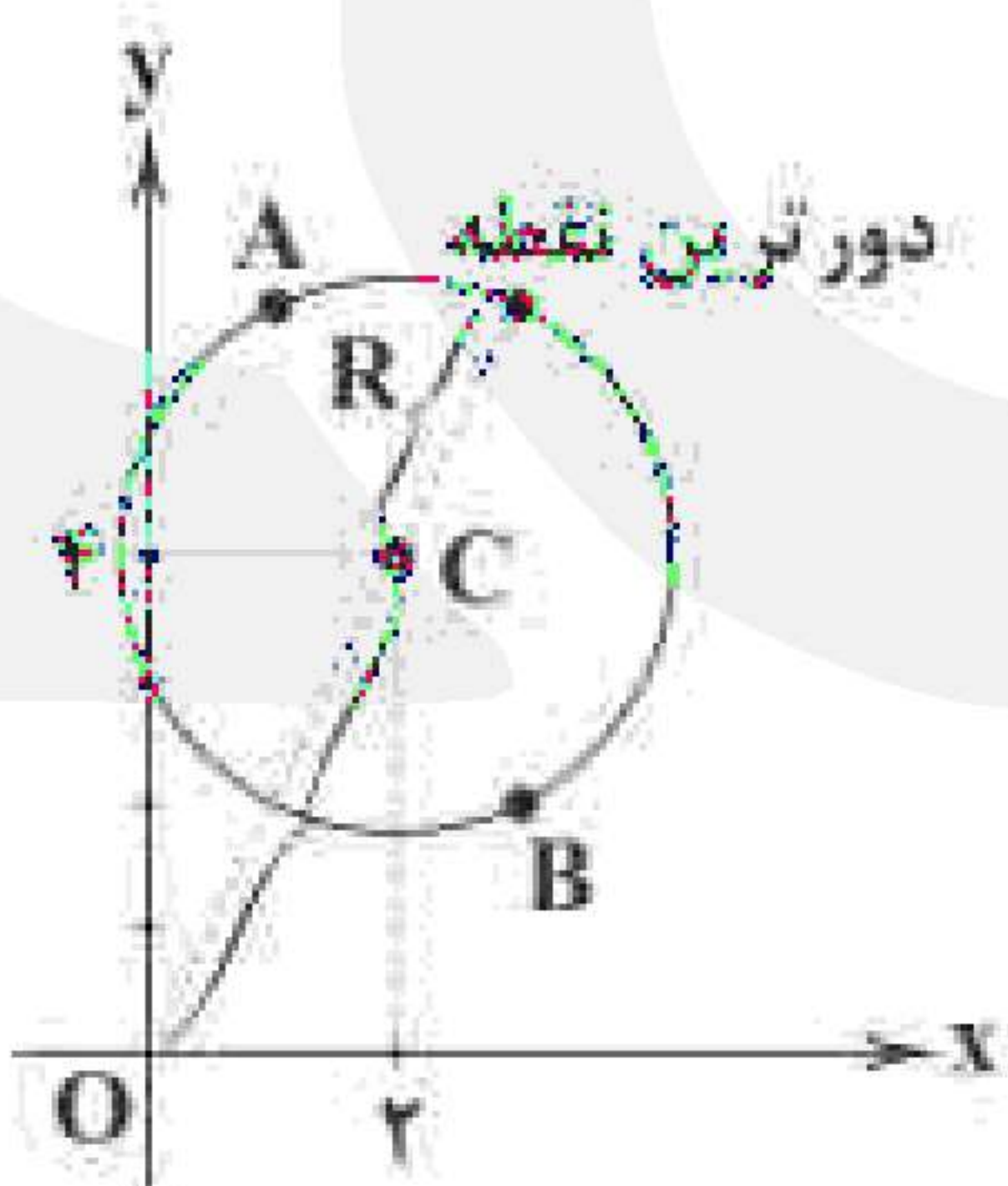
$$\Rightarrow \alpha = \frac{-7 \pm 11}{2} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 2 \xrightarrow{c \text{ در}} y_c = 3 \times 2 + 5 = 11 \\ \alpha = -9 \xrightarrow{c \text{ در}} y_c = 3(-9) + 5 = -22 \end{cases}$$

۴۲- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\text{مرکز دایره } C \begin{cases} \frac{1+3}{2} = 2 \\ \frac{6+2}{2} = 4 \end{cases}, R = CB = \sqrt{(3-2)^2 + (2-4)^2} = \sqrt{5}$$

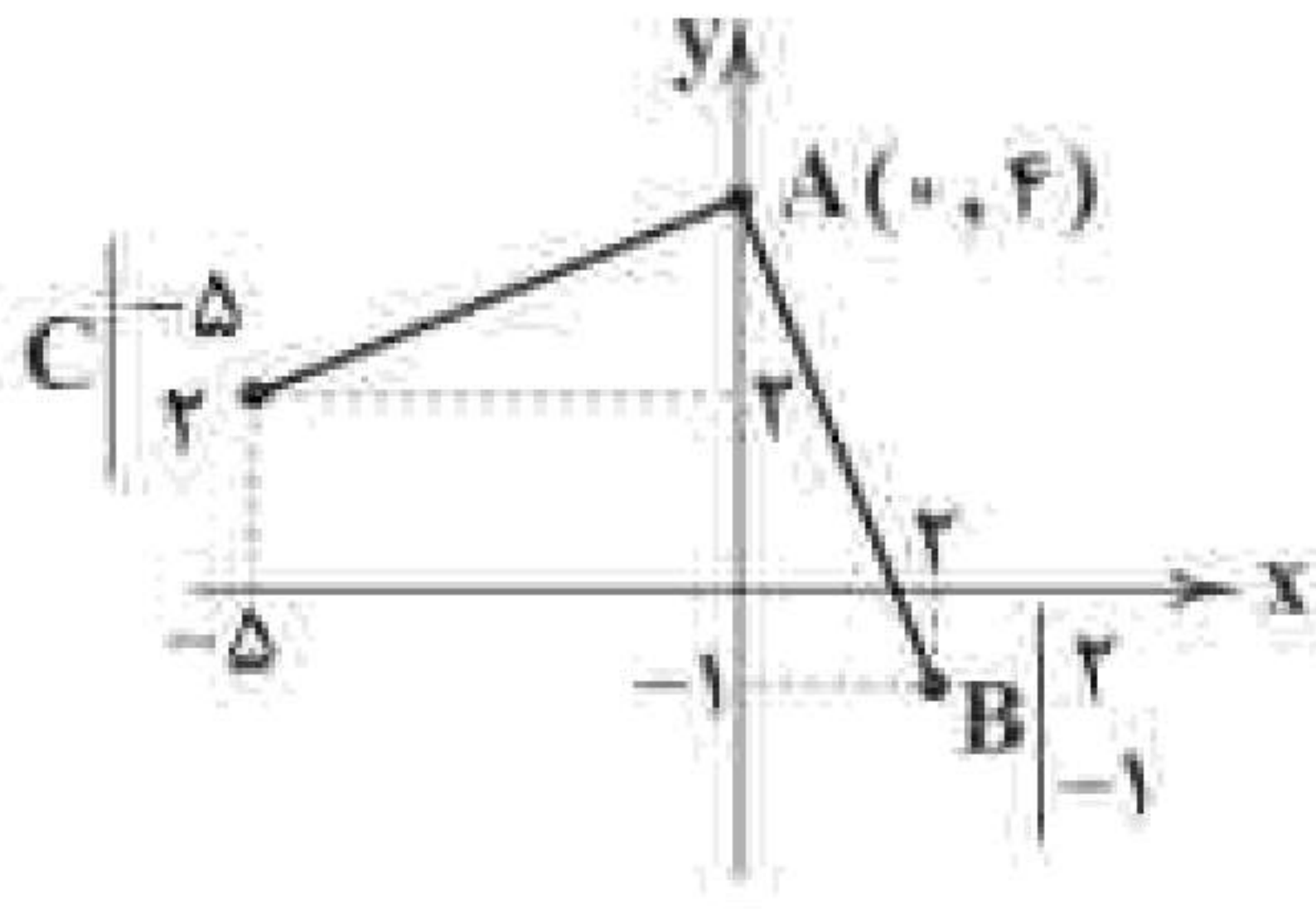
$$OC = \sqrt{4 + 16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

$$\text{فاصله ی دورترین نقطه} = OC + R = \sqrt{5} + 2\sqrt{5} = 3\sqrt{5}$$





۴۳- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ابتدا نقاط داده شده را به طور تقریبی رسم می کنیم:



$$\Rightarrow \begin{cases} m_{AC} = \frac{2-4}{-5-0} = \frac{2}{5} \\ m_{AB} = \frac{-1-4}{2-0} = -\frac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow m_{AC} = -\frac{1}{m_{AB}}$$

یعنی AC و AB بر هم عمودند، پس رأس چهارم مستطیل روبه روی A قرار می گیرد، اگر آن را D فرض کنیم، داریم:

$$A + D = B + C \Rightarrow \begin{cases} x: 0 + x_D = -5 + 2 \Rightarrow x_D = -3 \\ y: 4 + y_D = 2 + (-1) \Rightarrow y_D = -3 \end{cases} \Rightarrow D(-3, -3)$$

۴۴- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

نکته: فاصله دو خط موازی $ax + by + c_1 = 0$ و $ax + by + c_2 = 0$ از رابطه $\frac{|c_1 - c_2|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ به دست

می آید.

ابتدا معادله خط d_2 را به صورت زیر می نویسیم:

$$d_2: 24y = 9 - 10x \Rightarrow 10x + 24y - 9 = 0 \Rightarrow 5x + 12y - \frac{9}{2} = 0$$

بنابراین دو خط d_1 و d_2 با یکدیگر موازی اند و فاصله ی این دو خط موازی برابر قطر دایره است.

$$\text{قطر دایره} = \frac{\left| 2 - \left(-\frac{9}{2}\right) \right|}{\sqrt{5^2 + 12^2}} = \frac{\frac{13}{2}}{13} = \frac{1}{2} \Rightarrow \text{شعاع} = \frac{1}{4}$$

$$S = \pi r^2 = \pi \times \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{\pi}{16}$$



۴۵- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ابتدا طول سه ضلع مثلث ABC را محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{cases} A(4, 1) \\ B(1, 2) \\ C(2, 5) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} AB = \sqrt{(1-4)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{10} \\ AC = \sqrt{(2-4)^2 + (5-1)^2} = \sqrt{20} \\ BC = \sqrt{(2-1)^2 + (5-2)^2} = \sqrt{10} \end{cases}$$

با توجه به اندازه‌ی سه ضلع داریم:

$$\begin{cases} AB = BC \\ AC^2 = AB^2 + BC^2 \end{cases}$$

پس مثلث داده‌شده هم متساوی‌الساقین و هم قائم‌الزاویه است.

۴۶- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. دو نقطه از خط d معلوم است:

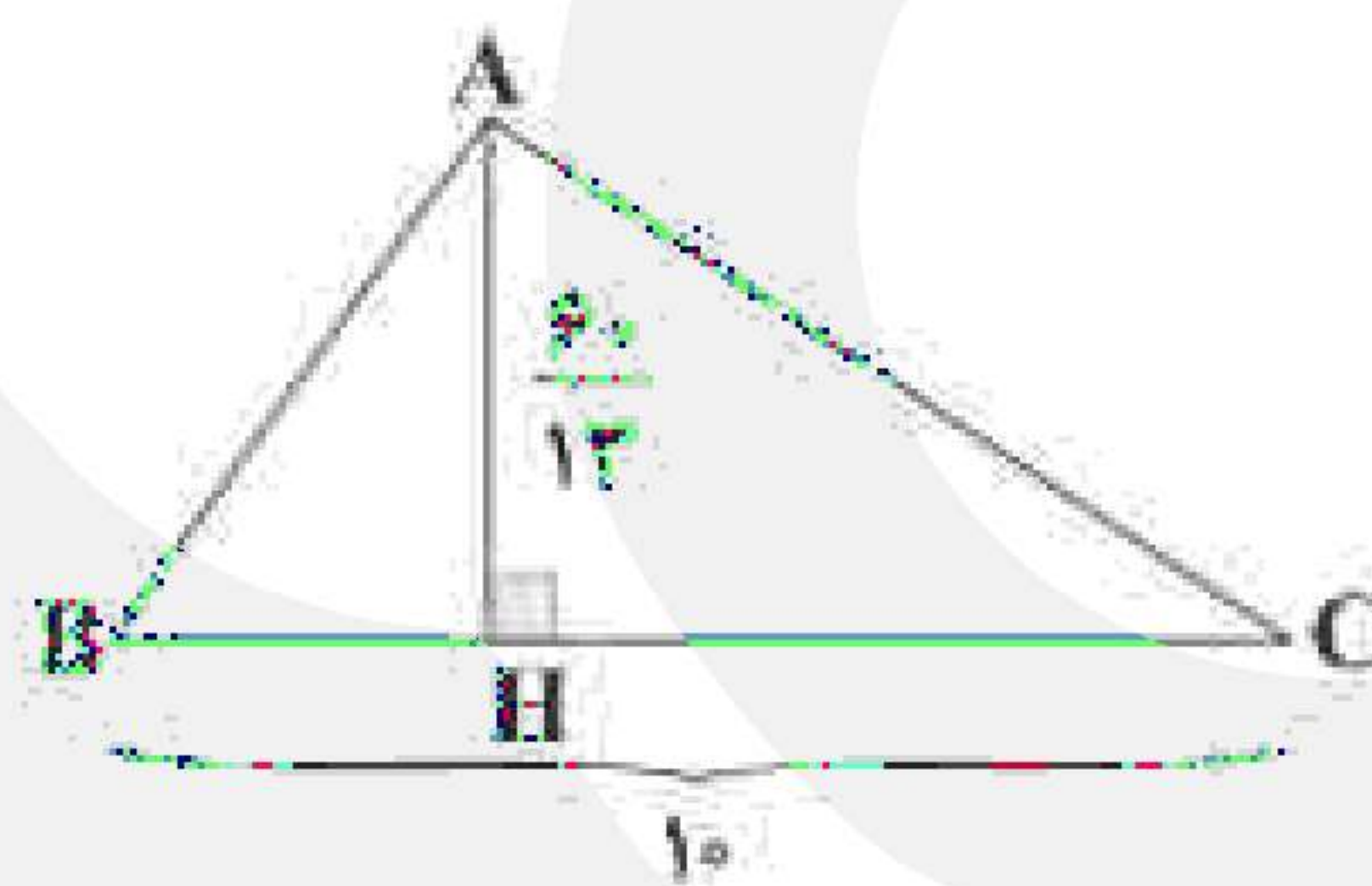
$$\begin{cases} (-2, 0) \\ (0, 3) \end{cases} \Rightarrow m_d = \frac{3-0}{0-(-2)} = \frac{3}{2} \xrightarrow{d' \perp d} m_{d'} = -\frac{2}{3}$$

برای محاسبه‌ی مساحت باید عرض نقطه‌ی A را به دست آوریم تا ارتفاع مثلث به دست آید. برای این کار باید معادله‌ی دو خط d و d' را نوشته و تلاقی دهیم:

$$d: \begin{cases} m = \frac{3}{2} \\ B(-2, 0) \end{cases} \Rightarrow y - 0 = \frac{3}{2}(x - (-2)) \Rightarrow 3x - 2y = -6 \quad (1)$$

$$d': \begin{cases} m = -\frac{2}{3} \\ C(8, 0) \end{cases} \Rightarrow y - 0 = -\frac{2}{3}(x - 8) \Rightarrow 2x + 3y = 16 \quad (2)$$

$$\xrightarrow{\text{تلاقی } d' \text{ و } d} \begin{cases} 2x + 3y = 16 \\ 3x - 2y = -6 \end{cases} \xrightarrow{\text{حل دستگاه}} y = \frac{60}{13} \Rightarrow y_A = \frac{60}{13}$$



$$\Rightarrow S = \frac{1}{2} AH \times BC = \frac{1}{2} \times \frac{60}{13} \times 10 = \frac{300}{13}$$

۴۷- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. با توجه به شکل زیر داریم:

$$A \begin{vmatrix} -1 \\ 4 \end{vmatrix} \quad M \begin{vmatrix} 2 \\ -3 \end{vmatrix} \quad A' \begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow M = \frac{A + A'}{2} \Rightarrow A' = 2M - A \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \times 2 - (-1) = 5 \\ y = 2 \times (-3) - 4 = -10 \end{cases} \Rightarrow A'(5, -10)$$



«بانک سوال یاوران دانش»

۴۸- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. خط مماس بر دایره در نقطه‌ی تماس بر خط مماس عمود است. پس دو خط $y - (2a + 1)x - b = 0$ و $3ay + 2x + c = 0$ بر هم عمودند. پس شیب آن‌ها قرینه و معکوس یکدیگر است.

$$y - (2a + 1)x - b = 0 \Rightarrow y = (2a + 1)x + b \Rightarrow \text{شیب} = 2a + 1$$

$$3ay + 2x + c = 0 \Rightarrow y = -\frac{2}{3a}x - \frac{c}{3a} \Rightarrow \text{شیب} = -\frac{2}{3a}$$

$$2a + 1 = \frac{3a}{2} \Rightarrow a = -2$$

بنابراین خواهیم داشت:

از طرفی نقطه تماس یعنی $(-2, 1)$ روی هر دو خط قرار دارد و مختصات آن در هر دو معادله صدق می‌کند. داریم:

$$y = (2a + 1)x + b \xrightarrow[\text{در معادله ی خط}]{a = -2} -2 = -3 + b \Rightarrow b = 1$$

$$3ay + 2x + c = 0 \xrightarrow[\text{تلاقی با محور x ها}]{a = -2} 12 + 2 + c = 0 \Rightarrow c = -14$$

معادله‌ی خط $\frac{x}{b} - \frac{y}{c} = \frac{a}{c}$ به صورت $x + \frac{y}{14} = \frac{1}{7}$ خواهد بود. برای یافتن نقطه‌ی برخورد این خط با محور طول

$$y = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{7}$$

داریم:

۴۹- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. مختصات هر نقطه در معادله‌ی خط گذرا از آن صدق می‌کند:

$$(a - 1)x + 2ay - 7 = 0 \xrightarrow[\text{در معادله ی خط}]{A(-3, 2)} (a - 1)(-3) + 2a \times 2 - 7 = 0$$

$$\Rightarrow a - 4 = 0 \Rightarrow a = 4 \Rightarrow a = 4 \xrightarrow[\text{تلاقی با محور x ها}]{\text{در معادله ی خط}} 3x + 8y - 7 = 0$$

$$\xrightarrow[\text{تلاقی با محور x ها}]{y = 0} 3x - 7 = 0 \Rightarrow x = \frac{7}{3}$$

۵۰- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. مطابق با شکل زیر، فاصله‌ی رأس A تا خط داده‌شده برابر طول ضلع مربع است، پس:

$$AH = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|3 \times 3 + 2 \times 11 - 5|}{\sqrt{3^2 + 2^2}}$$

$$\Rightarrow AH = \frac{26}{\sqrt{13}} \Rightarrow S = AH^2 = \frac{26 \times 26}{13} = 52$$

