

گنجینه سوال رایگان

+ پاسخ تشریحی

یاوران دانش



راه های ارتباطی با ما:

www.Dyavari.com

۰۲۱-۷۶۷۰۳۸۵۸

۰۹۱۲-۳۴ ۹۴ ۱۳۴



	۱	۲	۳	۴
۱ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۴ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۵ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۶ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۷ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۸ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۹ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۱۰ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۱۱ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۱۲ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۳ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۱۴ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۵ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۱۶ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۷ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۸ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۹ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۲۰ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۱ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۲ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۳ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۴ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۵ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۶ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۷ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۸ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۹ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۰ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۱ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۳۲ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۳ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۴ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

	۱	۲	۳	۴
۳۵ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۳۶ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۷ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۸ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۹ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۴۰ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۴۱ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۴۲ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۴۳ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۴۴ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۴۵ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۴۶ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۴۷ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۴۸ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۴۹ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۵۰ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



۱- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$k > 3 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{kx^3 - bx^k - 3}{2x^k - 4x^2 + 3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-bx^k}{2x^k} = -\frac{b}{2} = 2 \Rightarrow b = -4$$

$$k = 3 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 - bx^3 - 3}{2x^3 - 4x^2 + 3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(3-b)x^3}{2x^3} = \frac{3-b}{2} = 2 \Rightarrow b = -1$$

$$k < 3 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{kx^3 - bx^k - 3}{2x^k - 4x^2 + 3} \neq 2 \quad \text{غیرقابل قبول}$$

۲- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. داخل رادیکال را مربع کامل کرده و از عبارت $-\frac{b^2}{4}$ در مقابل ∞ صرف نظر می کنیم:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} x + \sqrt{x^2 + bx} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} x + \sqrt{\left(x + \frac{b}{2}\right)^2 - \frac{b^2}{4}} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} x + \left|x + \frac{b}{2}\right| = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x - x - \frac{b}{2}\right) = 3 \Rightarrow \frac{-b}{2} = 3 \Rightarrow \boxed{b = -6} \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow (-3)^+} \frac{x^2 + 4x + 3}{x^2 + 6x + 9} = \lim_{x \rightarrow (-3)^+} \frac{(x+1)(x+3)}{(x+3)^2} = \lim_{x \rightarrow (-3)^+} \frac{x+1}{x+3} = \frac{-2}{+} = -\infty$$

۳- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. بررسی هریک از گزینه ها:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{3x-1}{x+1} \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{3(x+1)-4}{x+1} \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[3 - \frac{4}{x+1} \right] = [3^+] = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{3x+1}{x-1} \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{3(x-1)+4}{x-1} \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[3 + \frac{4}{x-1} \right] = [3^-] = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{2x+3}{x+1} \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{2(x+1)+1}{x+1} \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[2 + \frac{1}{x+1} \right] = [2^-] = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{2x+1}{x-1} \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{2(x-1)+3}{x-1} \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[2 + \frac{3}{x-1} \right] = [2^-] = 1$$



۴- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. باید مخرج در $X = 1$ ریشه‌ی مضاعف داشته باشد:

$$2x^2 + ax + b = 2(x - 1)^2 = 2x^2 - 4x + 2 \rightarrow \begin{cases} a = -4 \\ b = 2 \end{cases}$$

تجزیه با استفاده از تقسیم بر عامل صفر ساز $(x + 2)$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x^3 - 4x^2 - 18x + 4}{x^2 - 6x - 16} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+2)(3x^2 - 10x + 2)}{(x+2)(x-8)} = \frac{34}{-10} = -3/4$$

راه دوم: قاعده هوییتال

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x^3 - 4x^2 - 18x + 4}{x^2 - 6x - 16} \xrightarrow{\text{HOP}} \lim_{x \rightarrow -2} \frac{9x^2 - 8x - 18}{2x - 6} = \frac{34}{-10} = -3/4$$

۵- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\left(x + \sqrt{x^2 + mx}\right)}{1} \times \frac{\left(x - \sqrt{x^2 + mx}\right)}{\left(x - \sqrt{x^2 + mx}\right)} = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - x^2 - mx}{x - \sqrt{x^2 + mx}} = 3 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-mx}{x - \sqrt{\left(x + \frac{m}{2}\right)^2 - \frac{m^2}{4}}} = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-mx}{x - \left|x + \frac{m}{2}\right|} = 3 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-mx}{2x + \frac{m}{2}} = 3 \Rightarrow \frac{-m}{2} = 3 \Rightarrow m = -6$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{6x + 1}{x + 2} \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{6(x + 2) - 11}{x + 2} \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[6 - \frac{11}{x + 2} \right] = [6^-] = 5$$



۶- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. در $x \rightarrow -\infty$ عبارت $\sqrt{4x^2 + 15x}$ هم‌ارز با $\sqrt{4x^2}$ و در نهایت $|2x| = -2x$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{mx^n + 15}{3x - (-2x)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{mx^n}{5x} = -1 \quad \begin{cases} m = -5 \\ n = 1 \end{cases} \quad \text{است:}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-5x + 15}{3x - \sqrt{4x^2 + 15x}} &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-5x + 15}{3x + \sqrt{4x^2 + 15x}} \times \frac{3x + \sqrt{4x^2 + 15x}}{3x + \sqrt{4x^2 + 15x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(-5x + 15) \times 18}{9x^2 - 4x^2 - 15x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-5(x-3) \times 18}{5x^2 - 15x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-5(x-3) \times 18}{5x(x-3)} = -6 \end{aligned}$$

در $x \rightarrow 3$

۷- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. با جایگذاری $x = 2$ به حالت مبهم $\frac{0}{0}$ می‌رسیم، برای رفع ابهام از روش تغییر متغیر

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ t \rightarrow 4}} \frac{t + \frac{8}{t} - 6}{\sqrt{\frac{1}{t} - \frac{2}{t}}} &= \lim_{t \rightarrow 4} \frac{t^2 - 6t + 8}{\sqrt{t-2}} \\ &= \lim_{t \rightarrow 4} \frac{(t-2)(t-4)}{(\sqrt{t-2})} = (2+2) \times (4-2) = 8 \end{aligned}$$

استفاده می‌کنیم.

$$\lim_{t \rightarrow 4} \frac{(t-4)(t-4)}{(\sqrt{t-2})} = \lim_{t \rightarrow 4} \frac{(\sqrt{t-2})(\sqrt{t-2})(t-4)}{(\sqrt{t-2})} = (2+2) \times (4-2) = 8$$

«بانک سوال یاوران دانش»

۸- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$P(x) = (x-2)(x+1)q(x) + 4x+1$$

باقی مانده خارج قسمت

$$x-2=0 \Rightarrow x=2 \Rightarrow P(2) = 4(2)+1 \Rightarrow P(2) = 9$$

$$x+1=0 \Rightarrow x=-1 \Rightarrow P(-1) = 4(-1)+1 \Rightarrow P(-1) = -3$$

$$x-1=0 \Rightarrow x=1 \Rightarrow g(1) = P(-1) + P(2) + 3(1)^2 + 2$$

$$g(1) = (-3) + 9 + 3 + 2 = 11$$

$$x-1 \text{ بر } g(x) \text{ تقسیم } g(1) = 11$$



۹- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. در عبارت فرض سؤال، چون $\lim_{x \rightarrow 1} (x+2) = 3$ و حاصل نهایی حد $+\infty$ شده است.

پس مخرج کسر $2(x-1)^2$ بوده است تا مخرج کسر به 0^+ میل کند.

$$2(x-1)^2 = 2x^2 - 4x + 2 = 2x^2 + ax + b \Rightarrow \begin{cases} a = -4 \\ b = 2 \end{cases}$$

با جایگذاری مقادیر a و b به محاسبه حد دوم می‌پردازیم:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left(x + \sqrt{x^2 - 8} \right) \times \frac{x - \sqrt{x^2 - 8}}{x - \sqrt{x^2 - 8}} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x(x^2 - x^2 + 8)}{x - \sqrt{x^2 - 8}} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{8x}{x - |x|} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{8x}{x - (-x)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{8x}{2x} = 4 \end{aligned}$$

۱۰- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. در محاسبات حد عباراتی که صفرساز نیستند را می‌توانید از همان ابتدا برای خلاصه‌نویسی محاسبه و عدد بگذارید:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - \sqrt{2x - \sqrt{x}}} \times \frac{x + \sqrt{2x - \sqrt{x}}}{x + \sqrt{2x - \sqrt{x}}} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2(x^2 - 1)}{x^2 - 2x + \sqrt{x}} \times \frac{(x^2 - 2x) - \sqrt{x}}{(x^2 - 2x) - \sqrt{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-4(x^2 - 1)}{(x^2 - 2x)^2 - x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-4(x^2 - 1)}{x^4 - 4x^3 + 4x - x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-4(x^2 - 1)}{x(x^3 - 4x^2 + 4x - 1)} \quad \text{با تقسیم بر عامل صفرساز} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-4(x-1)(x+1)}{x(x-1)(x^2 - 3x + 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-4(x+1)}{x(x^2 - 3x + 1)} = 8 \end{aligned}$$

تذکر: این حد را با روش هویتال در زمان بسیار کوتاه می‌توانید حل کنید به شرط آنکه در مشتق مسلط باشید.



۱۱- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\text{اگر } n > 3 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^n}{2x^n} = \frac{1}{2}$$

$$\text{اگر } n = 3 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x^3 + 8x^3}{2x^3} = 3$$

$$\text{اگر } n < 3 \quad \left\{ \begin{array}{l} n = 2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x^2}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x) = +\infty \\ \text{یا} \\ n = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x}{2x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} -1 = -\infty \end{array} \right.$$

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{f(x+1)}{f(2-x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)}{\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)} = \frac{\text{عدد مثبت}}{-} = -\infty = K$$

۱۲- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

با توجه به جملات پرتوان در صورت و مخرج برای محاسبه حد در بی نهایت:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2 + 2x} + \sqrt[3]{2-x^3}}{x + |2x-3|} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2} + \sqrt[3]{-x^3}}{x + |2x|} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|2x| - x}{x - 2x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3x}{-x} = 3$$

۱۳- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. برای آن که حاصل حد فوق، بی نهایت شود، باید $x = a$ مخرج کسر را صفر کند:

$$|2 \cos^2 a - 2 \cos a - \sin^2 a| = 0 \Rightarrow 2 \cos^2 a - 2 \cos a - \sin^2 a = 0$$

با استفاده از روابط $\cos^2 a = 2 \cos^2 a - 1$ و $\sin^2 a = 1 - \cos^2 a$ داریم:

$$2(2 \cos^2 a - 1) - 2 \cos a - (1 - \cos^2 a) = 0 \Rightarrow 5 \cos^2 a - 2 \cos a - 3 = 0$$

$$\xrightarrow{\cos a = t} 5t^2 - 2t - 3 = 0 \Rightarrow t = 1, -\frac{3}{5}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos a = 1 \xrightarrow{a \in [0, 2\pi]} a = 0, 2\pi \\ \cos a = -\frac{3}{5} \xrightarrow{a \in [0, 2\pi]} \end{cases}$$

a دارای دو جواب درست به صورت های $\pi \pm \alpha$ در ربع دوم و سوم است

$$0 + 2\pi + (\pi - \alpha) + (\pi + \alpha) = 4\pi$$

پس مجموع مقادیر ممکن برابر a برابر است با:



۱۴- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$n < 3 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\lambda_0 (x^3 + 1)}{nx^n + \delta x^3} \simeq \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\lambda_0 x^3}{\delta x^3} = 16$$

$$n = 3 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\lambda_0 (x^3 + 1)}{3x^3 + \delta x^3} \simeq \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\lambda_0 x^3}{\lambda x^3} = 10$$

$$n > 3 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\lambda_0 (x^3 + 1)}{nx^n + \delta x^3} \simeq \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\lambda_0 x^3}{nx^n} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\lambda_0}{nx^{n-3}} = 0$$

$$26 = 16 + 10 + 0 = \text{حاصل جمع تمام مقادیر ممکن حد عبارت}$$

۱۵- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. مخرج ریشه مضاعف دارد پس دلتای آن صفر است.

$$\Delta = 0 \Rightarrow a^2 - 4(2)(2) = 0 \Rightarrow a^2 = 16 \Rightarrow a = \pm 4$$

به ازای $a = 4$ ریشه مضاعف مخرج $x = -1$ و به ازاء $a = -4$ ریشه مخرج $x = 1$ است.

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x + b}{2x^2 + 4x + 2} = +\infty \Rightarrow \frac{-2 + b}{0} = +\infty \Rightarrow -2 + b > 0 \Rightarrow b > 2$$

در این حالت $a + b + c = 4 + b + (-1) = 3 + b$ حداقل ۵ است.

«بانک سوال یاوران دانش»

۱۶- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x - \sqrt{x^2 + 2x - 1} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x - |x| = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x) = -\infty$$

۱۷- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. با توجه به نمودار تابع $y = (2 + \sin x)f(x)$ در همسایگی راست $x = 0$ ، واضح

است که $\lim_{x \rightarrow 0^+} (2 + \sin x)f(x) = 4$ حالا دقت کنید:

اولاً مقادیر این تابع در همسایگی راست $x = 0$ کمتر از ۴ است (4^-) .
ثانیاً می دانیم که $\lim_{x \rightarrow 0} (2 + \sin x) = 2$ و البته مقادیر تابع $2 + \sin x$ در همسایگی راست $x = 0$ ، مقادیری بیشتر از ۲ است (2^+) .
پس نتیجه می شود که تابع $f(x)$ در همسایگی راست $x = 0$ مقادیر کمتر از ۲ دارد (2^-) .

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{2 + \sin x}{2 - f(x)} \right) = \frac{2}{2 - 2^-} = \frac{2}{+} = +\infty$$

نهایتاً داریم:



۱۸- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. با توجه به جواب $-\infty$ باید مخرج $(x-4)^2$ باشد. بنابراین با مقایسه این عبارت و مخرج کسر:

$$-16 + 8x - x^2 = b - ax - x^2$$

نتیجه می گیریم که $b = -16$ و $a = -8$ است.

$$\lim_{x \rightarrow (-\infty)} \frac{(a+8)x^3 + bx^2 - 3}{\sqrt{2}x - 2x^2} = \lim_{x \rightarrow (-\infty)} \frac{-16x^2}{-2x^2} = 8$$

۱۹- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{5^n \left(\left(\frac{2}{5}\right)^n + \left(\frac{3}{5}\right)^n + \left(\frac{4}{5}\right)^n + 1 \right)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{5^n} = 5$$

۲۰- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \frac{3-a}{a \times 0^+} = +\infty \Rightarrow \frac{3-a}{a} > 0 \Rightarrow 0 < a < 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \frac{3}{a \times 0^-} = -\infty \Rightarrow a > 0$$

پس $0 < a < 3$ و $0 \leq [a] \leq 2$ است.

۲۱- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. می دانیم وقتی $x \rightarrow 3^+$ و $|9 - x^2| = -(9 - x^2)$ و $[3^+] = 3$:

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{3x^3 - 81}{x^2 - 9} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{3(x-3)(x^2 + 3x + 9)}{(x-3)(x+3)} = \frac{3(27)}{6} = 13/2$$

۲۲- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^-} y &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-2}{\sqrt{2-f}} = \frac{-2}{\sqrt{2-4^+}} = \frac{-2}{0^-} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} y &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{-2}{\sqrt{2-f}} = \frac{-2}{\sqrt{2-2^-}} = \frac{-2}{0^+} = -\infty \end{aligned} \right\} \rightarrow \begin{array}{c} \uparrow \\ x=2 \end{array}$$



۲۳- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. چون حاصل حد برابر با عدد $\sqrt{3}$ شده، از آنجا که مخرج کسر به صفر میل می‌کند، پس

$$f^{-1}(4) - f(7) = 0 \Rightarrow f(7) = f^{-1}(4)$$

صورت هم باید به صفر میل کند. یعنی:

$$\lim_{x \rightarrow 7} fof(x) = fof(7) = fof^{-1}(4) = 4$$

حالا برای محاسبه حد خواسته شده داریم:

۲۴- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$x \rightarrow 3^+: f(x) = \frac{3(x-3)}{\sqrt{2x+3}-x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{3(x-3)}{\sqrt{2x+3}-x} \times \frac{\sqrt{2x+3}+x}{\sqrt{2x+3}+x} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{3(x-3) \times 6}{-(x-3)(x+1)} = -4/5 = R$$

$$x \rightarrow 3^-: f(x) = \frac{-2(x-3)}{\sqrt{2x+3}-x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} -2 \frac{3(x-3)}{\sqrt{2x+3}-x} \times \frac{\sqrt{2x+3}+x}{\sqrt{2x+3}+x} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{-2(x-3) \times 6}{-(x-3)(x+1)} = 3 = L$$

در محاسبه حد دوم، چون $\lim_{x \rightarrow 1} (x+2) = 3$ و حاصل نهایی حد $+\infty$ شده است، پس مخرج کسر $2(x-1)^2$

بوده است تا مخرج کسر به 0^+ میل کند:

$$2(x-1)^2 = 2x^2 - 4x + 2 = 2x^2 + ax + b \Rightarrow \begin{cases} a = -4 \\ b = 2 \end{cases}$$

$$L - 4R - a + b = 3 - 4(-4/5) - (-4) + 2 = 27$$

«بانک سوال یاوران دانش»

۲۵- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. مخرج کسر باید به صورت $(x-2)^3$ باشد.

$$x^3 + ax^2 + bx + c = (x-2)^3 = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2-x}{(x-2)^3} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-1}{(x-2)^2} = -\infty$$

در این صورت حاصل حد به $-\infty$ میل می‌کند.

$$\frac{a+b}{c} = \frac{-6+12}{-8} = -\frac{3}{4}$$

بنابراین $a = -6$ و $b = 12$ و $c = -8$ و حاصل:



۲۶- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 \sqrt{2x+1} (3 - \sqrt{8x-1})}{ax^n - 1} \xrightarrow{\text{هم ارزی پرتوان}} \sim \frac{x^3 \sqrt{2x} (-\sqrt{8x})}{ax^n}$$

$$= \frac{-x^3 \sqrt{16x^2}}{ax^n} = \frac{-x^3 |4x|}{ax^n} = \frac{-4x^4}{ax^n}$$

$$\begin{cases} n = 4 \\ \frac{-4}{a} = 8 \Rightarrow a = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

برای آن که حاصل این حد برابر با ۸ شود، باید:

پس باید حاصل حد زیر را حساب کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow \left(-\frac{1}{2}\right)^-} \left(\left[\frac{1}{x} \right] + [-2x] \right) = \left[\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}^+ \right] + \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}^+ \right] = -2 + 1 = -1$$

۲۷- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. می دانیم $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ ، بنابراین:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{(\sin x - 1)(2\sin x + 1)}{2\cos^2 x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{(\sin x - 1)(2\sin x + 1)}{2(1 - \sin^2 x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{-\cancel{(1 - \sin x)}(2\sin x + 1)}{2\cancel{(1 - \sin x)}(1 + \sin x)} = \frac{-3}{2 \times 2} = -\frac{3}{4}$$

۲۸- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$f(2) = -3, f(-3) = 2$: با توجه به باقیمانده‌ها

$(f \circ f)(x) = (x^2 + x - 6)g(x) + \underbrace{mx + n}_{R(x)}$: مطابق الگوی تقسیم

$$x = 2 \Rightarrow f \circ f(2) = 2m + n \Rightarrow \underbrace{f(f(2))}_{-3} = 2m + n$$

$$f(-3) = 2m + n \Rightarrow 2m + n = 2$$

$$x = -3 \Rightarrow f \circ f(-3) = -3m + n \Rightarrow \underbrace{f(f(-3))}_{2} = -3m + n$$

$$f(2) = -3m + n \Rightarrow -3m + n = -3$$

$$\begin{cases} 2m + n = 2 \\ -3m + n = -3 \end{cases} \Rightarrow m = 1, n = 0 \Rightarrow R(x) = x$$



۲۹- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$f(x) = ax + b$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{g(x)}{f(x)} = +\infty \Rightarrow f(1) = 0 \Rightarrow a + b = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{2}{3} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{ax + b + \sqrt{x^2 + 2x}}{ax + b} = \frac{2}{3} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{ax - x}{ax} = \frac{a-1}{a} = \frac{2}{3}$$

پس $a = 3$ و $b = -3$ است.

۳۰- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. می‌دانیم که به ازای هر عدد حقیقی x داریم:

$$f(x-3) - f(x+3) = 0 \Rightarrow f(x-3) = f(x+3) \xrightarrow{x-3=X} f(x) = f(x+6)$$

پس تابع f متناوب با دوره تناوب ۶ است.

برای محاسبه $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(2x+3) - f(x-8)}{x^2 - 1}$ ، مخرج کسر، صفر حدی است و در صورت کسر، داریم:

$$f(2x+3) - f(x-8) \xrightarrow{x=1^+} f(5) - f(-7)$$

گفتیم که تابع f متناوب با دوره تناوب ۶ است، پس $f(x) = f(x+6)$ ، یعنی مثلاً:

$$f(-7) = f(-1) = f(5) = \dots$$

پس $f(-7) = f(5)$ و لذا $f(5) - f(-7)$ برابر صفر واقعی (مطلق) است و حاصل حد برابر صفر می‌شود.

۳۱- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. حد داخل براکت در $-\infty$ برابر $\frac{k}{2}$ است، پس باید $-\frac{3}{2} < \frac{k}{2} < -3$ باشد و برای -3 و

$$-\frac{k}{2} = -2 \text{ هم باید صعودی یا نزولی بودن را بررسی کرد.}$$

الف) اگر $-4 < k < -6$ باشد، حاصل حد می‌شود $\left[\frac{k}{2}\right] = -3$

ب) برای $k = -4$ درون براکت $\frac{-4x-2}{2x+1}$ است و براکتش هم -2 است.

پ) برای $k = -6$ تابع $\frac{-6x-2}{2x+1}$ برای $x < -\frac{1}{2}$ نزولی است.

پس نمودارش در $-\infty$ به صورت $-----3$ است و حد براکتش می‌شود -4 .

پس فقط $-4 < k < -6$ را می‌خواهیم که یک عدد صحیح -5 دارد.



۳۲- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+7)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+3)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}+7}{\sqrt{x}+3} = \frac{1+7}{1+3} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}^+} \frac{[4 \cos^2 x - 1]}{\tan x - 2 \sin x}$$

۳۳- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

در صورت کسر $4 \cos^2 x - 1$ به ازای $x = \frac{\pi}{3}$ صفر می‌شود $4\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 1 = 0$ و چون $\cos^2 x$ در اطراف $\frac{\pi}{3}$

نزولی است در $\frac{\pi}{3}^+$ مقدار آن از صفر کمتر است، پس حاصل صورت کسر $-1 = [0^-]$ خواهد بود.

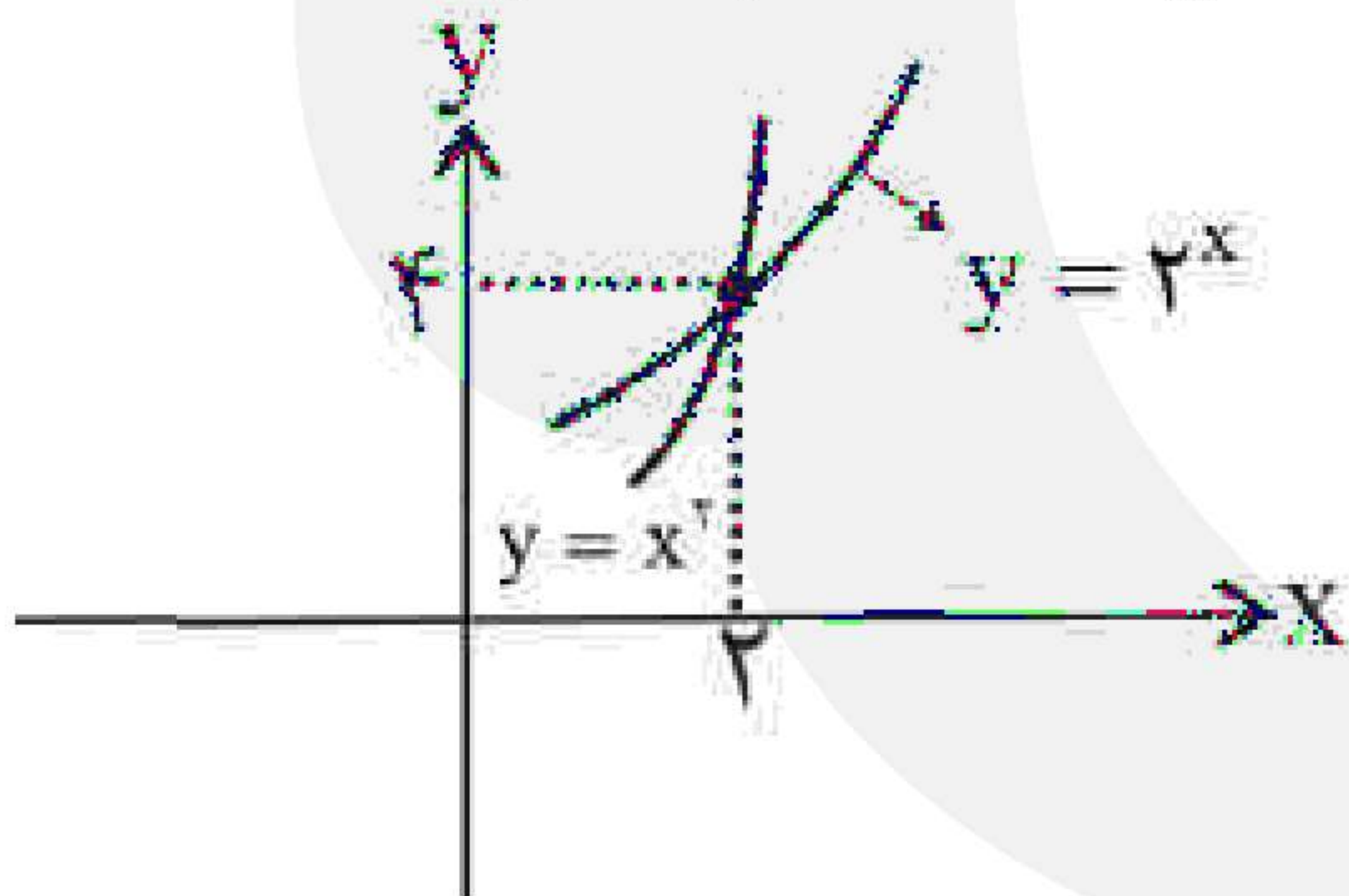
در مخرج $\tan \frac{\pi}{3} - 2 \sin \frac{\pi}{3}$ صفر است. برای بررسی 0^+ یا 0^- ، آن را کمی تغییر می‌دهیم:

$$\tan x - 2 \sin x = \frac{\sin x}{\cos x} - 2 \sin x = \frac{\sin x - 2 \sin x \cos x}{\cos x} = \frac{(1 - 2 \cos x) \sin x}{\cos x}$$

در $\frac{\pi}{3}^+$ مقدار $1 - 2 \cos x$ مثبت است (چون $\cos x < \frac{1}{2}$)، پس جواب مخرج 0^+ است و حد می‌شود $-\infty = \frac{-1}{0^+}$.

«بانک سوال یاوران دانش»

۳۴- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. نمودار دو تابع $y = 2^x$ و $y = x^2$ در همسایگی $x = 2$ به صورت زیر است:



$$x \rightarrow 2^+: 2^x < x^2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2^x - 3x}{2^x - x^2} = \frac{-4}{0^-} = +\infty$$

$$x \rightarrow 2^-: 2^x > x^2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2^x - 3x}{2^x - x^2} = \frac{-4}{0^+} = -\infty$$



۳۵- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. در ابتدا صورت و مخرج را در مزدوج عبارت صورت ضرب می‌کنیم، داریم:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^3 + 4x^2 + 2} - \sqrt{x^3 - x^2 + 3}}{\sqrt{9x + \sqrt{2x}}} & \times \frac{\sqrt{x^3 + 4x^2 + 2} + \sqrt{x^3 - x^2 + 3}}{\sqrt{x^3 + 4x^2 + 2} + \sqrt{x^3 - x^2 + 3}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x^3 + 4x^2 + 2) - (x^3 - x^2 + 3)}{\sqrt{(9x + \sqrt{2x})(x^3 + 4x^2 + 2)} + \sqrt{(9x + \sqrt{2x})(x^3 - x^2 + 3)}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^2 - 1}{\sqrt{9x^4 + 36x^3 + \dots} + \sqrt{9x^4 - 9x^3}} \xrightarrow{\text{قاعده پرتوان}} \frac{5x^2}{3x^2 + 3x^2} = \frac{5}{6} \end{aligned}$$

۳۶- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 3^-} f(x) &= \lim_{h \rightarrow 3^-} \frac{-2(x-3)}{\sqrt{2x+3}-x} \times \frac{\sqrt{2x+3}+x}{\sqrt{2x+3}+x} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{-2(x-3)(\sqrt{2x+3}+x)}{-(x-3)(x+1)} \\ &= \frac{-2(6)}{-4} = 3 = L \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{3(x-3)}{\sqrt{2x+3}-x} \times \frac{\sqrt{2x+3}+x}{\sqrt{2x+3}+x} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{3(x-3)(\sqrt{2x+3}+x)}{-(x-3)(x+1)} \\ &= \frac{3(6)}{-4} = -4/5 = R \\ L - 4R &= 3 - 4(-4/5) = 21 \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{(1 + \cos x)(1 - \cos x + \cos^2 x)}{(1 + \cos x)(1 - \cos x)} = \frac{3}{2}$$

۳۷- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x - ax^2 - ax - bx - b}{x+1} = ,$$

۳۸- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2(1-a) + x(-1-a-b) - b}{x+1} &= , \Rightarrow \begin{cases} 1-a=0 \Rightarrow a=1 \\ -1-a-b=0 \Rightarrow b=-2 \end{cases} \\ a+b &= 1-2 = -1 \end{aligned}$$



۳۹- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. چون در $X \rightarrow -3$ مقدار صورت منفی می شود، پس مخرج باید در همسایگی $X = -3$ به صورت 0^+ باشد. بنابراین کافی است که مخرج به صورت $2(X+3)^2$ باشد:

$$2(X+3)^2 = 2X^2 + 12X + 18 = 2X^2 + ax + b \xrightarrow{\text{مقایسه نظیر به نظیر}} a = 12, b = 18 \\ \Rightarrow a \times b = 216$$

۴۰- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. $x+1 = 0 \Rightarrow x = -1 \xrightarrow{\text{بخش پذیر}} f(-1) = 0$
 $(-1)^3 + a(-1) + 4 = 0 \Rightarrow a = 3$

با تقسیم صورت بر $x+1$ و ضرب مزدوج برای عبارت مخرج:

$$\lim_{x \rightarrow (-1)} \frac{f(x)}{x + \sqrt{-x}} = \lim_{x \rightarrow (-1)} \frac{x^3 + 3x + 4}{x + \sqrt{-x}} = \lim_{x \rightarrow (-1)} \frac{(x+1)(x^2 - x + 4)(x - \sqrt{-x})}{\underbrace{(x + \sqrt{-x})(x - \sqrt{-x})}_{x^2 + x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow (-1)} \frac{(x+1)(6)(-2)}{x(x+1)} = 12$$

۴۱- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. تابع خطی f را به صورت $f(x) = ax + b$ در نظر می گیریم، داریم:

$$\begin{cases} f(-3) = 0 \\ f(6) = k \end{cases} \Rightarrow f(x) = a(x+3) \Rightarrow a(6+3) = k \Rightarrow a = \frac{k}{9} \Rightarrow f(x) = \frac{k}{9}(x+3)$$

با توجه به تعریف تابع وارون، $f^{-1}(x) = \frac{9}{k}x - 3$ خواهد بود، پس برای محاسبه حد داده شده داریم:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{xf^{-1}(x)}{f^2(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x\left(\frac{9}{k}x - 3\right)}{\left(\frac{k}{9}(x+3)\right)^2} \xrightarrow{\text{قاعده پرتوان}} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{9kx^2}{\Delta 1}}{\frac{k^2}{\Delta 1}x^2} = \frac{9^3}{k^3} = 1 \Rightarrow k = 9$$

$$\Rightarrow f(x) = x + 3 \Rightarrow f(k) = f(9) = 9 + 3 = 12$$

۴۲- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ابتدا صورت را بر عامل صفرساز یعنی $(x+1)$ تقسیم کنید:

$$\lim_{x \rightarrow (-1)} \frac{3(x+1)(x^2 - 6x + 6)}{(x+1)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3(x^2 - 6x + 6)}{x-2} = -13$$

۴۳- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{(1 + \cos x)(1 - \cos x + \cos^2 x)}{(1 + \cos x)(1 - \cos x)} = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 - \cos x + \cos^2 x}{1 - \cos x} = \frac{3}{2} = 1.5$$



۴۴- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. در ابتدا دقت کنید که طبق رابطه $f \circ f^{-1}(x) = x$ ، صورت کسر به صفر میل می‌کند:
 $f \circ f^{-1}(4) - 4 = 4 - 4 = 0$

حالا چون حاصل حد برابر با عدد $\sqrt{2}$ شده، پس مخرج کسر هم باید به صفر میل کند، یعنی:

$$f^{-1}(12) - 5 = 0 \Rightarrow f^{-1}(12) = 5 \Rightarrow f(5) = 12$$

با توجه به تابع g^{-1} of داده شده، می‌دانیم:

$$(g^{-1} \circ f)(5) = 12 \Rightarrow g^{-1}(f(5)) = 12 \xrightarrow{f(5)=12} g^{-1}(12) = 13 \Rightarrow g(13) = 12$$

«بانک سوال یاوران دانش»

۴۵- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$A = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{(\sin x - \cos x)(\sin^2 x + \sin x \cdot \cos x + \cos^2 x)}{\frac{\sin x}{\cos x} - \frac{\cos x}{\sin x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{(\sin x - \cos x)(1 + \sin x \cdot \cos x)}{\frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin x \cdot \cos x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{(\cancel{\sin x} - \cancel{\cos x})(1 + \sin x \cdot \cos x)(\sin x \cdot \cos x)}{(\cancel{\sin x} - \cancel{\cos x})(\sin x + \cos x)}$$

$$= \frac{\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\frac{3}{2} \times \frac{1}{2}}{\sqrt{2}} = \frac{3}{4\sqrt{2}}$$

$$B = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3 + \sqrt[3]{x}} - 2}{x^3 - 1} \times \frac{\sqrt{3 + \sqrt[3]{x}} + 2}{\sqrt{3 + \sqrt[3]{x}} + 2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{(x^3 - 1) \times 4} \times \frac{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cancel{x} - 1}{(\cancel{x} - 1)(x^2 + x + 1) \times 4 \times 3} = \frac{1}{36}$$

$$B^{-1} \times A^{-2} = 36 \times \frac{32}{9} = 128$$



۴۶- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

چون در $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - \sqrt{x+2}}{ax+b} = \frac{1}{4}$ ، حد صورت صفر است، بنابراین حد مخرج هم باید صفر باشد:

$$\lim_{x \rightarrow 2} (ax+b) = 0 \rightarrow \boxed{2a+b=0} \quad (1)$$

$$\downarrow$$

$$b = -2a$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - \sqrt{x+2}}{ax+b} \times \frac{x + \sqrt{x+2}}{x + \sqrt{x+2}} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 2}{x(ax+b)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+1)}{xa(x+2)}$$

$$b = -2a$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+1}{4a} = \frac{3}{4a} = \frac{1}{4} \Rightarrow a=3, b=-6$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-6x+5}{3x - \sqrt{x^2+2x+3}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-6x+5}{3x - |x|} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-6x+5}{4x} = \frac{-6}{4} = -1/5$$

۴۷- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3^{10} x^{20} \times 2^{20} x^{40}}{6^{15} x^{60}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6^{10} \times 2^{10} x^{60}}{6^{15} x^{60}} = \frac{2^{10}}{6^5} = \frac{2^{10}}{2^5 \times 3^5} = \frac{2^5}{3^5} = \left(\frac{2}{3}\right)^5 = \frac{32}{243}$$

۴۸- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x - \sqrt{ax^2+bx} \times \frac{x + \sqrt{ax^2+bx}}{x + \sqrt{ax^2+bx}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - (ax^2+bx)}{x + \sqrt{a|x|}} \xrightarrow{\substack{\text{چون } x \rightarrow +\infty \\ |x|=x}} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(1-a)x^2 - bx}{(1+\sqrt{a})x} = 2 \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ \frac{-b}{2}=2 \Rightarrow b=-4 \end{cases} \Rightarrow a-b=5$$



۴۹- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$n = 3 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{40(x^3 + 1)}{3x^3 + 5x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{40x^3}{8x^3} = 5$$

$$n > 3 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{40(x^3 + 1)}{nx^n + 5x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{40x^3}{nx^n} = 0$$

$$n < 3 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{40(x^3 + 1)}{nx^n + 5x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{40x^3}{5x^3} = 8$$

$$13 = 5 + 0 + 8 = \text{حاصل جمع تمام مقادیر حد ممکن}$$

۵۰- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. باقی مانده تقسیم $f(x)$ بر $x^2 - 3x = x(x - 3)$ برابر با $3x + 1$ است. پس برای یافتن باقی مانده تقسیم $f(x)$ بر هریک از عوامل $x - 3$ و x می توان باقی مانده تقسیم $3x + 1$ بر آنها را به دست آورد:

$$\begin{cases} \text{باقی مانده تقسیم } f(x) \text{ بر } x = R(x) = 3x + 1 \Rightarrow R(0) = 1 \Rightarrow f(0) = 1 \\ \text{باقیمانده تقسیم } f(x) \text{ بر } x - 3 = R(x) = 3x + 1 \Rightarrow R(3) = 10 \Rightarrow f(3) = 10 \end{cases}$$

حال با توجه به نمودار $f(x)$ ، ضابطه آن را به صورت $f(x) = (x - \alpha)^3 + \beta$ در نظر می گیریم و داریم:

$$\begin{cases} f(0) = 1 \Rightarrow (-\alpha)^3 + \beta = 1 \\ f(3) = 10 \Rightarrow (3 - \alpha)^3 + \beta = 10 \end{cases}$$

برای حل دستگاه، طرفین معادله پایین را از طرفین معادله بالا کم می کنیم:

$$(3 - \alpha)^3 - (-\alpha)^3 = 9 \Rightarrow (27 - 27\alpha + 9\alpha^2 - \alpha^3) + \alpha^3 = 9 \Rightarrow 9\alpha^2 - 27\alpha + 18 = 0$$

$$\Rightarrow \alpha^2 - 3\alpha + 2 = 0 \Rightarrow \alpha = 1, 2$$

با جایگذاری $\alpha = 1$ در یکی از معادلات به $\beta = 2$ و با جایگذاری $\alpha = 2$ به $\beta = 9$ می رسیم و لذا:

$$\left[\frac{\alpha - \beta}{2} \right] \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = 2 \end{cases} = \left[\frac{-1}{2} \right] = -1$$

$$\left[\frac{\alpha - \beta}{2} \right] \begin{cases} \alpha = 2 \\ \beta = 9 \end{cases} = \left[\frac{-7}{2} \right] = -4$$

پس مجموع مقادیر ممکن برابر با ۵- است.