

گنجینه سوال رایگان

+ پاسخ تشریحی

یاوران دانش



راه های ارتباطی با ما:

www.Dyavari.com

۰۲۱-۷۶۷۰۳۸۵۸

۰۹۱۲-۳۴ ۹۴ ۱۳۴



	۱	۲	۳	۴
۱ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۴ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۵ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۶ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۷ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۸ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۹ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۰ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۱ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۲ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۳ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۴ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۵ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۶ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۷ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۱۸ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۹ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۰ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۱ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۲۲ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۲۳ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۴ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>





۱- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

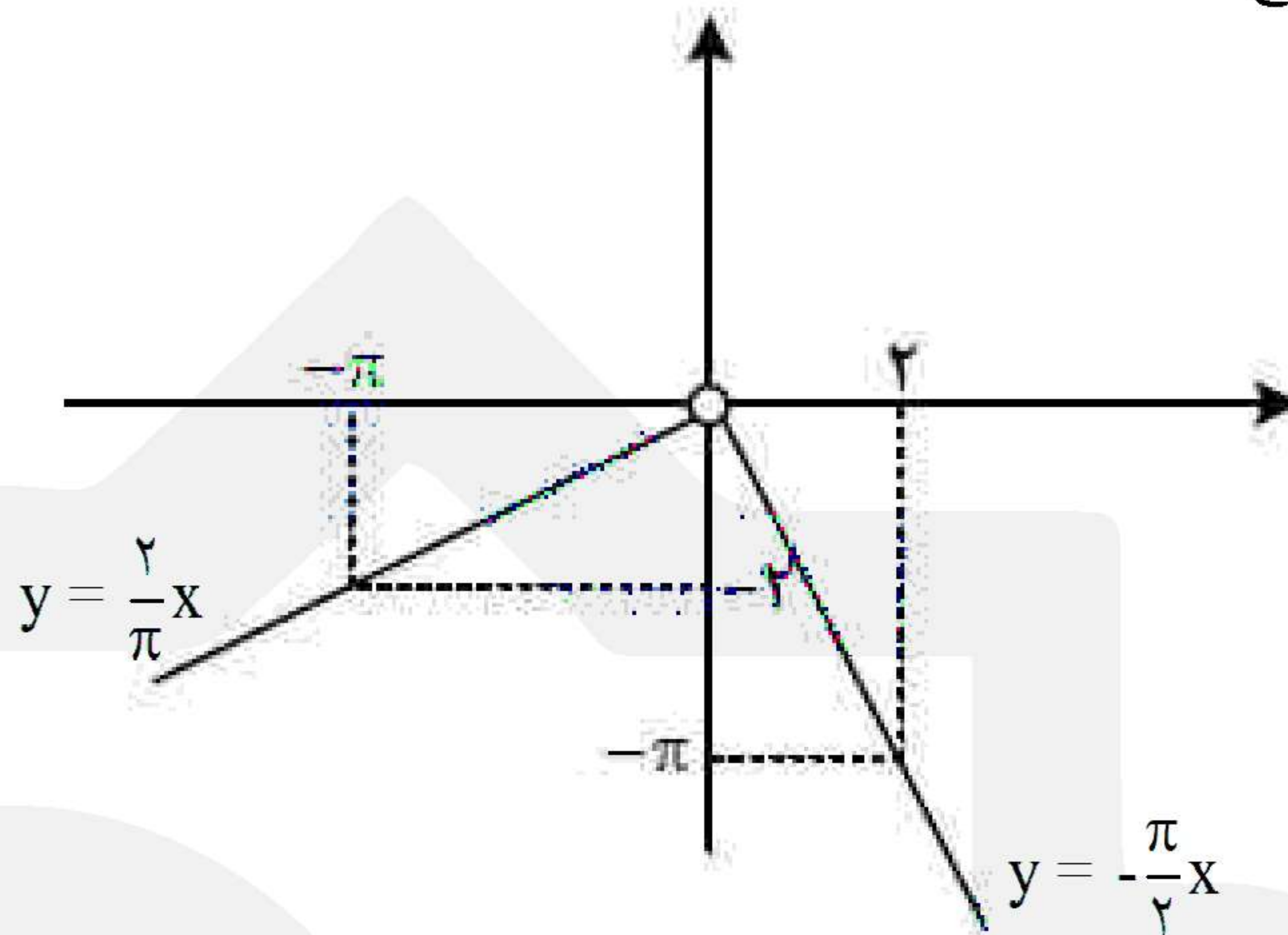
$$f(x) = a[x] + b[x] + b \Rightarrow f(x) = (a+b)[x] + b \Rightarrow a+b = 0 \Rightarrow a = -b$$

$$\Rightarrow f(x) = b \Rightarrow \frac{f(a)}{a} = \frac{b}{a} = \frac{-a}{a} = -1$$

۲- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{\sin x}{|f(x)|} = \frac{1}{-\frac{\pi}{2} \times \frac{\pi}{2}} = +\frac{2}{\pi^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}\right)^+} \frac{|f(x)|}{\sin x} = \frac{\left|\frac{2}{\pi} \times -\frac{\pi}{2}\right|}{-1} = -1$$



۳- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$f(x) = \begin{cases} |x-1| & -c \leq x \leq c \\ ax^2 + bx + 2 & x < -c, x > c \end{cases}$$

$$x = c \xrightarrow{c \in \mathbb{N}} c-1 = ac^2 + bc + 2$$

$$x = -c \xrightarrow{c \in \mathbb{N}} c+1 = ac^2 - bc + 2$$

$$\left. \begin{aligned} \Rightarrow -2bc = 2 \Rightarrow b = -\frac{1}{c} \\ \Rightarrow c-1 = ac^2 + 1 \Rightarrow a = \frac{c-2}{c^2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{2-c}{c} = \frac{2}{c} - 1$$

$$c = 1 \Rightarrow \frac{2}{c} - 1 = 1$$

$$c = 2 \Rightarrow \frac{2}{c} - 1 = 0$$

$$c > 2 \Rightarrow -1 < \frac{2}{c} - 1 < 0 \Rightarrow \left[\frac{a}{b}\right] = -1$$

۴- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$f(x) = b[x(x-a)] - 2a \xrightarrow{\text{در } R \text{ پیوسته}} b = 0 \Rightarrow \frac{a}{f(b)} = \frac{a}{f(0)} = \frac{a}{-2a} = -\frac{1}{2}$$



$$۱) \lim_{x \rightarrow 1^+} (f + g)(x) = ۰$$

$$۲) \lim_{x \rightarrow 1^-} (f + g)(x) = ۲$$

$$۳) \lim_{x \rightarrow 1^+} (f - g)(x) = ۵$$

$$۴) \lim_{x \rightarrow 1^-} (f - g)(x) = ۳$$

$$۱, ۳ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} (f + g)(x) + \lim_{x \rightarrow 1^+} (f - g)(x) = ۲ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = ۵ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = ۲/۵$$

$$۲, ۴ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} (f + g)(x) + \lim_{x \rightarrow 1^-} (f - g)(x) = ۲ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = ۵ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = ۲/۵$$

۵- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

۶- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. چون تابع روی R پیوسته است پس در $x = ۰$ نیز پیوسته است، بنابراین داریم:

$$f(۰) = b \sin\left(\frac{\pi}{a}\right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = (1 - a) \times (۰) + (3a^2 - 1)(-1) = -3a^2 + 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = (1 - a) \times (-1) + (3a^2 - 1)(۰) = a - 1$$

$$\Rightarrow 3a^2 + a - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \Rightarrow \begin{cases} f(۰) = b \sin\left(\frac{\pi}{-1}\right) = ۰ \\ \text{حد تابع} = a - 1 = -1 - 1 = -2 \end{cases} \text{ غ ق } \\ a = \frac{2}{3} \Rightarrow \begin{cases} f(۰) = b \sin\left(\frac{\pi}{\frac{2}{3}}\right) = b \sin \frac{3\pi}{2} = -b \\ \text{حد تابع} = a - 1 = \frac{2}{3} - 1 = -\frac{1}{3} \end{cases} \end{cases}$$

$$\Rightarrow -b = -\frac{1}{3} \Rightarrow b = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{3}} = 2$$



۷- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. $x = a$ باید ریشه مضاعف زیر رادیکال باشد:

$$\Delta = 0 \Rightarrow (m+3)^2 - 12m = 0 \Rightarrow m^2 - 6m + 9 = 0 \Rightarrow m = 3$$

$$a = -\frac{(m+3)}{2(6)} = -\frac{6}{2 \times 6} = -\frac{1}{2} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{6x^2 + 6x + \frac{3}{2}}}{|2x^3 + \frac{1}{4}|} & x \neq -\frac{1}{2} \\ 2\sqrt{2} \operatorname{tg} b & x = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{6} \left| x + \frac{1}{2} \right|}{2 \left| x + \frac{1}{2} \right| \left(x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} \right)} & x \neq -\frac{1}{2} \\ 2\sqrt{2} \operatorname{tg} b & x = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} f(x) = \frac{\sqrt{6}}{2 \left(\frac{3}{4} \right)} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$$

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = 2\sqrt{2} \operatorname{tg} b$$

$$\operatorname{tg} b = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow b = \frac{\pi}{6}$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{2} \operatorname{tg} b = \frac{2\sqrt{6}}{3}$$

«بانک سوال یاوران دانش»

$$f(x) = \begin{cases} |[-x] - x| & \text{فرد } [x] \\ k - x + [x] & \text{زوج } [x] \end{cases}$$

۸- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\xrightarrow[n=2]{(1)} \begin{cases} 2^+ \rightarrow k - 2 + 2 = k \\ 2^- \rightarrow |-2 - 2| = 4 \\ 2 \rightarrow k \end{cases}$$

$$\xrightarrow[n=-2]{(2)} \begin{cases} -2^+ \rightarrow k + 2 - 2 = k \\ -2^- \rightarrow |2 + 2| = 4 \\ -2 \rightarrow k \end{cases}$$

$$\xrightarrow{1, 2} k = 4$$

$$n = 1 \Rightarrow \begin{cases} 1^+ \rightarrow |-2 - 1| = +3 \\ 1^- \rightarrow k - 1 \\ 1 \rightarrow -2 \end{cases}$$

برای زوج فقط برقرار است



۹- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. $x = a$ باید ریشه مضاعف زیر رادیکال باشد:

$$\Delta = 0 \Rightarrow (m - 1)^2 - 12(m - 4) = 0 \Rightarrow (m - 7)^2 = 0 \Rightarrow m = 7$$

ریشه صورت و مخرج $x = a \Rightarrow a = -1$

$$\text{صورت: } \frac{\sqrt{3(x+1)^2}}{|x^3+1|} = \frac{\sqrt{3}|x+1|}{|x+1|(x^2-x+1)} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \text{صورت} = \lim_{x \rightarrow (-1)} \text{صورت} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{مخرج: } x = a = -1 : \frac{2 \sin b}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \sin b = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

۱۰- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. می‌توانیم برای $n = 1$ و $n = 2$ مسئله را بررسی کنیم، پس پیوستگی را در $x = \pm 1$ و $x = \pm 2$ بررسی می‌کنیم:

$$x = 1 : \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) = 1 - 1 + k = k$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} |x - [-x]| = 2$$

$$x = -1 : \lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = f(-1) = k$$

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} |x - [-x]| = 2$$

پس اگر $k = 2$ باشد به ازای $x = \pm 1$ پیوستگی داریم، این یعنی مقادیر فرد n قابل قبول‌اند.

$$x = 2 : \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} |x - [-x]| = 5$$

$$f(2) = 2 - (-2) = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (x - [x] + k) = 1 + k$$

پس به ازای هیچ مقدار زوج n پیوستگی نداریم.

۱۱- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. حد چپ و راست در ۲ برابر نیستند، پس در ۲ پیوسته نیست و در نتیجه در \mathbb{R} پیوسته نیست.

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{|(x+1)(x-2)|}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-(x+1)(x-2)}{x-2} = -3$$

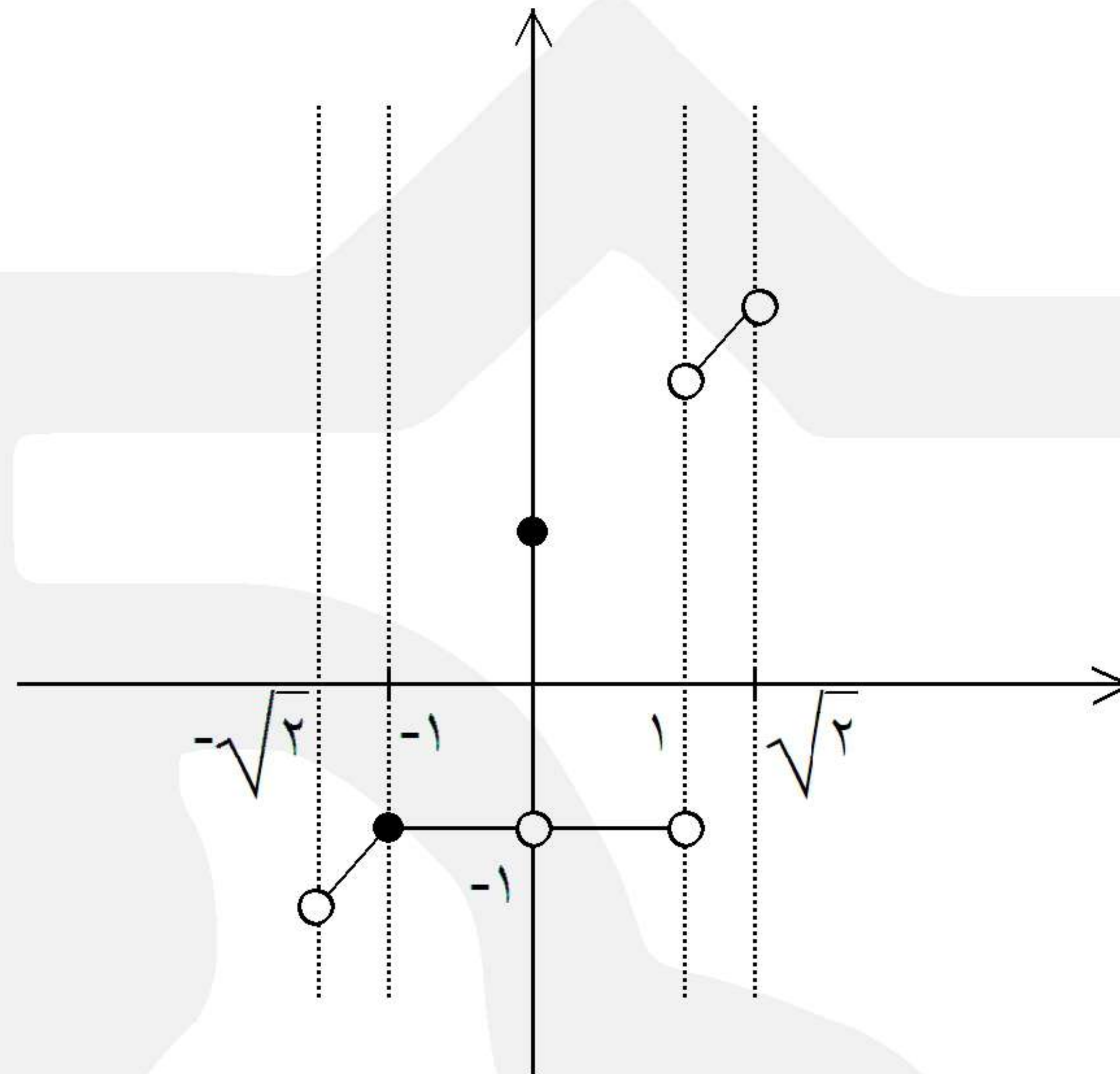
$$\left. \begin{array}{l} \\ \\ f(2) = -2a + 3 + 3a = a + 3 \end{array} \right\} a + 3 = -3 \Rightarrow a = -6$$



۱۲- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$f(x) = \begin{cases} -1 & -1 < x < 1 - \{0\} \\ \cos(\pi x) & x = 0, 1, -1 \\ |x|([x] + 1) & 1 < x < \sqrt{2} \text{ یا } -\sqrt{2} < x < -1 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} -1 & -1 < x < 1 - \{0\} \\ -1 & x = \pm 1 \\ 1 & x = 0 \\ 2x & 1 < x < \sqrt{2} \\ x & -\sqrt{2} < x < -1 \end{cases}$$

پس این تابع در $x = 0$ و $x = 1$ ناپیوسته است.



۱۳- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$x = 1 \text{ در پیوستگی راست: } \begin{cases} f(1) = \tan\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)(x+2)}{-a(x-1)} = \frac{3}{-a} \end{cases} \left\{ \frac{3}{-a} = -1 \Rightarrow a = 3 \right.$$

$$x = 5 \text{ در پیوستگی چپ: } \begin{cases} f(5) = b(5 - [-5]) = 10b \\ \lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) = \frac{|25 + 5 - 2|}{3(1 - 5)} = \frac{28}{3 \times -4} = \frac{-7}{3} \end{cases} \left\{ 10b = \frac{-7}{3} \Rightarrow b = \frac{-7}{30} \right.$$

$$\Rightarrow ab = -0.7$$

۱۴- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\begin{aligned} \text{ریشه} = 1 &\Rightarrow 5 - a + b = 0 \Rightarrow a - b = 5 \\ f \text{ ریشه صورت} = 1 &\Rightarrow 1 + a + b = 0 \Rightarrow a + b = -1 \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -3 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\left[\frac{b - 2a}{3} \right] = \left[\frac{-3 - 4}{3} \right] = -3$$

تذکر: تنها نقطه‌ای که تابع f در آن ناپیوسته است، $x = 1$ است و چون f در آن حد دارد، پس صورت کسر باید به ازای $x = 1$ صفر شود، در غیر این صورت حد، بی‌نهایت می‌شود.



«بانک سوال یاوران دانش»

۱۵- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. چون تابع در R پیوسته است پس در $x=0$ هم پیوسته است. حال برای دو حالت $a \in Z$ و $a \notin Z$ داریم:

$$a \notin Z \left\{ \begin{array}{l} f(0) = 0 \\ f(0^+) = 0 \\ f(0^-) = |0 - [-a]| = [-a] \end{array} \right\} \quad \text{غ ق ق} \quad [-a] = 0 \Rightarrow 0 \leq -a < 1 \Rightarrow -1 < a \leq 0$$

با شرط $a < -1$ اشتراک ندارد.

$$a \in Z \left\{ \begin{array}{l} f(0) = 0 \\ f(0^+) = 0 \\ f(0^-) = |0 + a - [-1]| = |a + 1| \end{array} \right.$$

$$|a + 1| = 0 \Rightarrow a = -1$$

با شرط $a < -1$ اشتراک ندارد.

پس به ازای هیچ مقدار $a < -1$ پیوسته نمی شود.
تذکر: تابع فقط به ازای $a = -1$ روی R پیوسته می شود.

۱۶- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.
راه اول:

$$g(x) = \frac{2f(x) - 1}{2(x-1)} = \frac{\frac{2x\sqrt{x}}{2x^2 + x - 1} - 1}{2(x-1)} = \frac{2x\sqrt{x} - 2x^2 - (x-1)}{2(x-1)(2x^2 + x - 1)} = \frac{-2x\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1) - (x-1)}{2(x-1)(2x^2 + x - 1)}$$

$$= \frac{-2x\sqrt{x} \frac{x-1}{\sqrt{x}+1} - (x-1)}{2(x-1)(2x^2 + x - 1)}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} g(x) = \frac{\frac{-2}{1+1} - 1}{2(2+1-1)} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$$

راه دوم:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2f(x) - 1}{2(x-1)} \xrightarrow{\frac{0}{0}, \text{HOP}} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2f'(x)}{2} = f'(1) \Rightarrow \frac{1/5(2) - 5(1)}{(2)^2} = \frac{3-5}{4} = -\frac{1}{2}$$



۱۷- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$x \rightarrow -1^+ \Rightarrow x+1 > 0 \Rightarrow |x+1| = x+1 \Rightarrow [x] = -1 \Rightarrow -x \rightarrow 1^- \Rightarrow [-x] = 0$$

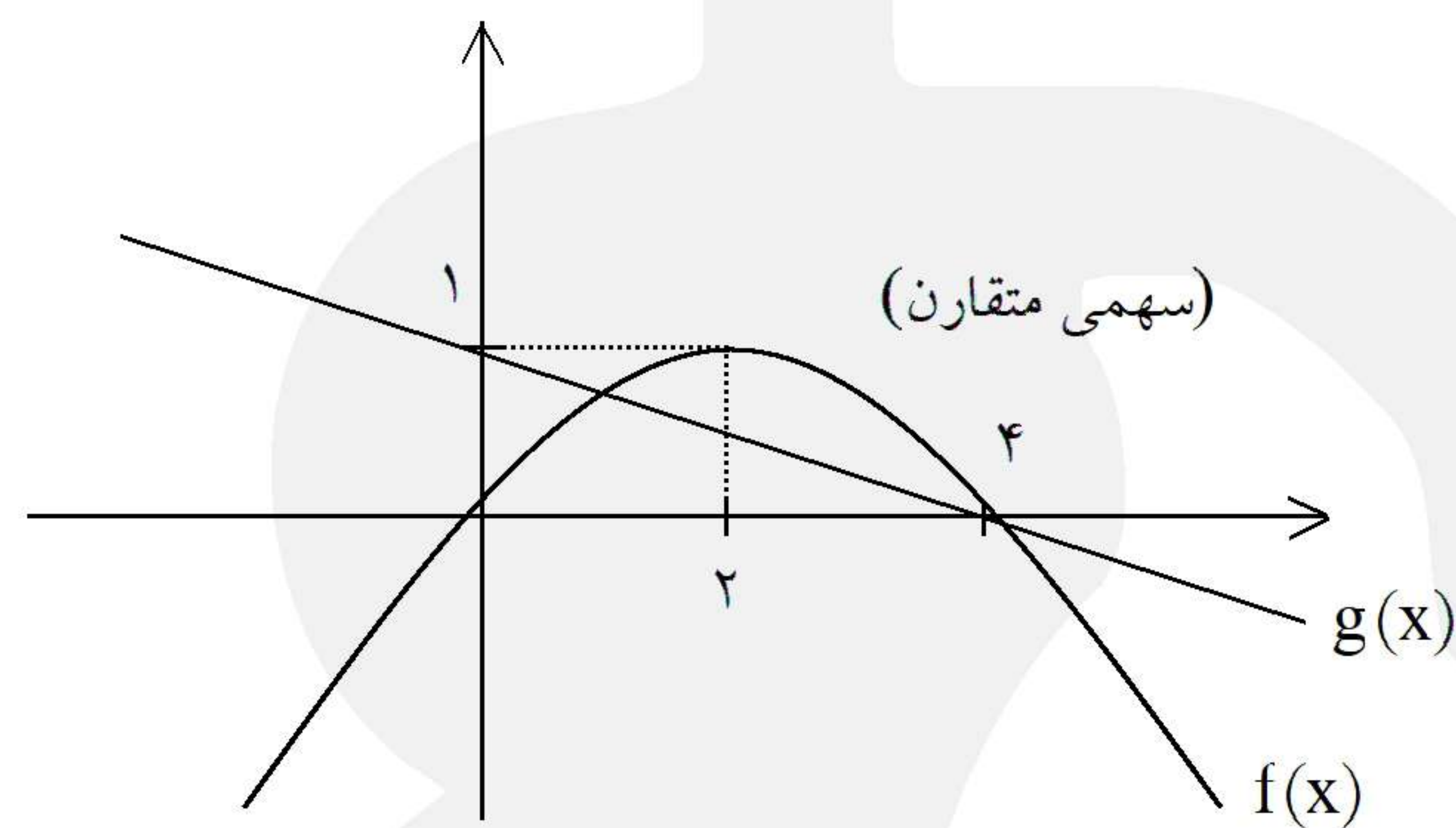
$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{|x+1| + [x]}{x - [-x]} = \frac{x+1-1}{x} = \frac{x}{x} = 1$$

$$x \rightarrow -1^+$$

۱۸- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ضابطه سوم در بیشمار نقطه ناپیوسته است پس نیازی به بررسی بقیه ضابطه‌ها و نقاط مرزی نیست.

$$f(x) = \begin{cases} |x| + [-x] & -1 < x < 1, x \neq 0 \\ 1 + \cos \pi x & x = 0, 1, -1 \\ [x^2] - [x] & x > 1 \text{ یا } x < -1 \end{cases}$$

۱۹- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.



$$= \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{f(x)}{4-x} + \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{g(x)}{4-x}$$

$$\xrightarrow{\text{HOP}} -f'(4) - g'(4)$$

$$(0, 1), (4, 0) \Rightarrow g(x) : y - 0 = \frac{0-1}{4-0}(x-4) \Rightarrow y = \frac{-1}{4}(x-4) \Rightarrow g(x) = \frac{-1}{4}x + 1$$

$$x_1 = 0, x_2 = 4 \Rightarrow f(x) = ax(x-4) \xrightarrow{(2,1)} f(x) = \frac{-1}{4}x(x-4) \Rightarrow f(x) = \frac{-1}{4}x^2 + x$$

$$g'(x) = \frac{-1}{4}, f'(x) = \frac{-1}{2}x + 1$$

$$-f'(4) - g'(4) = -(-1) - \left(\frac{-1}{4}\right) = \frac{5}{4}$$

۲۰- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. در $\sin x$ اگر x در همسایگی چپ $\frac{\pi}{6}$ باشد، حاصل از $\frac{1}{6}$ کمتر است.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}^-} [2 \sin x] - 1 = [1^-] - 1 = -1$$

$$x \rightarrow \frac{\pi}{6}^-$$

۲۱- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

از آنجا که $\sin(\pi x)$ در همه اعداد صحیح به عنوان عامل صفر عمل می‌کند، بنابراین در همه اعداد پیوسته است.



۲۲- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} f(x) = f\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

روش اول: برای آن که تابع در $x = \frac{\pi}{2}$ پیوسته باشد، باید:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{2 \sin^2 x - \sin x - 1}{\cos^2 x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{(\sin x - 1)(2 \sin x + 1)}{(1 - \sin x)(1 + \sin x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{(\cancel{\sin x - 1})(2 \sin x + 1)}{-(\cancel{\sin x - 1})(1 + \sin x)} = \frac{3}{-2}$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = a$$

$$\Rightarrow a = -\frac{3}{2}$$

$$a = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{2 \sin^2 x - \cos x}{-\sin^2 x} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{Hop}} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{4 \cos^2 x + \sin x}{-2 \cos^2 x} = \frac{-4 + 1}{2} = -\frac{3}{2}$$

روش دوم:

۲۳- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$|x - 1| = 1 \Rightarrow x - 1 = \pm 1 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 0 \end{cases}$$

با توجه به شروط داده شده باید در نقاط $x = 2$, $x = 0$ پیوستگی‌ها بررسی شوند.

$$f(x) = \begin{cases} (x - 1)[x] & ; 0 < x < 2 \\ x^2 + ax + b & ; x \leq 0 \text{ یا } x \geq 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(2) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 2 + 2a + b \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = (2 - 1)[2^-] = 1 \end{cases} \Rightarrow 2 + 2a + b = 1 \Rightarrow 2a + b = -3$$

$$\begin{cases} f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0 + 0 + b = b \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = (0 - 1)[0^+] = 0 \end{cases} \Rightarrow b = 0$$

$$b = 0 \xrightarrow{\text{بگذاریم}} 2a + 0 = -3 \Rightarrow a = -\frac{3}{2}$$



۲۴- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x - \sqrt{x} + 5}{2x - \sqrt{3x+1}} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{HOP}} = \frac{2 - \frac{1}{2}}{2 - \frac{3}{2}} = \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = -1/2$$

