

گنجینه سوال رایگان
+ پاسخ تشریحی

یاوران دانش



راه های ارتباطی با ما:

www.Dyavari.com

۰۲۱-۷۶۷۰۳۸۵۸

۰۹۱۲-۳۴ ۹۴ ۱۳۴



	۱	۲	۳	۴
۱ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۳ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۴ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۵ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۶ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۷ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۸ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۹ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۰ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۱۱ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۲ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۳ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۱۴ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۵ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۶ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۱۷ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۸ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۹ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۰ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۱ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۲ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۳ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۴ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۲۵ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۲۶ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۷ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۲۸ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۹ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۰ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۱ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۲ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۳ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۴ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

	۱	۲	۳	۴
۳۵ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۶ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۷ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۸ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۳۹ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۴۰ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۴۱ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۴۲ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۴۳ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۴۴ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۴۵ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۴۶ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۴۷ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۴۸ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۴۹ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۵۰ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



۱- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. زمانی حاصل حد وجود دارد که صورت کسر در $x = 2$ برابر صفر باشد.

$$x^3 + 2x + a \Big|_{x=2} = 0 \Rightarrow a = -12$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 + 2x - 12}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x^2 + 2x + 6)}{(x-2)(x+2)} = \frac{7}{2}$$

$$f(b) = \frac{7}{2} \Rightarrow \frac{7}{2} = \frac{b^3 + 2b - 12}{b^2 - 4} = \frac{(b-2)(b^2 + 2b + 6)}{(b-2)(b+2)} \Rightarrow 2b^2 + 4b + 12 = 7b + 14$$

$$\Rightarrow 2b^2 - 3b - 2 = 0 \xrightarrow{b \neq 2} b = -\frac{1}{2} \Rightarrow a + b = -12/5$$

۲- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. صورت و مخرج کسر را در مزدوج صورت ضرب می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 - \sqrt[3]{x} - 1}{(x-1)(\sqrt{2} - \sqrt[3]{x} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt[3]{x}}{2(x-1)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt[3]{x}}{2(\sqrt[3]{x} - 1)(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1)} = -\frac{1}{6}$$

۳- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \frac{|2+a|+4}{2+3} = \frac{|a+2|+4}{5}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \frac{|a+2|+8}{2+6} = \frac{|a+2|+8}{8}$$

باید حد چپ و راست در $x = 2$ برابر باشند. فرض می‌کنیم $|a+2| = u$ ، پس:

$$\frac{u+4}{5} = \frac{u+8}{8} \Rightarrow 8u + 32 = 5u + 40$$

$$\Rightarrow 3u = 8 \Rightarrow u = \frac{8}{3} \Rightarrow \begin{cases} a_1 + 2 = \frac{8}{3} \\ a_2 + 2 = -\frac{8}{3} \end{cases} \Rightarrow a_1 + a_2 + 4 = 0$$

$$\Rightarrow a_1 + a_2 = -4$$



۴- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. شرط پیوستگی تابع را می‌نویسیم:

$$f(6) = \lim_{x \rightarrow 6^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 6^-} f(x) \Rightarrow \frac{k+4}{4-6} = \frac{0/5}{k+6} \Rightarrow (k+4)(k+6) = 0/5(-2)$$

$$\Rightarrow k^2 + 10k + 24 = -1 \Rightarrow k^2 + 10k + 25 = 0 \Rightarrow (k+5)^2 = 0 \Rightarrow k = -5$$

بنابراین ضابطه‌ی دوم به صورت $x \leq 6$ ؛ $\frac{0/5}{-5+x}$ است. $x=5$ مخرج را صفر می‌کند و در دامنه‌ی $x \leq 6$ قرار

دارد. پس به‌ازای $k = -5$ تابع در $x=5$ پیوسته نیست. بنابراین هیچ مقداری از k وجود ندارد که تابع در R پیوسته باشد.

۵- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ابتدا $f(x)$ را به این صورت می‌نویسیم:

$$f(x) = x(x-2)(2x+1) + k$$

از طرفی چون ۲۴ و حاصل $[]$ اعدادی صحیح هستند، پس $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ عددی صحیح است. بنابراین:

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 16 - 12 - 4 + k = k \Rightarrow k \in \mathbb{Z}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} [\Delta f(x) + 1] = \lim_{x \rightarrow 2^-} [\Delta f(x)] + 1 = [\Delta(0^- + k)] + 1 = [\Delta \times 0^- + \Delta k] + 1$$

$$[\Delta \times 0^-] + \Delta k + 1 = [0^-] + \Delta k + 1 = -1 + \Delta k + 1 = \Delta k$$

$$\Rightarrow k + \Delta k = 24 \Rightarrow 6k = 24 \Rightarrow k = 4 \Rightarrow k^2 + k = 16 + 4 = 20$$

۶- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. تابع f در نقاط مرزی $x=0$ و $x=2$ پیوسته است، زیرا:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x^2 + x) = 4 + 2 = 6$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} 3x = 6, f(2) = 3 \times 2 = 6$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2) = 6$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 3x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (2[x] + 2) = 2(-1) + 2 = 0, f(0) = 3 \times 0 = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 0$$

و چون توابع با ضابطه‌های $x^2 + x$ و $3x$ همواره پیوسته‌اند، پس تابع f در بازه‌ی $[0, +\infty)$ پیوسته است. اما می‌دانیم $[x]$ در نقاط به طول عدد صحیح ناپیوسته است، پس f در اعداد صحیح منفی ناپیوسته است. بنابراین تابع f در

بازه‌های $[1, 3]$ ، $[-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$ و $[0, 3]$ پیوسته است و فقط در بازه‌ی $[-\frac{3}{2}, 1]$ پیوسته نیست (در $x = -1$ که در

بازه قرار دارد) ناپیوسته است.



۷- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (2x^2 + \cos \frac{\pi x}{3}) = 2 + \cos \frac{\pi}{3} = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} ([3x] - \frac{1}{2}[-x]) = 2 - \frac{1}{2}(-1) = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

$$f(1) = 2 \sin \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$$

پس f در $x=1$ پیوسته است.

۸- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} [x] = [1^+] = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} [x] = [1^-] = 0$$

$$f(1) = [1] = 1$$

از آنجایی که مقدار تابع با حد راست تابع برابر است، تابع فقط از راست پیوسته است.

۹- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. صورت و مخرج کسر به ازای $x = -2$ مساوی صفر می شود، بنابراین با تجزیه عبارتهای صورت و مخرج خواهیم داشت:

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^4 + 8x}{x^4 - 4x^2} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x(x^3 + 8)}{x^2(x^2 - 4)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+2)(x^2 - 2x + 4)}{x(x+2)(x-2)}$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 2x + 4}{x(x-2)} = \frac{4 + 4 + 4}{-2(-4)} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$$

۱۰- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ابتدا دامنه f را به دست می آوریم (ریشه های مخرج کسر را از R کم می کنیم).

$$[x] - 1 = 0 \Rightarrow [x] = 1 \Rightarrow 1 \leq x < 2 \Rightarrow D_f = R - [1, 2)$$

بنابراین همسایگی راست $x=1$ جزء دامنه f نیست و لذا حد راست در $x=1$ وجود ندارد. حد چپ را به دست می آوریم:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x-1}{[x]-1} = \frac{1-1}{0-1} = \frac{0}{-1} = 0$$



۱۱- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{[x]}{[-x]} = \frac{2}{-3} = -\frac{2}{3} = L$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{[x]}{[-x]} = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2} = L'$$

$$\Rightarrow \left| \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) - \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) \right| = \left| -\frac{1}{2} - \left(-\frac{2}{3}\right) \right| = \left| \frac{2}{3} - \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{6}$$

«بانک سوال یاوران دانش»

۱۲- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^+} (mx^2 - \sqrt{x}) = 16m - 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^-} (mx + \sqrt{x}) = 4m + 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) \Rightarrow 16m - 2 = 4m + 2 \Rightarrow 12m = 4 \Rightarrow m = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

۱۳- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(2 \sin \frac{\pi x}{2} + \pi \sin \pi x \right) = 2 \sin \frac{\pi}{2} + \pi \sin \pi = 2 \times 1 + \pi \times 0 = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(2 \cos \frac{\pi x}{2} + \sqrt{|x - 1|} \right) = 2 \cos \frac{\pi}{2} + \sqrt{|1 - 1|} = 2 \times 0 + 0 = 0$$

بنابراین حد راست و چپ تابع در این نقطه وجود دارند ولی با هم برابر نیستند، پس f در $x_0 = 1$ دارای حد نمی‌باشد.

تذکر: چون به ازای هر مقدار حقیقی x ، $|x - 1| > 0$ ، پس $\sqrt{|x - 1|}$ در \mathbb{R} تعریف شده است و همسایگی چپ نقطه‌ی $x_0 = 1$ جزء دامنه‌ی تعریف f هست و حد چپ موجود است. اما اگر به جای $|x - 1|$ ، $(x - 1)$ زیر رادیکال بود، باید $0 \leq x - 1$ و در نتیجه $x \geq 1$ می‌بود و لذا در آن صورت حد چپ وجود نداشت.



۱۴- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

عبارت $2x$ تأثیری بر ناپیوستگی ندارد. تابع در نقاطی که مقدار $3x - 1$ عددی صحیح شود، ناپیوسته است.

ناپیوسته است $3x - 1 \in \mathbb{Z} \Rightarrow 3x = k \Rightarrow x = \frac{k}{3}, k \in \mathbb{Z}$ نقاط ناپیوستگی

نقاط ناپیوستگی: $x = 1.3, \frac{2}{3}, 1, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}$

۱۵- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{b}{x} = b \text{ حد راست}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} -a[-x] - 1 = a - 1 \text{ حد چپ}$$

$$f(1) = 2b - 1 \text{ مقدار تابع}$$

$$\Rightarrow a + b = 3$$

$$\Rightarrow b = 2b - 1 = a - 1 \Rightarrow b = 1, a = 2$$

۱۶- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x) + \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = -1 + 2 = 1$$

۱۷- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

وقتی $x \rightarrow -1$ ، مخرج به صفر میل می کند و حاصل حد موجود است. بنابراین صورت نیز به صفر میل می کند، یعنی $x = -1$ ریشه‌ی صورت است.

$$2(-1)^2 + a(-1) + b = 0 \Rightarrow b = a - 2 *$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 + ax + a - 2}{2x + 2} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(2x+a-2)}{2(x+1)} = \frac{-2+a-2}{2}$$

$$= \frac{a-4}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow a = 5 \xrightarrow{*} b = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} ([ax] - [bx]) = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} ([5x] - [3x]) = 2 - 1 = 1$$

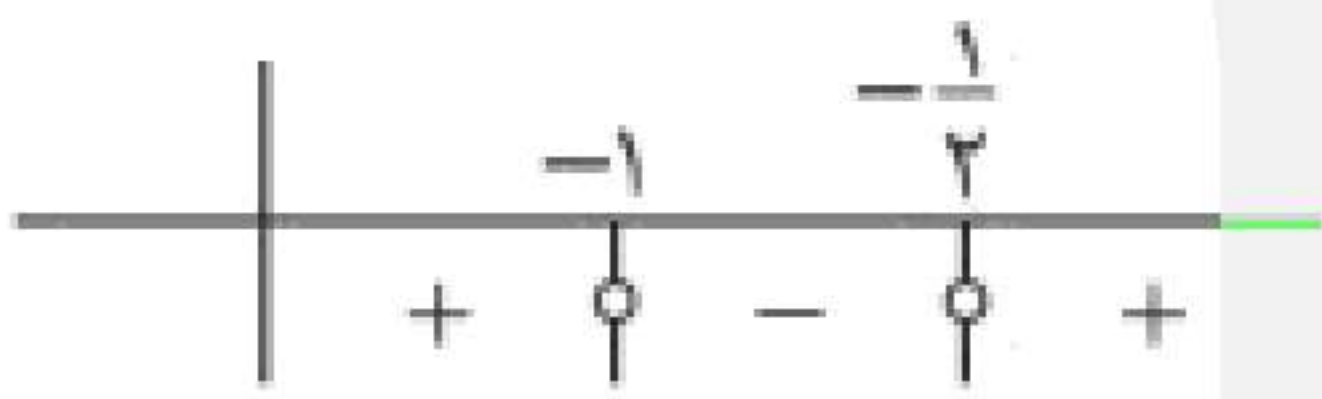


۱۸- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x \rightarrow \left(-\frac{1}{2}\right)^+} \frac{2x^2 + 9x + 4}{|2x^2 + 3x + 1|} = \lim_{x \rightarrow \left(-\frac{1}{2}\right)^+} \frac{(2x+1)(x+4)}{|(2x+1)(x+1)|}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \left(-\frac{1}{2}\right)^+} \frac{(x+4)(2x+1)}{(2x+1)(x+1)} = \frac{\frac{7}{2}}{\frac{1}{2}} = 7$$

با توجه به تعیین علامت $2x^2 + 3x + 1$ علامت آن مثبت است.



۱۹- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - x}{1 - x^3} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}(1 - \sqrt{x})}{(1-x)(1+x+x^2)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}(1 - \sqrt{x})}{(1 - \sqrt{x})(1 + \sqrt{x})(1 + x + x^2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}}{(1 + \sqrt{x})(1 + x + x^2)}$$

$$= \frac{1}{(2)(3)} = \frac{1}{6}$$

«بانک سوال یاوران دانش»

۲۰- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = a[(-1)^+] - 2(-1) = -a + 2$$

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = 2[(-1)^-] + 2a = 2 + 2a$$

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) + 2 \lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = -a + 2 + 2(2 + 2a) = 2a$$

$$\Rightarrow -a + 2 + 4 + 4a = 2a$$

$$\Rightarrow a = -6$$



۲۱- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\left. \begin{aligned} f(2) &= 2^3 - 2 = 8 - 2 = 6 \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} (x^3 - 8) = 8 - 2 = 6 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) &= 2 \times (-3) + a = -6 + a \\ \Rightarrow a &= 12 \end{aligned} \right\} \xrightarrow{\text{شرط پیوستگی}} -6 + a = 6$$

۲۲- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{ax^2 - 3ax}{\sqrt{x^2 - 6x + 9}} &= \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{ax(x-3)}{\sqrt{(x-3)^2}} \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{ax(x-3)}{\underbrace{|x-3|}_{\text{مثبت}}} &= \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{ax(x-3)}{x-3} \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} ax &= 3a = -12 \Rightarrow a = -4 \end{aligned}$$

۲۳- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{x+6}-2}{x^2+3x+2} \times \frac{\sqrt{x+6}+2}{\sqrt{x+6}+2} &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x+6-4}{(x^2+3x+2)(\sqrt{x+6}+2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x+2}{(x+2)(x+1)(\sqrt{x+6}+2)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{1}{(x+1)(\sqrt{x+6}+2)} \\ &= \frac{1}{-1 \times 4} = -\frac{1}{4} = -0.25 \end{aligned}$$



۲۴- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{2x+3} - |x|}{1 + \sqrt[3]{x}} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{2x+3} + x}{1 + \sqrt[3]{x}} \xrightarrow{\text{HOP}} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\frac{2}{\sqrt{2x+3}} + 1}{\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}}$$

$$\frac{\frac{2}{2 \times 1} + 1}{\frac{1}{3}} = 2 \times 3 = 6$$

۲۵- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{|3x-5|}{(3x-5)(3x+5)} & x < \frac{5}{3} \\ ax & x \geq \frac{5}{3} \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{5}{3}^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{5}{3}^-} \frac{-(3x-5)}{(3x-5)(3x+5)} = \lim_{x \rightarrow \frac{5}{3}^-} \frac{-1}{3x+5} = \frac{-1}{10}$$

$$f\left(\frac{5}{3}\right) = \lim_{x \rightarrow \frac{5}{3}^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{5}{3}^+} ax = \frac{5}{3}a$$

$$\xrightarrow{\text{شرط پیوستگی}} \frac{5}{3}a = -\frac{1}{10} \Rightarrow a = -\frac{3}{50} = -0.06$$



۲۶- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

چون در مخرج در $x = -2$ برابر صفر بوده و حاصل حد عددی مشخص است پس حد صورت کسر نیز باید برابر صفر باشد، یعنی داریم:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -2} (2x^2 + f(x)) = 0 &\Rightarrow \lim_{x \rightarrow -2} (2x^2 + ax + b) = 0 \\ \Rightarrow b = 2a - 8 \quad (1) \\ \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x^2 + f(x)}{4x^2 + 8x} &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x^2 + ax + 2a - 8}{4x(x + 2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2(x^2 - 4) + a(x + 2)}{4x(x + 2)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x + 2)(2(x - 2) + a)}{4x(x + 2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -2} 2x - 4 + \frac{a}{4x} = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{-8 + a}{-8} = \frac{3}{2} \Rightarrow -16 + 2a = -24 \\ &\Rightarrow 2a = -8 \Rightarrow a = -4 \Rightarrow b = -16 \Rightarrow f(x) = -4x - 16 \\ &\Rightarrow f(-5) = 20 - 16 = 4 \end{aligned}$$

۲۷- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\begin{aligned} x \rightarrow 1^- &\Rightarrow x < 1 \Rightarrow \frac{1}{x} > 1 \Rightarrow -\frac{1}{x} < -1 \Rightarrow \left(-\frac{1}{x}\right) \rightarrow (-1)^- \\ \xrightarrow{\text{طبق شکل}} &f\left(-\frac{1}{x}\right) \rightarrow (-1)^+ \Rightarrow 1 + f\left(-\frac{1}{x}\right) \rightarrow 0^+ \\ \Rightarrow \left[1 + f\left(-\frac{1}{x}\right)\right] &= [0^+] \Rightarrow f\left([1 + f\left(-\frac{1}{x}\right)]\right) = f(0) = 3 \end{aligned}$$

پس مقدار حد تابع برابر ۳ است.

۲۸- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

ضابطه‌ی اول در نقاط $\frac{1}{p}$ و $-\frac{1}{p}$ ناپیوسته است. پیوستگی تابع را در نقاط ۱ و -۱ بررسی می‌کنیم.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= 2 \neq f(1) \text{ ناپیوسته} \\ \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} (x[2x] + 1) = 3 \\ \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = f(-1) = 3 \end{cases} \end{aligned}$$

پس فقط در سه نقطه $\frac{1}{p}$ و $-\frac{1}{p}$ و ۱ ناپیوسته است.



۲۹- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.
در نقطه‌ی $x=1$ مخرج باید صفر باشد.

$$x^2 - mx + 4 = 0 \Rightarrow 1 - m + 4 = 0 \Rightarrow m = 5$$

حال از هوپیتال استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 - \frac{1}{2\sqrt{x+3}}}{2x-5} = \frac{2 - \frac{1}{4}}{-3} = \frac{-7}{12} = -\frac{7}{12} = -\frac{7}{a} \Rightarrow a = -12 \Rightarrow a + m = -7$$

۳۰- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

تابع f در ریشه‌های مخرج حد ندارد، پس ریشه‌های مخرج f با ریشه‌های معادله‌ی درجه دوم داده شده یکسان است.

$$2x^2 + mx - 3 = 2(x^2 + ax - a - 1) \Rightarrow \begin{cases} m = 2a \\ -3 = -2a - 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ m = 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2mx}{2x+a} = \frac{2m}{2+a} = \frac{2}{2+\frac{1}{2}} = \frac{4}{5}$$

۳۱- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

چون حد مخرج در $X = -1$ برابر صفر است و حاصل حد برابر عدد مشخص L شده است پس باید حد صورت نیز برابر صفر باشد تا به حالت مبهم $\frac{0}{0}$ تبدیل شود و پس از رفع ابهام حاصل حد بتواند عددی مشخص مانند L شود.

پس داریم:

$$x = -1 \xrightarrow{\text{جایگذاری در صورت}} \sqrt{2-1} + K = 0 \Rightarrow K = -1$$

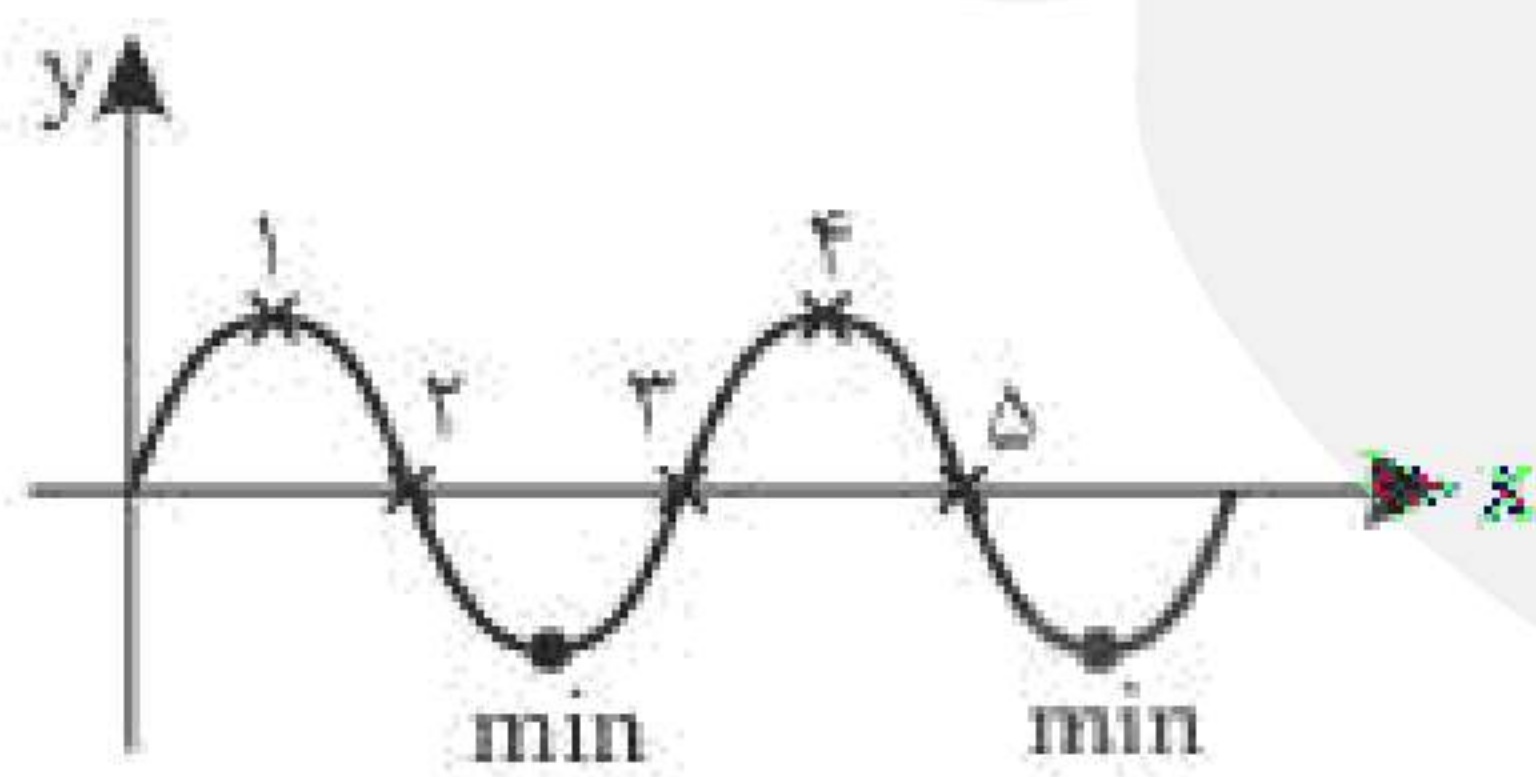
از طرفی داریم:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{2x^2 + x + K}}{x^2 + 3x + 2} &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{2x^2 + x - 1}}{x^2 + 3x + 2} \times \frac{\sqrt{2x^2 + x + 1}}{\sqrt{2x^2 + x + 1}} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(2x-1)}{(x+1)(x+2)\left(\sqrt{2x^2 + x + 1}\right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(2x-1)}{(x+2)\left(\sqrt{2x^2 + x + 1}\right)} = \frac{-3}{2} \\ \Rightarrow \frac{K}{L} &= \frac{-1}{-\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

۳۲- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

تابع $y = [f(x)]$ در نقاطی که $f(x) \in \mathbb{Z}$ باشد، ناپیوسته است مگر آن که $f(x)$ در آن نقطه دارای \min نسبی باشد.

تابع $y = \sin x$ در بازه $(0, 4\pi)$ به شکل زیر است و در نقاط مشخص شده دارای مقدار صحیح است. ضمناً نقاط \min نسبی آن حذف شده‌اند:





۳۳- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.
بررسی گزینه‌ها:

$$\begin{aligned} ۱) x = ۱ &\Rightarrow \begin{cases} \text{حد راست} = [۱^+] - [۱^+] = ۱ - ۱ = ۰ \\ \text{حد چپ} = [۱^-] - [۱^-] = ۰ - ۰ = ۰ \end{cases} \\ ۲) x = ۲ &\Rightarrow \begin{cases} \text{حد راست} = [۴^+] - [۲^+] = ۴ - ۲ = ۲ \\ \text{حد چپ} = [۴^-] - [۲^-] = ۳ - ۱ = ۲ \end{cases} \\ ۳) x = ۰ &\Rightarrow \begin{cases} \text{حد راست} = [۰^+] - [۰^+] = ۰ - ۰ = ۰ \\ \text{حد چپ} = [۰^+] - [۰^-] = ۰ - (-۱) = ۱ \end{cases} \\ ۴) x = ۳ &\Rightarrow \begin{cases} \text{حد راست} = [۹^+] - [۳^+] = ۹ - ۳ = ۶ \\ \text{حد چپ} = [۹^-] - [۳^-] = ۸ - ۲ = ۶ \end{cases} \end{aligned}$$

«بانک سوال یاوران دانش»

۳۴- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x \rightarrow ۰^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow ۰^+} ([x^۴] - [-x^۲]) = [۰^+] - [-۰^+] = [۰^+] - [۰^-] = ۰ - (-۱) = ۱$$

$$\lim_{x \rightarrow ۰^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow ۰^-} ([x^۴] - [-x^۲]) = [۰^+] - [-۰^+] = [۰^+] - [۰^-] = ۰ - (-۱) = ۱$$

تابع در $x = ۰$ حد دارد.

$$\lim_{x \rightarrow ۱^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow ۱^+} [۱^+] - [-۱^-] = ۱ - (-۲) = ۳$$

$$\lim_{x \rightarrow ۱^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow ۱^-} [۱^-] - [-۱^+] = ۰ - (-۱) = ۱$$

تابع در $x = ۱$ حد ندارد.

۳۵- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{۲}{۳}^+} [۳x - ۴] = [-۲^+] = -۲$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{۲}{۳}^-} [۳x - ۴] = [-۲^-] = -۳$$

$$f\left(\frac{۲}{۳}\right) = [۲ - ۴] = -۲$$

با توجه به این که مقدار تابع با حد راست تابع برابر است، فقط از راست پیوسته است.



۳۶- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

باید حدود چپ و راست و مقدار تابع در $x = 3$ برابر باشند:

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = f(3) \Rightarrow \log_2^+ + a = [-3^+] \Rightarrow 2 + a = -3 \Rightarrow a = -5$$

۳۷- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - \sqrt{4x - 3}}{ax + b} = \frac{1}{6}$$

چون حد صورت کسر به ازای $x = 3$ برابر صفر است و حاصل کل حد، عددی مخالف صفر شده است، پس باید

حد مخرج هم در $x = 3$ برابر صفر باشد تا به حالت مبهم $\frac{0}{0}$ تبدیل شود، بنابراین داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 3} ax + b = 0 \Rightarrow 3a + b = 0 \Rightarrow b = -3a \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - \sqrt{4x - 3}}{ax - 3a} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - \sqrt{4x - 3}}{a(x - 3)} \times \frac{x + \sqrt{4x - 3}}{x + \sqrt{4x - 3}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 4x + 3}{a(x - 3)(x + \sqrt{4x - 3})} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x - 1)(x - 3)}{a(x - 3)(x + \sqrt{4x - 3})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x - 1)}{a(x + \sqrt{4x - 3})} = \frac{2}{a(6)} = \frac{1}{3a}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3a} = \frac{1}{6} \Rightarrow a = 2 \xrightarrow{(1)} b = -6$$

۳۸- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x \rightarrow (-2)^-} \frac{[x^2] - 4}{x^3 + 8} = \frac{[4^+] - 4}{(-8)^- + 8} = \frac{4 - 4}{\text{صفر حدی}} = \frac{\text{صفر مطلق}}{\text{صفر حدی}} = 0$$

۳۹- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

تابعی در R پیوسته است که دامنه آن R و در تمام نقاط دامنه، پیوسته باشد. دامنه همه توابع R هستند ولی دامنه تابع

$$y = \log_2^x, \text{ مجموعه } (0, +\infty) \text{ است.}$$



۴۰- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

فرض می‌کنیم $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ ، در این صورت طبق قضایای محاسبه حد داریم:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{3f(x) + 2}{2f(x) - 6} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} (3f(x) + 2)}{\lim_{x \rightarrow a} (2f(x) - 6)} = \frac{3\lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} 2}{2\lim_{x \rightarrow a} f(x) - \lim_{x \rightarrow a} 6}$$

$$= \frac{3L + 2}{2L - 6} = \frac{2}{5} \Rightarrow 4L - 12 = 15L + 10 \Rightarrow 11L = -22 \Rightarrow L = -2$$

۴۱- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

چون در مفهوم میل کردن $x \rightarrow a$ ، هیچ‌گاه x بر a منطبق نمی‌شود و در همسایگی عدد a قرار می‌گیرد، پس برای محاسبه حاصل حد تابع در نقطه $x = 5$ قطعاً با ضابطه دوم تابع باید محاسبه حد را انجام دهیم زیرا $x \notin \mathbb{Z}$ که در این صورت خواهیم داشت:

$$\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = -5$$

۴۲- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

طبق نمودار، تابع در $x = 5$ دارای حد است.

۴۳- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

گزینه‌ی ۱: تابع در $x = 1$ پیوستگی چپ ندارد.

$$[f(1)] = [1] = 1 \quad [f(1^-)] = [1^-] = 0$$

گزینه‌ی ۲: تابع در $x = -1$ پیوستگی راست ندارد.

$$[f(-1)] = [0] = 0 \quad [f(-1^+)] = [(-1)^+] = -1$$

گزینه‌ی ۴: تابع در $x = -2$ پیوستگی راست ندارد.

$$[f(-2)] = [1] = 1 \quad [f(-2^+)] = [1^-] = 0$$

در تمام فاصله‌ی $(-2, -1]$ ، $0 \leq f(x) < 1$ می‌باشد و $[f(x)] = 0$ است پس تابع پیوسته است.

۴۴- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. باید پیوستگی در نقاط $x = 1$ و $x = -1$ را بررسی کنیم.

$$\begin{cases} f(1) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \Rightarrow b + 3 = -1 + a \Rightarrow a - b = 4 \\ f(-1) = \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -b - 3 = 0 + a \Rightarrow a + b = -3 \Rightarrow a = \frac{1}{2} \end{cases}$$



۴۵- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

چون تابع f بر $(x + 1)$ بخش پذیر است، $f(-1) = 0$ است:

$$f(-1) = 0 \Rightarrow -1 - a + 4 = 0 \Rightarrow a = 3$$

حال حد داده شده را می یابیم. ابتدا صورت کسر را گویا می کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{-x} + x}{x^3 + 3x + 4} \times \frac{\sqrt{-x} - x}{\sqrt{-x} - x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{-x - x^2}{(x + 1)(x^2 - x + 4)(\sqrt{-x} - x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{-x(x+1)}{(x+1)(x^2 - x + 4)(\sqrt{-x} - x)} = \frac{1}{(1+1+4)(2)} = \frac{1}{12}$$

تذکر: در تجزیه $x^3 + 3x + 4$ به شکل زیر عمل شده است:

$$\begin{array}{r} x^3 + 3x + 4 \quad | \quad x + 1 \\ \underline{x^3 + x^2} \\ -x^2 + 3x + 4 \\ \underline{-x^2 - x} \\ 4x + 4 \\ \underline{4x + 4} \\ 0 \end{array}$$

«بانک سوال یاوران دانش»

۴۶- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = [8^+] + k[-4^-] = 8 - 5k$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = [8^-] + k[-4^+] = 7 - 4k$$

$$f(2) = 8 - 4k$$

$$\Rightarrow 8 - 5k = 7 - 4k = 8 - 4k \Rightarrow k \text{ جواب ندارد}$$



۴۷- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. به شرطی حد وجود دارد که صورت کسر برابر صفر باشد پس $a = 1$ است.

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt[3]{x+2} + x}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+2+x^3}{(x^2-1) \left(\sqrt[3]{(x+2)^2} - x \sqrt[3]{(x+2)+x^2} \right)}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x^2-x+2)}{(x+1)(x-1)(1+1+1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2-x+2}{3(x-1)} = \frac{4}{-6} = -\frac{2}{3}$$

۴۸- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{(\sin x - 1)(2 \sin x + 1)}{2(1 - \sin^2 x)} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{3(\sin x - 1)}{2(1 - \sin x)(1 + \sin x)} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{-3}{2(1 + \sin x)} = -\frac{3}{4}$$

۴۹- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$f(-1) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = a(-1) + \frac{1}{1 - (-1)} = -a + \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = a(-2) + \frac{1}{1 - (-2)} = -2a + \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow -a + \frac{1}{2} = -2a + \frac{1}{3} \Rightarrow a = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{6}$$

۵۰- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$f(x) = a(x+1)(x-3)$$

$$f(1) = 8 \Rightarrow -4a = 8 \Rightarrow a = -2$$

$$f(0) = -3a = 6$$

$$g: \text{معادله } g = -2x + 6$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f-g}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2(x+1)(x-3) - (-2x+6)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2x^2 + 6x}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2x + 6}{1} = 6$$