

# گنجینه سوال رایگان

+ پاسخ تشریحی

## یاوران دانش



راه های ارتباطی با ما:

[www.Dyavari.com](http://www.Dyavari.com)

۰۲۱-۷۶۷۰۳۸۵۸

۰۹۱۲-۳۴ ۹۴ ۱۳۴





- |      | ۱                                   | ۲                                   | ۳                                   | ۴                                   |
|------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|
| ۱ -  | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            |
| ۲ -  | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            |
| ۳ -  | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input checked="" type="checkbox"/> |
| ۴ -  | <input type="checkbox"/>            | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            |
| ۵ -  | <input type="checkbox"/>            | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            |
| ۶ -  | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            |
| ۷ -  | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            |
| ۸ -  | <input type="checkbox"/>            | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            |
| ۹ -  | <input type="checkbox"/>            | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            |
| ۱۰ - | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            |
| ۱۱ - | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input checked="" type="checkbox"/> |
| ۱۲ - | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input checked="" type="checkbox"/> |
| ۱۳ - | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            |
| ۱۴ - | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            |
| ۱۵ - | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input checked="" type="checkbox"/> |
| ۱۶ - | <input type="checkbox"/>            | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            |
| ۱۷ - | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input checked="" type="checkbox"/> |
| ۱۸ - | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            |
| ۱۹ - | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            |
| ۲۰ - | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input checked="" type="checkbox"/> |
| ۲۱ - | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input checked="" type="checkbox"/> |
| ۲۲ - | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input checked="" type="checkbox"/> |
| ۲۳ - | <input type="checkbox"/>            | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            |
| ۲۴ - | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            |
| ۲۵ - | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            |
| ۲۶ - | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            |
| ۲۷ - | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            |
| ۲۸ - | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input checked="" type="checkbox"/> |
| ۲۹ - | <input type="checkbox"/>            | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            |
| ۳۰ - | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            |
| ۳۱ - | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            |
| ۳۲ - | <input type="checkbox"/>            | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            |
| ۳۳ - | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input checked="" type="checkbox"/> |
| ۳۴ - | <input type="checkbox"/>            | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            |

- |      | ۱                                   | ۲                                   | ۳                                   | ۴                                   |
|------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|
| ۳۵ - | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input checked="" type="checkbox"/> |
| ۳۶ - | <input type="checkbox"/>            | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            |
| ۳۷ - | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input checked="" type="checkbox"/> |
| ۳۸ - | <input type="checkbox"/>            | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            |
| ۳۹ - | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input checked="" type="checkbox"/> |
| ۴۰ - | <input type="checkbox"/>            | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            |
| ۴۱ - | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            |
| ۴۲ - | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            |
| ۴۳ - | <input type="checkbox"/>            | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            |
| ۴۴ - | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            |
| ۴۵ - | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input checked="" type="checkbox"/> |
| ۴۶ - | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            |
| ۴۷ - | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input checked="" type="checkbox"/> |
| ۴۸ - | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input checked="" type="checkbox"/> |
| ۴۹ - | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            |
| ۵۰ - | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input checked="" type="checkbox"/> |





- ۱- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. به ۲ شرط زیر باید توجه کنیم:  
(۱) باید زیر رادیکال همواره بزرگ‌تر یا مساوی صفر باشد.  
(۲) مخرج کسر نباید ریشه داشته باشد.  
شرط اول:

$$ax^2 - 4x + a \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} \Delta \leq 0 \\ a > 0 \end{cases} \Rightarrow 16 - 4a^2 \leq 0 \Rightarrow 4a^2 \geq 16 \Rightarrow a \geq 2 \text{ یا } a \leq -2, a > 0$$

اشتراک  $a \geq 2 \leftarrow$

$$a \cos x + 5 \neq 0 \Rightarrow \cos x \neq -\frac{5}{a}$$

شرط دوم:

$$-1 \leq \cos x \leq 1 \Rightarrow -\frac{5}{a} < -1 \text{ یا } -\frac{5}{a} > 1$$

$$\left| -\frac{5}{a} \right| > 1 \Rightarrow \frac{5}{|a|} > 1 \Rightarrow |a| < 5 \Rightarrow -5 < a < 5$$

با اشتراک شرط اول و دوم حدود  $a$  به صورت زیر است  $2 \leq a < 5$  پس مقادیر طبیعی  $a$  عبارت‌اند از ۲ و ۳ و ۴ پس جواب ۳ مقدار طبیعی برای  $a$  است.

- ۲- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$f \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} f(x) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow a \times (-2) = -12 \Rightarrow a = 6$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{6 \cos^2 x}{1 - \sin^3 x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{6(1 - \sin x)(1 + \sin x)}{(1 - \sin x)(1 + \sin x + \sin^2 x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{6(1 + \sin x)}{1 + \sin x + \sin^2 x} = \frac{6(2)}{1 + 1 + 1} = 4 \end{aligned}$$

- ۳- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 0 \times 0 = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = (-1) \times 1 = -1 \Rightarrow f \text{ در } x = 2 \text{ ناپیوسته است (فقط پیوستگی راست دارد)} \\ f(2) = 0 \times 0 = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 0 \times (-1) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = (-1) \times 0 = 0 \Rightarrow f \text{ در } x = 3 \text{ پیوسته است.} \\ f(3) = 0 \times (-1) = 0 \end{cases}$$





۴- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$A = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{(\sin x - \cos x)(\sin^2 x + \sin x \cdot \cos x + \cos^2 x)}{\frac{\sin x}{\cos x} - \frac{\cos x}{\sin x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{(\sin x - \cos x)(1 + \sin x \cdot \cos x)}{\frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin x \cdot \cos x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{(\cancel{\sin x - \cos x})(1 + \sin x \cdot \cos x)(\sin x \cdot \cos x)}{(\cancel{\sin x - \cos x})(\sin x + \cos x)}$$

$$= \frac{\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\frac{3}{2} \times \frac{1}{2}}{\sqrt{2}} = \frac{3}{4\sqrt{2}}$$

$$B = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3 + \sqrt[3]{x}} - 2}{x^3 - 1} \times \frac{\sqrt{3 + \sqrt[3]{x}} + 2}{\sqrt{3 + \sqrt[3]{x}} + 2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{(x^3 - 1) \times 4} \times \frac{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cancel{x-1}}{(\cancel{x-1})(x^2 + x + 1) \times 4 \times 3} = \frac{1}{36}$$

$$B^{-1} \times A^{-2} = 36 \times \frac{32}{9} = 128$$





۵- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(\sqrt{x}-1)(2\sqrt{x}-1)}{a(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = \frac{1}{2a}$$

$$f(1) = 2b - 1$$

می‌دانیم اگر  $0 < x < 1$  باشد آنگاه  $\sqrt{x} > x$ :

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^3 - 1}{-(x - \sqrt{x})} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x-1)(x^2 + x + 1)}{-(x - \sqrt{x})} \times \frac{x + \sqrt{x}}{x + \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^3 - 1}{-x(x-1)} = -6$$

$$\frac{1}{2a} = -6 = 2b - 1 \Rightarrow a = \frac{-1}{12}, b = \frac{-5}{2}$$

این تابع در  $x = 0$  مجانب قائم دارد و  $y = -24$  مجانب افقی آن است. (دقت کنید تابع در  $x = 1$  پیوسته است و مجانب قائم ندارد.)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - 3\sqrt{x} + 1}{-\frac{1}{12}(x-1)} \simeq \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{2x}{-\frac{1}{12}x} = -24$$

بنابراین تابع فقط دو مجانب دارد. ( $n = 2$ )

$$\text{عبارت مورد نظر سؤال} = 4(3a - b) + n = 4\left(-\frac{1}{4} + \frac{5}{2}\right) + 2 = 11$$





۶- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$x \rightarrow 3^+: f(x) = \frac{3(x-3)}{\sqrt{2x+3}-x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{3(x-3)}{\sqrt{2x+3}-x} \times \frac{\sqrt{2x+3}+x}{\sqrt{2x+3}+x} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{3(x-3) \times 6}{-(x-3)(x+1)} = -4/5 = R$$

$$x \rightarrow 3^-: f(x) = \frac{-2(x-3)}{\sqrt{2x+3}-x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} -2 \frac{3(x-3)}{\sqrt{2x+3}-x} \times \frac{\sqrt{2x+3}+x}{\sqrt{2x+3}+x} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{-2(x-3) \times 6}{-(x-3)(x+1)} = 3 = L$$

در محاسبه حد دوم، چون  $\lim_{x \rightarrow 1} (x+2) = 3$  و حاصل نهایی حد  $+\infty$  شده است، پس مخرج کسر  $2(x-1)^2$

بوده است تا مخرج کسر به  $0^+$  میل کند:

$$2(x-1)^2 = 2x^2 - 4x + 2 = 2x^2 + ax + b \Rightarrow \begin{cases} a = -4 \\ b = 2 \end{cases}$$

$$L - 4R - a + b = 3 - 4(-4/5) - (-4) + 2 = 27$$





۷- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (f + g)(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) + \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} [1 - x^3] + \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3(x+1) - 1}{ax} \times \frac{\sqrt{x+1} + 1}{\sqrt{x+1} + 1} = 1 + \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3}{a(\sqrt{x+1} + 1)} = \frac{3}{2a}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} (f + g)(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) + \lim_{x \rightarrow 0^-} g(x)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} [1 - x^3] + \lim_{x \rightarrow 0^-} \left( 2b[x] + 3 \frac{\sin \pi [x]}{2} \right) = 1 - 2b - 3 = -2b - 2$$

$$(f + g)(0) = 1$$

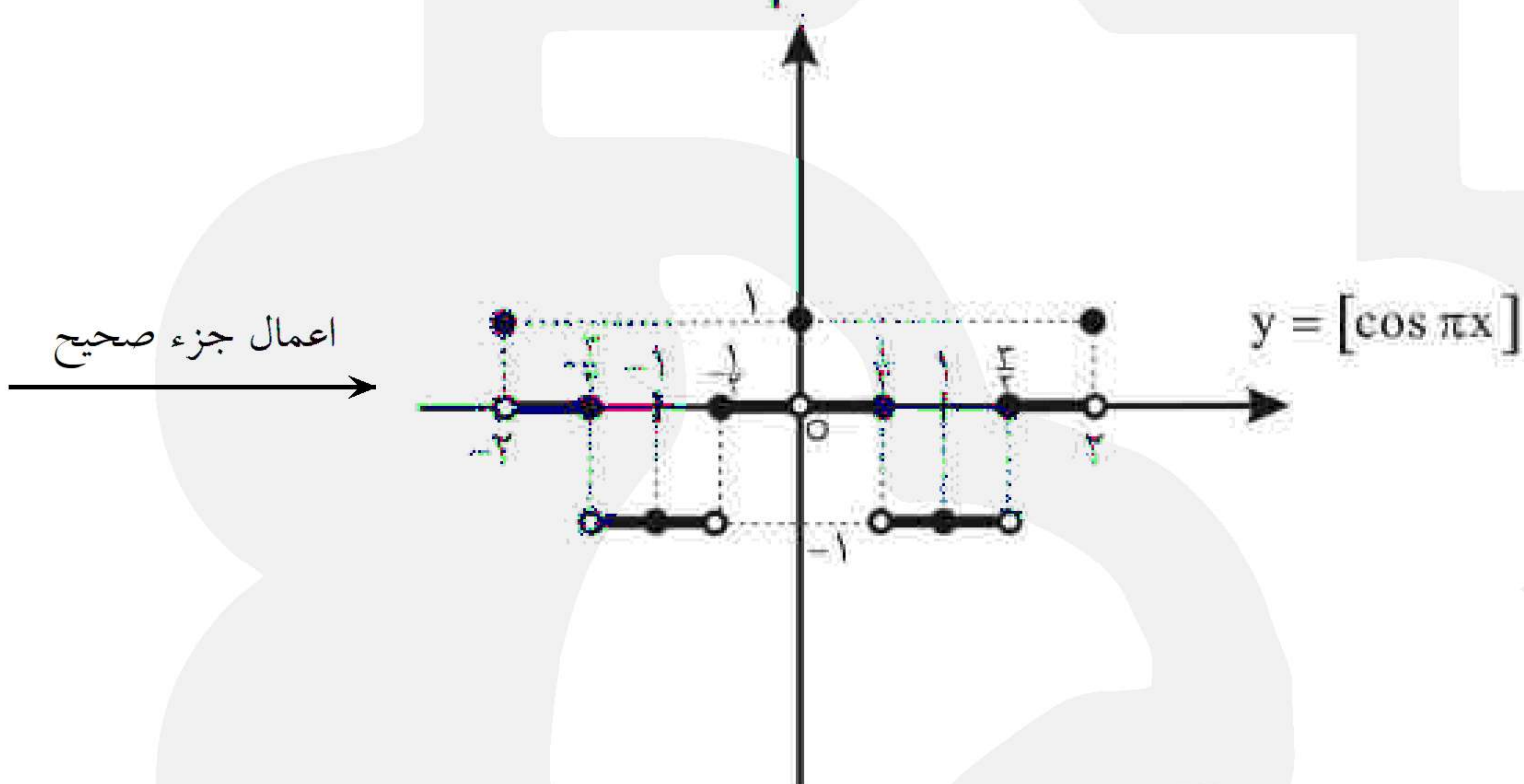
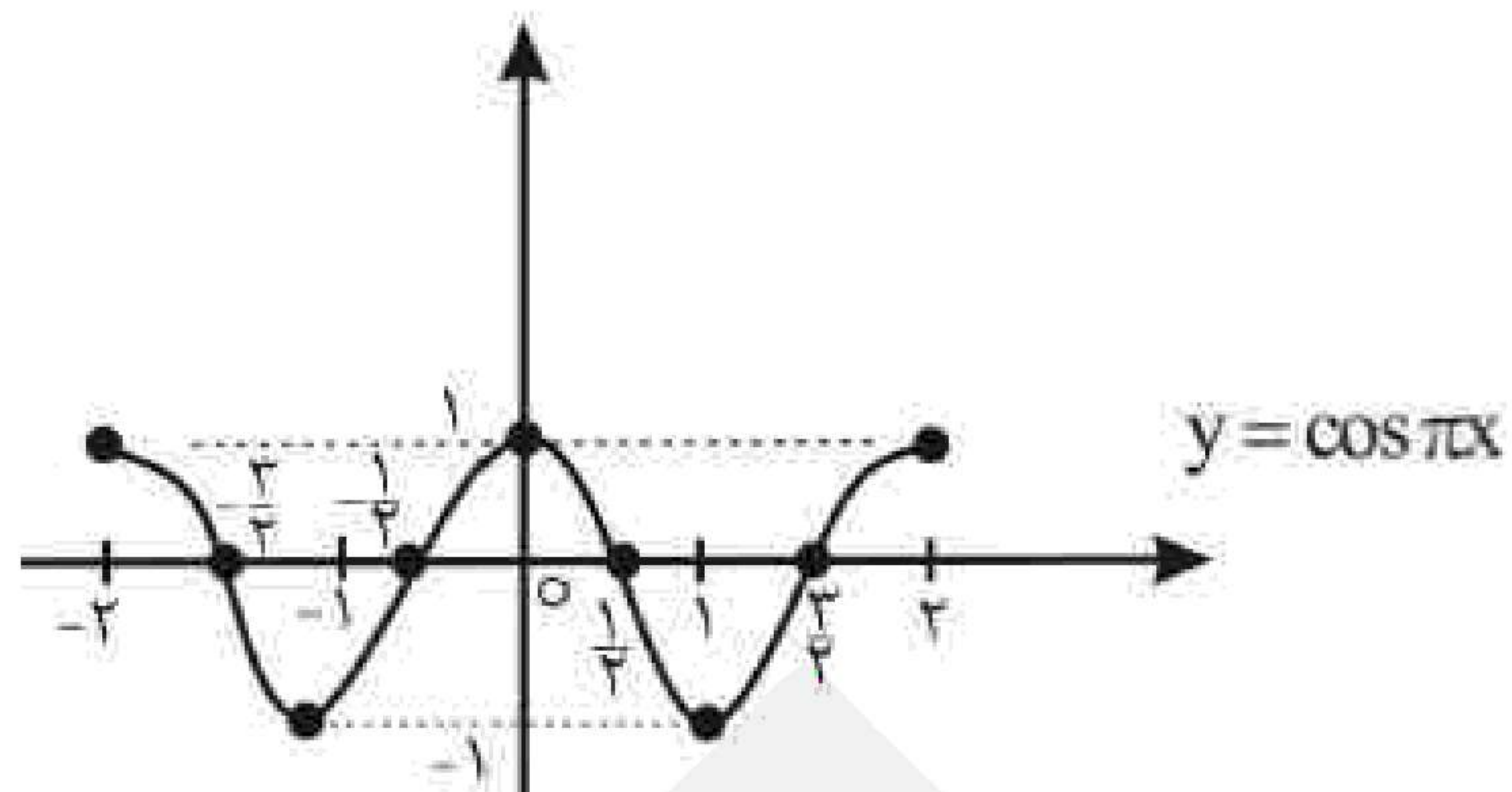
$$\text{شرط پیوستگی: } \frac{3}{2a} = -2b - 2 = 1 \rightarrow \begin{cases} a = \frac{3}{2} \\ b = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

$$a - b = \frac{3}{2} - \left(-\frac{3}{2}\right) = 3$$





۸- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.



مطابق نمودار، تابع  $f(x) = [\cos \pi x]$  در هفت نقطه  $2, \frac{3}{4}, \frac{1}{4}, 0, \frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, -\frac{3}{4}, -2$  ناپیوسته است.





۹- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. در  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} + a}{x^2 - 1}$  چون حد مخرج در  $x \rightarrow 1$  صفر است باید حد صورت هم در این

شرایط صفر باشد، بنابراین:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt[3]{x} - 1)(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1)}{(x^2 - 1)(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)}{(x-1)(x+1)x^3} = \frac{1}{6} \quad f(1) = a - 2b = -1 - 2b$$

برای پیوستگی در  $x = 1$ :

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) \Rightarrow \frac{1}{6} = -1 - 2b \Rightarrow b = \frac{-7}{12} \Rightarrow 5a - 24b = 5(-1) - 24\left(\frac{-7}{12}\right) = -5 + 14 = 9$$

۱۰- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 7)}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 3)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} + 7}{\sqrt{x} + 3} = \frac{8}{4} = 2$$

۱۱- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{(1 + \cos x)(1 - \cos x + \cos^2 x)}{(1 + \cos x)(1 - \cos x)} = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 - \cos x + \cos^2 x}{1 - \cos x} = \frac{3}{2} = 1.5$$

«بانک سوال یاوران دانش»

۱۲- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ابتدا صورت را بر عامل صفرساز یعنی  $(x+1)$  تقسیم کنید:

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{3(x+1)(x^2 - 6x + 6)}{(x+1)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3(x^2 - 6x + 6)}{x-2} = -13$$





۱۳- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. برای پیوستگی باید  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$  باشد.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 - \sqrt{x^2 + ax + b}}{x - 1} = 4$$

چون حد مخرج صفر می شود پس حتماً حد صورت در  $x \rightarrow 1$  هم صفر است:

$$2 - \sqrt{1 + a + b} = 0 \Rightarrow 2 = \sqrt{1 + a + b} \Rightarrow a + b = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 - \sqrt{x^2 + ax + b}}{x - 1} \times \frac{2 + \sqrt{x^2 + ax + b}}{2 + \sqrt{x^2 + ax + b}} = 4$$

$\underbrace{2 + \sqrt{x^2 + ax + b}}_{x \rightarrow 1 \text{ در } = 4}$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{-x^2 - ax - b + 4}{(x - 1)(4)} = 4$$

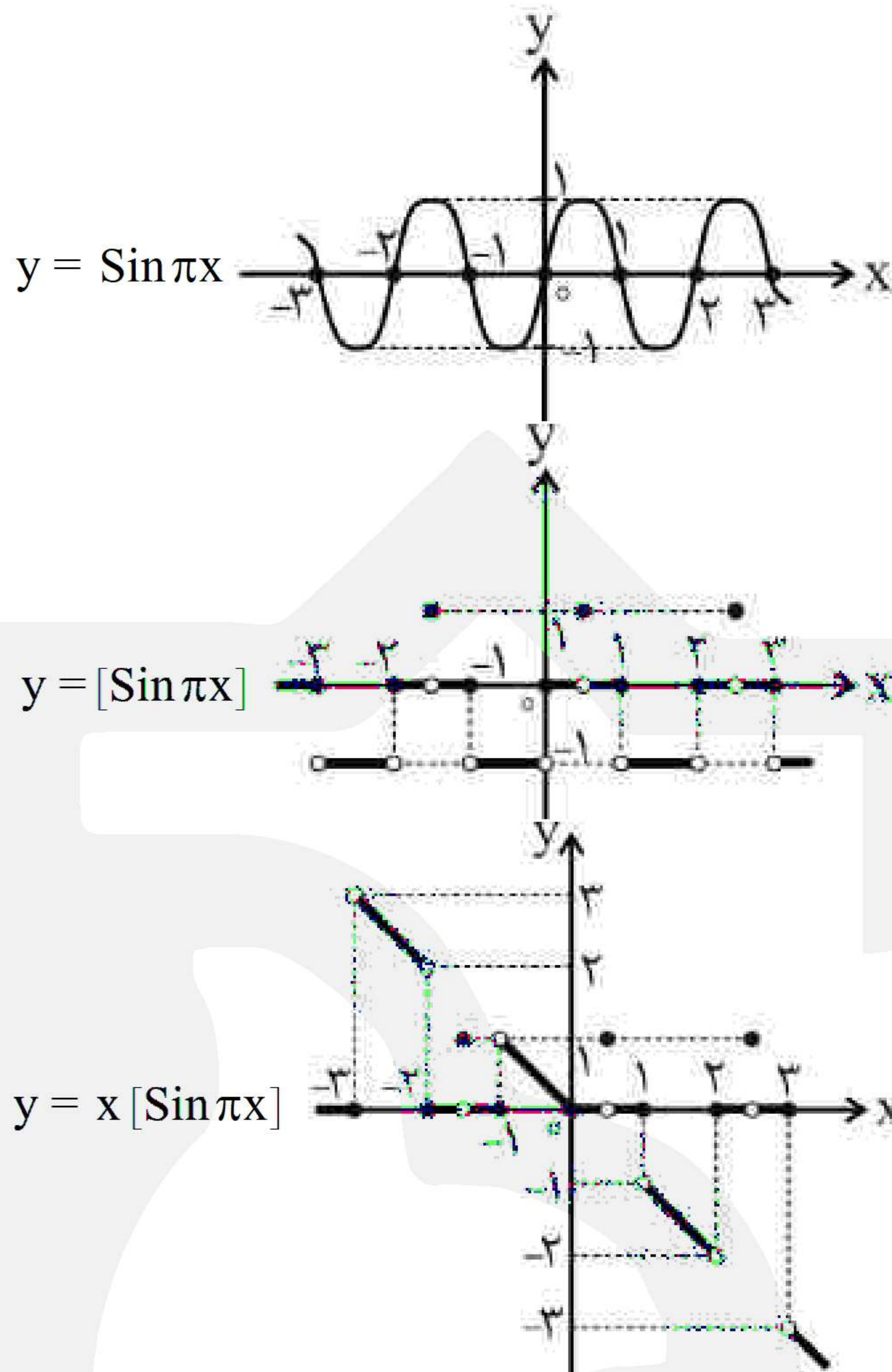
با تقسیم صورت بر  $x - 1$  خارج قسمت برابر  $(-x - a - 1)$  می شود و مخرج با توجه به شرط  $a + b = 3$  مساوی صفر می شود:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cancel{(x-1)}(-x - a - 1)}{4\cancel{(x-1)}} = 4 \Rightarrow \frac{-1 - a - 1}{4} = 4 \Rightarrow a = -18 \quad b = 21 \quad a \times b = -378$$





۱۴- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.



مطابق تعریف پیوستگی در بازه  $[a, b]$  و با توجه به نمودار نهایی  $y = x [\sin \pi x]$  در بازه  $[-3, 3]$ ، این تابع در نقاط  $-3$  و  $-2$  و  $-\frac{3}{2}$  و  $-1$  و  $-\frac{1}{2}$  و  $0$  و  $\frac{1}{2}$  و  $1$  و  $2$  و  $\frac{5}{2}$  (نقطه ۸) ناپیوسته است.

۱۵- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

	$x = -\infty$	$x = -2$	$x = 2$	$x = +\infty$
$g(x) = 4 - x^2$				
تعیین علامت		-	+	-

$$\Rightarrow (f \circ g)(x) = \begin{cases} -2 & ; x < -2 \text{ یا } x > 2 \\ 2 & ; -2 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

تابع مرکب  $f \circ g$  در  $x = -2$  و  $x = 2$  ناپیوسته است (۲ نقطه ناپیوستگی)

$$(g \circ f)(x) = \begin{cases} 0 & ; x \geq 0 \\ 0 & ; x < 0 \end{cases} \Rightarrow (g \circ f)(x) = 0, x \in \mathbb{R}$$

$\Rightarrow$   $g \circ f$  در  $\mathbb{R}$  پیوسته است (صفر نقطه ناپیوستگی)





$$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = [(-2)^+]^2 - [(-2)^+] = 4 - (-2) = 6$$

۱۶- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$f(-2) = [(-2)]^2 - [(-2)] = 4 - (-2) = 6 \quad \text{در } -2 \text{ پیوستگی راست دارد}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = [(-1)^+]^2 - [(-1)^+] = 1 - (-1) = 2 = f(-1) \quad \text{در } -1 \text{ ناپیوسته است}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = [(-1)^-]^2 - [(-1)^-] = 4 - (-2) = 6$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = [(0)^-]^2 - [(0)^-] = 1 + 1 = 2 \quad \text{در صفر ناپیوسته}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = [(0)^+]^2 - [(0)^+] = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = [1^-]^2 - [1^-] = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = [1^+]^2 - [1^+] = 0 = f(1) \quad \text{در } 1 \text{ پیوسته}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = [2^-]^2 - [2^-] = 0, \quad f(2) = [2]^2 - [2] = 2 \quad \text{در } 2 \text{ ناپیوسته}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} ax + 2b = 3a + b = 6$$

۱۷- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} ax^2 + bx + 2 = 9a + 3b + 2 = 2$$

$$\begin{cases} -3 \begin{cases} 3a + 2b = 6 \\ 9a + 3b = 0 \end{cases} \Rightarrow -3b = -18 \Rightarrow b = 6 \Rightarrow a = -2 \\ a + b = 4 \end{cases}$$





۱۸- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{h \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{h \rightarrow 3^-} \frac{-2(x-3)}{\sqrt{2x+3}-x} \times \frac{\sqrt{2x+3}+x}{\sqrt{2x+3}+x} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{-2(x-3)(\sqrt{2x+3}+x)}{-(x-3)(x+1)}$$

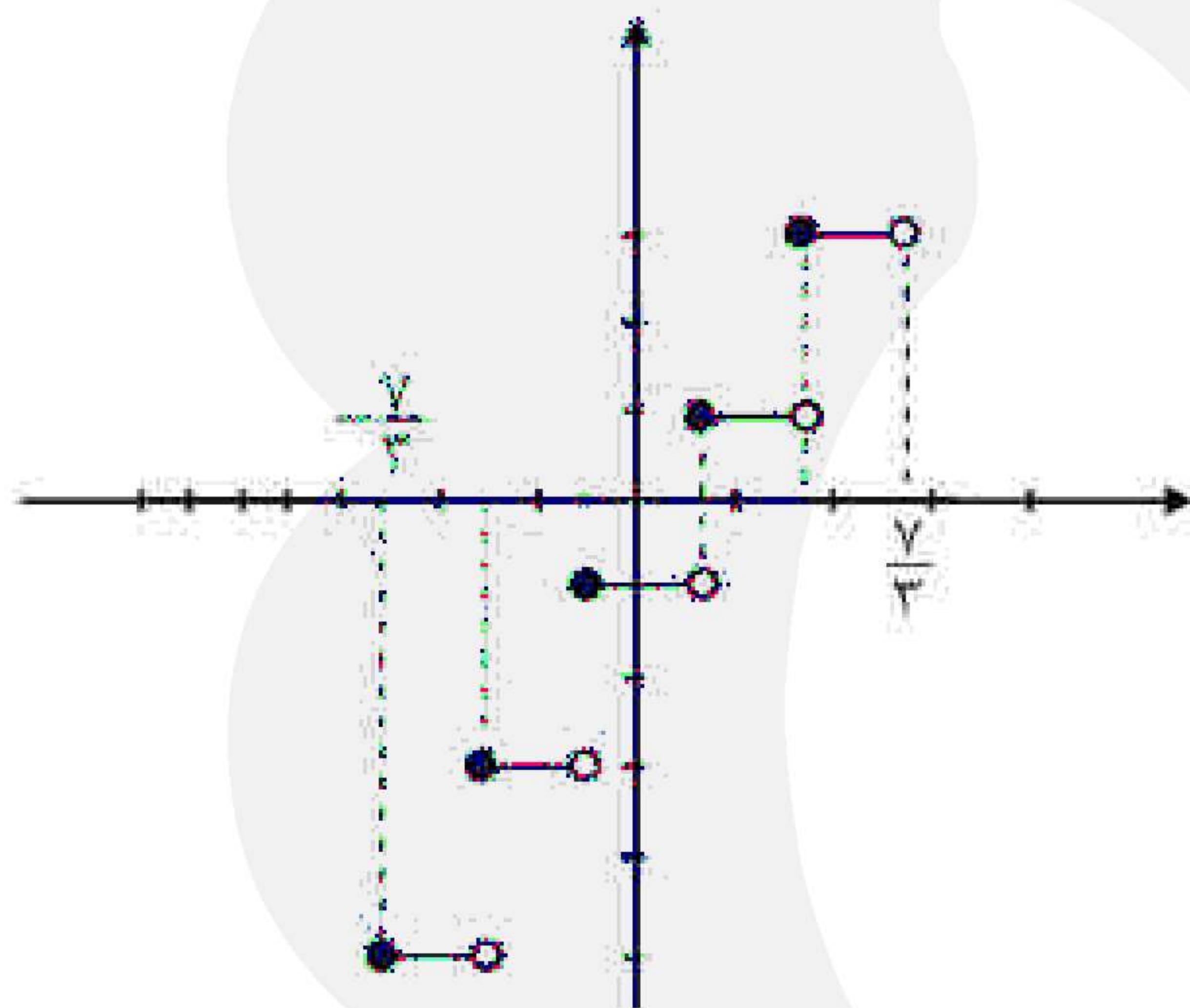
$$= \frac{-2(6)}{-4} = 3 = L$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{3(x-3)}{\sqrt{2x+3}-x} \times \frac{\sqrt{2x+3}+x}{\sqrt{2x+3}+x} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{3(x-3)(\sqrt{2x+3}+x)}{-(x-3)(x+1)}$$

$$= \frac{3(6)}{-4} = -4/5 = R$$

$$L - R = 3 - 4(-4/5) = 21$$

۱۹- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.



$$f(x) = 2 \left[ x + \frac{1}{3} \right] - 1$$

$$-\frac{1}{3} \leq x < \frac{2}{3} \leftarrow 0 \leq x + \frac{1}{3} < 1$$

$$\Rightarrow \left[ x + \frac{1}{3} \right] = 0 \Rightarrow y = -1$$

$$\frac{2}{3} \leq x < \frac{5}{3} \leftarrow 1 \leq x + \frac{1}{3} < 2$$

$$\Rightarrow \left[ x + \frac{1}{3} \right] = 1 \Rightarrow y = 1$$

$$\frac{5}{3} \leq x < \frac{8}{3} \leftarrow 2 \leq x + \frac{1}{3} < 3 \Rightarrow \left[ x + \frac{1}{3} \right] = 2 \Rightarrow y = 3$$

$$-\frac{4}{3} \leq x < -\frac{1}{3} \leftarrow -1 \leq x + \frac{1}{3} < 0 \Rightarrow \left[ x + \frac{1}{3} \right] = -1 \Rightarrow y = -3$$

$$-\frac{7}{3} \leq x < -\frac{4}{3} \leftarrow -2 \leq x + \frac{1}{3} < -1 \Rightarrow \left[ x + \frac{1}{3} \right] = -2 \Rightarrow y = -5$$

تابع در نقاط  $\frac{5}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{4}{3}$  ناپیوسته است.





«بانک سوال یاوران دانش»

$$f(x) = [x] - [-x]$$

۲۰- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} ([x] - [-x]) = [1^-] - [- (1^-)] = 0 - (-1) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} ([x] - [-x]) = [1^+] - [- (1^+)] = 1 - (-2) = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) + \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1 + 3 = 4$$

۲۱- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$(۱) \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} \times \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\cancel{x-1}}{(\cancel{x-1})(\sqrt{x}+1)} = \frac{1}{2}$$

$$(۲) \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1 + a$$

$$(۳) f(1) = 1 + a$$

$$(۴) \lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = (1 - b)(1) = 1 - b$$

$$(۵) \lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = (0 - b)(0) = 0$$

$$(۶) f(1) = (1 - b)(1) = 1 - b$$

$$۱, ۲, ۳ \Rightarrow 1 + a = \frac{1}{2} \Rightarrow a = -\frac{1}{2} \quad (۷)$$

$$۴, ۵, ۶ \Rightarrow 1 - b = 0 \Rightarrow b = 1 \quad (۸)$$

$$۷, ۸ \Rightarrow 2a + b = 0$$

۲۲- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. تابع  $y = [x]$  فقط در نقاط صحیح بازه موردنظر به جز  $x = -3$  (که پیوستگی راست دارد)

یعنی  $۳, ۲, ۱, ۰, -۱, -۲, -۳$  ناپیوسته است. اما چون عبارت  $x^3 - x$  در سه نقطه  $x = ۱$  و  $x = ۰$  و  $x = -۱$  صفر می شود، مشکل ناپیوستگی در این نقاط را رفع کرده و  $f$  در آن ها پیوسته می شود. بنابراین تابع  $f(x)$  فقط در سه نقطه  $x = -۲$  و  $x = ۲$  و  $x = ۳$  ناپیوسته است.

۲۳- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. می دانیم وقتی  $x \rightarrow 3^+$  :  $|9 - x^2| = -(9 - x^2)$  و  $[3^+] = 3$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{3x^3 - 81}{x^2 - 9} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{3(\cancel{x-3})(x^2 + 3x + 9)}{(\cancel{x-3})(x+3)} = \frac{3(27)}{6} = 13/2$$





$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(\sqrt{x}-1)(2\sqrt{x}-1)}{a(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = \frac{1}{2a}$$

۲۴- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$f(1) = 2b - 1$$

(توجه: اگر  $0 < x < 1$  آنگاه  $\sqrt{x} > x$ )

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^3 - 1}{-(x - \sqrt{x})} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x-1)(x^2 + x + 1)}{-(x - \sqrt{x})} \times \frac{x + \sqrt{x}}{x + \sqrt{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3(x-1)(2)}{-x(x-1)} = -6 \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2a} = -6 = 2b - 1 \quad \begin{cases} a = -\frac{1}{12} \\ b = -\frac{5}{2} \end{cases}$$

شرط پیوستگی

$$4(3a - b) = 4\left(-\frac{1}{4} + \frac{5}{2}\right) = 9$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{(1 + \cos x)(1 - \cos x + \cos^2 x)}{(1 + \cos x)(1 - \cos x)} = \frac{3}{2}$$

۲۵- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

۲۶- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. اگر صورت و مخرج را در مزدوج مخرج و صورت ضرب کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow 9} \frac{2\sqrt{x} - \sqrt{x+27}}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-3)} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 9} \frac{(4x - x - 27) \times (3+3)}{\sqrt{x}(x-9) \times (6+6)} = \frac{1}{2}$$

«بانک سوال یاوران دانش»

۲۷- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4 - 2 + a = 2 + a; x \rightarrow 2 \Rightarrow 2 + a = 6 + \frac{1}{a} \Rightarrow a - \frac{1}{a} = 4 \\ f(2) = 6 - g(1) = 6 - \left(-\frac{1}{a}\right) = 6 + \frac{1}{a} \end{cases}$$

$$\Rightarrow a = -1 \text{ حاصل ضرب مقادیر } a$$





۲۸- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

تابع  $f(x)$  در نقاط  $x = -2$  و  $x = 4$  ناپیوسته است پس باید در نقاط  $x = 0$ ،  $x = 3$  پیوسته باشد، بنابراین داریم:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \frac{a}{-4} \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) = \frac{2}{-8} = -\frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow \frac{a}{-4} = -\frac{1}{4} \Rightarrow a = 1$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \frac{5}{-5} = -1 \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = f(3) = \frac{b}{-1} \end{cases} \Rightarrow -1 = \frac{b}{-1} \Rightarrow b = 1$$

بنابراین  $a + b = 2$  می‌باشد.

۲۹- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt{4x + \sqrt{2x}} - 6}{\sqrt[3]{x} - 2} &= \frac{0}{0} \\ \lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt{4x + \sqrt{2x}} - 6}{\sqrt[3]{x} - 2} &\times \frac{\sqrt{4x + \sqrt{2x}} + 6}{\sqrt{4x + \sqrt{2x}} + 6} \times \frac{12}{12} \times \frac{12}{\sqrt[3]{\sqrt{x^2} + 2}\sqrt[3]{x} + 4} \\ &= \lim_{x \rightarrow 8} \frac{4x + \sqrt{2x} - 36}{x - 8} \times \frac{(4x - 36) - \sqrt{2x}}{-8} = \lim_{x \rightarrow 8} \frac{(4x - 36)^2 - 2x}{-8(x - 8)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 8} \frac{(x-8)(16x - 162)}{-8(x-8)} = \frac{-34}{-8} = \frac{17}{4} \end{aligned}$$





۳۰- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

چون به ازای  $k \neq 0$ ،  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{x(x-k)}{(2k+1)x - (k+1)x} = -1$ ، پس در  $x = 0$  به ازای  $k \neq 0$  پیوسته است و به ازای  $k = 0$  پیوسته نیست، پس گزینه‌های ۱ و ۲ درست نیستند، از طرفی می‌بایست مخرج کسر ریشه نداشته باشد.

$$\frac{2k+1}{k+1} x \neq \sin x$$

شرط لازم این است که  $\frac{2k+1}{k+1} > 1$  باشد.

$$\frac{2k+1}{k+1} - 1 > 0 \Rightarrow \frac{k}{k+1} > 0 \Rightarrow k \in (-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$$

ولی به ازای  $k = \frac{1}{4}$  نیز معادله‌ی  $\frac{2}{3}x = \sin x$  ریشه غیر صفر دارد و گزینه ۴ نیز نادرست است.

۳۱- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.  
روش اول:

$$\lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{|1 + \cos x|}{\sin x \tan x} = \lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{(1 + \cos x) \cos x}{(1 + \cos x)(1 - \cos x)} = -\frac{1}{2}$$

روش دوم:

$$x < \pi \Rightarrow \sin x > 0, \tan x < 0, 1 + \cos x > 0$$

$$\xrightarrow{t = \pi - x} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos t}{\sin t \tan t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos^2 t}{2 \sin t \tan t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sin^2 t}{2 \sin t \tan t} = -\frac{1}{2}$$

۳۲- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. در نقاطی که  $x + 1$  مضارب ۲ یا ۳ است بررسی می‌کنیم. در ۶، ۰، -۶،  $x + 1 = -6$  حد دارد و در ۶ نقطه ۸، ۴، ۳، ۲، -۲، -۳،  $x + 1 = -3$  حد ندارد. چون یک عبارت حد دارد و دیگری حد ندارد، پس تفاضل آنها حد ندارد.

۳۳- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. باید حد تابع  $f(x)$  در  $x = 2$  با مقدار تابع در  $x = 2$  برابر باشد:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 + a}{x - 2} = \frac{0}{0} \Rightarrow 8 + a = 0 \Rightarrow a = -8$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x^2 + 2x + 4)}{x-2} = 12 \Rightarrow f(2) = 12 \Rightarrow 2b + 2 = 12 \Rightarrow b = 5$$

بنابراین  $a - b = -13$  است.





۳۴- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. تابع  $f(x)$  را به صورت  $f(x) = 3([x] + [-x]) + (2a - 4)[-x]$  می‌نویسیم و داریم:

$$\begin{cases} 2a - 4 = 0 \Rightarrow a = 2 \\ b = \lim_{x \rightarrow 4} f(x) = 3 \times -1 = -3 \Rightarrow a + b = -1 \end{cases}$$

۳۵- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$y = (2x^2 - ax - 6)[x] + 2ax \xrightarrow[\alpha, \beta \in \mathbb{Z}]{\substack{2 \text{ نقطه صحیح} \\ \alpha + \beta = \frac{a}{2} \\ \alpha\beta = -3}}$$

$$\begin{cases} \alpha = -3 \text{ یا } -1 \\ \beta = 1 \text{ یا } 3 \end{cases} \Rightarrow a = -4 \text{ یا } 4 \Rightarrow -4 \times 4 = -16$$

۳۶- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

چون  $\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{4x + 1} - 3 = 0$  است، پس:

$$\lim_{x \rightarrow 2} (ax + b) = 0 \Rightarrow 2a + b = 0$$

از طرفی داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{4(x - 2)}{6(ax - 2a)} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{4}{6a} = \frac{1}{3} \Rightarrow a = 2 \Rightarrow b = -4 \Rightarrow a + 2b = -6$$

۳۷- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x - 1) = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + 2x + a) = 0 \Rightarrow 3 + a = 0 \Rightarrow a = -3$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+3)}{x-1} = 4$$

$$f(1) = a + b = 4 \xrightarrow{a = -3} b = 7$$

۳۸- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

تابع  $f(x)$  در نقاط  $x = -3$  و  $x = 3$  ناپیوسته است، پس باید در  $x = 2$  پیوسته باشد:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2) = \frac{2+a}{-1} \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \frac{5}{-5} = -1 \end{cases} \Rightarrow \frac{2+a}{-1} = -1 \Rightarrow a = -1$$

۳۹- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

عبارت  $6 - 7x - 3x^2$  به ازای  $x = 3$  صفر می‌شود، پس  $f(x)$  در  $x = 3$  پیوسته است.





۴۰- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3 - \sqrt{2x+5}}{2-x} = \frac{3-3}{2-2} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3 - \sqrt{2x+5}}{2-x} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{9 - (2x+5)}{6x(2-x)} = \frac{2(2-x)}{6x(2-x)} = \frac{1}{3}$$

۴۱- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(f(x)) = \lim_{t \rightarrow 2} f(t) = f(2) = 3$$

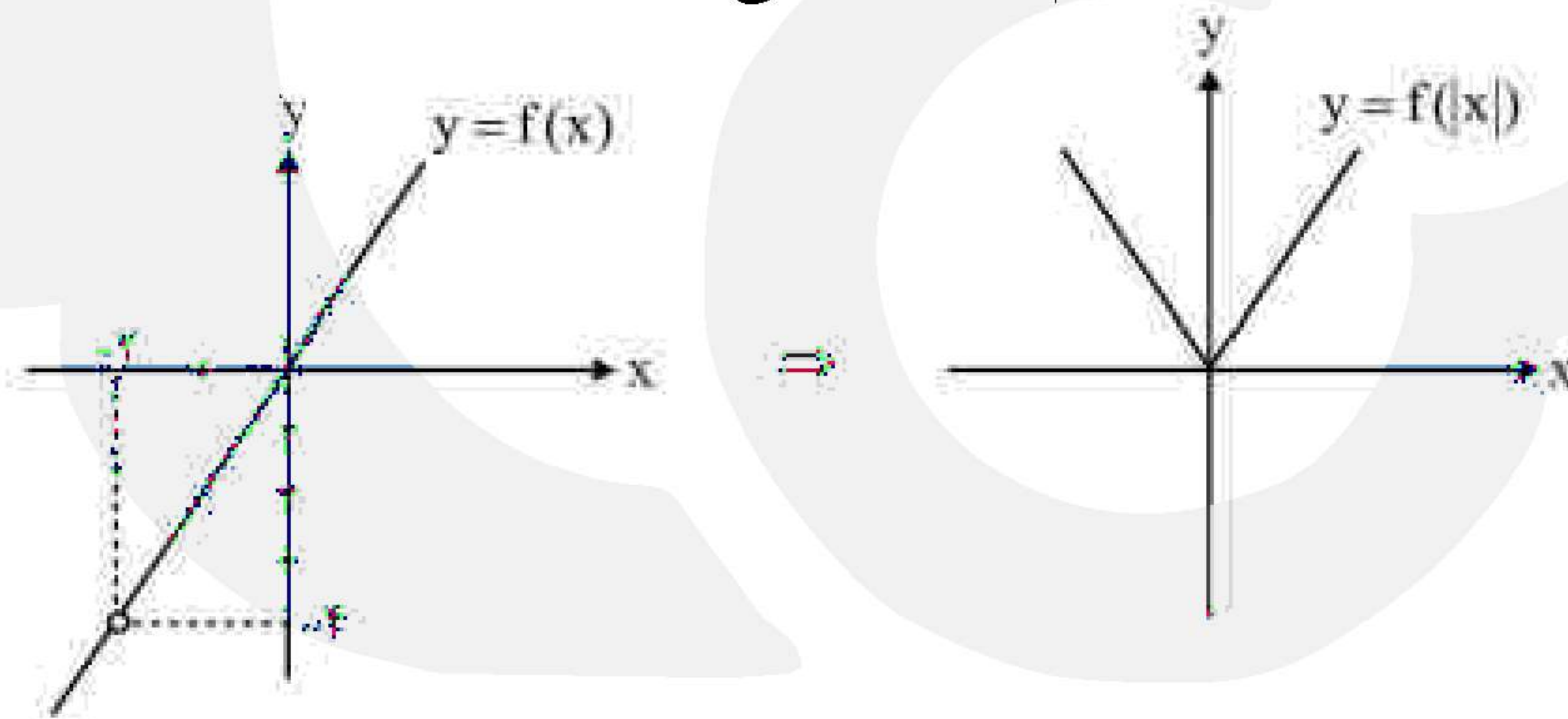
۴۲- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - 9) = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 3} x^2 + ax + a = 0 \Rightarrow 9 + 4a = 0 \Rightarrow a = -\frac{9}{4}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - \frac{9}{4}x - \frac{9}{4}}{x^2 - 9} = \frac{0}{0} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+\frac{3}{4})}{(x-3)(x+3)} = \frac{15}{4} = \frac{15}{24} = \frac{5}{8}$$

۴۳- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

تابع  $f(x)$  در  $x = -2$  ناپیوسته است. برای رسم  $f(|x|)$  قسمت سمت چپ محور  $y$ ها را حذف و قسمت سمت راست تابع را نسبت به محور  $y$ ها قرینه می‌کنیم. در نتیجه تابع پیوسته می‌شود:



۴۴- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$f(g(x)) = 2\left(\frac{x^2-2}{2x}\right) - 1 = \frac{x^2-2}{x} - 1 = \frac{x^2-x-2}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f \circ g(x)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-x-2}{x(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+1)}{x(x-2)} = \frac{3}{2}$$





۴۵- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{[x] + 2}{x^2 + 3x + 2} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

«بانک سوال یاوران دانش»

۴۶- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

گزینه ۱ در  $x = 0$  پیوستگی راست دارد و در هیچ همسایگی صفر تعریف نشده است.  
گزینه ۲ در  $x = 0$  حد چپ دارد و گزینه ۴ در همسایگی صفر تعریف نشده است.

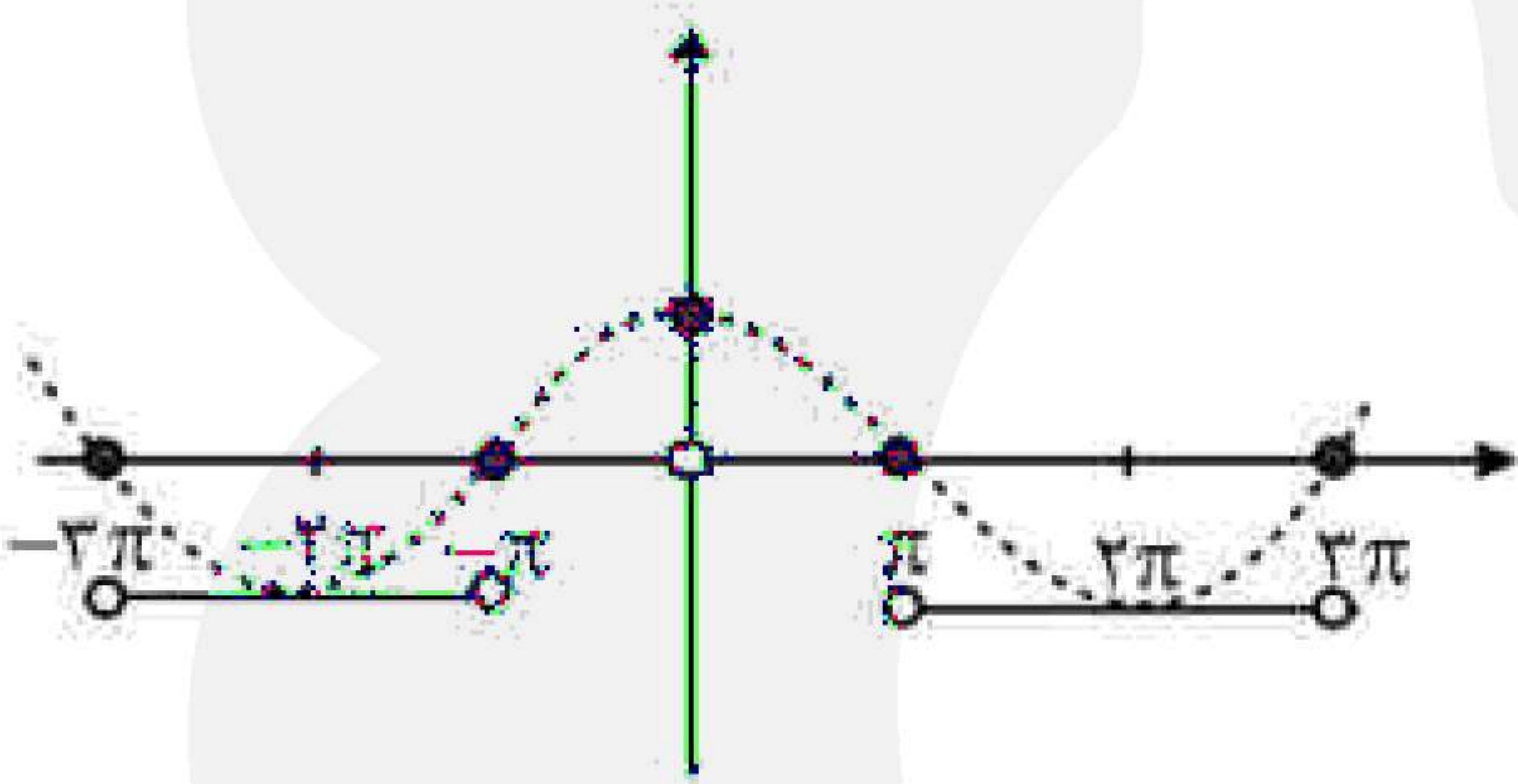
۴۷- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{2x} - 2 = 0 \Rightarrow 2 - \sqrt{2a + b} = 0 \Rightarrow 2a + b = 4 \Rightarrow b = 4 - 2a$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - (ax + 4 - 2a)}{2x - 4} \times \frac{2 + 2}{2 + 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x - a + 2)}{2(x - 2)} = \frac{5}{2} \Rightarrow a = -1, b = 6 \Rightarrow a + b = 5$$

۴۸- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

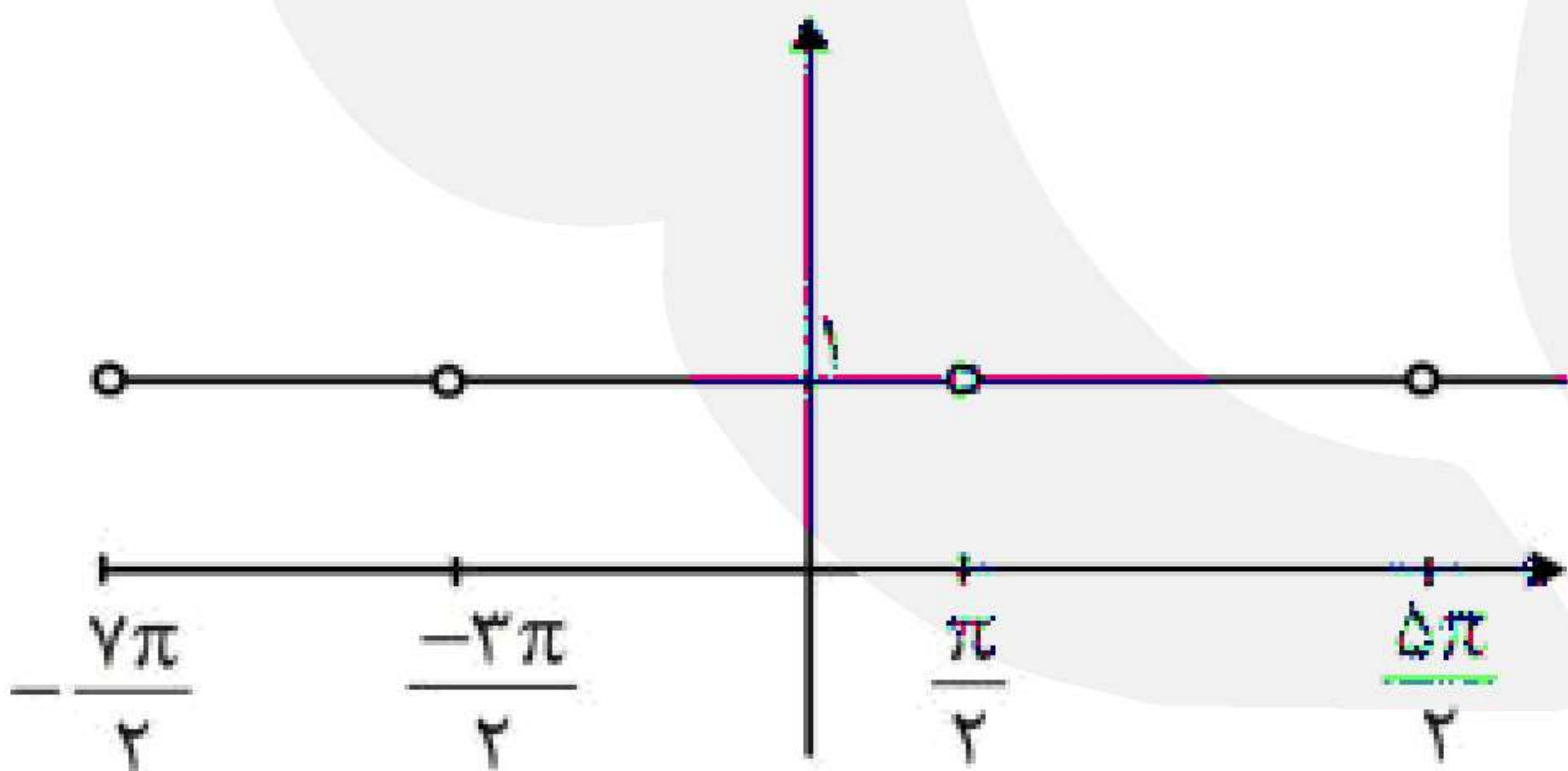
با توجه به نمودار تابع  $a = 1$  نقطه حد دارد ولی پیوسته نیست و در  $b = 4$  نقطه حد ندارد.



۴۹- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$y = \frac{|1 - \sin x|}{1 - \sin x}, \quad 1 - \sin x \geq 0$$

به شکل زیر است، پس در تمام نقاط بازه حد دارد.



۵۰- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\begin{cases} x \rightarrow 6^+ \Rightarrow L_1 = 3 - (-3) = 6 \\ x \rightarrow 6^- \Rightarrow L_2 = 2 - (-2) = 4 \end{cases} \Rightarrow 6 - 4 = 2$$