

گنجینه سوال رایگان

+ پاسخ تشریحی

یاوران دانش



راه های ارتباطی با ما:

www.Dyavari.com

۰۲۱-۷۶۷۰۳۸۵۸

۰۹۱۲-۳۴ ۹۴ ۱۳۴

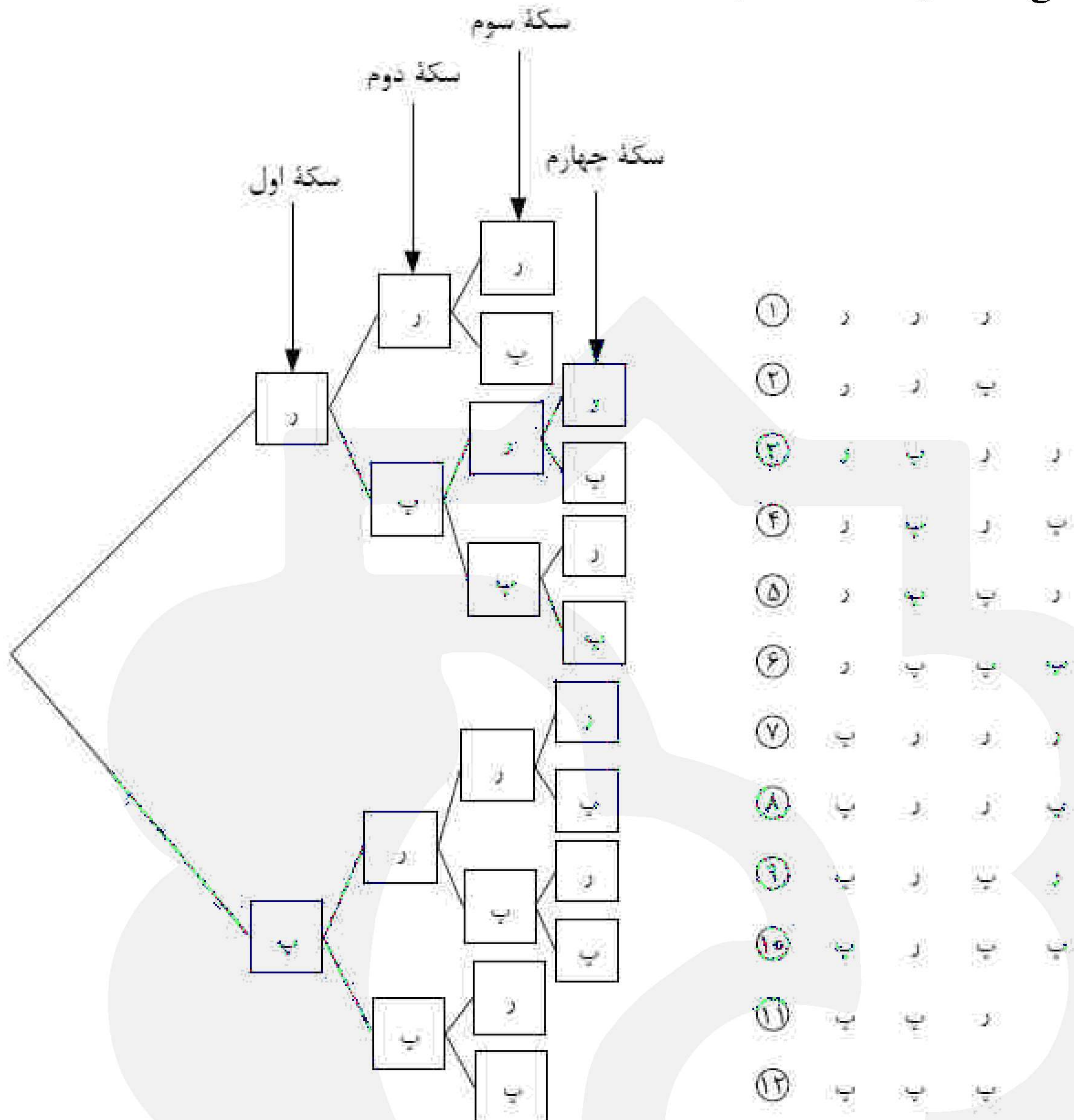


	۱	۲	۳	۴
۱ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۴ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۵ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۶ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۷ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۸ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۹ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۰ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۱ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۲ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۱۳ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۴ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۵ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۶ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۷ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۸ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۱۹ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۰ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۱ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۲۲ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۳ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۴ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۵ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۶ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۷ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۸ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۹ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۰ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۳۱ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۳۲ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۳ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۴ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

	۱	۲	۳	۴
۳۵ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۶ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۷ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۸ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۹ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۴۰ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۴۱ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۴۲ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۴۳ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۴۴ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۴۵ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۴۶ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۴۷ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۴۸ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۴۹ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۵۰ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>



۱- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. کل حالت‌های ممکن:



در مجموع ۱۲ حالت داریم که در حالت‌های ۴ و ۵ و ۸ و ۹ و ۱۱ (۵ حالت) دقیقاً ۲ «پشت» ظاهر می‌شود.

۲- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. احتمال اینکه مهره اول قرمز، مهره دوم سفید و مهره سوم قرمز باشند، برابر است با:

$$\frac{n}{n+3} \times \frac{3}{n+2} \times \frac{n-1}{n+1} = \frac{5}{28}$$

با جایگذاری مقادیر گزینه‌ها متوجه می‌شویم به ازای $n = 5$ معادله برقرار است.

۳- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. میانگین فروش ۳ نماینده تصادفی انتخاب شده باید برابر ۳ باشد، بنابراین مجموع فروش آن‌ها الزاماً ۹ است. نمونه‌هایی با اندازه ۳ که مجموع فروش آن‌ها ۹ است عبارتند از: $\{1, 3, 5\}$ و $\{2, 2, 5\}$

$$\frac{2}{\binom{5}{3}} = \frac{2}{10} = 0.2$$

بنابراین احتمال موردنظر سؤال برابر است با:



۴- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. تعداد حالت‌های مجموع ۳ تاس برابر است با:

مجموع	۳	۴	۵	۶	۷	۸
حالت	۱	۳	۶	۱۰	۱۵	۲۱

پس روی هم ۵۶ حالت مورد قبول است. حالا برای ۳ عدد متفاوت فقط در مجموع‌های ۶ و ۷ و ۸ جستجو کنیم:
۲۱۳ ، ۴۲۱ ، ۴۳۱ ، ۵۱۲
۶ حالت ۶ حالت ۶ حالت ۶ حالت

$$P(\text{مجموع کمتر مساوی ۸} | \text{متفاوت}) = \frac{24}{56} = \frac{3}{7}$$

پس:

۵- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$P(\text{سالم}) = P(A) \times P(\text{سالم} | A) + P(B) \times P(\text{سالم} | B) + P(C) \times P(\text{سالم} | C)$$

$$= \frac{30}{100} \times \frac{99}{100} + \frac{45}{100} \times \frac{98}{100} + \frac{25}{100} \times \frac{96}{100} = 0.978 \Rightarrow 97.8\%$$

۶- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\left. \begin{aligned} P(\text{حادث یکی}) &= P(A \cup B) = 0.65 \\ P(\text{حداکثر یکی}) &= 1 - P(A \cap B) = 0.85 \Rightarrow P(A \cap B) = 0.15 \end{aligned} \right\} \Rightarrow P(A) + P(B) = 0.8$$

$$P(A) \times P(B) = 0.15$$

حالا چون A و B مستقل اند؛ داریم:

پس جمع و ضرب این احتمال‌ها ۰/۸ و ۰/۱۵ است و ریشه‌های معادله $x^2 - 0.8x + 0.15 = 0$ هستند.

$$x = \frac{0.8 \pm \sqrt{0.64 - 0.6}}{2} = \frac{0.8 \pm 0.2}{2} = \begin{cases} 0.5 \\ 0.3 \end{cases}$$

چون $P(A) < P(B')$ پس $P(B) = 0.3$ و داریم:

$$P(A - B) = P(A \cap B') = P(A)P(B') = 0.5(1 - 0.3) = 0.5(0.7) = 0.35$$

۷- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. داده‌های اصلی:

$$x_1, x_2, \dots, x_n$$

$$n = 10, \bar{x} = 20, \sigma^2 = 9 \Rightarrow \sigma = 3 \quad (\text{انحراف معیار قدیم})$$

$$4(x_1 + 5), 4(x_2 + 5), \dots, 4(x_n + 5)$$

$$n = 10, \bar{x}_{\text{جدید}} = 4(\bar{x}_{\text{قدیم}} + 5) = 4(20 + 5) = 100$$

$$\sigma = 4\sigma_{\text{قدیم}} = 4(3) = 12$$

انحراف معیار جدید

$$CV_{\text{جدید}} = \frac{\sigma_{\text{جدید}}}{\bar{x}_{\text{جدید}}} = \frac{12}{100} = 0.12$$

داده‌های جدید:



۸- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$P(A'|B) = \frac{P(A' \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B - A)}{P(B)} = \frac{P(B) - P(A)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} - \frac{P(A)}{P(B)} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow 1 - \frac{P(A)}{P(B)} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{P(A)}{P(B)} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{P(B)}{P(A)} = \frac{3}{2}$$

۹- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. در کلمه «پاستوریزه» ۹ حرف غیرتکراری داریم. در کلمه ۶ حرفی موردنظر پ و ت حضور دارند. بنابراین کافی است از ۷ حرف باقی مانده فقط ۴ حرف را انتخاب کنیم: $\binom{7}{4}$

$$\text{تعداد کل حالات} = \binom{7}{4} \times 6!$$

جایگشت ۵ شی

جایگشت درون بسته

تعداد حالاتی که پ و ت کنار هم باشند = $\binom{7}{4} \times 5! \times 2!$

$$\text{تعداد حالات موردنظر سؤال} = \binom{7}{4} 6! - \binom{7}{4} \times 5! \times 2!$$

$$= 35 \times 720 - 35 \times 120 \times 2 = 16800$$

۱۰- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. دو حالت وجود دارد، در دو پارک ۲ درخت و در ۲ پارک یک درخت یا آنکه در یک پارک ۳ درخت و در ۳ پارک یک درخت:

$$\binom{4}{2} \binom{6}{2} \binom{4}{2} \binom{2}{1} + \binom{4}{1} \binom{6}{3} \times 3! = 1560$$

۱۱- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. با فرض $P(A \cap B) = x$:

$$P(A \cup B) = 4x, P(A') = 2x \Rightarrow P(A) = 1 - 2x$$

$$P(B') = 3x \Rightarrow P(B) = 1 - 3x$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$4x = 1 - 2x + 1 - 3x - x \Rightarrow x = 0/2$$

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = 1 - 2x - x = 1 - 3x = 1 - 3(0/2) = 0/4$$

۱۲- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. با ۵ رقم فرد و ۴ رقم زوج مواجه هستیم که برای آنکه به صورت یکی در میان قرار بگیرد، لازم است که به صورت زیر چیده شوند:

فرد زوج فرد زوج فرد زوج فرد زوج فرد

همانطور که می بینید، چنین عددی به رقم فرد ختم شده و رقم یکان در این حالت فرد است که با زوج بودن عدد (شرط اولیه سؤال) در تناقض است و لذا احتمال وقوع چنین پدیده‌ای صفر است.



«بانک سوال یاوران دانش»

$$n(s) = 6 \times 6 = 36$$

۱۳- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$A = \{(1,6), (6,1), (2,5), (5,2), (3,4), (4,3)\} \Rightarrow P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

$$B = \{2, 4, 6\} \times \{2, 4, 6\} \Rightarrow n(B) = 9 \Rightarrow P(B) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$$

زوج مرتب

$$A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cap B) = 0 \Rightarrow \text{A, B ناسازگارند}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{1}{6} + \frac{1}{4} = \frac{5}{12}$$

۱۴- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. این شهر $\frac{1}{3}$ زمان شبانه روز را در تاریکی و $\frac{2}{3}$ آن را در روشنایی روز سپری می کند. نمودار درختی احتمال کل را رسم می کنیم:

$$\begin{array}{l} \frac{1}{3} \swarrow \text{تاریکی شب} \times 0/0003 = \frac{0/0003}{3} \\ \searrow \\ \frac{2}{3} \swarrow \text{روشنایی روز} \times 0/0001 = \frac{0/0002}{3} \end{array}$$

مجموع احتمالها $\frac{0/0005}{3}$ یا $\frac{5}{30000}$ و درصد احتمال آن $\frac{5}{3000}$ یعنی $\frac{1}{600}$ است.

۱۵- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. علی، امیر و رضا را یک بسته در نظر می گیریم تعداد جایگشت های این بسته با ۳ نفر دیگر ۴! است. علی و رضا نیز می توانند با هم جابه جا شوند پس: تعداد اعضای مجموعه فضای نمونه ای نیز ۶! است.

$$n(A) = 2 \times 4! = 2 \times 24 = 48$$

$$N(s) = 6!$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{2 \times 4!}{6!} = \frac{2}{6 \times 5} = \frac{1}{15}$$

در نتیجه:



۱۶- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. چون تعداد داده‌ها فرد است، تعداد آن‌ها را $2n+1$ فرض کرده و آن‌ها را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

چارک دوم یا میانه این داده‌ها، داده وسط است که n داده قبل از آن و n داده بعد از آن قرار می‌گیرند، پس داده‌ها به صورت زیر به دو نیمه تقسیم می‌شوند:

$\underbrace{X_1, X_2, \dots, X_n}_{\text{نیمه اول داده‌ها}} \quad \underbrace{4}_{\text{میانه}} \quad \underbrace{X'_1, X'_2, \dots, X'_n}_{\text{نیمه دوم داده‌ها}}$

حالا قرار است که قرینه میانگین داده‌های نیمه اول، ۸ واحد کوچک‌تر از میانگین داده‌های نیمه دوم باشد، یعنی به زبان ریاضی:

$$-\left(\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}\right) = \left(\frac{X'_1 + X'_2 + \dots + X'_n}{n}\right) - 8$$

$$\Rightarrow 8 = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} + \frac{X'_1 + X'_2 + \dots + X'_n}{n}$$

$$\Rightarrow 8 = \frac{\overbrace{X_1 + X_2 + \dots + X_n} + \overbrace{X'_1 + X'_2 + \dots + X'_n}}{n}$$

$$\Rightarrow \underbrace{X_1 + X_2 + \dots + X_n} + \underbrace{X'_1 + X'_2 + \dots + X'_n} = 8n$$

میانگین کل داده‌ها برابر است با:

$$\frac{\overbrace{X_1 + X_2 + \dots + X_n} + 4 + \overbrace{X'_1 + X'_2 + \dots + X'_n}}{2n+1} = \frac{8n+4}{2n+1} = 4$$



۱۷- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

دو مهره انتقالی از B به A

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \frac{\binom{2}{2}}{\binom{5}{2}} \Rightarrow \text{دو سفید} \Rightarrow \left[\begin{matrix} 3+2 \\ 4 \end{matrix} \right] \Rightarrow \frac{\binom{5}{2} + \binom{4}{2}}{\binom{9}{2}} \Rightarrow \text{دو هم‌رنگ} \\ &\Rightarrow \frac{\binom{3}{2}}{\binom{5}{2}} \Rightarrow \text{دو سیاه} \Rightarrow \left[\begin{matrix} 3 \\ 4+2 \end{matrix} \right] \Rightarrow \frac{\binom{3}{2} + \binom{6}{2}}{\binom{9}{2}} \Rightarrow \text{دو هم‌رنگ} \\ &\Rightarrow \frac{\binom{2}{1} \binom{3}{1}}{\binom{5}{2}} \Rightarrow \text{یک سفید و یک سیاه} \Rightarrow \left[\begin{matrix} 3+1 \\ 4+1 \end{matrix} \right] \\ &\Rightarrow \frac{\binom{4}{2} + \binom{5}{2}}{\binom{9}{2}} \Rightarrow \text{دو هم‌رنگ} \end{aligned}$$

$$P = \frac{1}{10} \times \frac{16}{36} + \frac{3}{10} \times \frac{18}{36} + \frac{6}{10} \times \frac{16}{36} = \frac{16 + 54 + 96}{360} = \frac{166}{360} = \frac{83}{180}$$

۱۸- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

(یک زوج) یا (هیچ زوج) \equiv حداکثر یک زوج انتخاب شود

انتخاب یک زوج (خانواده)
(\equiv انتخاب ۲ نفر)

$$\text{تعداد کل حالات انتخابی} = \binom{7}{4} \times \underbrace{\binom{2}{1} \binom{2}{1} \binom{2}{1} \binom{2}{1}}_{\text{انتخاب یک نفر از هر زوج}} + \binom{7}{1} \times \binom{6}{2} \times \underbrace{\binom{2}{1} \binom{2}{1}}_{\text{انتخاب یک نفر از هر زوج}}$$

انتخاب ۴ خانواده (زوج) از ۷ خانواده (زوج)

انتخاب ۲ خانواده (زوج) از باقی مانده خانواده ها

$$\text{تعداد کل حالات انتخاب} = 980 = (35 \times 16) + (7 \times 15 \times 4)$$

۱۹- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$P(\text{معدل بالای } 19) = \frac{4}{5} \times \frac{25}{100} + \frac{1}{5} \times \frac{15}{100} = \frac{115}{500} = \frac{23}{100} \rightarrow 23\%$$

مدرسه A مدرسه B



۲۰- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$n(S) = 9000$ تعداد کل اعداد چهار رقمی

$n(A) = 900$ تعداد اعدادی که مجموع دو رقم وسط ۱۰ باشد

$$\frac{9}{9} \times \frac{10}{10} \times \frac{10}{10} \times \frac{10}{10}$$

$$\frac{9}{9} \times \frac{x}{10} \times \frac{y}{10} \times \frac{10}{10}$$

مجموع ۱۰

$$\%P(A) = \frac{9 \times 9 \times 10}{9000} \times 100 = \%9$$

x	y
۱	۹
۲	۸
۳	۷
۴	۶
۵	۵

x	y
۶	۴
۷	۳
۸	۲
۹	۱

«بانک سوال یاوران دانش»

۲۱- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. کلاً ۷ کتاب داریم که تعداد جایگشت‌های آنها ۷! است.
۳ کتاب ریاضی نسبت به هم نمی‌توانند جابه‌جا شوند. بنابراین تعداد کل جایگشت‌ها

$$\frac{7!}{3!} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{6} = 840$$

۲۲- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. مقدار وسط را \bar{X} در نظر می‌گیریم. سه داده اولیه به صورت $\bar{X} - 3$, \bar{X} , $\bar{X} + 3$ درمی‌آید.

$$\sigma_1^2 = \frac{(-3)^2 + 0^2 + 3^2}{3} = \frac{18}{3} = 6$$

$$\sigma_2^2 = \frac{(-6)^2 + 0^2 + (6)^2}{3} = \frac{72}{3} = 24$$

سه داده نهایی به صورت $\bar{X} - 6$, \bar{X} , $\bar{X} + 6$ درمی‌آید.

$$\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} = \frac{24}{6} = 4$$

نسبت واریانس داده‌های جدید را به واریانس داده‌های قدیمی می‌یابیم.



۲۳- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. از آنجا که احتمال پیشامد مجموع دو تاس مساوی n ، برابر با $\frac{5}{36}$ است، n می تواند یکی از اعداد ۶ یا ۸ باشد، ببینید:

$$5 \text{ حالت} \Rightarrow (3, 3)(4, 2)(2, 4)(5, 1)(1, 5) \Rightarrow 6 = \text{جمع دو تاس} \Rightarrow n = 6$$

$$5 \text{ حالت} \Rightarrow (4, 4)(5, 3)(3, 5)(6, 2)(2, 6) \Rightarrow 8 = \text{جمع دو تاس} \Rightarrow n = 8$$

پس ۶ یا ۸ داده آماری موجود است، یعنی تعداد داده های آماری حتماً عددی زوج است. می دانیم که در این حالت، میانه برابر با میانگین دو داده وسطی است و تنها در صورتی می تواند یکی از خود داده ها باشد که دو داده وسط برابر باشند. وقتی تعداد داده ها زوج است و دو داده وسط برابرند، با حذف هر کدام از داده ها، میانه (چارک دوم) تغییر نمی کند. بنابراین احتمال وقوع چنین اتفاقی صفر است.

۲۴- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$CV = 5 \times (CV \text{ قدیم})$$

$$\frac{2\sigma}{2\bar{x} - 7} = 5 \times \frac{\sigma}{\bar{x}} \Rightarrow \frac{2}{2\bar{x} - 7} = \frac{5}{\bar{x}} \Rightarrow 10\bar{x} - 35 = 2\bar{x} \Rightarrow \bar{x} = \frac{35}{8}$$

میانگین اولیه

$$\bar{x}_{\text{جدید}} = 2\bar{x}_{\text{قدیم}} - 7 = 2 \times \frac{35}{8} - 7 = 8.75 - 7 = 1.75$$

(یادآوری: اگر هریک از داده های x_1, x_2, \dots, x_n را در a ضرب و سپس با b جمع کنیم، انحراف معیار داده ها فقط $|a|$ برابر می شود اما میانگین جدید $b + a\bar{x}_{\text{قدیم}}$ خواهد شد.)

۲۵- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. مطابق تعریف احتمال شرطی:

$$\left. \begin{array}{l} P(A) = 0.12 \text{ احتمال مبتلا شدن} \\ P(B|A) = 0.6 \text{ احتمال بهبود یافت به شرط مبتلا شدن} \end{array} \right\} \Rightarrow P(A \cap B) = P(A) \times P(B|A)$$

$$= 0.12 \times 0.6 = 0.072 \Rightarrow 7.2\%$$



۲۶- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$\bar{x} = 6 \Rightarrow 2, 2, 4, 5, 7, 10, 12$: محاسبه ضریب تغییرات در حالت اول

$$\sigma = \sqrt{\frac{2(2-6)^2 + (4-6)^2 + (5-6)^2 + (7-6)^2 + (10-6)^2 + (12-6)^2}{7}} = \sqrt{\frac{90}{7}}$$

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{\frac{3\sqrt{10}}{\sqrt{7}}}{6} = \frac{\sqrt{10}}{2\sqrt{7}} = 0.5\sqrt{\frac{10}{7}}$$

$R_1 = 12 - 2 = 10$ در حالت اولیه

با حذف داده‌های کوچک‌تر از Q_1 و بزرگ‌تر از Q_3 داریم:

$$\cancel{2}, \boxed{2}, 4, \boxed{5}, 7, \boxed{10}, \cancel{12}$$

$\downarrow \quad \quad \downarrow \quad \quad \downarrow$
 $Q_1 \quad \quad Q_2 \quad \quad Q_3$

$R_2 = 10 - 2 = 8$ در حالت دوم

$$20\% \text{ کاهش} \Rightarrow -20 = \frac{8-10}{10} \times 100 = \text{درصد تغییرات}$$

۲۷- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. با توجه به داده‌های صورت سؤال داریم:

$$\begin{cases} P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = 0.1 \\ P(B - A) = P(B) - P(A \cap B) = 0.2 \end{cases} \Rightarrow P(A) + P(B) = 0.3 + 2P(A \cap B)$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.4 \Rightarrow P(A) + P(B) = 0.4 + P(A \cap B)$$

$$0.4 + P(A \cap B) = 0.3 + 2P(A \cap B) \Rightarrow P(A \cap B) = 0.1$$

بنابراین داریم:

حال خواسته سؤال را به دست می‌آوریم:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad P(B) - P(A \cap B) = 0.2, \quad P(A \cap B) = 0.1$$

$$P(A|B) = \frac{0.1}{0.3} = \frac{1}{3}$$



$$۱۳ - ۲ + ۱ = ۱۲$$

۲۸- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. تعداد این داده‌ها برابر است با:

حالا اگر این ۱۲ داده را به صورت مرتب از کوچک به بزرگ بنویسیم، چارک اول برابر با معدل داده‌های سوم و چهارم و چارک سوم با معدل داده‌های نهم و دهم است. یعنی:

$$Q_1 = \binom{۱۶}{۴} + \binom{۱۶}{۵} \xrightarrow{\text{اصل پاسکال}} = \binom{۱۷}{۵}$$

$$Q_3 = \frac{\binom{۱۶}{۱۰} + \binom{۱۶}{۱۱}}{۲} \xrightarrow{\text{پاسکال}} = \frac{\binom{۱۷}{۱۱}}{۲}$$

$$Q_1 + Q_3 = \frac{\binom{۱۷}{۵} + \binom{۱۷}{۱۱}}{۲} \xrightarrow{\binom{۱۷}{۱۱} = \binom{۱۷}{۶}} \frac{\binom{۱۷}{۵} + \binom{۱۷}{۶}}{۲} \xrightarrow{\text{اصل پاسکال}} = \frac{\binom{۱۸}{۶}}{۲}$$

بنابراین جواب سؤال برابر با نصف عدد $\binom{۱۸}{۶}$ یا همان $\binom{۱۸}{۱۲}$ است.

۲۹- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. اگر X قیمت سال گذشته باشد:

$$\text{قسمت امسال} = X + \frac{۵۰}{۱۰۰}X = X + \frac{۱}{۲}X = \frac{۳}{۲}X$$

می‌دانیم اگر هریک از داده‌ها a برابر شود، واریانس داده‌ها، a^2 برابر می‌شود، بنابراین:

$$\text{واریانس قیمت‌های امسال} = \left(\frac{۳}{۲}\right)^2 \times ۶۴۰۰ = ۱۴۴۰۰$$

$$\text{انحراف معیار جدید قیمت‌ها} = \sqrt{۱۴۴۰۰} = ۱۲۰$$

$$\bar{X} = \frac{۲۲ + ۱۲ + ۱۴}{۳} = \frac{۴۸}{۳} = ۱۶$$

۳۰- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. میانگین برابر است با:

$$CV_2 = \frac{۲۵}{۱۰۰} = \frac{۱}{۴} \Rightarrow \sigma_2 = \frac{۱}{۴}\bar{X} = \frac{۱}{۴} \times ۱۶ = ۴$$

طبق فرمول ضریب تغییر:

$$\sigma_1^2 = ۱۶$$

پس:

$$\sigma_1^2 = \frac{(x_1 - ۱۶)^2 + \dots + (x_{۱۵} - ۱۶)^2}{۱۵} \quad \text{واریانس اولیه}$$

$$\sigma_2^2 = \frac{(x_1 - ۱۶)^2 + \dots + (x_{۱۵} - ۱۶)^2 + (۱۴ - ۱۶)^2 + (۱۲ - ۱۶)^2 + (۲۲ - ۱۶)^2}{۱۵ + ۳} = ۱۶ \quad \text{واریانس جدید}$$

$$\frac{۱۵\sigma_1^2 + ۱۶ + ۴ + ۳۶}{۱۸} = ۱۶ \Rightarrow ۱۵\sigma_1^2 = ۲۸۸ - ۵۶ = ۲۳۲ \Rightarrow \sigma_1^2 = \frac{۲۳۲}{۱۵} \approx ۱۵/۴۷$$

پس داریم:



۳۱- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

مهره اول سفید باشد: A

مهره دوم سفید باشد: B

$$p(A|B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{\frac{3}{7} \times \frac{6}{8}}{\left(\frac{3}{7} \times \frac{6}{8}\right) + \left(\frac{4}{7} \times \frac{5}{8}\right)} = \frac{18}{18+20} = \frac{18}{38} = \frac{9}{19}$$

۳۲- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

حالت I: رئوس A و C هم‌رنگ باشند، (۳ حالت) در این صورت برای هریک از رئوس B و D دو حالت داریم:

$$3 \times 1 \times 2 \times 2 = 12$$

↓ ↓ ↓ ↓

A C B D

حالت II: رئوس A و C هم‌رنگ نباشند (۳×۲ حالت) در این صورت خودبه‌خود رنگ رئوس B و D که حتماً

$$3 \times 2 \times 1 \times 1 = 6$$

↓ ↓ ↓ ↓

A C B D

هم‌رنگ هستند، مشخص می‌شود:

بنابراین طبق اصل جمع: $12 + 6 = 18$ حالت داریم.

«بانک سوال یاوران دانش»

۳۳- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

هفت جایگاه در نظر بگیرید. در خانه‌ی پنجم حرف «ق» می‌گذاریم. در چهار خانه‌ی قبل، باید الزاماً ۲ حرف «ق» و ۲ حرف غیر از آن یعنی «ل» و «م» قرار بگیرند ولی در جایگاه‌های بعد از جایگاه خانه پنجم هر ۳ حرف می‌توانند باشند:

$$\binom{4}{2} \times 2^2 \times 3^2 = 216$$



۳۴- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. برای آن که عدد تاس نفر اول، دو برابر تعداد شیرهای ظاهر شده در پرتاب نفر دوم را نشان دهد، حالت زیر متصور است:

$$\Rightarrow \frac{\binom{4}{1}}{2^4} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{24}$$

تاس ۲ بیاید و یک سکه شیر بیاید.

$$\Rightarrow \frac{\binom{4}{2}}{2^4} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{16}$$

تاس ۴ بیاید و دو سکه شیر بیاید.

$$\Rightarrow \frac{\binom{4}{3}}{2^4} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{24}$$

تاس ۶ بیاید و سه سکه شیر بیاید.

$$\frac{1}{24} + \frac{1}{16} + \frac{1}{24} = \frac{1}{12} + \frac{1}{16} = \frac{7}{48}$$

پس احتمال موردنظر برابر است با:

دقت کنید که اگر صفر سکه شیر بیاید، لازم است که تاس صفر بیاید!
و اگر هر چهار سکه شیر بیاید، لازم است که تاس ۸ بیاید!
واضح است که این دو حالت قابل قبول نیست.

۳۵- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. $\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41\}$ اعداد اول و کوچکتر از ۴۰

$$n(S) = \binom{13}{5} = \frac{13!}{(13-5)!5!} = 1287$$

اعداد اول بین ۱۳ و ۳۱ عبارتند از: ۱۷ و ۱۹ و ۲۳ و ۲۹ که باید از بین آنها سه عدد انتخاب کنیم:

$$n(A) = \binom{4}{3} = 4$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{4}{1287}$$

۳۶- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\begin{cases} n(S) = \binom{7}{5} = \frac{7!}{5!2!} = 21 \\ n(A) = \binom{6}{4} = \frac{6!}{4!2!} = 15 \end{cases} \Rightarrow p(A) = \frac{15}{21} = \frac{5}{7}$$



۳۷- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. در مورد مجموعه n عضوی A :

تعداد کل زیرمجموعه‌های ۳ عضوی: $\binom{n}{3}$

تعداد زیرمجموعه‌های ۳ عضوی، فاقد عدد ۵: $\binom{n-1}{3}$

$$\frac{\binom{n-1}{3}}{\binom{n}{3}} = \frac{\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \times 2 \times 3}}{\frac{n(n-1)(n-2)}{1 \times 2 \times 3}} = \frac{n-3}{n}$$

پس احتمال پیشامد موردنظر برابر است با:

حاصل احتمال فوق را برابر با ۴۰ درصد قرار می‌دهیم:

$$\frac{n-3}{n} = \frac{40}{100} \Rightarrow \frac{n-3}{n} = \frac{2}{5} \Rightarrow 5n - 15 = 2n \Rightarrow 3n = 15 \Rightarrow n = 5$$

در مورد مجموعه m عضوی B :

تعداد زیرمجموعه‌های ۳ عضوی: $\binom{m}{3}$

تعداد زیرمجموعه‌های ۵ عضوی: $\binom{m}{5}$

$$\binom{m}{3} = \binom{m}{5} \Rightarrow m = 3 + 5 = 8$$

تعداد این‌ها را برابر قرار می‌دهیم:

$$\left[\frac{m-n}{2} \right] \xrightarrow[n=5]{m=8} \left[\frac{3}{2} \right] = \left[2\sqrt{2} \right] \xrightarrow{\sqrt{2} \approx 1/4} 2$$

نهایتاً داریم:

۳۸- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

50 = مجموعه اعداد اول کوچک‌تر از $50 = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47\}$

$$n(S) = \binom{15}{4} = 1365$$

اعداد اول بین ۱۱ و ۳۷ عبارت‌اند از: ۱۳, ۱۷, ۱۹, ۲۳, ۲۹, ۳۱ که باید از بین آن‌ها دو عدد انتخاب شود، زیرا اعداد اول

$$n(A) = \binom{6}{2} = 15$$

۱۱ و ۳۷ قبلاً انتخاب شده‌اند:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{15}{1365} = \frac{1}{91}$$



۳۹- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. چون داده‌ها از کوچک به بزرگ نوشته شده‌اند، پس دامنه تغییرات اولیه برابر است با:

$$X_n - X_1$$

حالا اگر عدد m را به داده اول اضافه کنیم، مقدار آن زیاد و دامنه تغییرات کم می‌شود. این موضوع تا جایی ادامه می‌یابد که نهایتاً $X_1 + m$ از X_2 بیشتر شود و در این صورت X_2 کوچک‌ترین داده شده و دامنه تغییرات به کمترین مقدارش که برابر با $X_n - X_2$ است، می‌رسد و با دامنه تغییرات اولیه، مساوی نخواهد شد.

تنها حالت ممکن، این است که اگر مقدار افزایش m به گونه‌ای باشد که $X_1 + m$ حتی از X_n هم بیشتر شود، آن‌گاه $X_1 + m$ بزرگ‌ترین داده و X_2 کوچک‌ترین داده خواهد بود و دامنه تغییرات برابر است با: $X_1 + m - X_2$

حالا این مقدار را با دامنه تغییرات اولیه برابر قرار می‌دهیم:

$$X_n - X_1 = X_1 + m - X_2 \Rightarrow m = X_n - 2X_1 + X_2$$

۴۰- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. مثلث‌های OAH' و OBH به حالت دو زاویه برابر (زوایای قائمه و زوایای متقابل به رأس) در شکل پروانه‌ای متشابه‌اند.

از طرفی مثلث‌های OAH' و AHC نیز به حالت دو زاویه (زوایای قائمه و یک زاویه مشترک) متشابه‌اند.

پس مثلث‌های OBH و AHC نیز متشابه بوده و طبق اضلاع متناسب، اضلاع یکی، k برابر اضلاع دیگری است.

پس اگر برای مثال اضلاع مثل OBH را داده‌های آماری با میانگین \bar{x} ، انحراف معیار σ و ضریب تغییرات $CV = \frac{\sigma}{\bar{x}}$

در نظر بگیریم، اضلاع مثلث AHC ، k برابر همین داده‌های آماری بوده و ضریب تغییرات آن‌ها برابر است با:

$$CV_2 = \frac{k\sigma}{k\bar{x}} = \frac{\sigma}{\bar{x}} = CV_1$$

پس نسبت ضرایب تغییرات برابر با یک است.

۴۱- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. اگر تعداد آزمون‌ها از هفته ششم به بعد برابر n باشد، چون در تمام این آزمون‌ها ۹ امتیاز کسب کرده، مجموع امتیازاتش $9n$ خواهد شد:

$$\text{میانگین تمام آزمون‌ها} = \frac{9n + 36}{5 + n} = 8 \Rightarrow 9n + 36 = 40 + 8n \Rightarrow n = 4$$

$$\text{تعداد کل آزمون‌ها} = 5 + 4 = 9$$

۴۲- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\binom{n}{3} = 120 \Rightarrow \frac{n!}{(n-3)!3!} = 120 \Rightarrow n(n-1)(n-2) = 720 \Rightarrow n = 10$$

$$\text{تعداد کل چندضلعی‌های محاطی ممکن} = \binom{10}{3} + \binom{10}{4} + \binom{10}{5} + \dots + \binom{10}{10}$$

$$= 2^{10} - \binom{10}{1} - \binom{10}{2} - \binom{10}{9} = 1024 - 1 - 10 - 10 = 993$$



۴۳- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. همواره برای هر مجموعه‌ای از داده‌ها، مجموع اختلاف داده‌ها از میانگین صفر می‌شود، بنابراین با فرض سؤال:

$$X_i - \bar{X} : -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_v - \bar{x})^2}{v}}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{(-3)^2 + (-2)^2 + (-1)^2 + 0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2}{7}} = \sqrt{4} = 2$$

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} \Rightarrow 0.4 = \frac{2}{\bar{x}} \Rightarrow \bar{x} = 5$$

۴۴- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\begin{cases} \bar{x} = 15 \Rightarrow \sigma^2 = \frac{(x_1 - 15)^2 + (x_2 - 15)^2 + \dots + (x_8 - 15)^2}{8} = 4 \\ \sigma = 2 \Rightarrow \sigma^2 = 4 \end{cases}$$

$$(x_1 - 15)^2 + (x_2 - 15)^2 + \dots + (x_8 - 15)^2 = 32 \quad (1)$$

چون میانگین دو عدد اضافه شده هم ۱۵ است $\left(\frac{12+18}{2} = 15\right)$ ، بنابراین در ۱۰ داده حاصل میانگین تغییر نمی‌کند.

$$\sigma_{\text{جدید}}^2 = \frac{(x_1 - 15)^2 + (x_2 - 15)^2 + \dots + (x_8 - 15)^2 + (12 - 15)^2 + (18 - 15)^2}{10}$$

$$\xrightarrow{\text{طبق (1)}} \sigma_{\text{جدید}}^2 = \frac{32 + 9 + 9}{10} = 5$$

۴۵- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

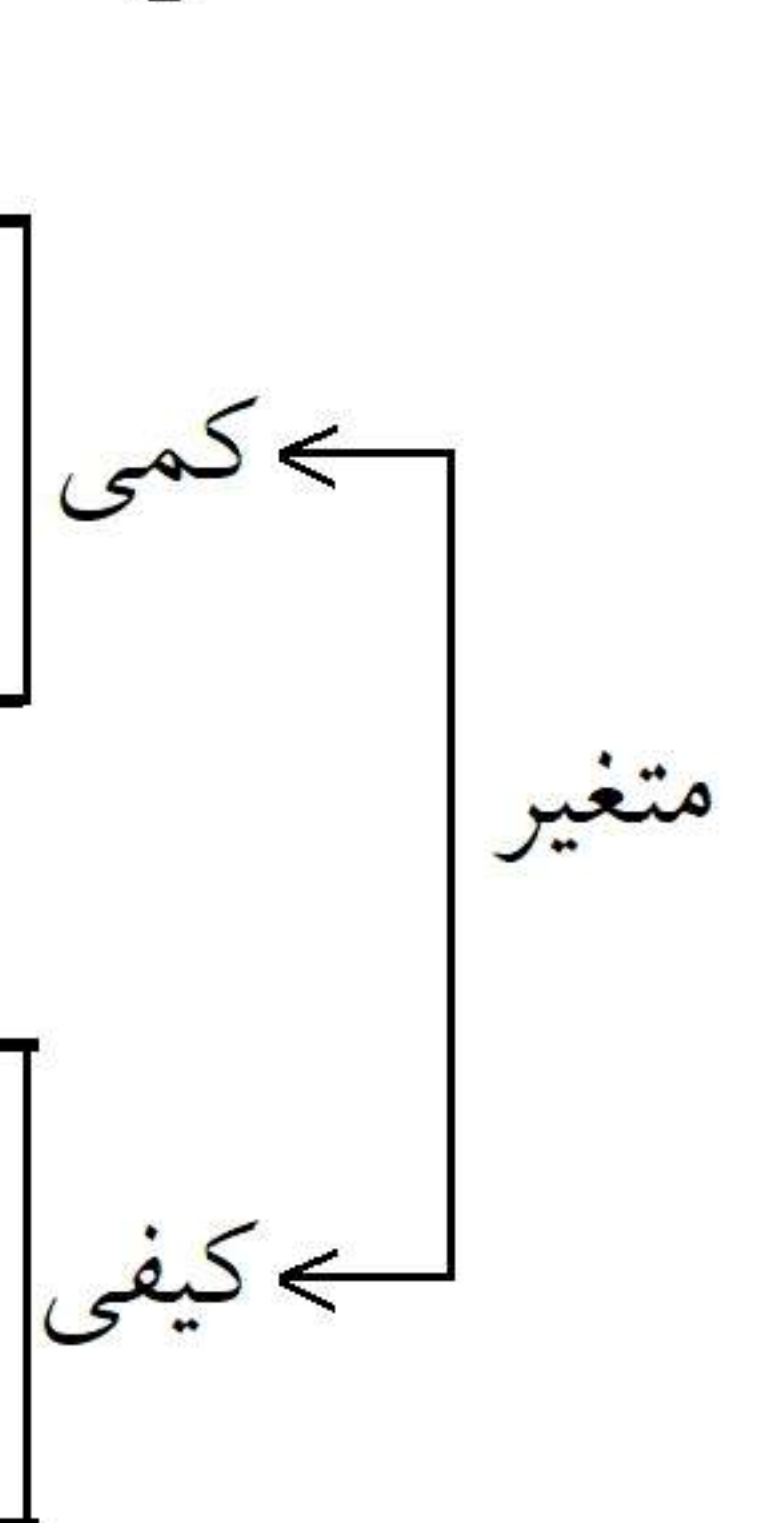
پیوسته: «حداکثر سرعت خودرو»، «میزان بنزین مصرفی برای هر ۱۰۰ کیلومتر»، «وزن

خودرو بدون راننده»، «اندازه طول و عرض و ارتفاع خودرو برحسب میلی‌متر»

گسسته: تعداد سرنشین مجاز

ترتیبی: «میزان رضایت مشتری به صورت کم، متوسط، زیاد و بسیار زیاد»

اسمی: «رنگ خودرو» «تیپ خودرو»



$$2x^2 + 3y^2 + 4z^2 + 5t^2 = 2(2)^2 + 3(1)^2 + 4(1)^2 + 5(4)^2 = 95$$



۴۶- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \rightarrow 0.25 = \frac{P(A \cap B)}{0.4} \rightarrow P(A \cap B) = 0.1$$

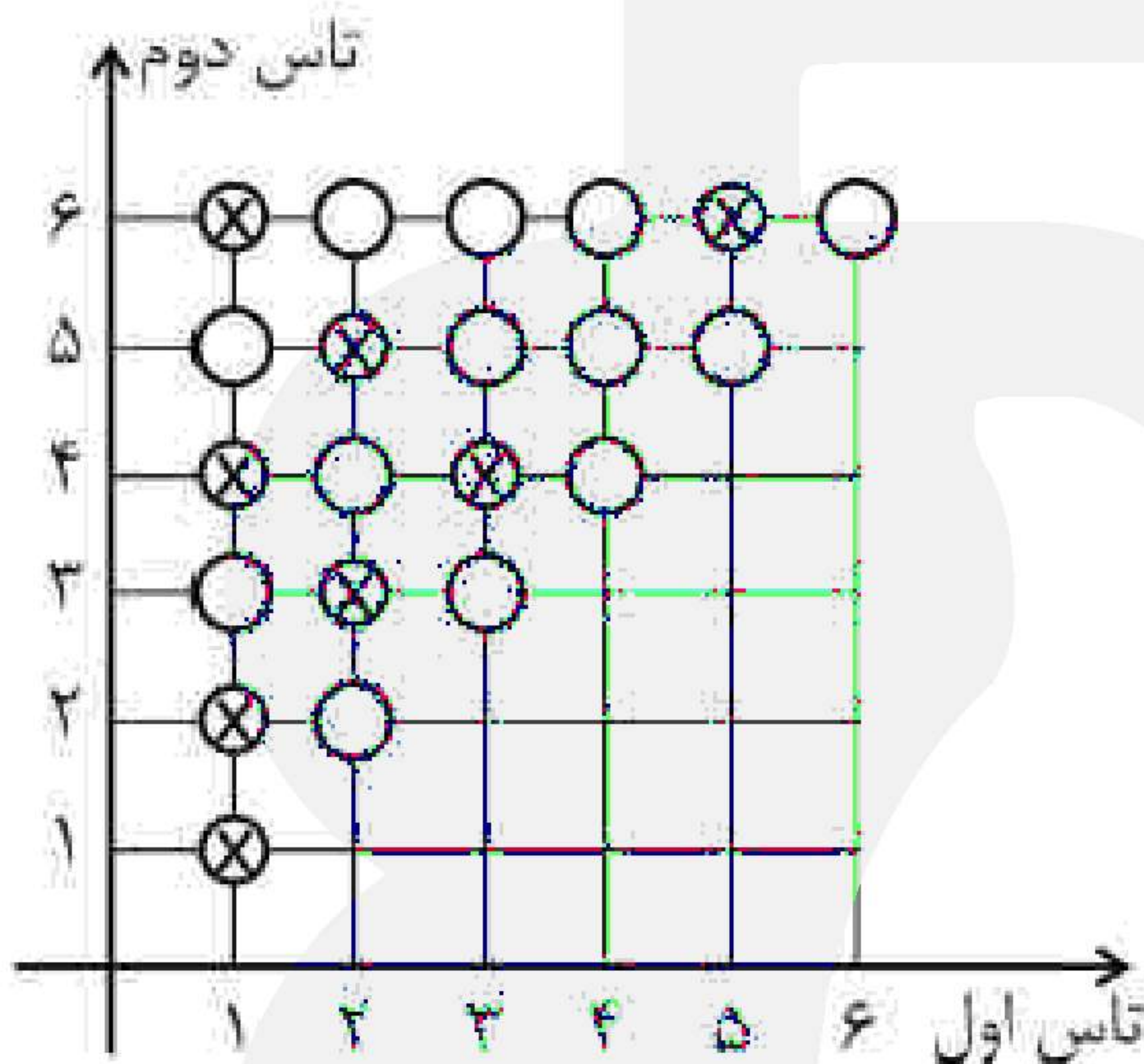
$$P(B - A) = 0.2 \rightarrow P(B) - \underbrace{P(A \cap B)}_{0.1} = 0.2 \rightarrow P(B) = 0.3$$

$$P(A'|B') = P((A \cup B)') = 1 - P(A \cup B) = 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B) = 1 - 0.4 - 0.3 + 0.1 = 0.4$$

$$P(B|A') = \frac{P(B \cap A')}{P(A')} = \frac{P(B - A)}{P(A')} = \frac{0.2}{1 - 0.4} = \frac{1}{3}$$

$$P(A'|B') = \frac{P(A' \cap B')}{P(B')} = \frac{0.4}{1 - 0.3} = \frac{4}{7}$$

۴۷- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.



با توجه به ۳۶ عضو موجود در تمام فضای نمونه‌ای برای دو تاس مطابق شکل، ابتدا با توجه به شرط داده شده در سؤال ۲۱ عضو فضای نمونه‌ای جدید (کاهش یافته) را مشخص می‌کنیم. (در شکل با علامت دایره مشخص شده است.) بنابراین در احتمال شرطی خواسته شده $n(S) = 21$ است. از بین دایره‌ها، نقاطی که با \times مشخص شده‌اند آنهایی هستند که حاصل جمع اعداد تاس اول و دوم یک عدد اول است.

$$n(A) = 8 \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{8}{21}$$

«بانک سوال یاوران دانش»

۴۸- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. در وضعیت اول رقم ۴ بین ۳ و ۵ نیست. سه رقم ۳ و ۴ و ۵ دارای $3! = 6$ جایگشت هستند. از این تعداد، در دو حالت ۳۴۵ و ۵۴۳ رقم ۴ بین دو رقم ۳ و ۵ است و در چهار حالت دیگر بین آن دو نیست. پس تعداد حالات مطلوب $\frac{4}{6}$ تعداد کل جایگشت‌های ۷ رقم است:

$$m = \frac{4}{6} \times 7! = \frac{2}{3} \times 7! = 3360$$

در وضعیت دوم از روش متمم استفاده می‌کنیم. یعنی حالتی را نظر می‌گیریم که هر سه رقم زوج کنار هم باشند و آن را از تعداد کل حالات ممکن جایگشت تفریق می‌کنیم:

$$n = 7! - 3! \times 5! = 5!(7 \times 6 - 6) = 5! \times 6 \times 6 = 6! \times 6 = 4320$$

$$n - m = 4320 - 3360 = 960$$



۴۹- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. انحراف معیار ۷ عدد صحیح زوج متوالی برابر است با:

$$\sigma = \sqrt{\frac{n^2 - 1}{12}} |d| = \sqrt{\frac{7^2 - 1}{12}} \times 2 = 4 \Rightarrow \bar{x} = 2\sigma = 8$$

$$\xrightarrow{y = 3(x+2)} \begin{cases} \bar{y} = 3(8+2) = 30 \\ \sigma = 3 \times 4 = 12 \end{cases}$$

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{y}} = \frac{12}{30} = \%40$$

پس:

$$\text{مرد} = A \Rightarrow A' = \text{زن} : n(A) = 25 \Rightarrow n(A') = 31$$

$$\text{دارای عینک} = B \Rightarrow B' = \text{بدون عینک} : n(B) = 22 \Rightarrow n(B') = 34$$

$$n(A' \cup B) = 34 \Rightarrow n(A \cap B') = ?$$

↓

$$n(A') + n(B) - n(A' \cap B) = 34$$

$$31 + 22 - n(B - A) = 34 \Rightarrow n(B - A) = 19$$

$$n(B) - n(A \cap B) = 19 \Rightarrow 22 - n(A \cap B) = 19 \Rightarrow n(A \cap B) = 3$$

$$n(A \cap B') = n(A - B) = n(A) - n(A \cap B) = 25 - 3 = 22$$

۵۰- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.