

# گنجینه سوال رایگان

+ پاسخ تشریحی

## یاوران دانش



راه های ارتباطی با ما:

[www.Dyavari.com](http://www.Dyavari.com)

۰۲۱-۷۶۷۰۳۸۵۸

۰۹۱۲-۳۴ ۹۴ ۱۳۴



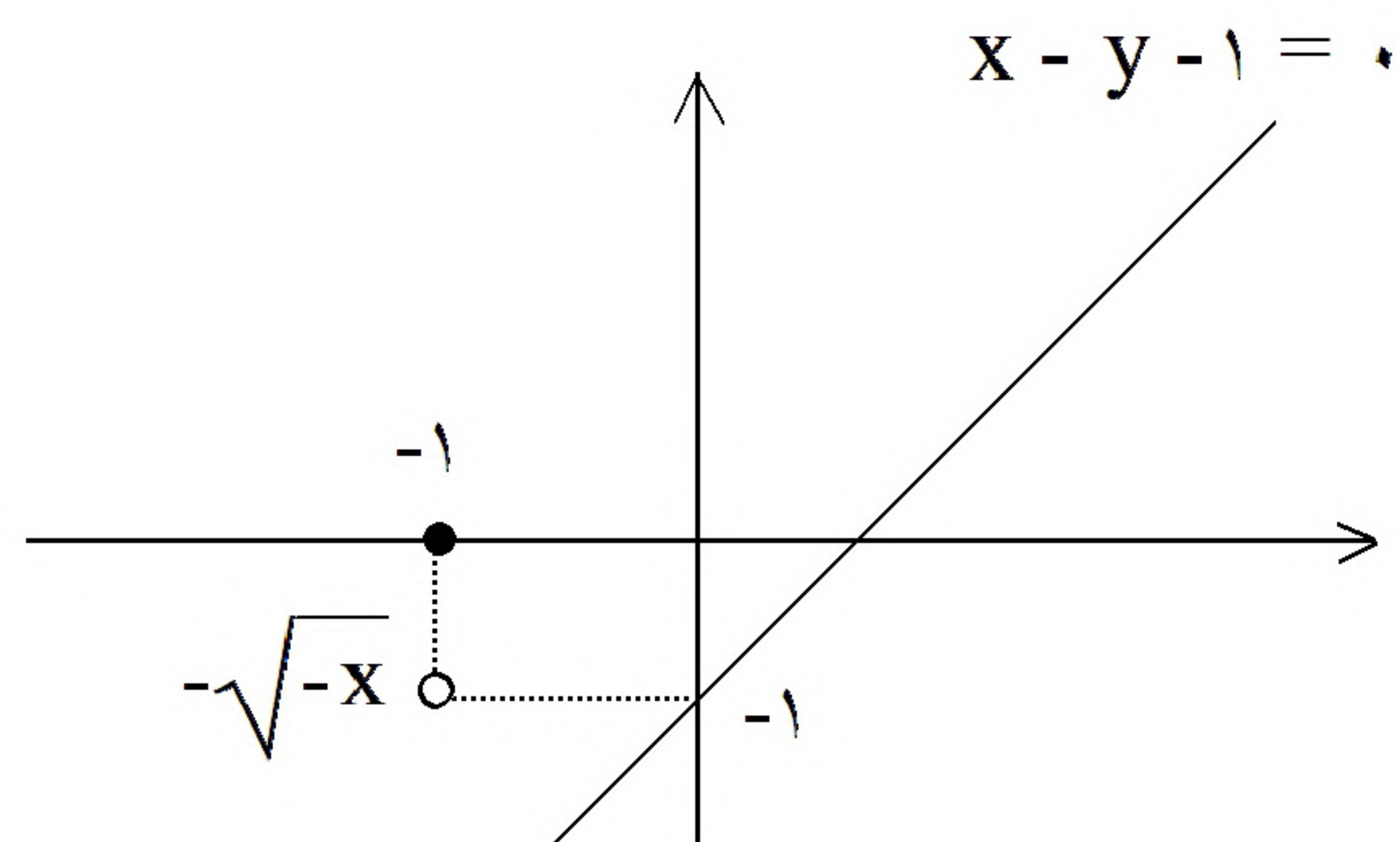


	۱	۲	۳	۴
۱ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۲ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۳ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۴ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۵ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۶ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۷ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۸ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۹ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۰ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۱ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۲ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۳ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۴ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۵ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۶ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۷ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۸ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۹ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۰ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۱ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۲ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۳ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۴ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۵ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۶ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۲۷ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۸ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۲۹ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۰ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۱ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>





۱- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.



$$y = -\sqrt{-x - [x^2]}$$

$$-x - [x^2] \geq 0 \Rightarrow x + [x^2] \leq 0$$

فقط در  $[-1, 0]$

$$A(a, -\sqrt{-a})$$

نقطه A را روی  $-\sqrt{-x}$  در نظر بگیرید پس داریم:

فاصله نقطه A از خط برابر است با:

$$\frac{|a + \sqrt{-a} - 1|}{\sqrt{2}}$$

مشتق

$$1 - \frac{1}{2\sqrt{-a}} = 0 \Rightarrow a = -\frac{1}{4}$$

$$\frac{|-\frac{1}{4} + \frac{1}{2} - 1|}{\sqrt{2}} = \frac{3}{4\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{8}$$

$$\frac{\text{Log } x}{\text{Log } 9} + \frac{3 \text{Log } 3}{\text{Log } x^2} = \frac{\overset{a}{\text{Log } x}}{2 \text{Log } 3} + \frac{\overset{b}{3 \text{Log } 3}}{2 \text{Log } x}$$

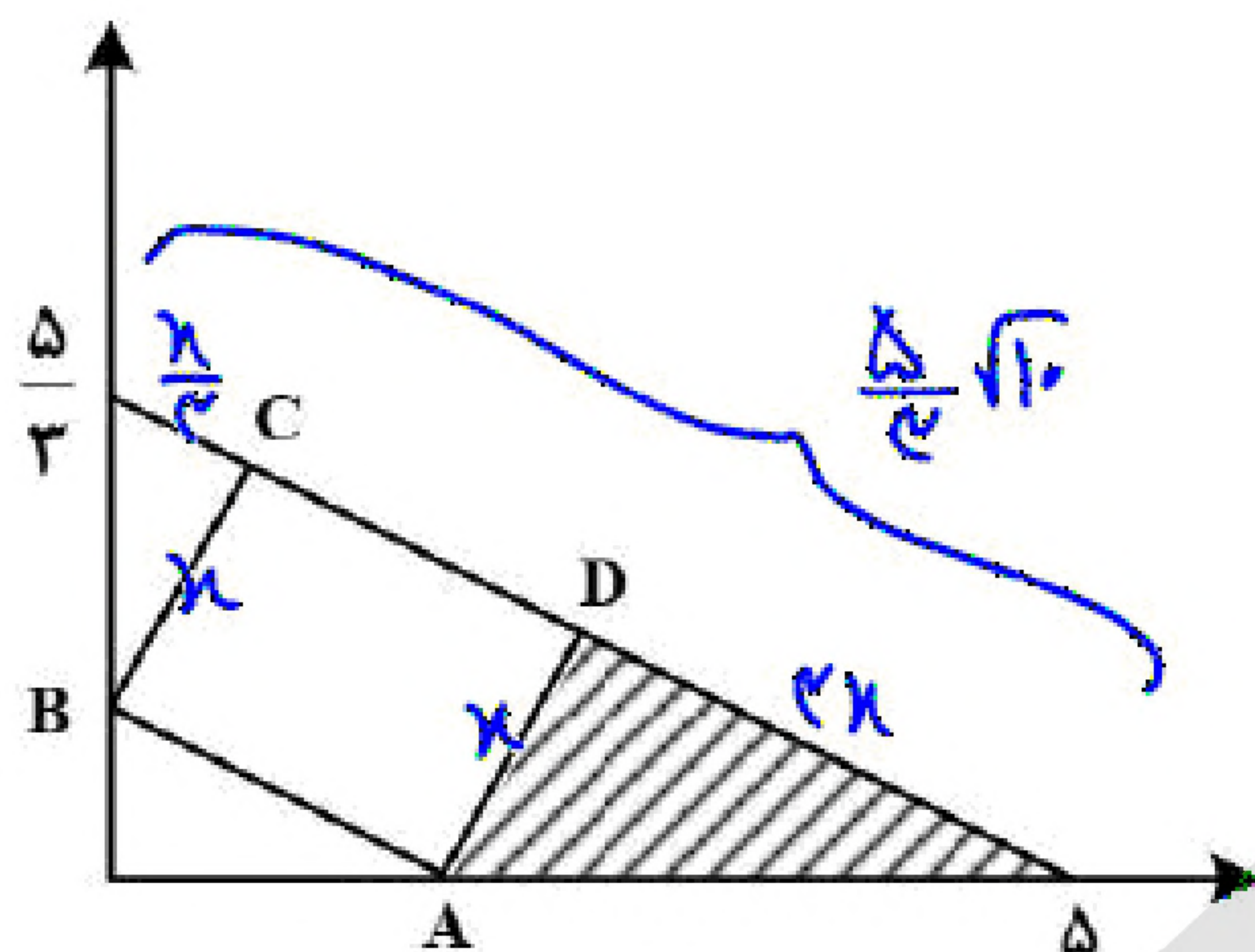
۲- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$ab = \frac{3}{4} \xrightarrow{a, b > 0} \min \{a + b\} \rightarrow a = b = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \min \{a + b\} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$





۳- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.



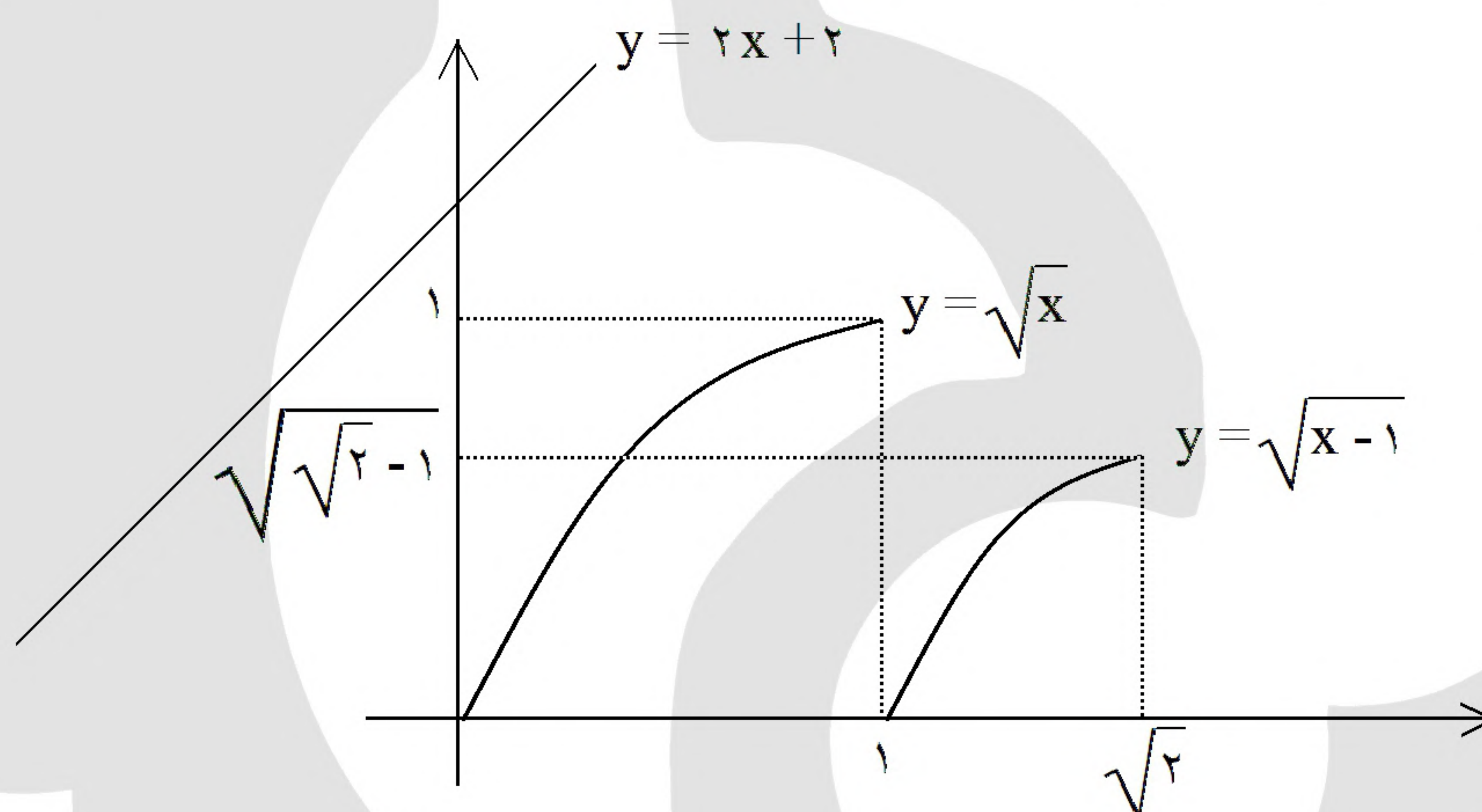
$$S = x \left( \frac{5}{3} \sqrt{10} - \frac{x}{3} - 3x \right) = \frac{1}{3} x (5\sqrt{10} - 10x)$$

$$= \frac{10}{3} x \left( \frac{\sqrt{10}}{2} - x \right)$$

حداکثر S در  $x = \frac{\sqrt{10}}{4}$  رخ می‌دهد. پس مساحت هاشورخورده برابر است با:

$$\frac{1}{2} x \times 3x = \frac{3}{2} x^2 = \frac{3}{2} \times \frac{10}{16} = \frac{15}{16}$$

۴- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. نمودار تابع  $y = \sqrt{x - [x^2]}$  و خط  $y = 2x + 2$  را در شکل زیر می‌بینیم:



کمترین فاصله نقاط تابع از خط موردنظر، کمترین فاصله نقاط روی نمودار  $y = \sqrt{x}$  از خط  $2x - y + 2 = 0$  است.

$$d = \frac{|2\alpha - \sqrt{\alpha} + 2|}{\sqrt{5}}$$

نقطه  $(\alpha, \sqrt{\alpha})$  را در نظر می‌گیریم؛ فاصله برابر است با:

در نقطه بحرانی  $d(\alpha)$ ، کمترین مقدار رخ می‌دهد:

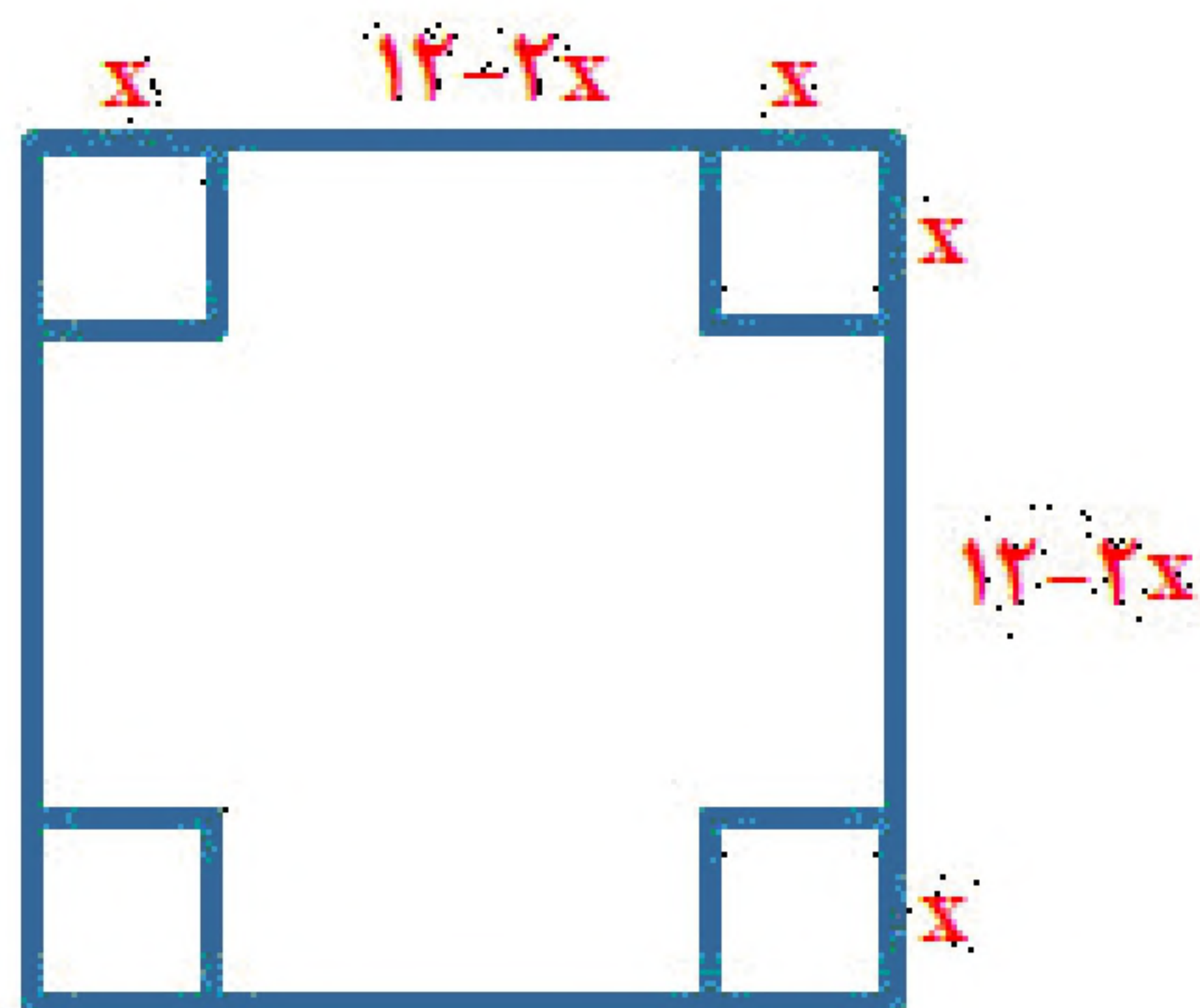
$$d'(\alpha) = 0 \Rightarrow 2 - \frac{1}{2\sqrt{\alpha}} = 0 \Rightarrow \sqrt{\alpha} = \frac{1}{4} \Rightarrow \alpha = \frac{1}{16}$$

$$\Rightarrow d_{\min} = \frac{\left| \frac{1}{8} - \frac{1}{4} + 2 \right|}{\sqrt{5}} = \frac{\frac{15}{8}}{\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{8}$$





۵- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.



$$\begin{aligned} V(x) &= x(12-2x)^2 \\ \Rightarrow V'(x) &= (12-2x)^2 - 2 \times 2x(12-2x) = 0 \\ \Rightarrow (12-2x)(12-2x-4x) &= 0 \Rightarrow \begin{cases} x=6 \\ x=2 \end{cases} \end{aligned}$$

۶  $x=6$  حجم را صفر (می‌نیم) می‌کند پس  $x=2$ .

۶- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\begin{aligned} x < 0 \Rightarrow y &= ax^2 - bx \Rightarrow y' = 2ax - b \xrightarrow{y'(-1)=0} -2a - b = 0 \quad \otimes \\ A(-1, 2) \in y &\Rightarrow 2 = a + b \xrightarrow{\otimes} a = -2, b = 4 \Rightarrow ab = -8 \end{aligned}$$

$$D_f = \left[0, \frac{a}{2}\right]$$

۷- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{-2}{2\sqrt{a-2x}} = 0 \Rightarrow \sqrt{a-2x} = 2\sqrt{x} \Rightarrow a-2x = 4x \Rightarrow x = \frac{a}{6}$$

$$f\left(\frac{a}{6}\right) = \sqrt{\frac{a}{6}} + \sqrt{\frac{2a}{3}} = \frac{3}{\sqrt{6}}\sqrt{a} \rightarrow \max$$

$$f(0) = \sqrt{a}$$

$$f\left(\frac{a}{2}\right) = \sqrt{\frac{a}{2}} \rightarrow \min$$

$$\max. \min = \frac{3}{\sqrt{12}}a = \sqrt{12} \Rightarrow a = 4$$





$$S = \alpha + \beta = \frac{m-2}{m^2+1}$$

۸- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$S'(m) = -\frac{m^2-2m-1}{(m^2+1)^2} \xrightarrow{s'(m)=0} m^2-2m-1=0 \Rightarrow m=2 \pm \sqrt{5}$$

جدول تغییرات رفتار تابع  $S(m)$  را می‌نویسیم:

$m$

پس در  $m = 2 + \sqrt{5}$  تابع  $S$  بیشترین مقدار است.  
تذکر:

اصل سؤال به صورت  $f(x) = (m^2-1)x^2 + (2-m)x + 5$  بوده که در آن حالت، سؤال غلط می‌شد. چون نه  $\frac{m-2}{m^2-1}$  ماکزیمم داشت و نه حتی به ازای  $m = 2 + \sqrt{3}$  که ماکزیمم نسبی ایجاد می‌شد، معادله درجه ۲، ریشه می‌داشت.

۹- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. تابع روی دامنه‌اش یعنی  $R - \{1\}$  پیوسته است:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1+x^2} & ; x < 0 \\ \frac{x}{1-x^2} & ; x \geq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \begin{cases} \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} & ; x < 0 \\ \frac{1+x^2}{(1-x^2)^2} & ; x \geq 0 \end{cases}$$

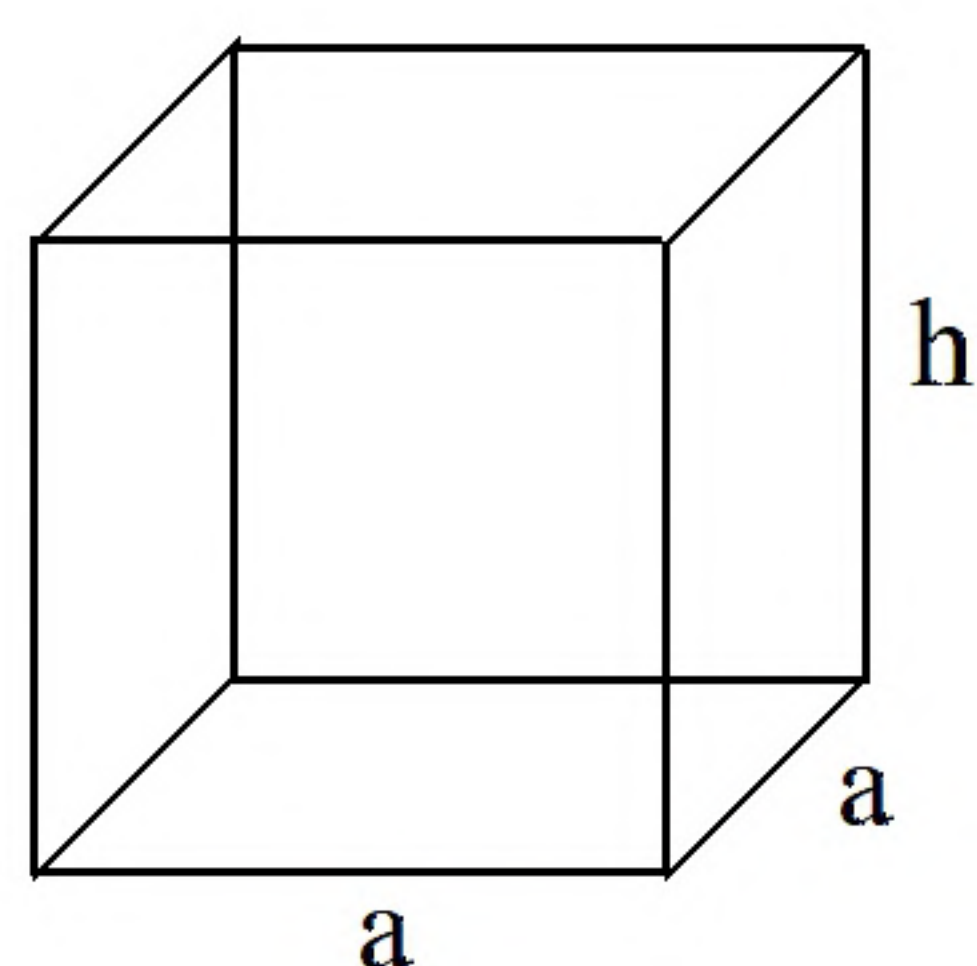
تابع در  $x=0$  مشتق دارد و برابر یک است.  $(f'(0) = 1)$   
و با توجه به دامنه هر ضابطه فقط در  $x = -1$  مشتق برابر صفر دارد:  
پس تابع فقط یک نقطه بحرانی دارد.  
دقت کنید که  $x = 1$  عضو دامنه تابع نیست و نباید لحاظ شود.

$$f'(-1) = 0$$





۱۰- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.



$$V = a^2 h = 4 \Rightarrow h = \frac{4}{a^2}$$

$$S = a^2 + 4ah = a^2 + \frac{16}{a}$$

$$S' = 2a - \frac{16}{a^2} = 0 \Rightarrow 2a = \frac{16}{a^2} \Rightarrow a^3 = 8 \Rightarrow \begin{matrix} a = 2 \\ h = 1 \end{matrix}$$

$$S = a^2 + 4ah = 4 + 4 \times 2 \times 1 = 12$$

۱۱- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\left. \begin{matrix} y' = 3x^2 + 2ax - 2b \\ x = 0 \Rightarrow b = 0 \end{matrix} \right\} y' = 3x^2 + 2ax \Rightarrow x = -2 \Rightarrow 12 - 4a = 0 \Rightarrow a = 3$$

$$\Rightarrow y = x^3 + 3x^2 - 4 \Rightarrow \left. \begin{matrix} (0, -4) \\ (-2, 0) \end{matrix} \right\} \sqrt{2^2 + 4^2} = 2\sqrt{5}$$

۱۲- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. نقطه  $A(0, 0)$  نقطه اکسترم نمودار تابع است ( $f'(0) = 0$  و  $f(0) = 0$ ) پس تابع باید عامل  $x^2$  را داشته باشد، در نتیجه  $c = d = 0$  و  $f(x) = ax^3 + bx^2$  است.

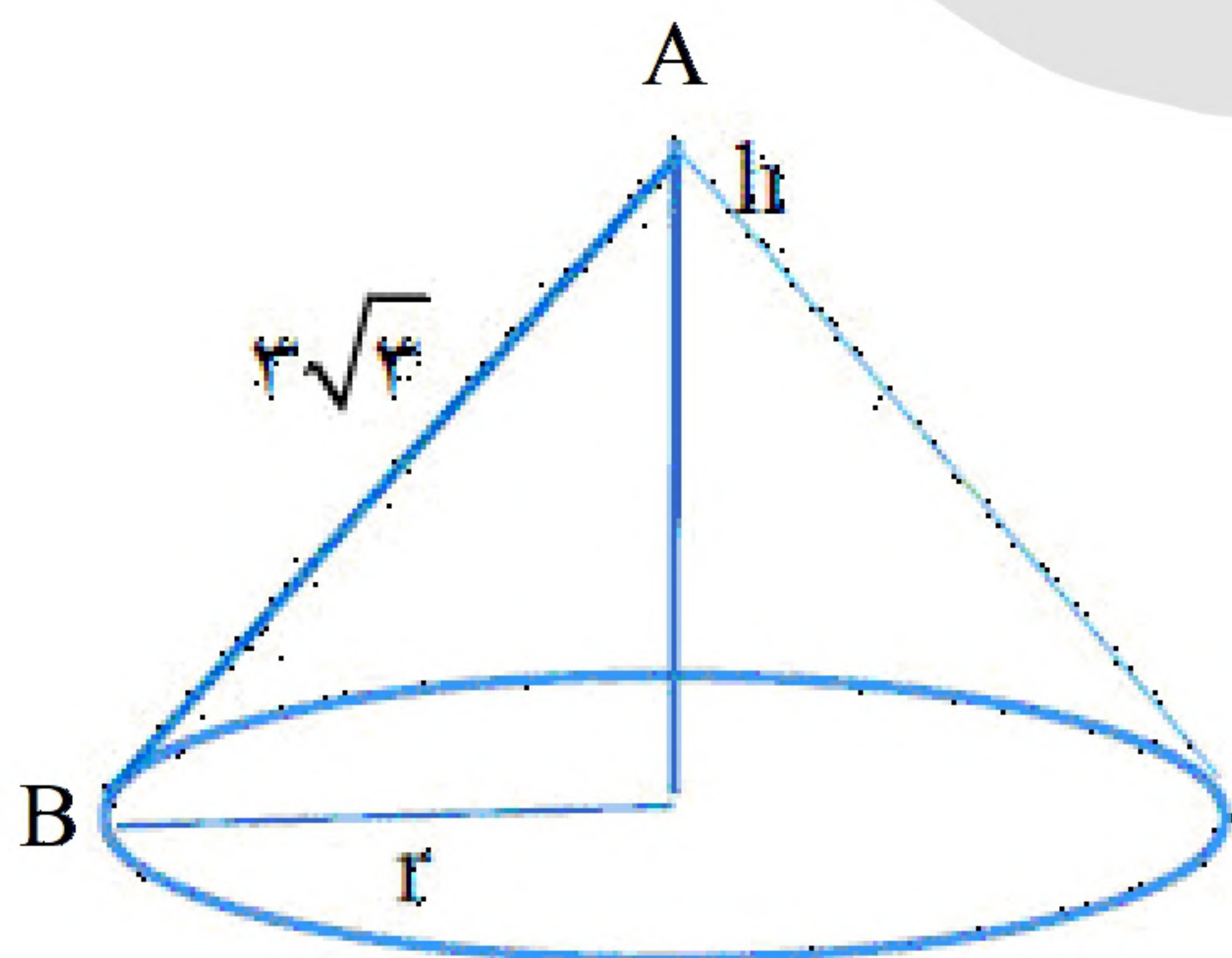
$$B \in f \Rightarrow f(1) = a + b = 1 \quad (I)$$

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx \xrightarrow{f'(1)=0} 3a + 2b = 0 \quad (II)$$

$$\xrightarrow{(I)} a = -2, b = 3 \Rightarrow ab = -6$$

«بانک سوال موسسه یاوران دانش»

۱۳- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.



$$r^2 + h^2 = (3\sqrt{3})^2 \Rightarrow r^2 = 27 - h^2$$

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi (27 - h^2)h = \frac{\pi}{3}(27h - h^3)$$

$$V' = 0 \Rightarrow 27 - 3h^2 = 0 \Rightarrow h = 3$$





۱۴- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.  $y' = 3x^2 + 2ax + b = 0, y'(0) = 0 \Rightarrow b = 0, f(0) = 4 \Rightarrow c = 4$

$$x(3x + 2a) = 0 \Rightarrow x = -\frac{2a}{3}$$

$$\frac{-8a^3}{27} + \frac{4a^3}{9} + 4 = 0 \Rightarrow a^3 = -27 \Rightarrow a = -3$$

$$x = \frac{-2a}{3} = 2$$

۱۵- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$y = x^2|x| + 3ax^2 + b \xrightarrow{(-1, 1)} 1 = 1 + 3a + b \Rightarrow 3a + b = 0 \Rightarrow b = -3a \Rightarrow \frac{b}{a} = -3$$

با فرض اول به جواب رسیدیم، ولی ادامه حل:

$$\Rightarrow y' = -3x^2 + 6ax = -3(-1)^2 + 6a(-1) = 0 \Rightarrow a = \frac{-1}{2}$$

$$\frac{b}{a} = \frac{-3}{\frac{-1}{2}} = -3$$

$$b = \frac{3}{2} \text{ و داریم:}$$

$$y = \pm 2\sqrt{x} \Rightarrow A(x, \pm 2\sqrt{x}) \quad M(3, 0)$$

۱۶- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$AM = \sqrt{(x-3)^2 + (\pm 2\sqrt{x} - 0)^2} \Rightarrow AM = \sqrt{x^2 - 2x + 9}$$

همواره  $+4x$

$$AM_{\min} \Rightarrow (AM)' = 0 \Rightarrow \frac{2x-2}{2\sqrt{x^2-2x+9}} = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow AM = \sqrt{1-2+9} = 2\sqrt{2}$$





۱۷- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\left. \begin{matrix} A(x^3, -x) \\ A'(x, -x^3) \end{matrix} \right\} AA' = \sqrt{(x^3 - x)^2 + (-x - (-x^3))^2}$$

$$AA' = \sqrt{2(x^3 - x)^2} \Rightarrow 0 = AA' \text{ ماکزیمم شود پس مشتق}$$

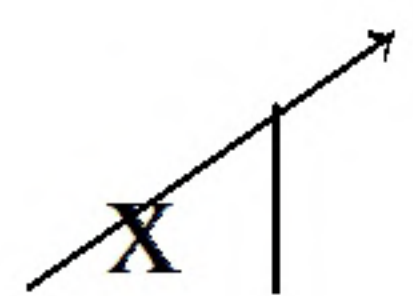
$$AA' = \sqrt{2}(x^3 - x) \Rightarrow (AA')' = 0 \Rightarrow 3x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow AA' = \sqrt{2} \times \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} = \sqrt{2} \times \frac{2}{3\sqrt{3}} \Rightarrow \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{4}{3\sqrt{6}} \Rightarrow AA' = \frac{4}{3\sqrt{6}}$$

۱۸- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$f(x) = \begin{cases} x(3 - x^2) & |x| \leq \sqrt{3} \\ x(x^2 - 3) & |x| > \sqrt{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \begin{cases} -3x^2 + 3 & |x| \leq \sqrt{3} \\ 3x^2 - 3 & |x| > \sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow x = \pm 1$$



$$x_{\min} = -1 \Rightarrow f(x) = -1(3 - 1) = -2$$





۱۹- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.  $f'$  باید منفی باشد.

$$f'(x) = \frac{2x^3(x^2 - 2) - 2x(x^4 - 3)}{(x^2 - 2)^2} = \frac{2x^5 - 8x^3 + 6x}{(x^2 - 2)^2}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{2x(x^2 - 1)(x^2 - 3)}{(x^2 - 2)^2}$$

جدول تغییرات رفتار تابع را در بازه‌ی  $(-2, 2)$  می‌نویسیم:

x	-2	$-\sqrt{3}$	$-\sqrt{2}$	-1	0	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	2
f'	-	○	+	○	+	○	-	○	+
f	↘	↗ <sup>+</sup>	↘ <sup>-</sup>	↗	↘	↗	↘ <sup>-</sup>	↗ <sup>+</sup>	↘

پس نمودار تابع روی بازه‌های  $(-2, -\sqrt{3})$ ،  $(-\sqrt{3}, -\sqrt{2})$ ،  $(-\sqrt{2}, -1)$ ،  $(-1, 0)$ ،  $(0, 1)$ ،  $(1, \sqrt{2})$ ،  $(\sqrt{2}, \sqrt{3})$  و  $(\sqrt{3}, 2)$  اکیداً نزولی است.

۲۰- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ضابطه‌ی  $f$  را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$f(x) = \begin{cases} 3\sqrt[3]{x} - x & ; x \leq 0 \\ 3\sqrt[3]{x} + x & ; x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} - 1 & ; x < 0 \\ \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} + 1 & ; x > 0 \end{cases}$$

روی بازه‌ی  $(0, +\infty)$ ، مشتق تابع همواره مثبت است بنابراین تابع اکیداً صعودی است. حال برای مقادیر  $x < 0$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} - 1 \geq 0 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} \geq 1 \Rightarrow \sqrt[3]{x^2} \leq 1$$

داریم:

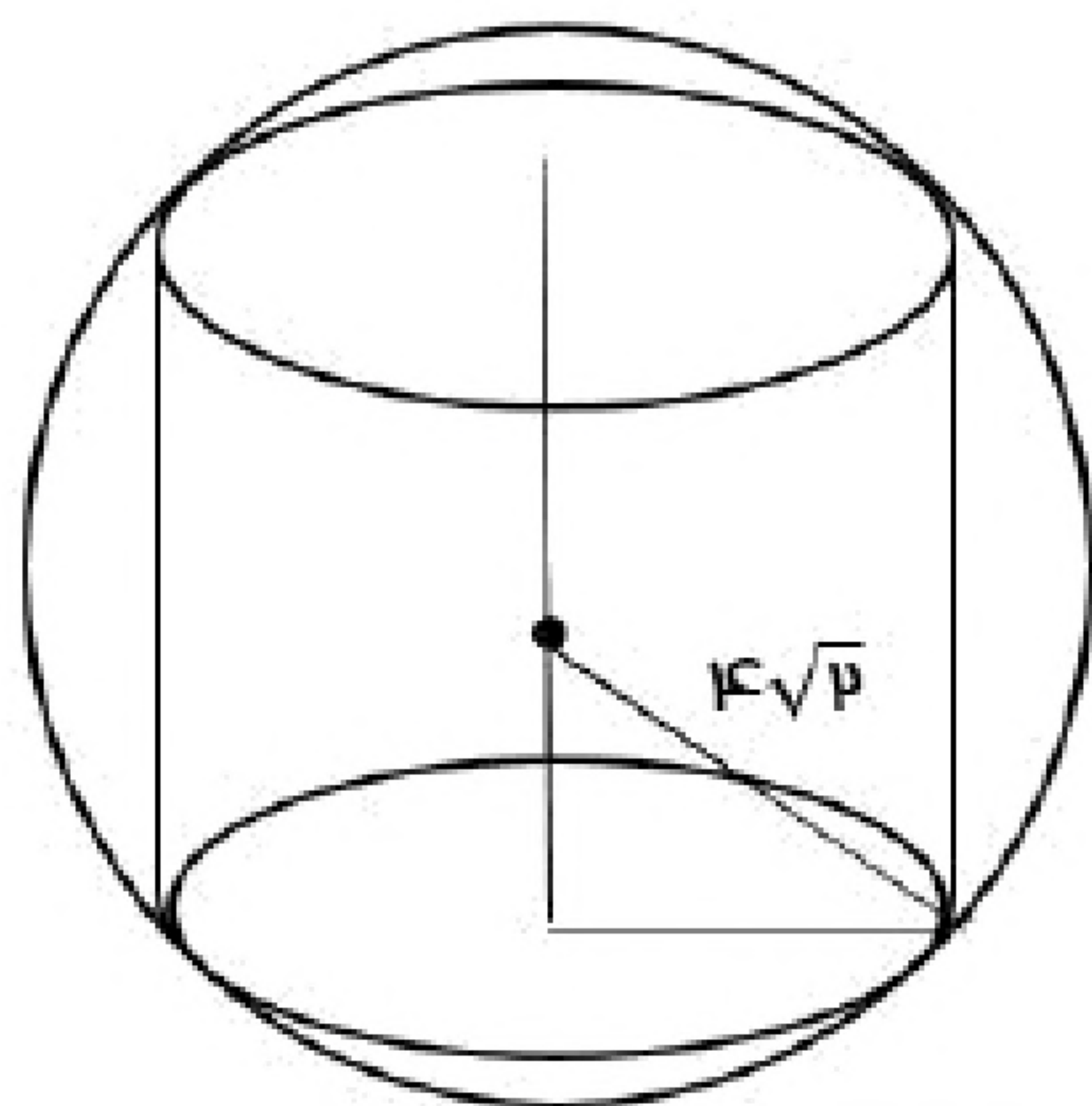
$$\Rightarrow x^2 \leq 1 \xrightarrow{x < 0} -1 \leq x < 0$$

چون تابع  $f$  پیوسته است پس فاصله‌ی صعودی کل بازه‌ی  $(-1, +\infty)$  است.





۲۱- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.



$$S = 2\pi rh = 4\pi \sqrt{r^2} \sqrt{\frac{h^2}{4}}$$

$$\Rightarrow r^2 + \frac{h^2}{4} = 32, \quad 2r^2 = 32, \quad r = 4$$

$$\Rightarrow \frac{r^2}{\frac{1}{4}} = \frac{h^2}{\frac{1}{4}} \Rightarrow r^2 = \frac{h^2}{4}$$

$$S_{\max} = 64\pi$$

۲۲- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ابتدا محل برخورد  $y = x^2$  و نیمساز ربع اول و سوم را حساب می‌کنیم.

$$y = x^2 \Rightarrow x^2 - x = 0 \Rightarrow x(x - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

بنابراین نقطه  $A$  دارای طولی بین صفر و یک است. ( $0 < \alpha < 1$ )

$$A(\alpha, \alpha^2) \Rightarrow A'(\alpha^2, \alpha)$$

$$AA' = \sqrt{(\alpha^2 - \alpha)^2 + (\alpha - \alpha^2)^2} = \sqrt{2} |\alpha - \alpha^2|$$

چون  $0 < \alpha < 1$  است بنابراین درون قدرمطلق مثبت است.

$$AA' = \sqrt{2}\alpha - \sqrt{2}\alpha^2$$

کافی است در معادله درجه ۲ ایجاد شده رأس سهمی را حساب کنیم.

$$\alpha_* = \frac{-b}{2a} = \frac{-\sqrt{2}}{-2\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow AA' = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$





۲۳- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.  $x = 0$  ریشه زوج تکرار تابع است پس یک نقطه اکسترمم نسبی است. نقاط  $x = \pm 2$  نقاط گوشه تابع با توجه به همواره مثبت بودن تابع در اطراف آنها نیز نقاط اکسترمم تابع می باشد. مشتق تابع نیز فقط ریشه  $x = 0$  را دارد.

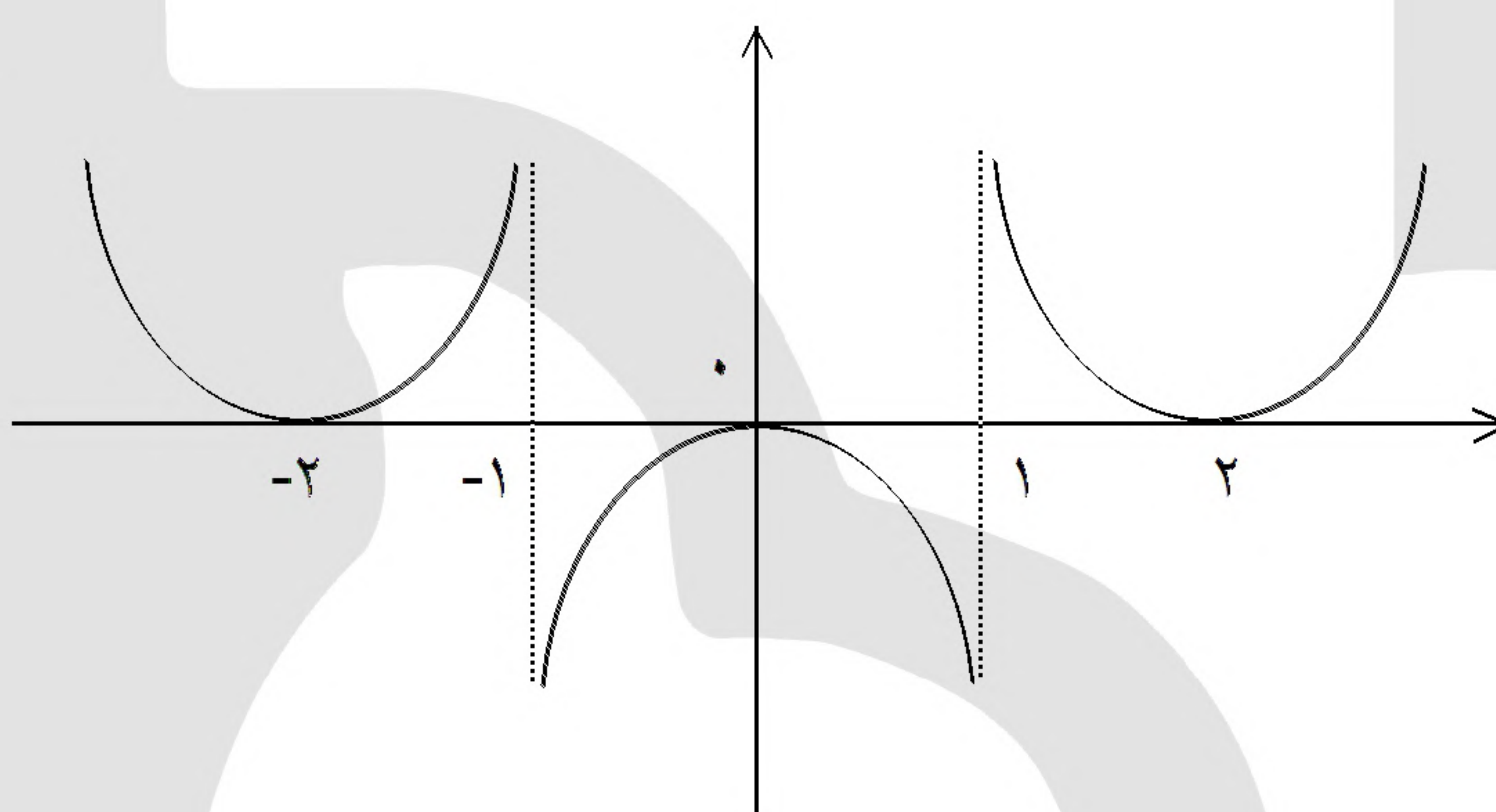
$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{x^2}{x^2 - 1} |x^2 - 4| = +\infty$$

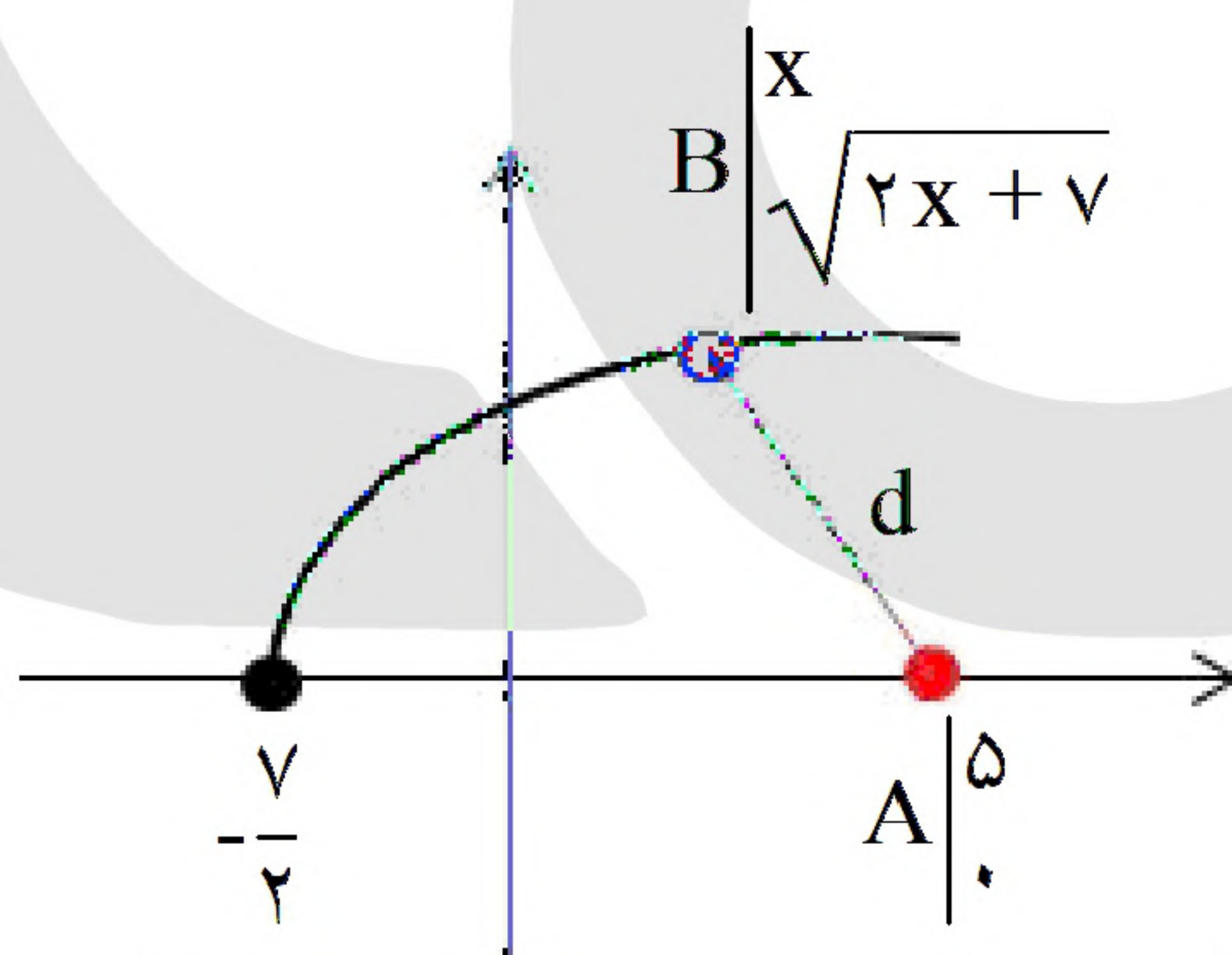
$$x \rightarrow \pm \infty$$

بنابراین نمودار تقریبی به صورت زیر است:



با توجه به شکل تابع سه نقطه اکسترمم نسبی دارد.

۲۴- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.



$$\begin{cases} A(5, 0) \\ B(x, \sqrt{2x+7}) \end{cases} \Rightarrow AB = \sqrt{(x-5)^2 + (\sqrt{2x+7}-0)^2} = \sqrt{x^2 - 10x + 25 + 2x + 7}$$

$$\Rightarrow AB = \sqrt{x^2 - 8x + 32} \Rightarrow AB' = \frac{2x - 8}{2\sqrt{x^2 - 8x + 32}} = 0 \Rightarrow x = 4$$





۲۵- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 + 1} \Rightarrow f'(x) = \frac{(2x + 2)(x^2 + 1) - 2x(x^2 + 2x - 3)}{(x^2 + 1)^2}$$

روش اول:

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{\cancel{2x}^2 + 2x^2 + 2x + 2 - \cancel{2x}^2 - 4x^2 + 6x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{-2x^2 + 8x + 2}{(x^2 + 1)^2}$$

$$\Rightarrow -2x^2 + 8x + 2 = 0 \Rightarrow x^2 - 4x - 1 = 0 \Rightarrow x^2 - 4x = 1 \xrightarrow{+4} x^2 - 4x + 4 = 5$$

$$\Rightarrow (x - 2)^2 = 5 \Rightarrow x - 2 = \pm\sqrt{5} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 + \sqrt{5} \\ x = 2 - \sqrt{5} \end{cases}$$

x		$2 - \sqrt{5}$		$2 + \sqrt{5}$	
y'	-	○	+	○	-
y					
			min	max	

$$\Rightarrow f(2 + \sqrt{5}) = \frac{(2 + \sqrt{5})^2 + 2(2 + \sqrt{5}) - 3}{(2 + \sqrt{5})^2 + 1} = \frac{9 + 4\sqrt{5} + 4 + 2\sqrt{5} - 3}{9 + 4\sqrt{5} + 1} = \frac{10 + 6\sqrt{5}}{10 + 4\sqrt{5}}$$

$$= \frac{5 + 3\sqrt{5}}{5 + 2\sqrt{5}} \Rightarrow \frac{5 + 3\sqrt{5}}{5 + 2\sqrt{5}} \times \frac{5 - 2\sqrt{5}}{5 - 2\sqrt{5}} = \frac{25 - 10\sqrt{5} + 15\sqrt{5} - 20}{25 - 20} = \frac{5\sqrt{5} - 5}{5} = \sqrt{5} - 1$$

$$\frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 + 1} = m$$

روش دوم:

$$(m - 1)x^2 - 2x + m + 3 = 0$$

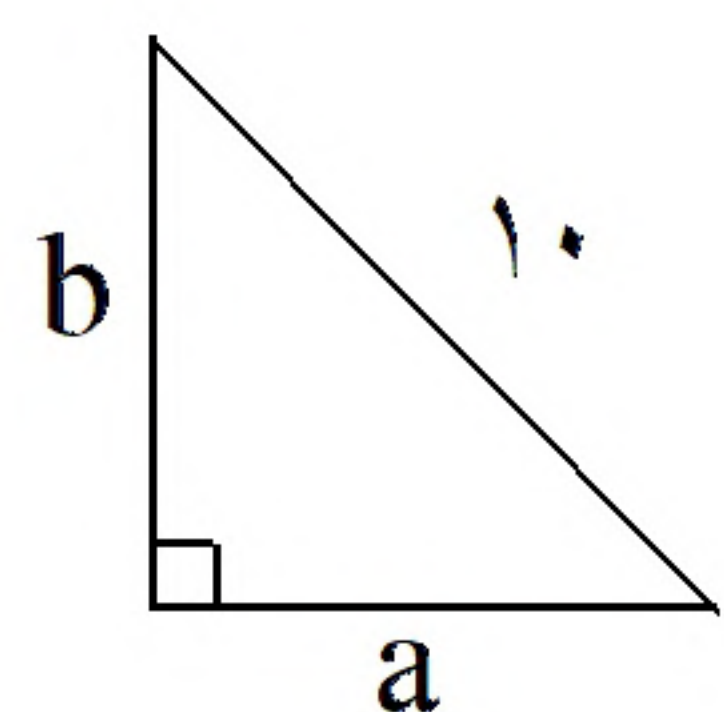
$$\Delta' = 1 - (m - 1)(m + 3) \Rightarrow m^2 + 2m - 4 = 0$$

$$m = -1 \pm \sqrt{5} \Rightarrow m = -1 + \sqrt{5} \text{ ق ق}, m = -1 - \sqrt{5} \text{ ق ق}$$





۲۶- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.



$$a^2 + b^2 = 100 \Rightarrow a^2 = 100 - b^2$$

$$V_{\text{مخروط}} = \frac{1}{3}\pi a^2 b \Rightarrow \frac{\pi}{3}(100 - b^2)b \Rightarrow V_{\text{مخروط}} = \frac{\pi}{3}(100b - b^3)$$

$$V' = \frac{\pi}{3}(100 - 3b^2) = 0$$

$$3b^2 = 100 \Rightarrow b = \frac{10}{\sqrt{3}} = \frac{10\sqrt{3}}{3} \Rightarrow a^2 = 100 - \frac{100}{3} = \frac{200}{3} \Rightarrow a = \frac{\sqrt{2} \times 10}{\sqrt{3}} = \frac{10\sqrt{3}\sqrt{2}}{3}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{\frac{10\sqrt{3}\sqrt{2}}{3}}{\frac{10\sqrt{3}}{3}} = \sqrt{2}$$

$$P'(x) = 1 + \frac{-2x+4}{2\sqrt{4x-x^2}} = 0$$

۲۷- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\frac{-2x+4}{2\sqrt{4x-x^2}} = -1 \xrightarrow{\times -1} \frac{-2x+4}{2\sqrt{4x-x^2}} = 1 \Rightarrow -2x+4 = 2\sqrt{4x-x^2}$$

$$\Rightarrow (-x+2) = \sqrt{4x-x^2}$$

$$x^2 - 4x + 4 = 4x - x^2 \Rightarrow 2x^2 - 8x + 4 = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 2 = 0$$

$$\Rightarrow \Delta = 8 \Rightarrow x = \frac{4 \pm 2\sqrt{2}}{2} = 2 \pm \sqrt{2}$$

$$x = 2 + \sqrt{2} \rightarrow y = 2 + \sqrt{2} + \sqrt{4(2 + \sqrt{2}) - (2 + \sqrt{2})^2} = 2 + \sqrt{2} + \sqrt{2} = 2 + 2\sqrt{2} \text{ max}$$

$$x = 2 - \sqrt{2} \rightarrow y = 2 - \sqrt{2} + \sqrt{4(2 - \sqrt{2}) - (2 - \sqrt{2})^2} = 2 - \sqrt{2} + \sqrt{2} = 2 \text{ min}$$

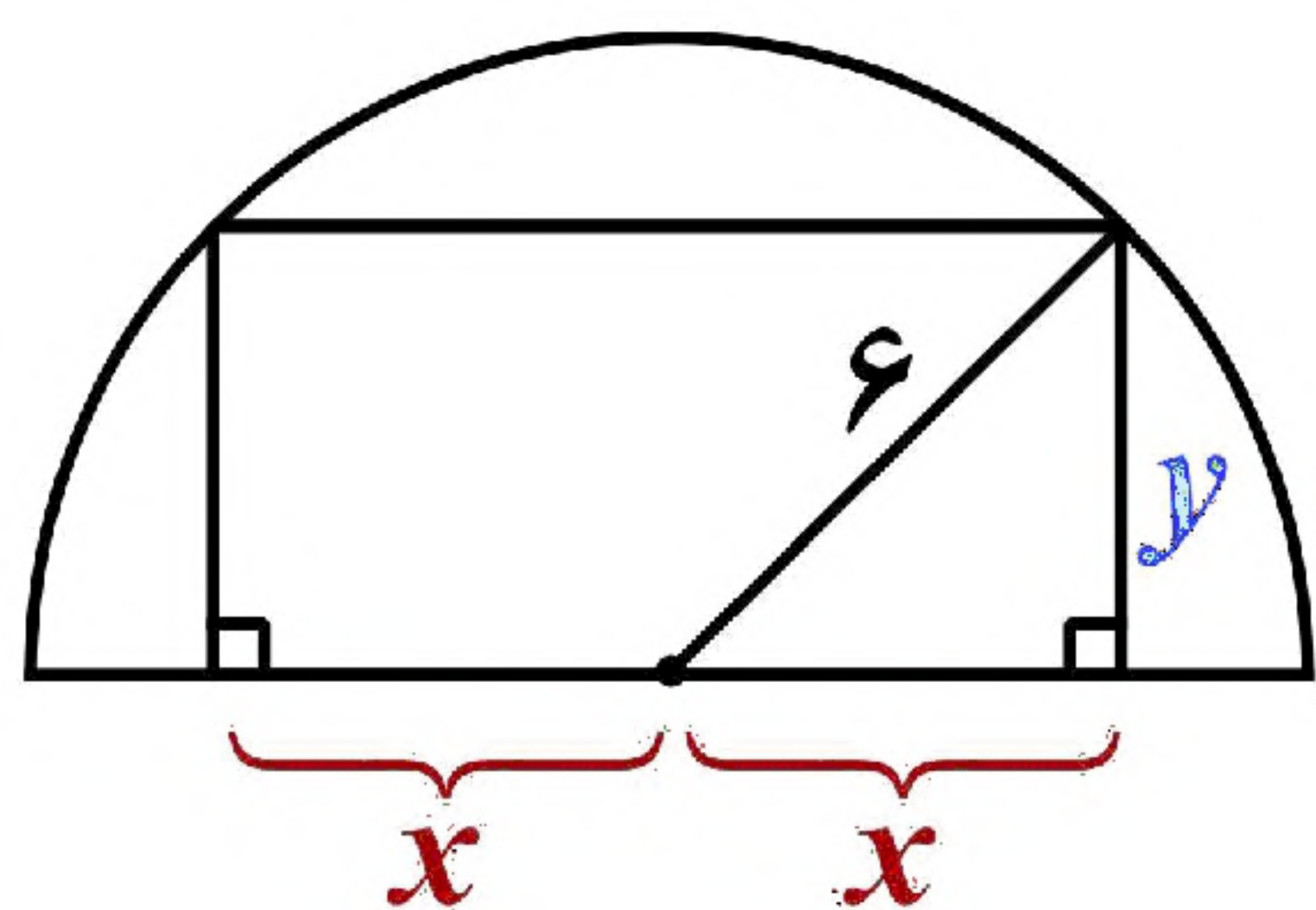
$$(2 + \sqrt{2}, 2 + 2\sqrt{2}) \Rightarrow d = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \xrightarrow{y-x=0} = \frac{|2 + 2\sqrt{2} - 2 - \sqrt{2}|}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1$$





«بانک سوال موسسه یاوران دانش»

۲۸- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.



$$S = 2xy$$

$$x^2 + y^2 = 36 \Rightarrow y = \sqrt{36 - x^2}$$

$$\Rightarrow S = 2x\sqrt{36 - x^2} \xrightarrow{x > 0} 2\sqrt{36x^2 - x^4} \Rightarrow S' = 2 \left( \frac{72x - 4x^3}{2\sqrt{36x^2 - x^4}} \right) = 0$$

$$\Rightarrow 72x - 4x^3 = 0 \Rightarrow 4x^2 = 72 \Rightarrow x^2 = 18 \Rightarrow x = 3\sqrt{2}$$

$$S_{\max} = 2(3\sqrt{2})\sqrt{36 - 18} = 2(3\sqrt{2})(3\sqrt{2}) = 36$$

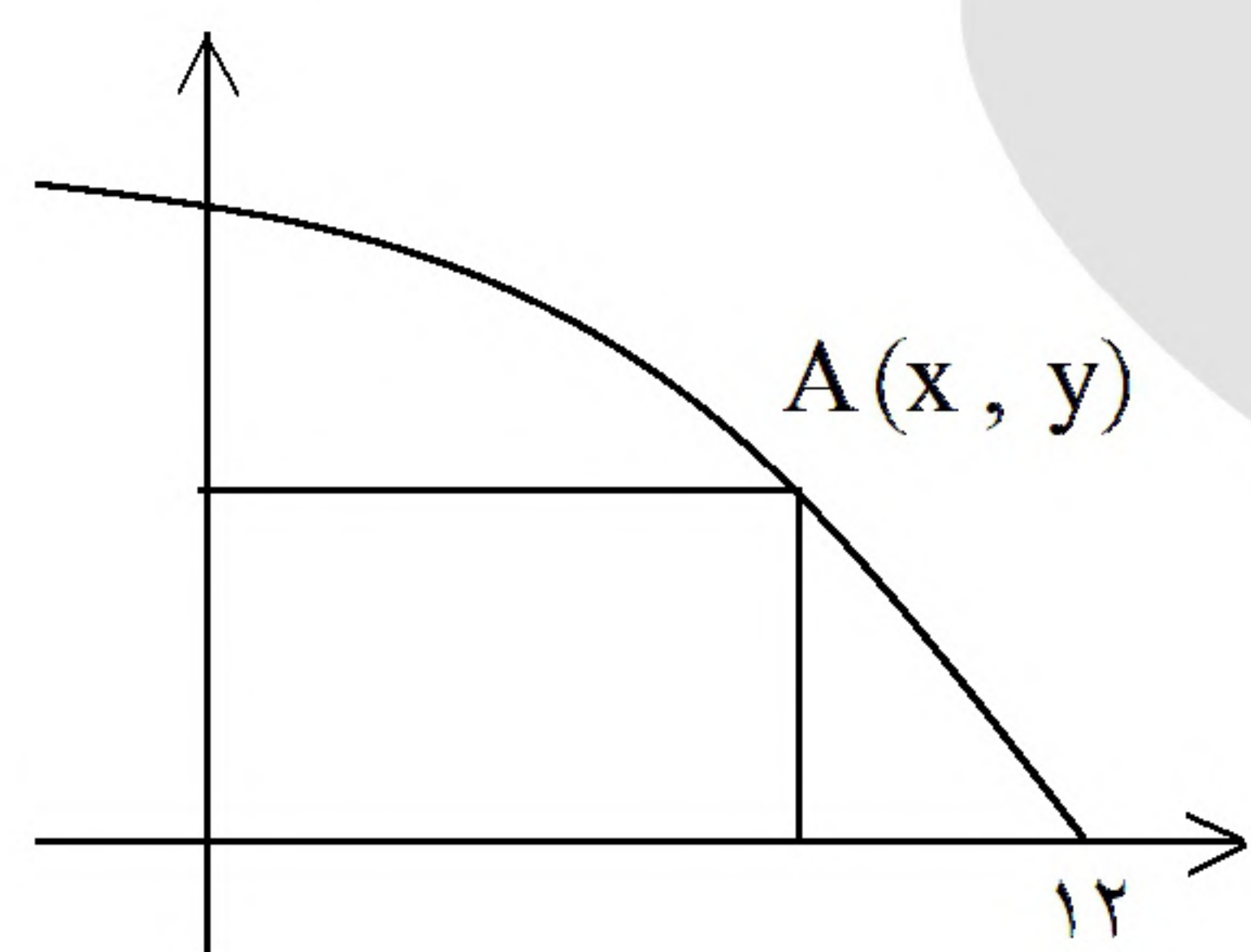
۲۹- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$f(x) = x|x| - 2x = \begin{cases} x^2 - 2x & x \geq 0 \\ -x^2 - 2x & x < 0 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 2x - 2 & x \geq 0 \\ -2x - 2 & x < 0 \end{cases}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2x - 2 = 0 \Rightarrow x = 1 \text{ min} \\ -2x - 2 = 0 \Rightarrow x = -1 \text{ max} \end{cases}$$

$$\begin{matrix} A(1, -1) \\ B(-1, 1) \end{matrix} \Rightarrow AB = \sqrt{4 + 4} = 2\sqrt{2}$$

۳۰- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.



$$S = xy = x\sqrt{12 - x}$$

$$S' = \sqrt{12 - x} + x \left( \frac{-1}{2\sqrt{12 - x}} \right) = \frac{24 - 2x - x}{2\sqrt{12 - x}} = 0 \Rightarrow 24 - 3x = 0 \Rightarrow x = 8$$

$$\Rightarrow S_{\max} = 8\sqrt{12 - 8} = 16$$





۳۱- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$f(x) = x|x - 4| = \begin{cases} x^2 - 4x & x \geq 4 \\ -x^2 + 4x & x < 4 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 2x - 4 & x > 4 \\ -2x + 4 & x < 4 \end{cases}$$

	x	۲	۴	
f'		+	-	+
f		↗	↘	↗
		max	min	
		۴	۰	

$$f' = 0 \Rightarrow x = 2$$

$$f' \Rightarrow x = 4 \text{ وجود ندارد}$$

$$\begin{matrix} \max(2, 4) \\ \min(4, 0) \end{matrix} \Rightarrow d = \sqrt{(2-4)^2 + (4-0)^2} = \sqrt{4+16} = 2\sqrt{5}$$