گنجینه سوال رایـگان

+پاسخ تشریحی

یاوران دانش

راه های ارتباطی با ما:

www.Dyavari.com

۰۲۱-۷۶۷۰۳۸۵۸

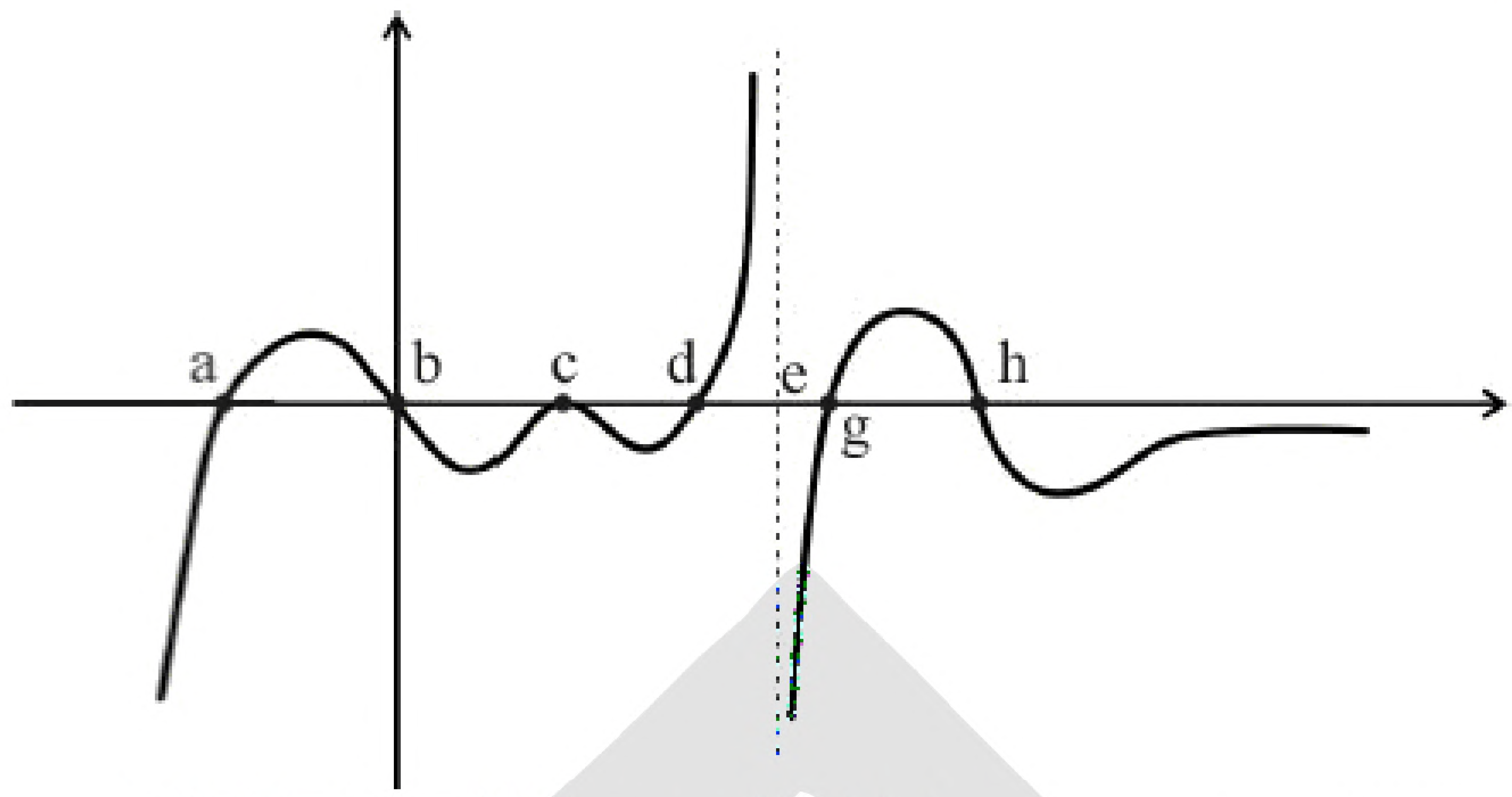
۰۹۱۲-۳۴ ۹۴ ۱۳۴

پاسخ کلیدی سوالات تستی (آزمایشی)

ریاضی ۱۲ - فصل ۵

	۱	۲	۳	۴
۱ -	□	□	□	■
۲ -	□	■	□	□
۳ -	■	□	□	□
۴ -	□	□	■	□
۵ -	□	□	□	■
۶ -	□	□	□	■
۷ -	□	□	□	■
۸ -	□	□	■	□
۹ -	■	□	□	□
۱۰ -	□	■	□	□
۱۱ -	■	□	□	□
۱۲ -	□	□	■	□
۱۳ -	□	□	□	■
۱۴ -	□	□	■	□
۱۵ -	□	□	■	□
۱۶ -	□	□	□	■
۱۷ -	□	■	□	□
۱۸ -	■	□	□	□
۱۹ -	□	■	□	□
۲۰ -	□	□	■	□
۲۱ -	□	□	□	■
۲۲ -	□	□	■	□
۲۳ -	■	□	□	□
۲۴ -	□	□	□	■
۲۵ -	□	■	□	□
۲۶ -	□	□	□	■
۲۷ -	□	□	■	□
۲۸ -	□	□	□	■
۲۹ -	□	□	■	□
۳۰ -	■	□	□	□
۳۱ -	□	■	□	□
۳۲ -	□	□	■	□
۳۳ -	□	■	□	□
۳۴ -	□	■	□	□
۳۵ -	■	□	□	□
۳۶ -	□	■	□	□
۳۷ -	□	□	□	■
۳۸ -	□	□	□	■
۳۹ -	□	□	□	■
۴۰ -	□	□	□	■

۱- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

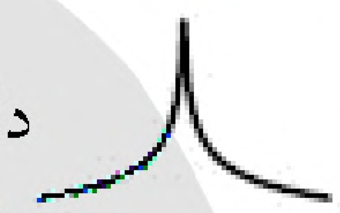


۱) f در $x = a$ دارای max نسبی است، زیرا $f'_+(a) > ۰$ و $f'(a) = ۰$ و $f'_-(a) < ۰$

۲) f در $x = b$ داری Min نسبی است، زیرا $f'_+(b) < ۰$ و $f'(b) = ۰$ و $f'_-(b) > ۰$

۳) f در $x = c$ اکسترمم ندارد، زیرا علیرغم $f'(c) = ۰$ تغییر علامت مشتق نداریم.

۴) f در $x = d$ دارای Max نسبی است، زیرا $f'_+(d) > ۰$ و $f'(d) = ۰$ و $f'_-(d) < ۰$

۵) f در $x = e$ نقطه بحرانی گوشه‌ای به صورت  دارد که Max نسبی است، زیرا $f'_+(e) = -\infty$ و $f'_-(e) = +\infty$ و f در این نقطه پیوسته است.

۶) f در $x = g$ دارای Max نسبی است، زیرا $f'_+(g) > ۰$ و $f'(g) = ۰$ و $f'_-(g) < ۰$

۷) f در $x = h$ دارای Min نسبی است، زیرا $f'_+(h) < ۰$ و $f'(h) = ۰$ و $f'_-(h) > ۰$

بنابراین تابع f در ۶ نقطه اکسترمم نسبی دارد.

۲- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. نقاط بحرانی تابع که f' در آن‌ها صفر می‌شود.

$$f'(x) = ۶x^۲ - ۶x = ۰ \Rightarrow x = ۰ \ , \ x = ۱$$

$$\begin{cases} f(-۱) = K - ۵ \Rightarrow \text{min مطلق} \\ f(۰) = K \\ f(۱) = K - ۱ \\ f(۲) = K + ۴ \Rightarrow \text{max مطلق} \end{cases}$$

$$P(K) = \text{حاصلضرب اکسترمم های مطلق} = (K - ۵)(K + ۴) = k^۲ - K - ۲۰$$

این حاصلضرب، یک تابع درجه ۲ برحسب K است که کمترین مقدار آن در $K = \frac{۱}{۲}$ اتفاق می افتد:

$$P'(K) = ۰ \Rightarrow ۲K - ۱ = ۰ \Rightarrow K = \frac{۱}{۲} \Rightarrow P\left(\frac{۱}{۲}\right) = -۲۰/۲۵$$

۳- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$A(2,1)\ \text{مینیمم نسبی}\ \begin{cases} 1 = 2^3 + b(2)^2 + d \Rightarrow 4b + d = -7 \\ f'(x) = 0 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 2bx \Rightarrow 3(2)^2 + 2b(2) = 0 \end{cases}$$

$$\boxed{b = -3} \downarrow \boxed{d = 5}$$

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 5\ ;\ [-4\,,\,4]$$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x = 0 \Rightarrow 3x(x-2) = 0 \begin{cases} x = 0\ ,\ f(0) = 5 \\ x = 2\ ,\ f(2) = 1 \end{cases}$$

$f(-4) = -107$ مینیمم مطلق

$f(4) = 21$ ماکزیمم مطلق

x	-4		0		2		4
$f'(x)$		+		-		+	
$f(x)$	-107	$\nearrow$	5	$\searrow$	1	$\nearrow$	21

مجموع مقادیر ماکزیمم مطلق و نسبی $= 21 + 5 = 26$

۴- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. مطابق قوانین فیزیک می‌دانیم که در حرکت با سرعت ثابت، زمان حرکت از رابطه $t = \frac{x}{V}$ به دست می‌آید که در آن x مسافت پیموده شده و V اندازه سرعت ثابت است.

AB زمان پیمودن مسیر $= t_1 = \frac{100 - x}{4}\ ;\ 0 \le x \le 100$

BC زمان پیمودن مسیر $= t_2 = \dfrac{\sqrt{x^2 + \left(25\sqrt{3}\right)^2}}{2}$

کل $t = t_1 + t_2 = \dfrac{100 - x}{4} + \dfrac{\sqrt{x^2 + 1875}}{2}$

$t' = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \times \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1875}} = 0 \Rightarrow x = 25$ متر

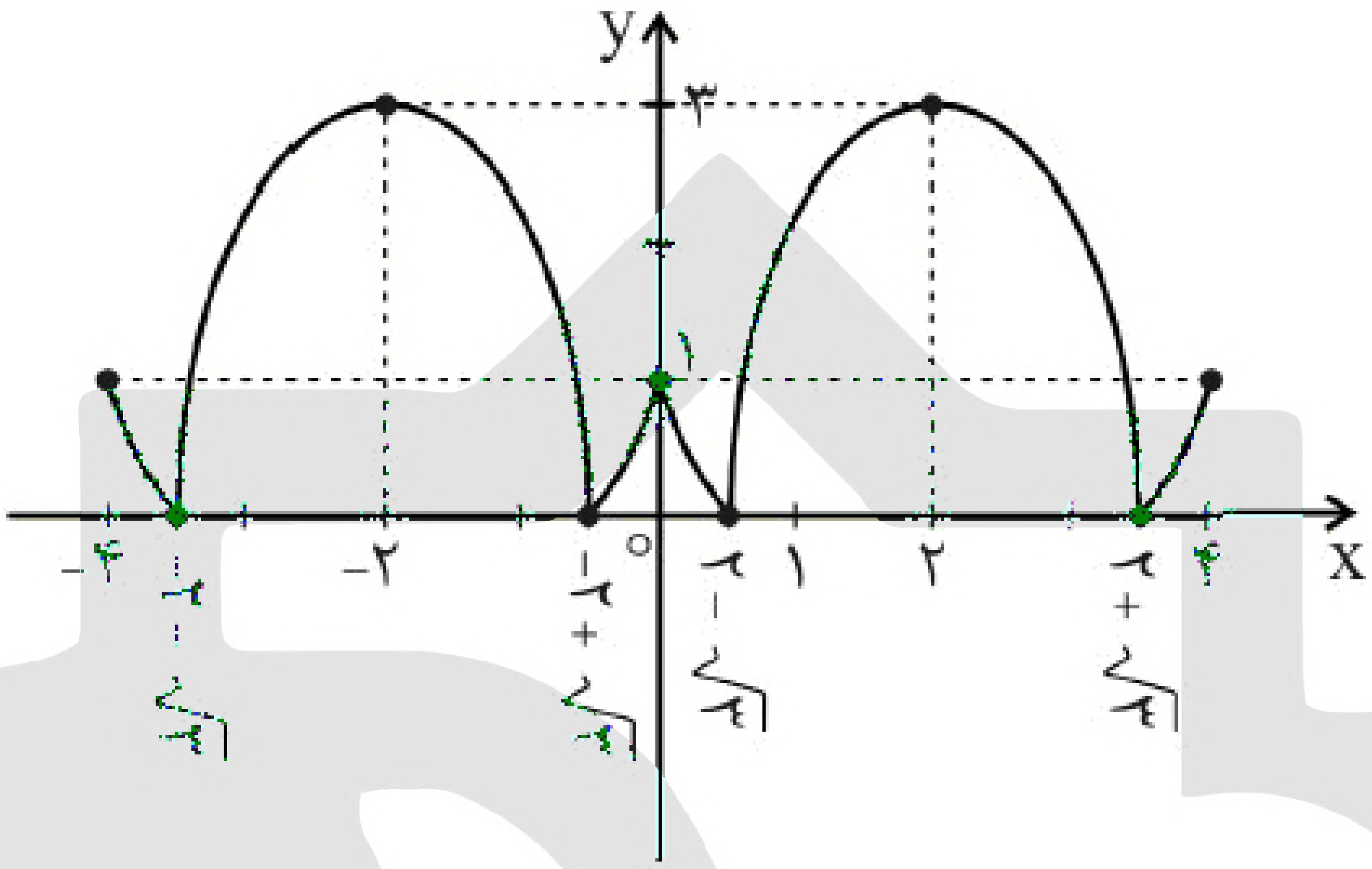
کل مینیمم $t = \frac{75}{4} + \frac{50}{2} = \frac{175}{4} = 43/75$ ثانیه

۵- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$x \geq ۰ \Rightarrow f(x) = |x^۲ - ۴x + ۱| \Rightarrow$ مشتق عبارت درون قدرمطلق $= ۰ \Rightarrow ۲x - ۴ = ۰ \Rightarrow x = ۲$

$x < ۰ \Rightarrow f(x) = |x^۲ + ۴x + ۱| \Rightarrow$ مشتق عبارت درون قدرمطلق $= ۰ \Rightarrow ۲x + ۴ = ۰ \Rightarrow x = -۲$

با رسم نمودار سهمی درون قدرمطلق و سپس اعمال قدرمطلق، نمودار نهایی تابع $f(x)$ در بازهٔ $[-۴ , ۴]$ به صورت زیر است:



$x = -۴$ بحرانی

$x = -۲ - \sqrt{۳}$ (نقطه گوشه ای) Min نسبی و مطلق، بحرانی

$x = -۲$ Max نسبی و مطلق، بحرانی

$x = -۲ + \sqrt{۳}$ (نقطه گوشه ای) Min نسبی و مطلق، بحرانی

$x = ۰$ (نقطه گوشه ای) Max نسبی و بحرانی

$x = ۲ - \sqrt{۳}$ (نقطه گوشه ای) Min نسبی و مطلق، بحرانی

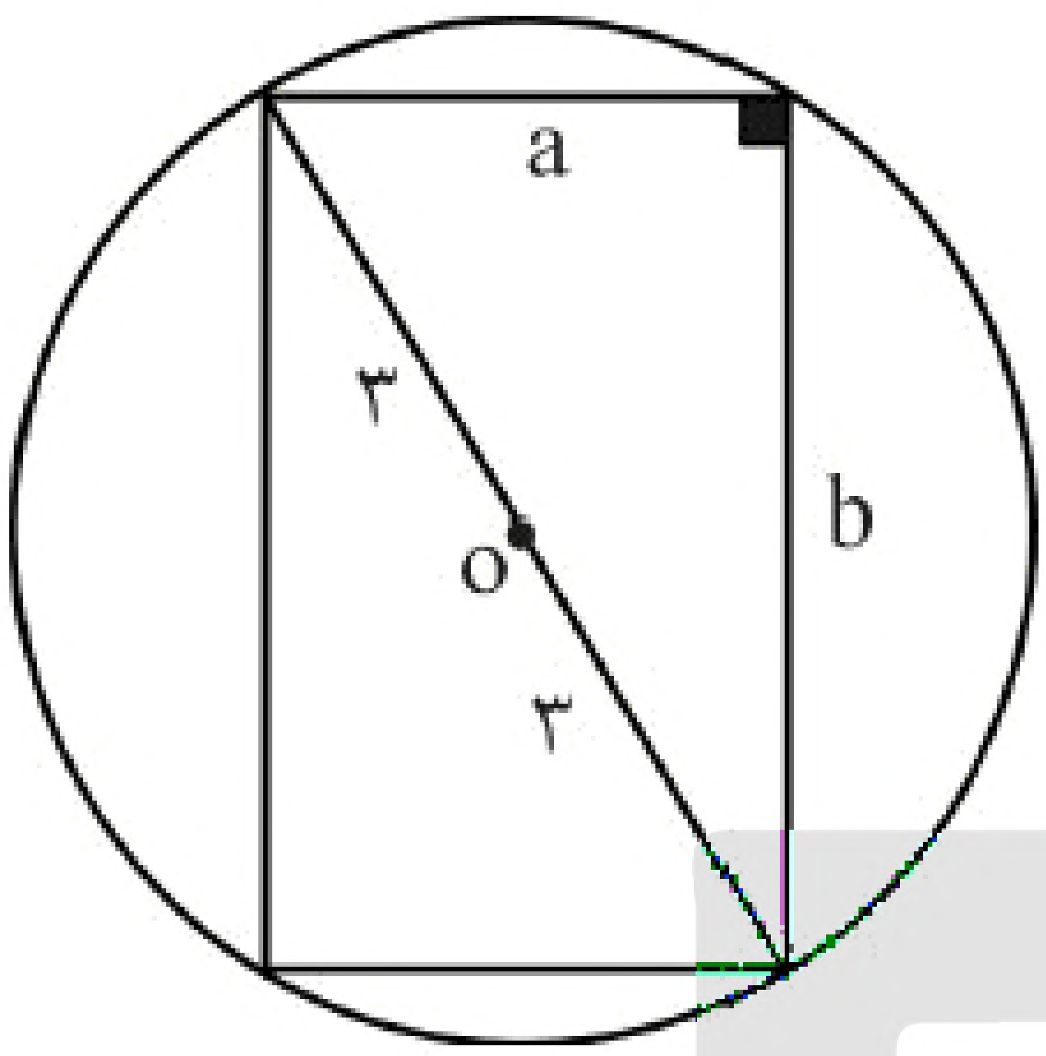
$x = ۲$ Max نسبی و مطلق، بحرانی

$x = ۲ + \sqrt{۳}$ (نقطه گوشه ای) Min نسبی و مطلق و بحرانی

$x = ۴$ بحرانی

$$\Rightarrow \begin{cases} m = ۹ \\ n = ۲ \\ p = ۳ \\ q = ۴ \\ r = ۴ \\ s = ۵ \end{cases} \Rightarrow m^۲ + n^۲ + p^۲ + q^۲ + r^۲ + s^۲ = ۱۵۱$$

۶- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. مطابق شکل، مستطیل محاط در دایره با عرض a و طول b را حول طول آن یعنی b دوران می‌دهیم تا استوانه‌ای با شعاع قاعدهٔ a و ارتفاع b حاصل شود. می‌خواهیم حجم استوانه یعنی $V = \pi a^2 b$ ماکزیمم شود. چون:



$$\left.\begin{array}{l} \text{محیط دایره} = 6\pi = 2\pi R \Rightarrow R = 3 \\ \text{قطر دایره} = 2R = 6 \end{array}\right\} \Rightarrow a^2 + b^2 = 36$$

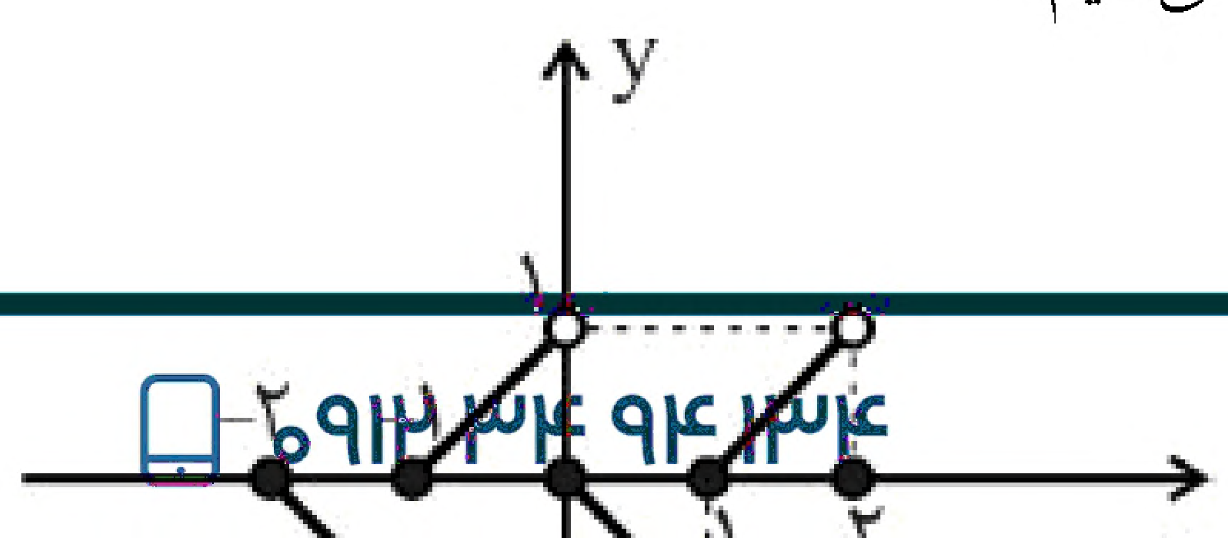
$$\Rightarrow a^2 = 36 - b^2$$

$$V = \pi a^2 b = \pi\left(36 - b^2\right)b \Rightarrow V = 36\pi b - \pi b^3$$

$$V'(b) = 36\pi - 3\pi b^2 = 0 \Rightarrow b^2 = 12 \begin{cases} b = 2\sqrt{3} \\ a = 2\sqrt{6} \end{cases}$$

مساحت مستطیل اولیه با شرط ماکزیمم بودن حجم استوانه حاصل $S_{\square} = a \times b = 12\sqrt{2}$

۷- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ابتدا نمودار تابع f را در بازهٔ $[-2 , 2]$ رسم می‌کنیم:



$$-2 \leq x < -1 \Rightarrow [x] = -2 \Rightarrow y = -2 - x$$
$$-1 \leq x < 0 \Rightarrow [x] = -1 \Rightarrow y = 1 + x$$
$$0 \leq x < 1 \Rightarrow [x] = 0 \Rightarrow y = -x$$
$$1 \leq x < 2 \Rightarrow [x] = 1 \Rightarrow y = -1 + x$$

۸- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ابتدا دامنه تابع f را مشخص می‌کنیم:

$$۳۶ - x^{۲} \geq ۰ \Rightarrow -۶ \leq x \leq ۶$$

شرط اینکه تابع f در بازهٔ موردنظر صعودی اکید باشد آن است که $f'(x) > ۰$:

$$f'(x) = ۲ + \frac{-x}{\sqrt{۳۶ - x^{۲}}} = \frac{۲\sqrt{۳۶ - x^{۲}} - x}{\sqrt{۳۶ - x^{۲}}} > ۰$$

مخرج کسر تابع مشتق همواره مثبت است، بنابراین:

$$۲\sqrt{۳۶ - x^{۲}} - x > ۰ \Rightarrow ۲\sqrt{۳۶ - x^{۲}} > x$$

نامعادلهٔ فوق به ازای $-۶ \leq x \leq ۰$ برقرار است. به ازای $x \geq ۰$:

$$۴\left(۳۶ - x^{۲}\right) > x^{۲} \Rightarrow x^{۲} < \frac{۱۴۴}{۵} \Rightarrow ۰ \leq x \leq \frac{۱۲}{\sqrt{۵}}$$

چون تابع در $x = ۰$ پیوسته است و در نقطه $x = \frac{۱۲}{\sqrt{۵}}$ مقدار مشتق صفر می‌شود، بنابراین بازه $\left[-۶ , \frac{۱۲}{\sqrt{۵}}\right]$

بزرگترین بازه‌ای است که تابع f اکیداً صعودی است:

$$a = -۶ , b = \frac{۱۲}{\sqrt{۵}}$$

$$b\sqrt{۵} - a = \frac{۱۲}{\sqrt{۵}} \times \sqrt{۵} - (-۶) = ۱۲ + ۶ = ۱۸$$

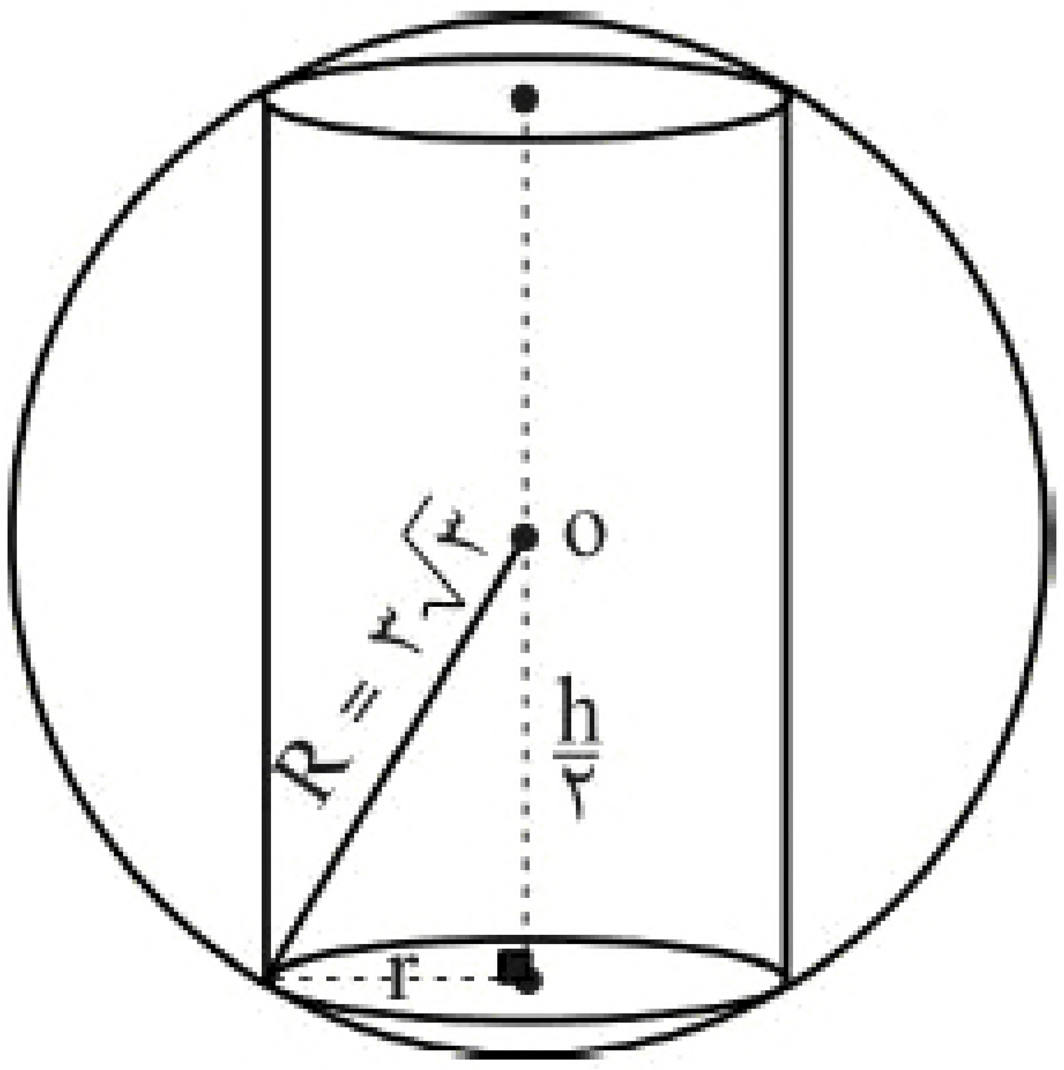
۹- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$f'(x) = ۳ax^{۲} + ۲bx + ۲a^{۲}$$

ماکزیمم نسبی $(۲ , ۱۶)$

$$\begin{cases} f(۲) = ۱۶ \Rightarrow ۱۶ = ۸a + ۴b + ۴a^{۲} \quad (۱) \\ f'(۲) = ۰ \Rightarrow ۱۲a + ۴b + ۲a^{۲} = ۰ \quad (۲) \end{cases}$$

۱۰- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.



$$\left(۳\sqrt{۳}\right)^{۲} = r^{۲} + \frac{h^{۲}}{۴} \Rightarrow r^{۲} = ۲۷ - \frac{۱}{۴}h^{۲} \quad (۱)$$

$$V_{\text{استوانه}} = \pi r^{۲}.h = \pi\left(۲۷ - \frac{۱}{۴}h^{۲}\right).h$$

$$V_{\text{استوانه}(h)} = ۲۷\pi h - \frac{\pi}{۴}h^{۳} \; ; \; ۰ \leq h \leq ۶\sqrt{۳}$$

برای یافتن نقاط بحرانی تابع حجم استوانه در بازه $\left[۰ , ۶\sqrt{۳}\right]$ ریشه‌های مشتق را به دست می‌آوریم:

$$V'(h) = ۲۷\pi - \frac{۳\pi}{۴}h^{۲} = ۰ \Rightarrow h = ۶ \Rightarrow r^{۲} = ۱۸$$

$$V_{max} = \pi r^{۲}.h = \pi \times ۱۸ \times ۶ = ۱۰۸\pi$$

«بانک سوال موسسه یاوران دانش»

۱۱- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. نقاط $x = \pm ۴$ نقاط انتهایی بازه هستند (۲ نقطه بحرانی) برای یافتن اکسترمم‌های مطلق و نسبی باید تابع مشتق را بررسی کنیم:

$$f(x) = |x^{۲} - x - ۶| = \begin{cases} x^{۲} - x - ۶ \; ; \; x \leq -۲ \text{ یا } x \geq ۳ \\ -x^{۲} + x + ۶ \; ; \; -۲ \leq x \leq ۳ \end{cases}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \begin{cases} ۲x - ۱ \; ; \; x < -۲ \text{ یا } x > ۳ \\ ۱ - ۲x \; ; \; -۲ < x < ۳ \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} f'_{-}(-۲) = -۵ \\ f'_{+}(-۲) = ۵ \end{array}\right\} \Rightarrow$$ (بحرانی) f در $x = -۲$ مشتق‌ناپذیر است

$$\left.\begin{array}{l} f'_{-}(۳) = -۵ \\ f'_{+}(۳) = ۵ \end{array}\right\} \Rightarrow$$ (بحرانی) f در $x = ۳$ مشتق‌ناپذیر است

$f'\left(\frac{۱}{۲}\right) = ۰ \Rightarrow x = \frac{۱}{۲}$ بحرانی

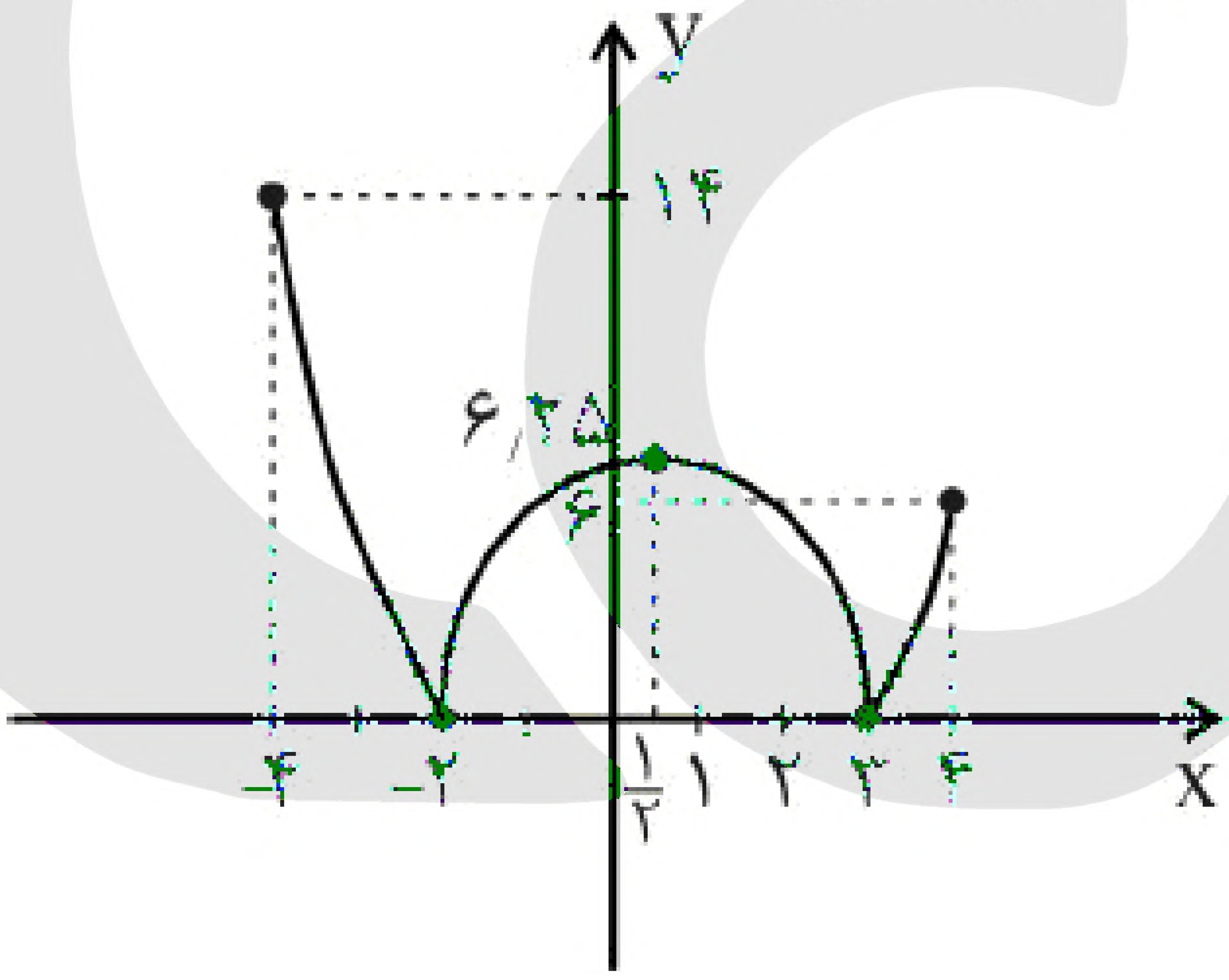
بنابراین: تابع f در ۵ نقطه $x = \pm ۴$ و $x = -۲$ و $x = \frac{۱}{۲}$ و $x = ۳$ بحرانی است. لذا $a = ۵$.

$f(-۴) = ۴$ ↓ max مطلق (بحرانی) ، $f(-۲) = ۰$ ↓ min مطلق و نسبی (بحرانی) ، $f\left(\frac{۱}{۲}\right) = ۶/۲۵$ ↓ max نسبی ، $f(۳) = ۰$ ↓ min مطلق و نسبی (بحرانی) ، $f(۴) = ۶$ ↓ فقط بحرانی

$a = ۵ \, , \, b = ۱ \, , \, c = ۲ \, , \, d = ۱ \, , \, e = ۲$ (بحرانی)

$a + ۲b + ۳c + ۴d + ۵e = ۵ + ۲(۱) + ۳(۲) + ۴(۱) + ۵(۲) = ۲۷$

نمودار نهایی تابع در بازهٔ $[-۴ \, , ۴]$ به صورت زیر است:



۱۲- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

دامنه تابع f : $\frac{۱}{۲}x^{۲} - \frac{۱}{۴}x^{۴} \geq ۰ \Rightarrow \underbrace{\frac{۱}{۴}x^{۲}}_{\text{همواره نامنفی}}(۲ - x^{۲}) \geq ۰$

$$۲ - x^{۲} \geq ۰ \Rightarrow x^{۲} \leq ۲ \Rightarrow -\sqrt{۲} \leq x \leq \sqrt{۲} \Rightarrow D_f = \left[-\sqrt{۲}\,,\ \sqrt{۲}\right]$$

نقاط ابتدا و انتهای بازهٔ بسته D_f خود بحرانی‌اند؛ زیرا در $x = \sqrt{۲}$ مشتق راست و در $x = -\sqrt{۲}$ مشتق چپ وجود ندارد.

$$f(x) = \left(\frac{۱}{۲}x^{۲} - \frac{۱}{۴}x^{۴}\right)^{\frac{۱}{۴}} \Rightarrow f'(x) = \frac{۱}{۴}\left(\frac{۱}{۲}x^{۲} - \frac{۱}{۴}x^{۴}\right)^{-\frac{۳}{۴}}(x - x^{۳})$$

$$f'(x) = \frac{x - x^{۳}}{۴\sqrt[۴]{\left(\frac{۱}{۲}x^{۲} - \frac{۱}{۴}x^{۴}\right)^{۳}}}$$

$$\xrightarrow{\text{صورت} = ۰} x = ۰, x = ۱, x = -۱ \Rightarrow f' = ۰$$

$$\xrightarrow{\text{مخرج} = ۰} x = ۰, x = \sqrt{۲}, x = -\sqrt{۲} \Rightarrow \text{وجود ندارد } f'$$

با توجه به تعریف مشتق در $x = ۰$ به صورت:

$$f(۰) = \lim_{x \to ۰} \frac{\sqrt[۴]{\frac{۱}{۲}x^{۲} - \frac{۱}{۴}x^{۴}} - ۰}{x - ۰} = \lim_{x \to ۰} \frac{\sqrt[۴]{x^{۲}\left(\frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۴}x^{۲}\right)}}{x}$$

حاصل این حدّ $f'_{+}(۰) = +\infty$ و $f'_{-}(۰) = -\infty$ و بنابراین نقطه بحرانی است. این تابع با این شرایط در پنج نقطه $\left\{-\sqrt{۲}, -۱, ۰, ۱, \sqrt{۲}\right\}$ بحرانی است.

۱۳- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. تابع f در بازه $[-۴\,,\,۳]$ پیوسته و مشتق‌پذیر است:

$$f'(x) = x^{۲} - ۲x - ۱۵ = ۰ \begin{cases} x = ۵ \quad \text{غ ق ق (در بازه نیست)} \\ x = -۳ \Rightarrow f(-۳) = ۳۴ \end{cases}$$

$$f(-۴) = \frac{۸۹}{۳} \approx ۲۹/۶۷$$

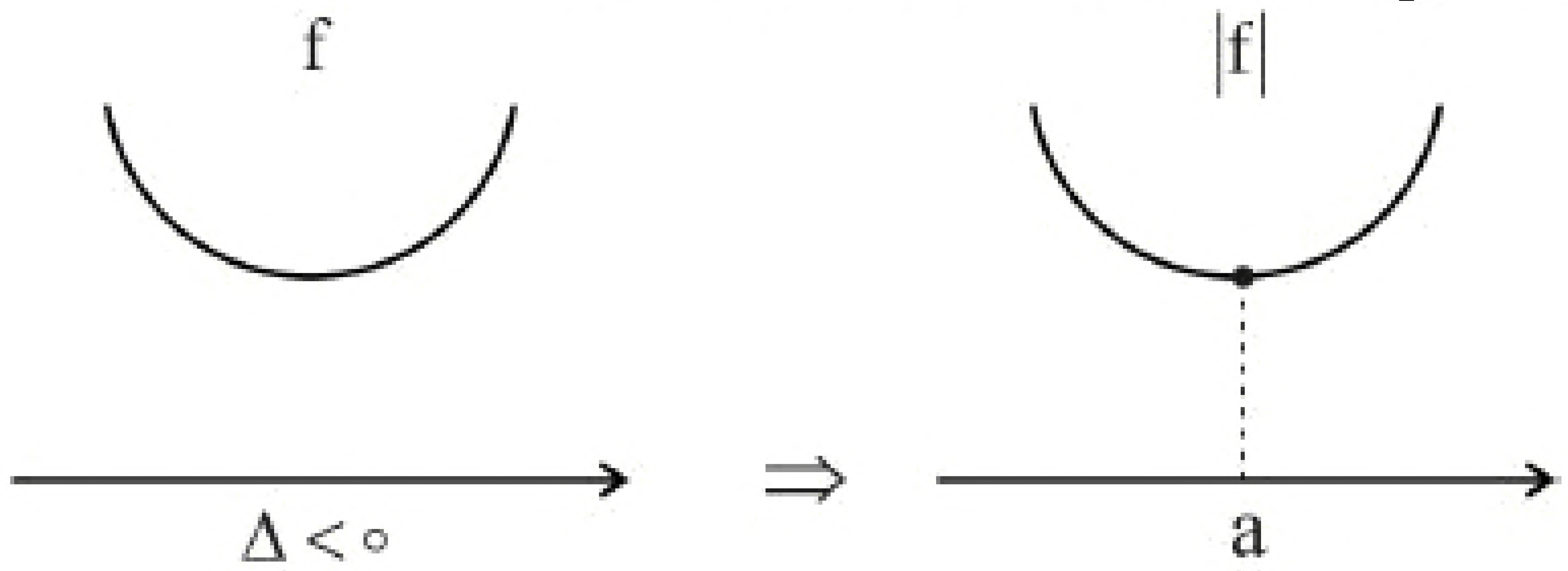
$$f(۳) = -۳۸ \Rightarrow \text{Min مطلق}$$

$$f(-۳) = ۳۴ \Rightarrow \text{Max مطلق}$$

$$(\text{تفاوت مقادیر ماکزیمم و مینیمم}) = ۳۴ - (-۳۸) = ۷۲$$

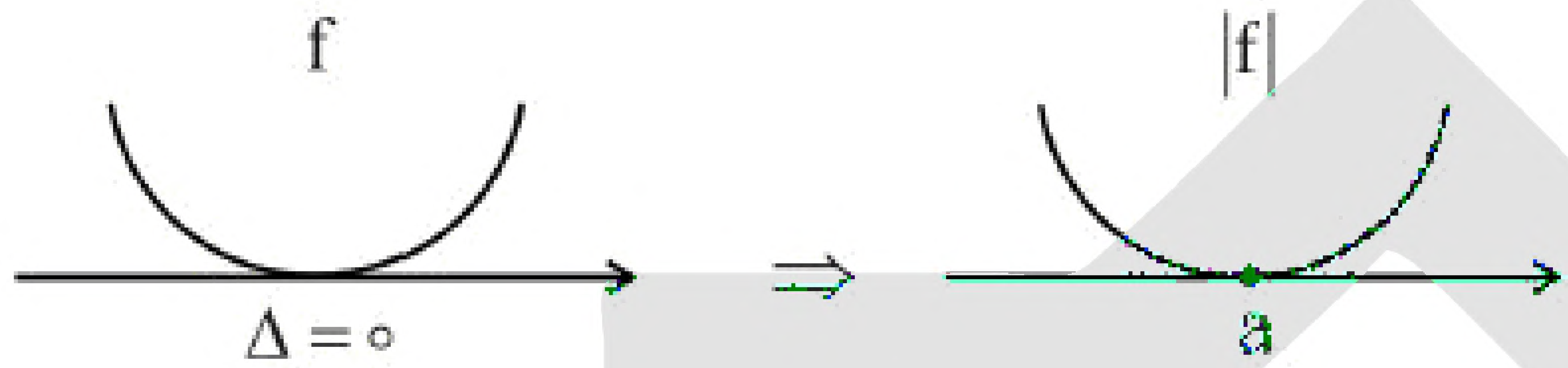
۱۴- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. برای نمودار قدرمطلق یک تابع درجه دو، سه حالت متصور است:

حالت اول:



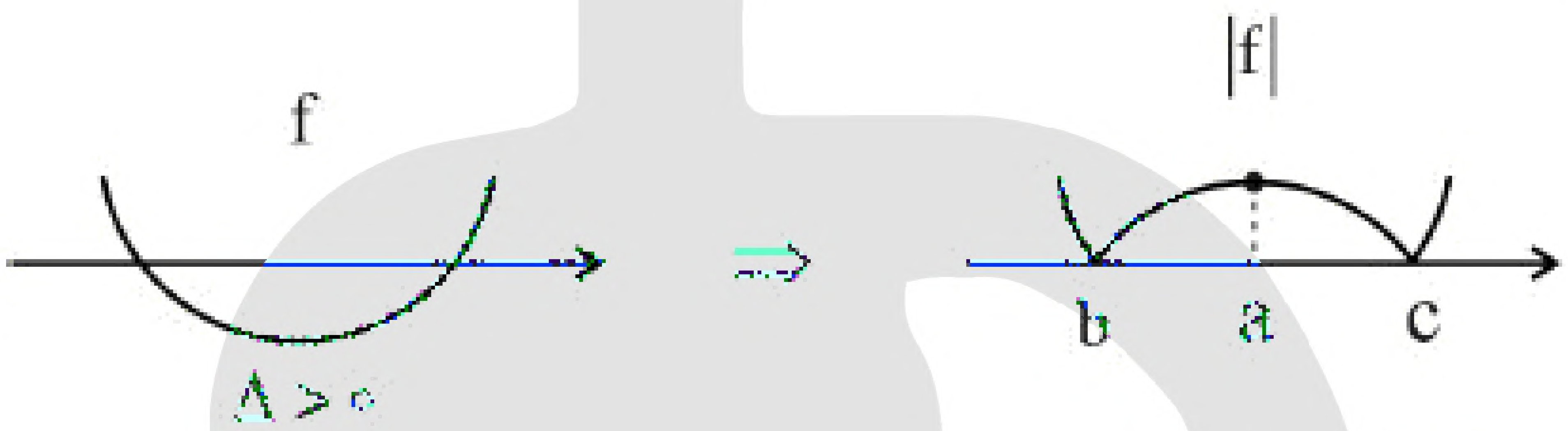
دارای یک نقطهٔ مینیمم نسبی در $x = a$ است.

حالت دوم:



دارای یک نقطهٔ مینیمم نسبی در $x = a$ است.

حالت سوم:



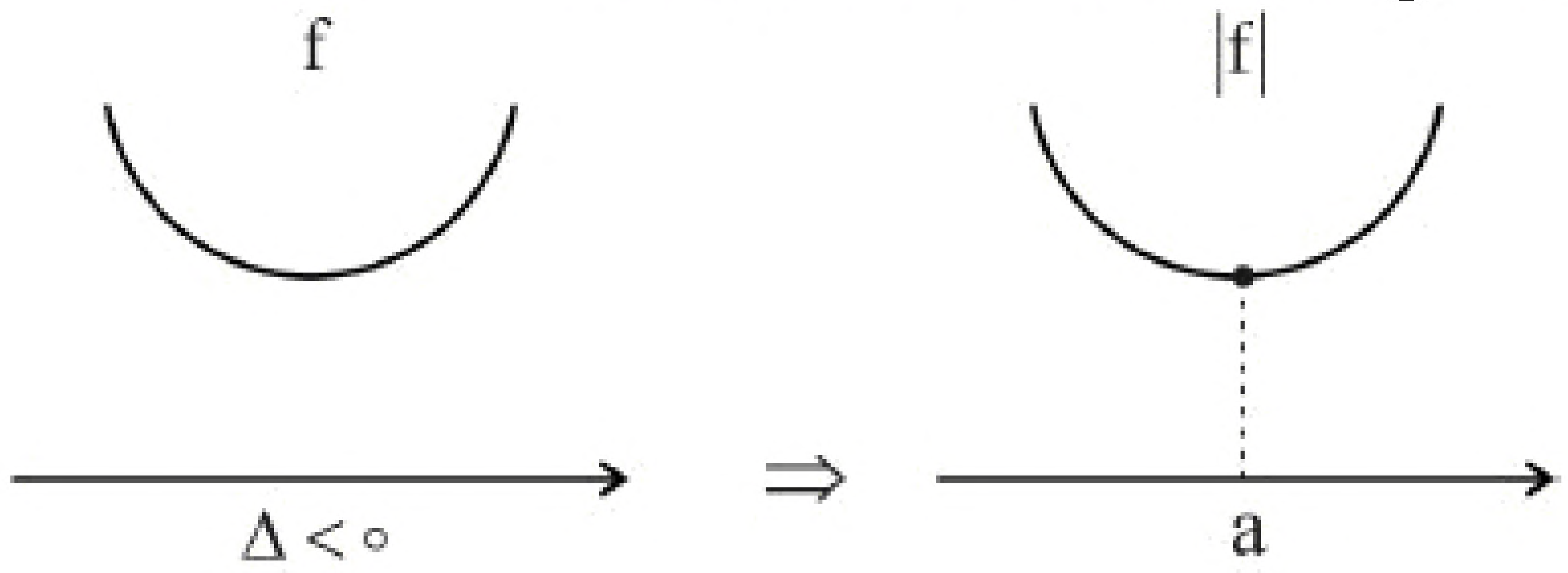
دارای دو نقطهٔ مینیمم نسبی در ریشه‌های f یعنی $x = b$ و $x = c$ است.
(واضح است در حالتی‌که در دهانهٔ نمودار درجه دو به سمت پایین باشد هم همین حالات تکرار می‌شود.)
چون می‌خواهیم که تابع یک نقطهٔ مینیمم نسبی داشته باشد، پس باید دو حالت اول اتفاق افتاده باشد، یعنی:

$$\Delta \leq 0 \Rightarrow (m-1)^2 - 4(m-1) \leq 0 \Rightarrow m^2 - 6m + 5 \leq 0 \Rightarrow 1 \leq m \leq 5$$

دقت کنید که به ازای $m = 1$، ضریب x^2 در تابع درجه دو، برابر با صفر شده و این تابع از فرم درجه دو خارج می‌شود و به صورت تابع ثابت $y = 1$ درمی‌آید که دارای بی‌شمار نقطه مینیمم نسبی است و حالت مطلوب این تست نیست.
پس $1 < m \leq 5$، قابل قبول است و چهار مقدار صحیح برای m وجود دارد.

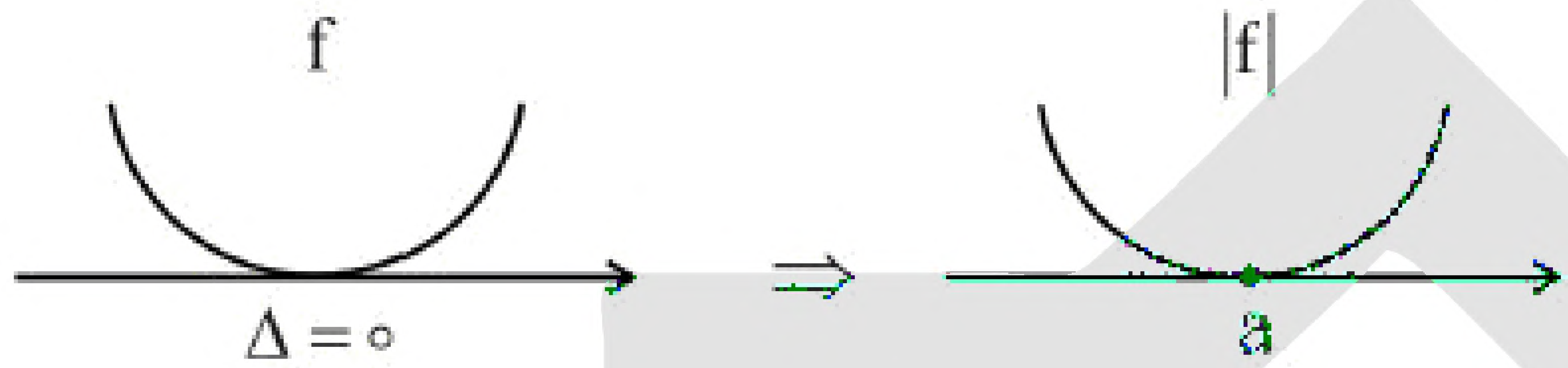
۱۵- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. برای نمودار قدرمطلق یک تابع درجه دو، سه حالت متصور است:

حالت اول:



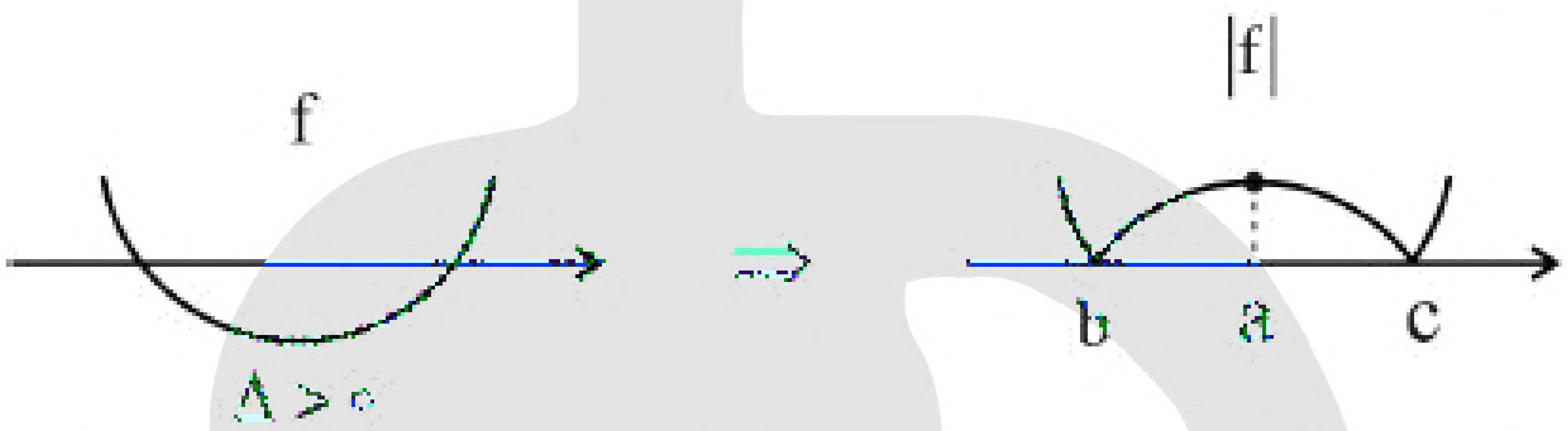
دارای یک نقطهٔ بحرانی با مشتق صفر در $x = a$ است.

حالت دوم:



دارای یک نقطهٔ بحرانی با مشتق صفر در $x = a$ است.

حالت سوم:



دارای یک نقطهٔ بحرانی با مشتق صفر در $x = a$ و دو نقطهٔ بحرانی گوشه و مشتق‌ناپذیر در ریشه‌های f یعنی $x = b$ و $x = c$ است.

(واضح است در حالتی‌که در دهانهٔ نمودار درجه دو به سمت پایین باشد هم همین حالات تکرار می‌شود.)

چون می‌خواهیم که تابع یک نقطهٔ بحرانی داشته باشد، پس باید دو حالت اول اتفاق افتاده باشد، یعنی:

$$\Delta \le ۰ \Rightarrow (m+۳)^{۲} - ۴(m+۳) \le ۰ \Rightarrow m^{۲} + ۲m - ۳ \le ۰ \Rightarrow -۳ \le m \le ۱$$

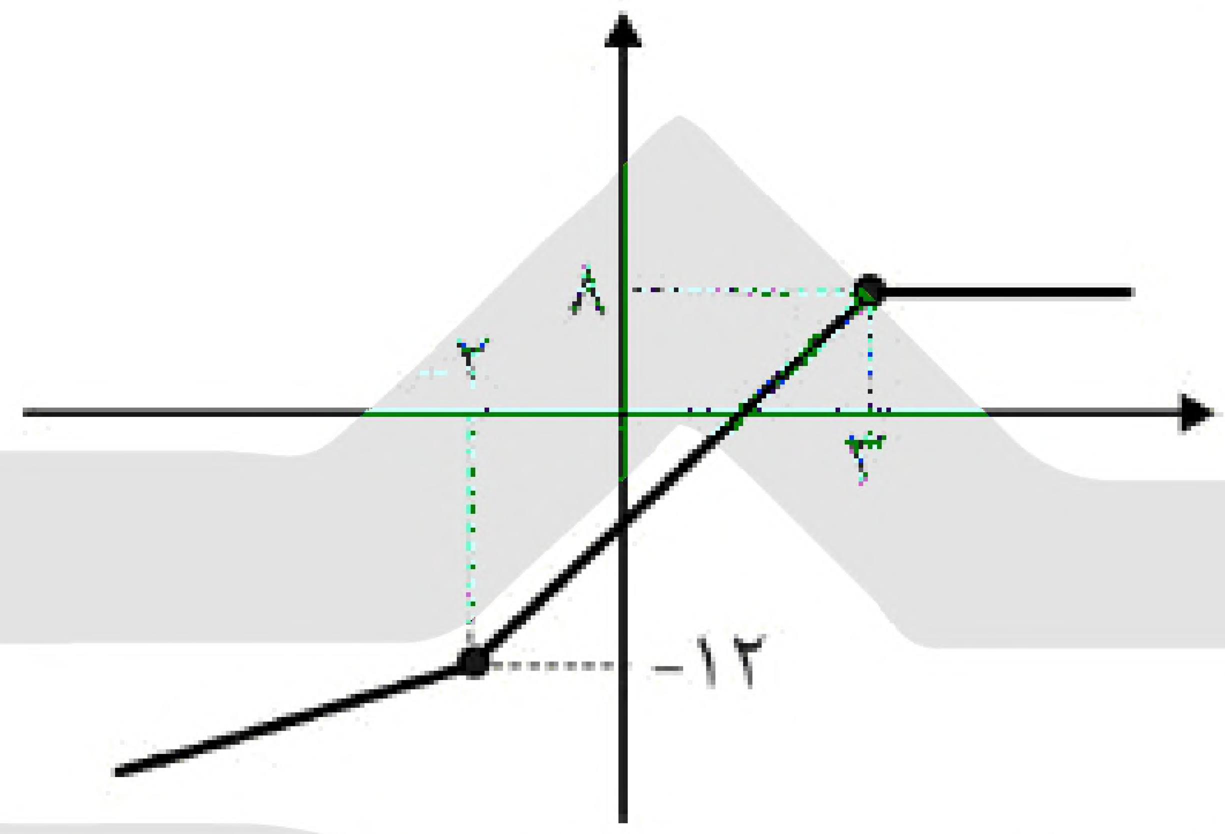
دقت کنید که به ازای $m = -۳$، ضریب $x^{۲}$ در تابع درجه دو، برابر با صفر شده و این تابع از فرم درجه دو خارج می‌شود و به صورت تابع ثابت $y = ۱$ درمی‌آید که دارای بی‌شمار نقطه بحرانی است و حالت مطلوب این تست نیست. پس $-۳ < m \le ۱$، قابل قبول است و چهار مقدار صحیح برای m وجود دارد.

۱۶- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. دقت کنید که بزرگترین بازه‌ای که تابع f در آن صعودی است را به دست آوریم.

تابع به صورت $f(x) = |x+۲| - |۲x - ۶| + x$ است. به کمک ریشه‌های داخل قدرمطلق $(x = ۳ , x = -۲)$ محور اعداد را تقسیم‌بندی کرده و تکلیف قدرمطلق‌ها را روشن می‌کنیم:

$$x < -۲ \Rightarrow (-x-۲) + (۲x+۶) + x = ۲x - ۸$$
$$-۲ \leq x < ۳ \Rightarrow (x+۲) + (۲x - ۶) + x = ۴x - ۴$$
$$۳ \leq x \Rightarrow (x+۲) - (۲x - ۶) + x = ۸$$

پس نمودار تابع به این صورت است:



واضح است که تابع در بازه $(-\infty , ۳)$ اکیداً صعودی و در $(-\infty , +\infty)$ صعودی است.

۱۷- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$f'(x) = x^۲ + x - ۵۶ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = -۸ \\ x = ۷ \end{cases}$$

f طول بازه نزولی اکید بودن $= ۷ - (-۸) = ۱۵$

۱۸- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

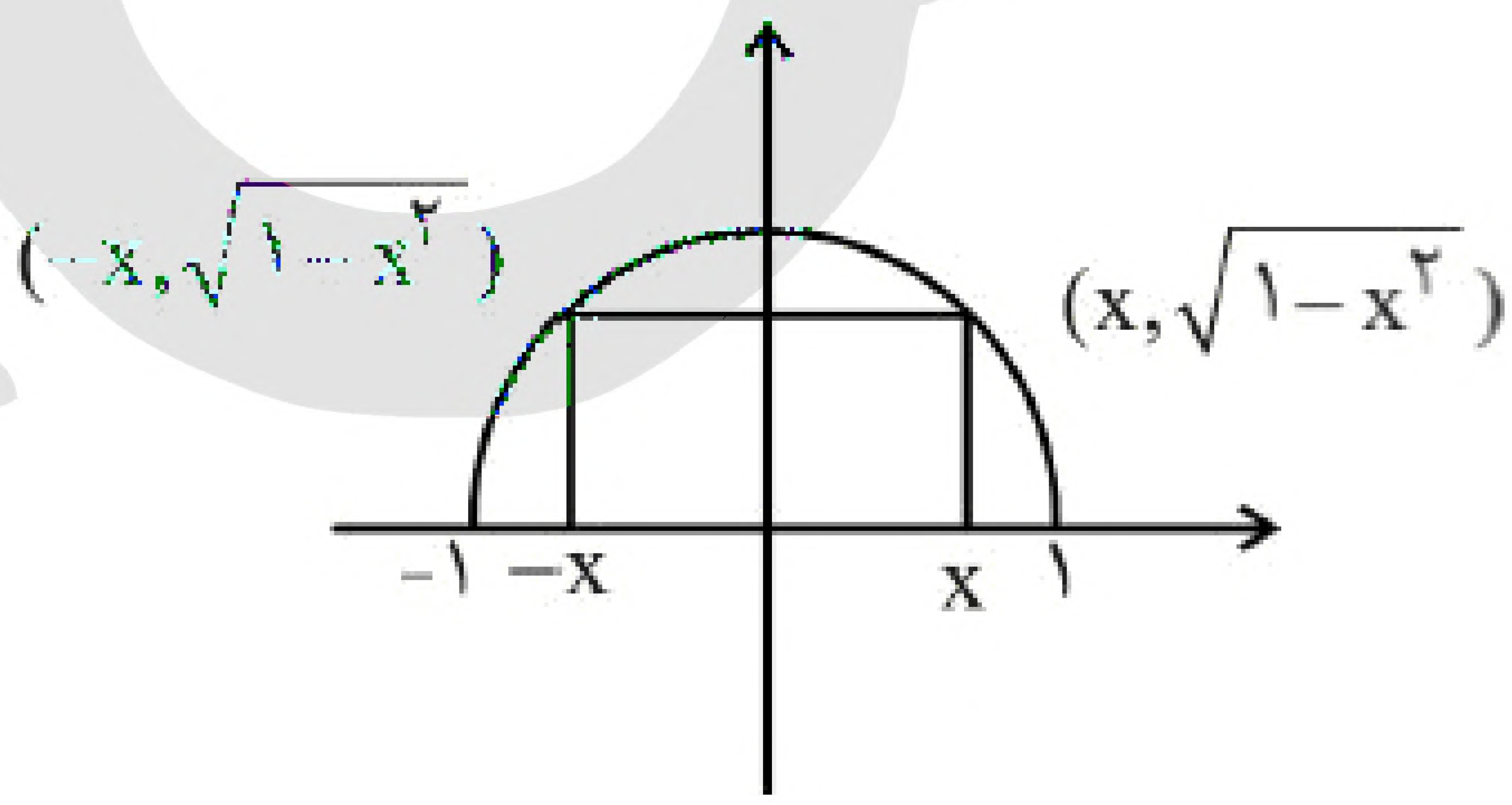
$$S_{ABCD} = ۲x.\sqrt{۱ - x^۲}$$

$$S' = ۲\sqrt{۱ - x^۲} + \frac{(-۲x)(۲x)}{۲\sqrt{۱ - x^۲}} = ۰$$

$$S' = \frac{۲(۱ - x^۲) - ۲x^۲}{\sqrt{۱ - x^۲}} = \frac{-۴x^۲ + ۲}{\sqrt{۱ - x^۲}} = ۰$$

$$\Rightarrow x = \pm\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$S = ۲\left(\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right).\sqrt{۱ - \frac{۱}{۲}} = \sqrt{۲}.\frac{۱}{\sqrt{۲}} = ۱$$



۱۹- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$f(x)=x^{۳}-ax^{۲}-۹x$$

$$f'(x)=۳x^{۲}-۲ax-۹$$

$$x'+x''=-\frac{-۲a}{۳}=۲\Rightarrow a=۳\Rightarrow\begin{cases}f(x)=x^{۳}-۳x^{۲}-۹x\\ f'(x)=۳x^{۲}-۶x-۹\end{cases}$$

$$f'(x)=۰\Rightarrow\begin{cases}x_۱=-۱\\ x_۲=۳\end{cases}$$ طول اکسترمم‌های نسبی

$$\begin{cases}f(-۱)=۵\\ f(۳)=-۲۷\end{cases}$$ عرض اکسترمم های نسبی $\Rightarrow ۵+(-۲۷)=-۲۲$

۲۰- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

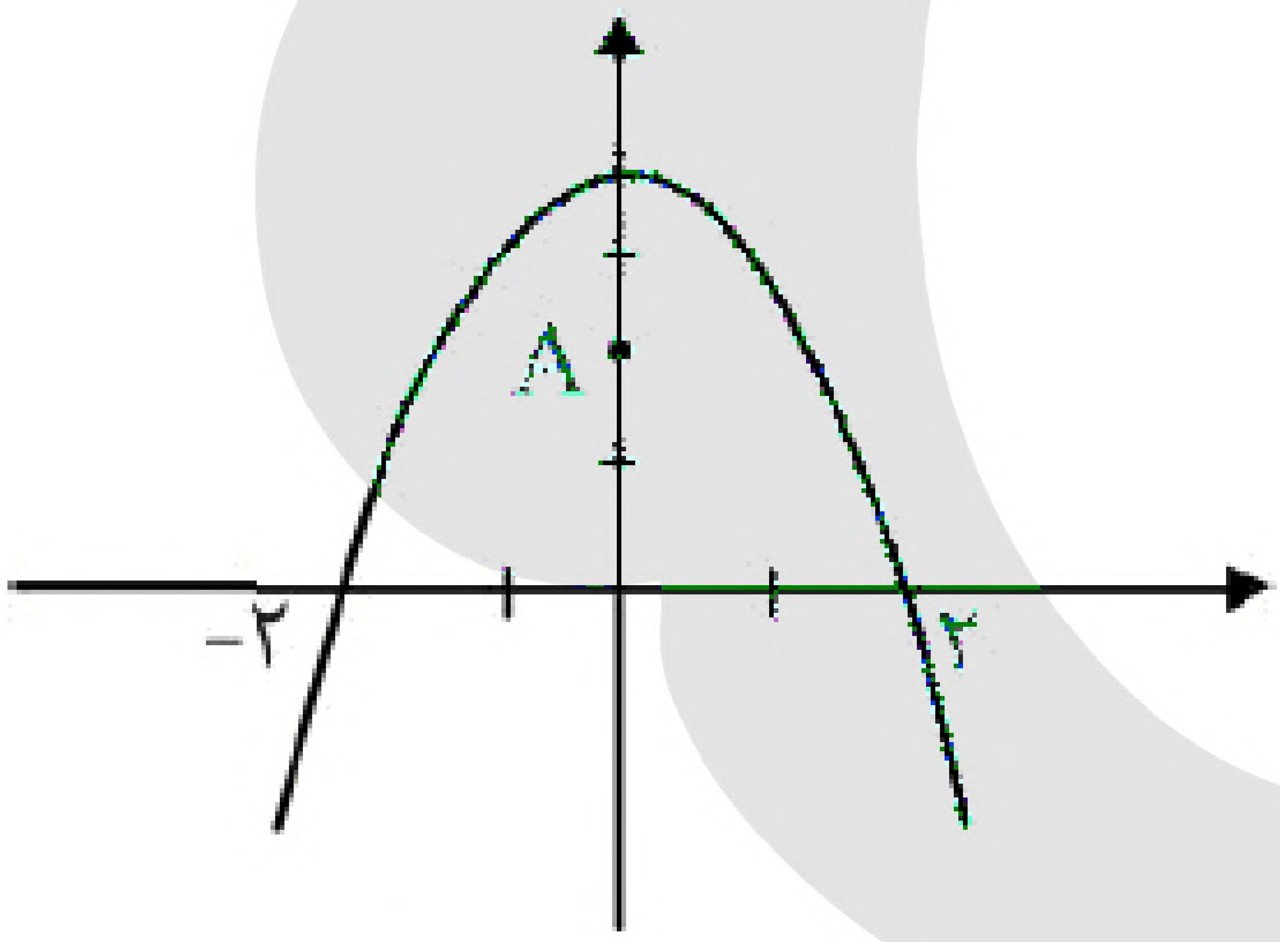
$$f'(x)=۳x^{۲}-۱۲=۰\begin{cases}x=۲\ \checkmark\\ x=-۲\ \times\end{cases}$$ در بازه نیست

$$\left.\begin{array}{l}x=۱\Rightarrow y=k-۱۱\\ x=۲\Rightarrow y=k-۱۶\min\\ x=۳\Rightarrow y=k-۹\max\end{array}\right\}\Rightarrow k-۹=۲(k-۱۶)\Rightarrow k=۲۳$$

$$f(x)=x^{۳}-۱۲x+۲۳\Rightarrow f'(x)=۳x^{۲}-۱۲\Rightarrow f''=۶x=۰\Rightarrow x=۰\ ,\ y=۲۳$$

$\Rightarrow$ نقطه عطف $I(۰\ ,\ ۲۳)\xrightarrow{\text{فاصله تا مبدا مختصات}}OI=۲۳$

۲۱- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.



$$y=-x^{۲}+۴\ ,\ A(۰\ ,\ ۲)\ ,\ B(x\ ,\ y)\in f$$

$$d=\sqrt{(x-۰)^{۲}+(y-۲)^{۲}}$$ کم ترین مقدار باشد

$$d=\sqrt{x^{۲}+(-x^{۲}+۴-۲)^{۲}}=\sqrt{x^{۲}+(۲-x^{۲})^{۲}}$$

$$d=\sqrt{x^{۴}-۳x^{۲}+۴}$$

$$d'=\frac{۴x^{۳}-۶x}{۲\sqrt{x^{۴}-۳x^{۲}+۴}}=۰\Rightarrow ۴x^{۳}-۶x=۰\Rightarrow\begin{cases}x=۰\\ x^{۲}=\frac{۳}{۲}\Rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{۳}{۲}}\end{cases}$$

$$x=۰\Rightarrow y=۴\Rightarrow d=۲$$

$$x=\pm\sqrt{\frac{۳}{۲}}\Rightarrow y=\frac{۵}{۲}\Rightarrow d=\frac{\sqrt{۷}}{۲}$$ کم‌ترین مقدار

$$\left(\frac{\sqrt{۳}}{۲},\frac{۵}{۲}\right),\left(-\frac{\sqrt{۳}}{۲},\frac{۵}{۲}\right)\qquad \frac{۵}{۲}+\frac{۵}{۲}=۵$$

۲۲- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. اگر حاصل‌ضرب دو مقدار مثبت برابر عدد ثابتی باشد، حاصل‌جمع آن دو عدد وقتی می‌نیمم است که آن دو عدد با هم برابر باشند.

$$x \cdot y = ۲۵۶ \Rightarrow y = \frac{۲۵۶}{x}$$

می‌نیمم باشد : $z = x + y \Rightarrow z = x + \frac{۲۵۶}{x} = \frac{x^۲ + ۲۵۶}{x}$

$$Z' = \frac{۲x^۲ - x^۲ - ۲۵۶}{x^۲} = ۰ \Rightarrow x^۲ - ۲۵۶ = ۰ \Rightarrow x = ۱۶ \Rightarrow y = ۱۶$$

$(d :$ قطر$) \Rightarrow d^۲ = ۱۶^۲ + ۱۶^۲ = ۲۵۶ + ۲۵۶ = ۵۱۲ \Rightarrow d = ۱۶\sqrt{۲}$

۲۳- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$y = \frac{x^۲ - x - ۱}{x^۲ + x + ۱}$$

$$y = \frac{x^۲ + x + ۱ - ۲x - ۲}{x^۲ + x + ۱} = ۱ + \frac{-۲x - ۲}{x^۲ + x + ۱}$$

$$y' = \frac{-۲\left(x^۲ + x + ۱\right) - (۲x + ۱)(-۲x - ۲)}{\left(x^۲ + x + ۱\right)^۲} = ۰$$

$$-۲x^۲ - \cancel{۲x} - \cancel{۲} + ۴x^۲ + ۴x + \cancel{۲x} + \cancel{۲} = ۰$$

$$۲x^۲ + ۴x = ۰ \Rightarrow ۲x(x + ۲) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۰ \\ x = -۲ \end{cases}$$ طول نقاط بحرانی

$\cancel{x}\,|$

$$\frac{۵}{۳} - (-۱) = \frac{۸}{۳}$$

۲۴- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{(a-۱)x^۲ + bx}{x^۲+۴} = ۰ \Rightarrow a-۱ = ۰ \Rightarrow a = ۱$$

$$f(x) = \frac{bx}{x^۲+۴}$$

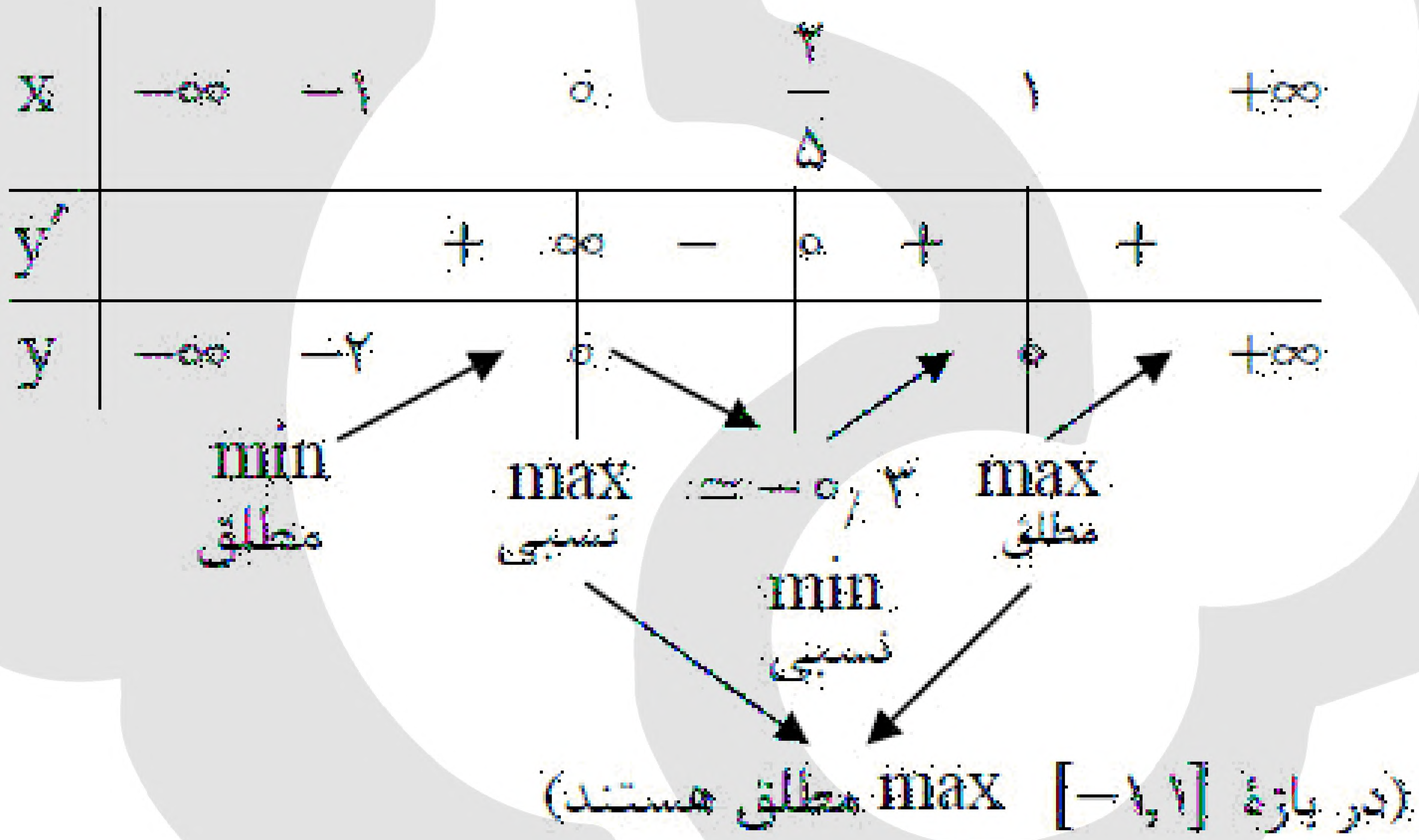
$$f'(x) = \frac{b\left(x^۲+۴\right) - ۲bx^۲}{\left(x^۲+۴\right)^۲} = ۰ \Rightarrow -bx^۲ + ۴b = ۰ \Rightarrow x^۲ = ۴ \Rightarrow x = \pm ۲$$ طول نقاط اکسترمم نسبی تابع

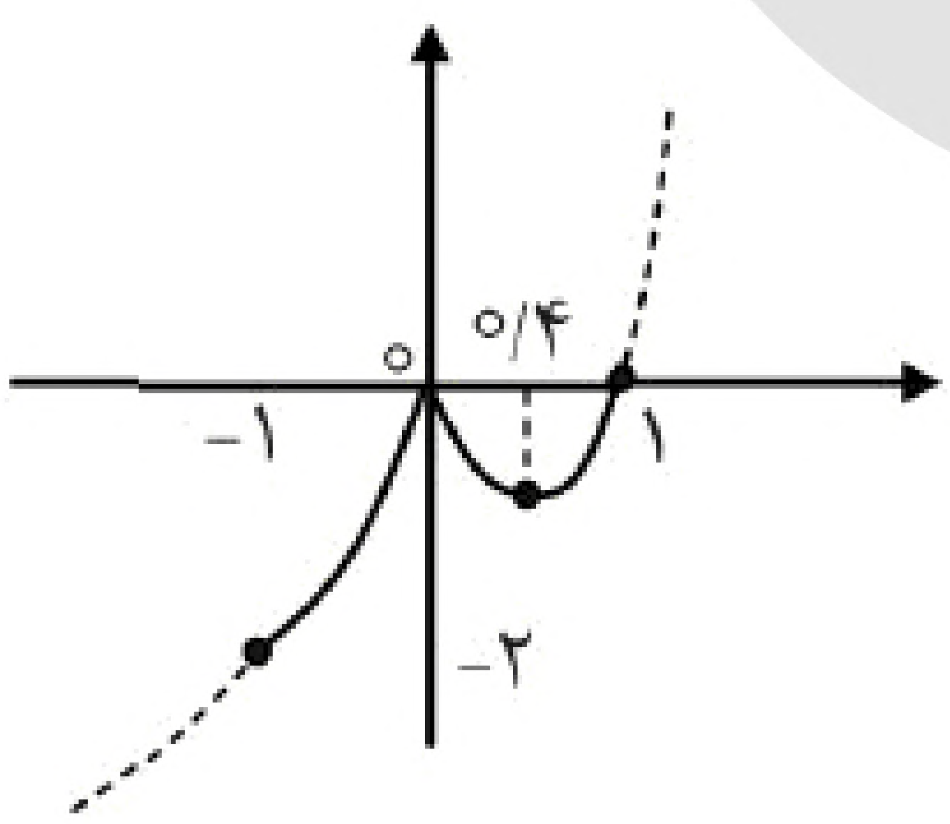
$$f(۲) = ۱ \Rightarrow \frac{b(۲)}{۲^۲+۴} = ۱ \Rightarrow b = ۴ \qquad a + b = ۱ + ۴ = ۵$$

۲۵- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$f(x) = (x-۱)\sqrt[۳]{x^۲} = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۱ \\ x = ۰ \end{cases}$$ ریشه‌های تابع

$$f'(x) = \frac{۵x-۲}{۳\sqrt[۳]{x}} = ۰ \Rightarrow x = \frac{۲}{۵} \Rightarrow x = ۰ \,,\, x = \frac{۲}{۵}$$ طول نقاط بحرانی تابع





$۰ + ۰/۴ = ۰/۴$ = مجموع طول های ماکزیمم و مینیمم نسبی تابع f

$-۲ + ۰ = -۲$ = حاصل جمع max و min مطلق تابع f

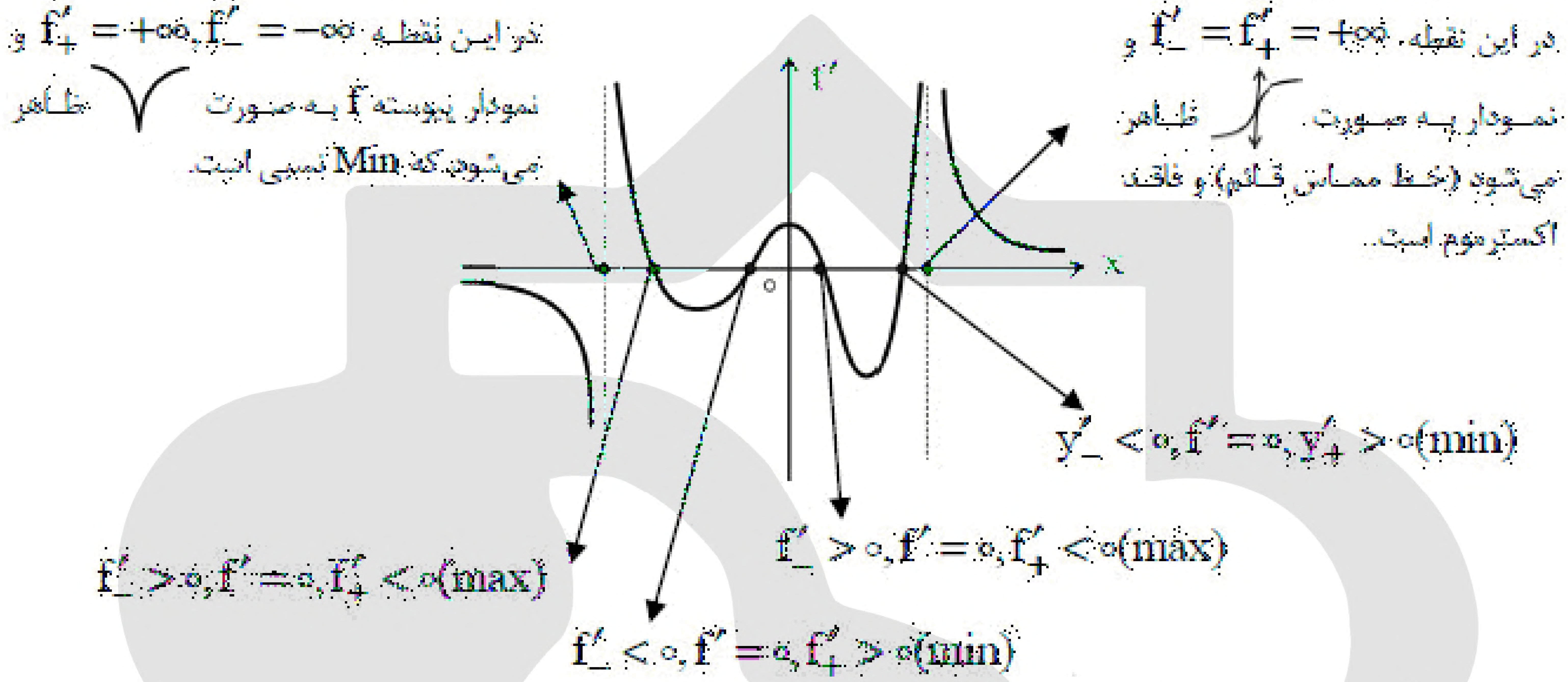
$۰/۴ - (-۲) = ۲/۴$

۲۶- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. $f' > ۰$ (نمودار 'f بالای محور xها) باشد f صعودی

$f' < ۰$ (نمودار 'f بالای محور xها) باشد f نزولی

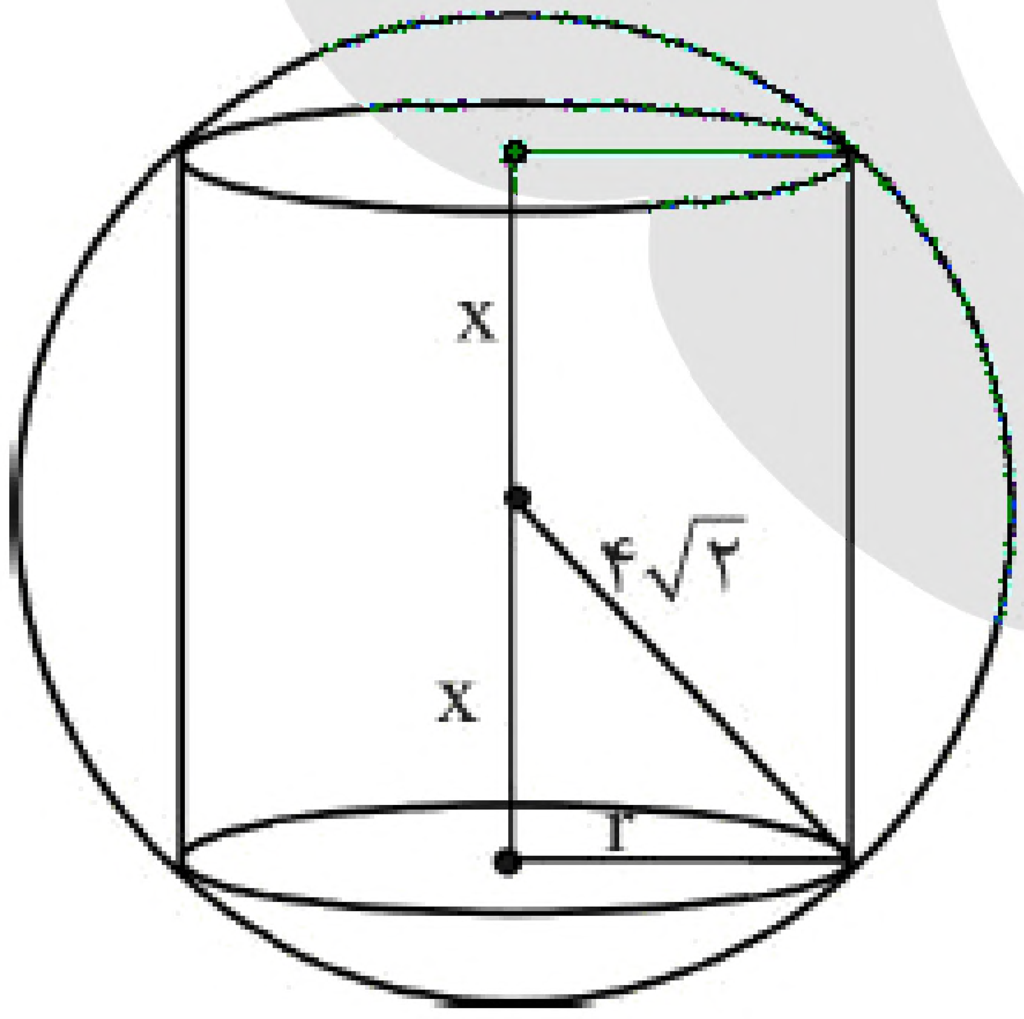
۲۷- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ممکن است $f'(x_0) = 0$ موجود نباشد ولی x_0 طول اکسترمم نسبی تابع f باشد. ممکن است $f'(x_0)$ موجود و برابر صفر باشد، ولی x_0 طول اکسترمم نسبی تابع f نباشد. اما اگر f در x_0 دارای اکسترمم نسبی باشد و $f'(x_0)$ موجود باشد، آن‌گاه $f'(x_0) = 0$ است.

۲۸- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.



بنابراین تابع f دارای ۲ ماکزیمم نسبی و ۳ مینیمم نسبی است.

۲۹- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.



ارتفاع استوانه $h = 2x$

$$r^2 + x^2 = (4\sqrt{2})^2 \Rightarrow r = \sqrt{32 - x^2} \quad (1)$$

جانبی استوانه $S =$ محیط قاعده × ارتفاع

$$S = 2\pi r.(2x) \xrightarrow{\text{طبق ۱}} S = 2\pi\sqrt{32 - x^2}.(2x)$$

$$\boxed{S = 4\pi x\sqrt{32 - x^2}} \xrightarrow{\text{مشتق} = 0}$$

$$S' = 4\pi\left(1 \times \sqrt{32 - x^2} + \frac{-2x}{2\sqrt{32 - x^2}} \times x\right) = 0$$

$$\frac{\sqrt{32 - x^2}}{1} = \frac{x^2}{\sqrt{32 - x^2}} \Rightarrow 32 - x^2 = x^2 \Rightarrow \boxed{x = 4} \Rightarrow S_{max} = 4\pi \times 4\sqrt{32 - 16}$$

$$S_{max} = 64\pi = 192$$

«بانک سوال موسسه یاوران دانش»

۳۰- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. در تابع درجه ۳ با دامنه R، نقطه‌های بحرانی فقط به ازای $f'(x) = ۰$ حاصل می‌شوند. چون این تابع فقط یک نقطه بحرانی دارد، پس معادله درجه ۲ مشتق تابع باید ریشه‌ی مضاعف داشته باشد:

$$f'(x) = ۳ax^۲ + ۲(a+۴)x - ۳ \Rightarrow \Delta = ۴(a+۴)^۲ + ۳۶a = ۰$$

$$a^۲ + ۱۷a + ۱۶ = ۰ \Rightarrow a = -۱۶ , a = -۱$$

از طرفی دیگر به ازای $a = ۰$ ضابطه تابع $f(x) = ۴x^۲ - ۳x + ۲$ می‌شود که یک سهمی است و آن هم فقط یک نقطه بحرانی دارد. پس تمام مقادیر a عبارتند از ۳ عدد: ۰ و ۱- و ۱۶- که مجموعشان ۱۷- می‌باشد.

۳۱- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ابتدا نقاط بحرانی تابع در بازه‌ی $D_F = [-۱ , ۱]$ را مشخص می‌کنیم:

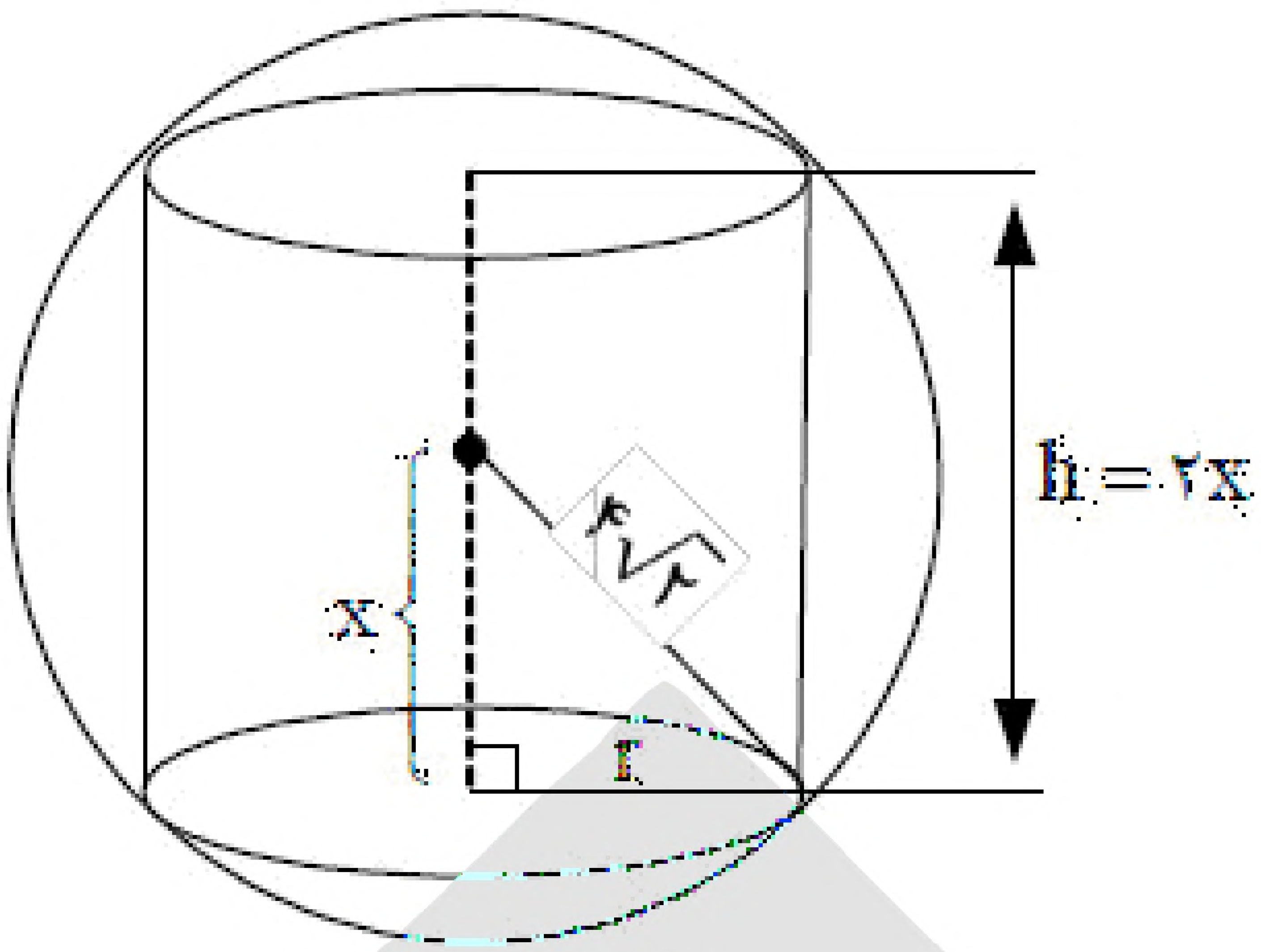
$$y' = ۱ - \frac{x}{\sqrt{۱ - x^۲}} = ۰ \Rightarrow x = \sqrt{۱ - x^۲} \xrightarrow{\text{به توان ۲}} x^۲ = ۱ - x^۲ \Rightarrow ۲x^۲ = ۱$$

$$\Rightarrow x = \pm\frac{\sqrt{۲}}{۲} : f(-۱) = -۱ , f\left(-\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right) = ۰ , f\left(-\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right) = ۰ , f\left(\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right) = \sqrt{۲} , f(۱) = ۱$$

$$\text{Max}_{\text{مطلق}} \left(\frac{\sqrt{۲}}{۲}, \sqrt{۲}\right) \qquad \text{Min}_{\text{مطلق}}(-۱ , -۱)$$

شیب خط گذرنده از نقاط Max و Min $m = \dfrac{\sqrt{۲}+۱}{\dfrac{\sqrt{۲}}{۲}+۱} = \sqrt{۲} \xrightarrow{\text{معادله خط}}$

۳۲- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.



$$x^۲ + r^۲ = ۳۲ \Rightarrow r = \sqrt{۳۲ - x^۲}$$

جانبی استوانه $S =$ محیط قاعده $\times$ ارتفاع $= ۲\pi r \times ۲x = ۴\pi xr$

$$S = ۴\pi x\sqrt{۳۲ - x^۲}$$

$$S' = ۴\pi\left(۱ \times \sqrt{۳۲ - x^۲} + \frac{-۲x}{۲\sqrt{۳۲ - x^۲}} \times x\right) = ۰$$

$$\sqrt{۳۲ - x^۲} = \frac{x^۲}{\sqrt{۳۲ - x^۲}} \Rightarrow ۳۲ - x^۲ = x^۲$$

$$۳۲ = ۲x^۲ \quad x^۲ = ۱۶$$

$$\boxed{x = ۴} \to \boxed{r = ۴}$$

$$S_{max} = ۴\pi \times ۴ \times ۴ = ۶۴\pi$$

۳۳- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$y' = ۳x^۲ + ۲mx - ۹ \Rightarrow y'(-۳) = ۰ \Rightarrow ۳(-۳)^۲ + ۲m(-۳) - ۹ = ۰$$

$$m = ۳ \begin{cases} y' = ۳x^۲ + ۶x - ۹ = ۰ \begin{cases} x = ۱ \Rightarrow y = -۲۴ \\ x = -۳ \end{cases} \\ y = x^۳ + ۳x^۲ - ۹x - ۱۹ \end{cases}$$ مقدار اکسترمم دیگر

۳۴- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

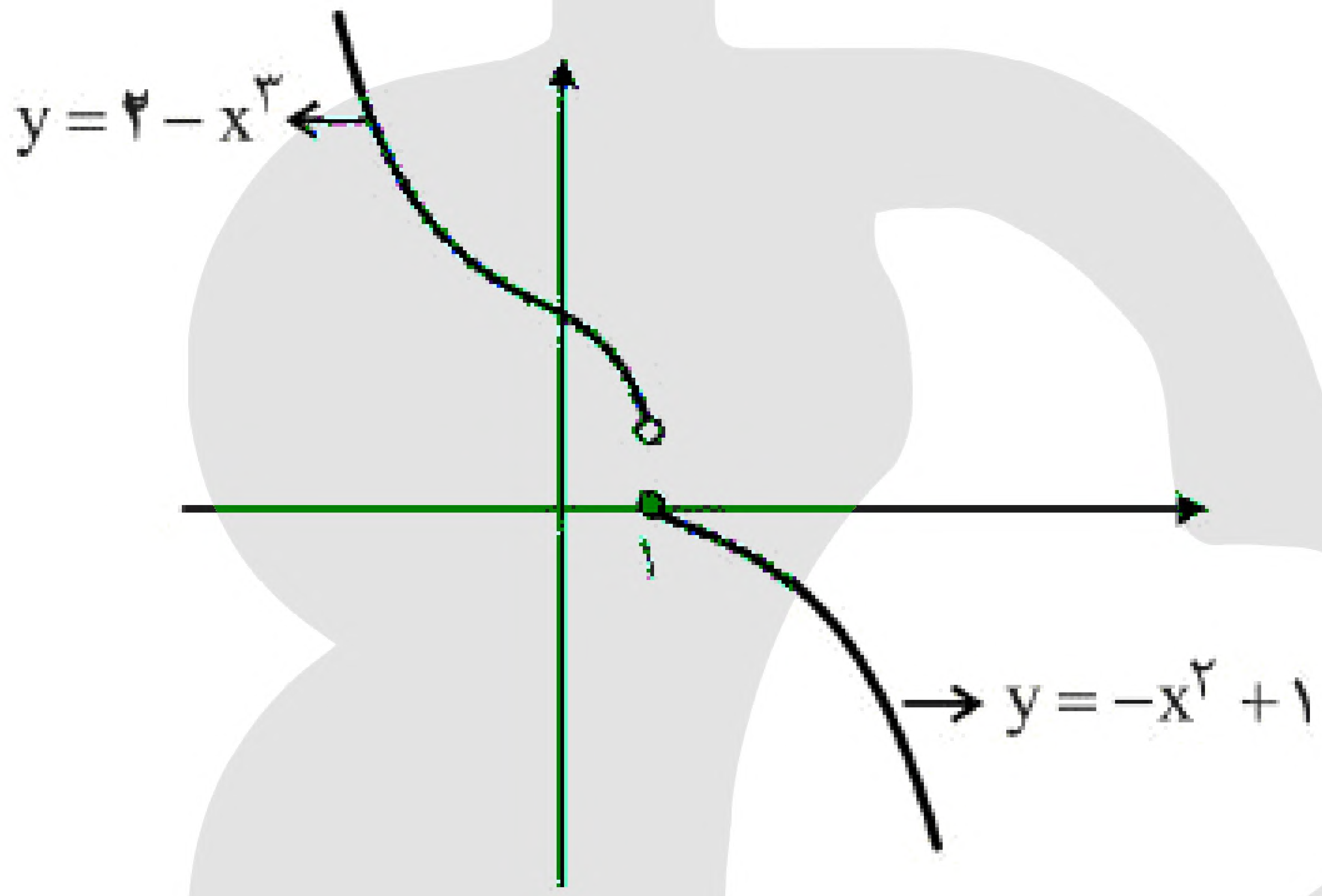
$$f'(x) = ۱ + \frac{۴ - ۲x}{۲\sqrt{۴x - x^۲}} = ۰ \Rightarrow ۱ = \frac{x - ۲}{\sqrt{۴x - x^۲}} \xrightarrow{\text{دو طرف به توان ۲}} x^۲ - ۴x + ۲ = ۰$$

$$x = ۲ \pm \sqrt{۲} \xrightarrow{\text{چون } x > ۲} x = ۲ + \sqrt{۲}\,,\ y = ۶ + ۲\sqrt{۲}$$

بنابراین نقطه ماکسیمم نسبی $A\left(۲ + \sqrt{۲}\,,\ ۶ + ۲\sqrt{۲}\right)$ است و فاصلهٔ آن از خط $-x + y = ۰$ (نیمساز ربع اول):

$$\text{فاصله از نیمساز ناحیه اول} = \frac{\left|۶ + ۲\sqrt{۲} - ۲ - \sqrt{۲}\right|}{\sqrt{(-۱)^۲ + ۱^۲}} = \frac{۴ + \sqrt{۲}}{\sqrt{۲}} = ۲\sqrt{۲} + ۱$$

۳۵- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. با توجه به شکل نه ماکزیمم نسبی است و نه مینیمم نسبی است، زیرا عرض این نقطه از عرض نقاط مجاورش در سمت چپ کم‌تر و از عرض نقاط مجاورش در سمت راست بیش‌تر است.



۳۶- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. نقاط a، c و f متعلق به دامنه‌ی تابع f نیستند بنابراین نقطه‌ی بحرانی تابع به حساب نمی‌آیند.

در نقاط b، d و g تابع مشتق‌پذیر نیست در نتیجه نقاط بحرانی تابع هستند.

در نقطه‌ی e مشتق تابع برابر صفر است. بنابراین e طول نقطه بحرانی تابع f است.

۳۷- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$f'(x) = \frac{a(a + ۲) - ۳}{(-x + a + ۲)^۲} = \frac{a^۲ + ۲a - ۳}{(-x + a + ۲)^۲} < ۰$$

$$(a + ۳)(a - ۱) < ۰ \Rightarrow -۳ < a < ۱$$

۳۸- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. f در بازه‌ی $(-\infty\,,\ ۰)$ نزولی است، بنابراین $f' < ۰$ (نمودار f' زیر محور xها)

f در بازه‌ی $(۰\,,\ +\infty)$ صعودی است، بنابراین $f' > ۰$ (نمودار f' بالای محور xها)

در نقطه‌ی صفر مشتق‌پذیر نیست ($f'(۰)$ نامتناهی است.)

۳۹- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$f'(x) = \sqrt[۳]{x - ۱} + \frac{x}{۳\sqrt[۳]{(x - ۱)^۲}} = \frac{۴x - ۳}{۳\sqrt[۳]{(x - ۱)^۲}}$$

x	$-\infty$		$\frac{۳}{۴}$		۱		$+\infty$
y'		−	۰	+	ت ن	+	

با توجه به جدول تعیین علامت f'، نقطه‌ای به طول $\frac{۳}{۴}$، نقطه‌ی مینیمم نسبی تابع $f(x)$ است.

$$f\left(\frac{۳}{۴}\right) = \frac{۳}{۴}\sqrt[۳]{\frac{۳}{۴} - ۱} = \frac{۳}{۴}\sqrt[۳]{\frac{۱}{۴}} = \frac{-۳}{۴\sqrt[۳]{۴}} = \frac{-۳\sqrt[۳]{۲}}{۸}$$

۴۰- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$y = x^۳ + ۳|x| = \begin{cases} x^۳ + ۳x & x \geq ۰ \\ x^۳ - ۳x & x < ۰ \end{cases} \Rightarrow y' = \begin{cases} ۳x^۲ + ۳ & x > ۰ \\ ۳x^۲ - ۳ & x < ۰ \end{cases}$$

$$y' = ۰ \Rightarrow x = -۱$$