

گنجینه سوال رایگان
+ پاسخ تشریحی

یاوران دانش



راه های ارتباطی با ما:

www.Dyavari.com

۰۲۱-۷۶۷۰۳۸۵۸

۰۹۱۲-۳۴ ۹۴ ۱۳۴

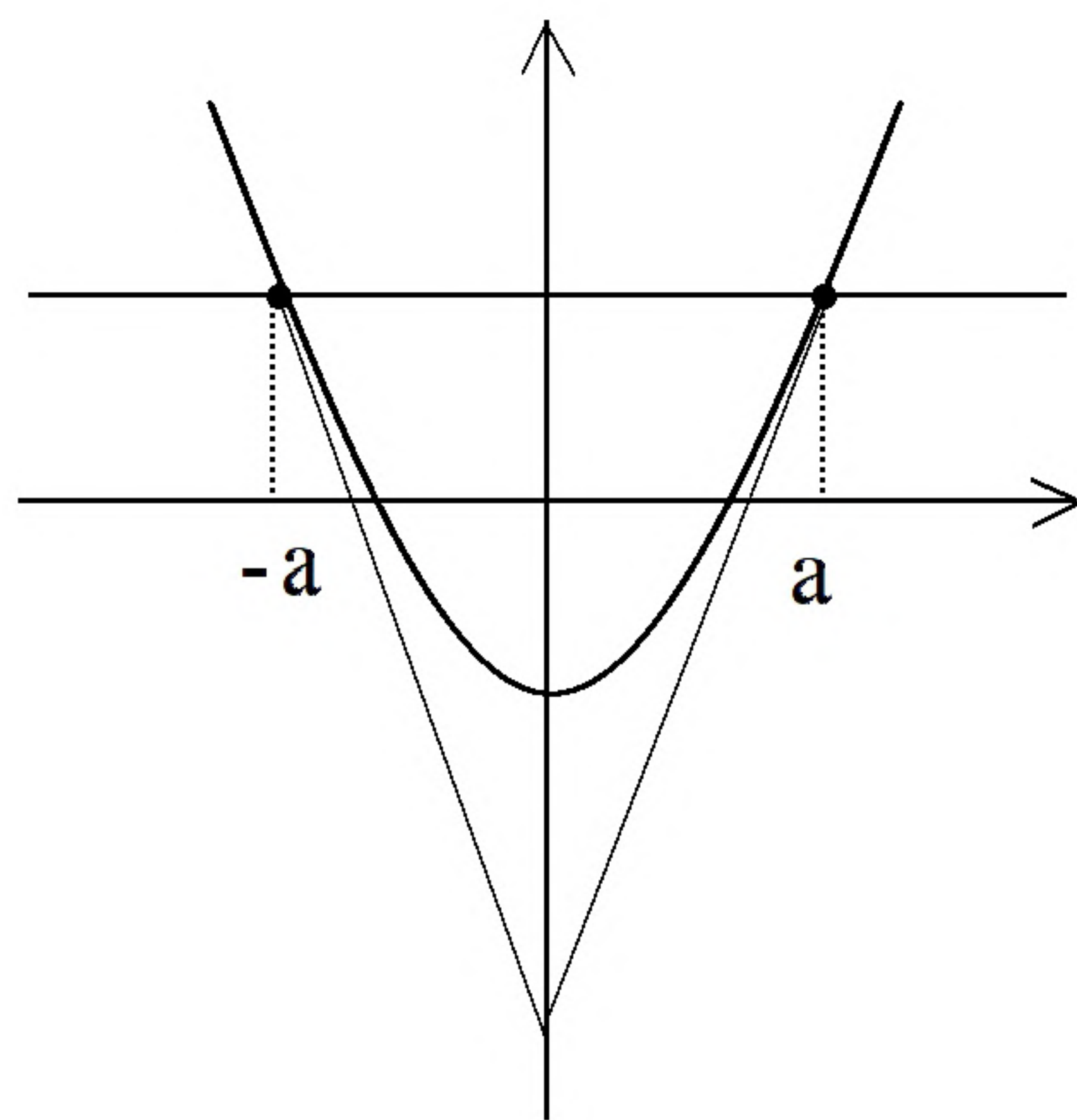


| | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
|------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|
| ۱ - | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۲ - | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۳ - | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۴ - | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |
| ۵ - | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۶ - | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۷ - | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |
| ۸ - | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۹ - | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |
| ۱۰ - | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۱۱ - | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۱۲ - | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۱۳ - | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۱۴ - | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |
| ۱۵ - | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۱۶ - | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۱۷ - | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۱۸ - | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۱۹ - | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |
| ۲۰ - | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۲۱ - | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۲۲ - | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |
| ۲۳ - | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۲۴ - | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۲۵ - | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |
| ۲۶ - | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |
| ۲۷ - | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |
| ۲۸ - | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۲۹ - | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |
| ۳۰ - | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |
| ۳۱ - | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۳۲ - | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۳۳ - | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۳۴ - | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |
| ۳۵ - | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۳۶ - | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۳۷ - | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۳۸ - | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۳۹ - | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۴۰ - | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

| | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
|------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|
| ۴۱ - | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۴۲ - | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۴۳ - | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |
| ۴۴ - | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۴۵ - | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |



۱- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.



$$y = x^2 - 1$$

$$y' = 2x \begin{cases} 2a \\ -2a \end{cases}$$

$$2a \times (-2a) = -1$$

$$a = +\frac{1}{2} \rightarrow y = \left(+\frac{1}{2}\right)^2 - 1 = -\frac{3}{4}$$

$$2a^2 = 1 \Rightarrow a = \pm \frac{1}{2}$$

$$a = -\frac{1}{2} \rightarrow y = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 1 = -\frac{3}{4}$$

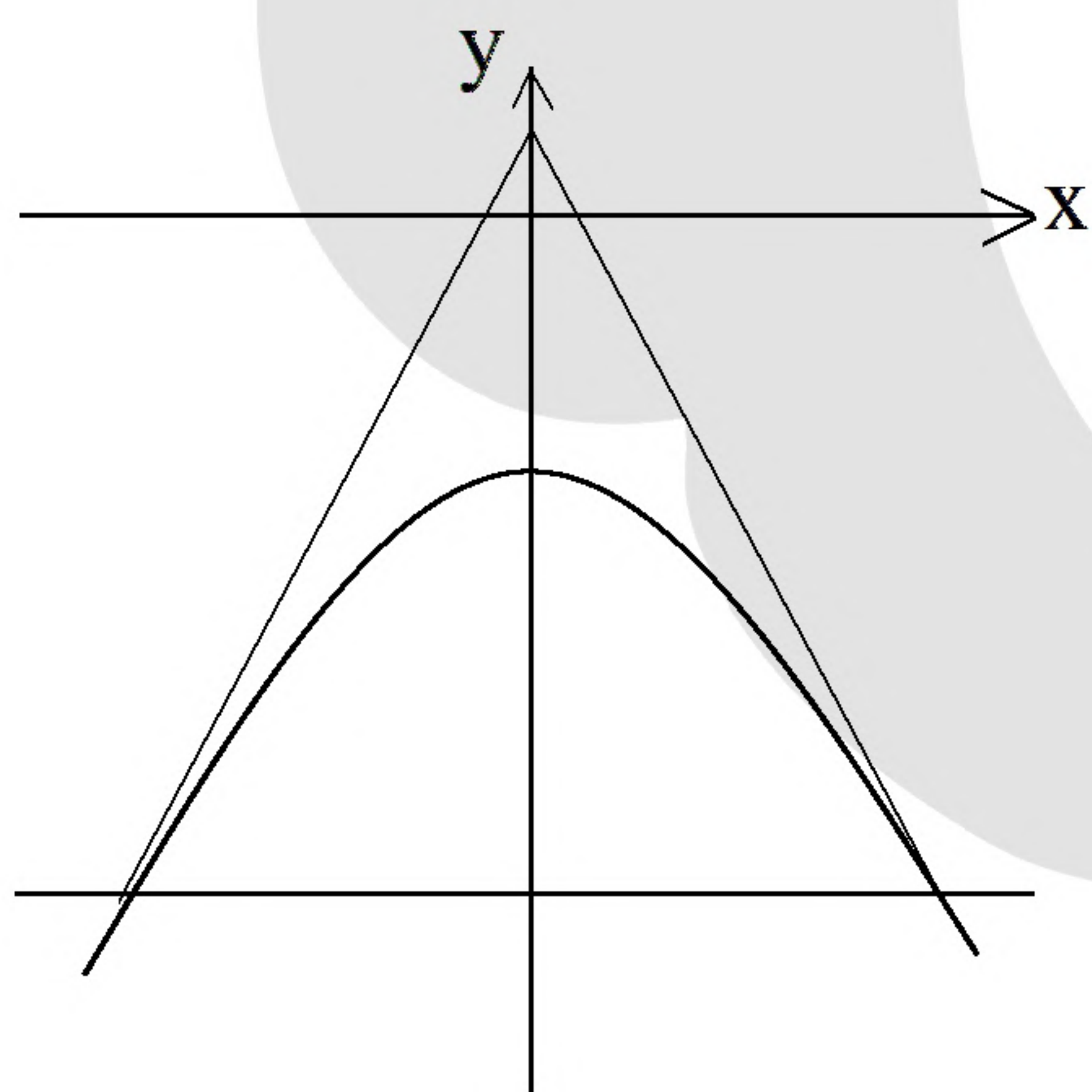
$$\text{مجموع} = -\frac{3}{2}$$

۲- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$g'(-\sqrt[3]{2}) f'(g(-\sqrt[3]{2})) \Rightarrow (f \circ g)'(-\sqrt[3]{2})$$

$$D_g = (-\infty, \infty) : g(x) = \frac{1}{2x^3} \xrightarrow{g' = -\frac{1}{x^4}} f(g(x)) = \frac{1}{\sqrt[3]{\frac{1}{2x^3} + \frac{1}{2x^3}}} = \sqrt[3]{x} = x$$

$$\Rightarrow (f \circ g)'(x) = 1$$



۳- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. خط d سهمی $y = -x^2 - 1$ را در دو نقطه قطع کرده است.

برای اینکه دو خط مماس بر هم عمود باشند، لازم است که شیب‌های آنها $+1$ و -1 باشند، زیرا نسبت به خط $x = 0$ متقارن هستند، پس مشتق تابع را برابر ± 1 قرار می‌دهیم تا طول نقطه برخورد حاصل شود:

$$y = -x^2 - 1 \quad y' = -2x = -1 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \rightarrow y = -\frac{1}{4} - 1 = -\frac{5}{4}$$

این همان عرض خط d است و فاصله آن از مبدأ مختصات برابر $1/25$ است.

۴- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$f'(x) = \frac{1 \times \sqrt{2x+1} - \frac{2}{2\sqrt{2x+1}} \times x}{2x+1} \Rightarrow f'(4) = \frac{3 - \frac{4}{3}}{9} \Rightarrow f'(4) = \frac{5}{27}$$



۵- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$y = vx - 2 \Rightarrow m = v \xrightarrow{m \times m' = -1} m' = -\frac{1}{v}; y' = \frac{-5(1+2x) - 2(1-5x)}{(1+2x)^2} = \frac{-7}{(1+2x)^2}$$

$$y'(x_0) = -\frac{1}{v} \Rightarrow \frac{-7}{(1+2x)^2} = -\frac{1}{v} \Rightarrow (1+2x)^2 = 49$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x+1 = 7 \Rightarrow x = 3 \Rightarrow A(3, -2) \\ 2x+1 = -7 \Rightarrow x = -4 \Rightarrow B(-4, -3) \end{cases}$$

$$AB = \sqrt{(3 - (-4))^2 + (-2 - (-3))^2} = \sqrt{50} \Rightarrow AB = 5\sqrt{2}$$

۶- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \sqrt{4x+1} = 3, \lim_{x \rightarrow 2^-} 4a+2b \Rightarrow 4a+2b = 3$$

$$f'_+(2) = \frac{4}{2\sqrt{4(2)+1}} = \frac{2}{3}, f'_-(2) = 4a+b \Rightarrow 4a+b = \frac{2}{3} \quad \left. \vphantom{\lim_{x \rightarrow 2^+} \sqrt{4x+1} = 3} \right\} b = 3 - \frac{2}{3} = \frac{7}{3}$$

۷- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$h'(x) = f'\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + 2f'\left(2x - \frac{23\pi}{24}\right) \Rightarrow h'\left(\frac{\pi}{2}\right) = f'\left(\frac{\pi}{6}\right) + 2f'\left(\frac{\pi}{24}\right)$$

$$\xrightarrow{\otimes} h'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = 3 \times \frac{-1}{\sqrt{3}} = -\sqrt{3}$$

$$f'\left(\frac{\pi}{24}\right) = f'\left(\frac{\pi}{24} + \frac{\pi}{8}\right) = f'\left(\frac{\pi}{6}\right) \otimes$$

۸- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$g(x) = f(x) \Rightarrow \sqrt[3]{x^2} - 2 = -\sqrt[3]{x} \Rightarrow \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sqrt[3]{x} = 1 \Rightarrow x = 1 \text{ ناحیه چهارم} \\ \sqrt[3]{x} = -2 \Rightarrow x = -8 \text{ ناحیه دوم} \end{cases}$$

$$g'(x) = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} \Rightarrow m = g'(-8) = \frac{2}{3}(-8)^{-\frac{1}{3}} = -\frac{1}{3}, y - 2 = -\frac{1}{3}(x + 8) \xrightarrow{x=0}$$

$$y = -\frac{2}{3} \Rightarrow |y| = \frac{2}{3}$$



۹- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. $f(-1) = 5, f'(-1) = -\frac{1}{2}$

$$g(x) = \sqrt[3]{x} f(x) \Rightarrow g'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} f(x) + \sqrt[3]{x} f'(x) \Rightarrow g'(-1) = \frac{1}{3} f(-1) - f'(-1)$$

$$= \frac{1}{3}(5) - \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{3} + \frac{1}{2} = \frac{13}{6}$$

۱۰- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$f(x) = 4\sqrt{ax} \left| x - \frac{3}{4} \right| \Rightarrow \begin{cases} f'_+\left(\frac{3}{4}\right) = 4\sqrt{a\left(\frac{3}{4}\right)} = 2\sqrt{3a} \\ f'_-\left(\frac{3}{4}\right) = -4\sqrt{a\left(\frac{3}{4}\right)} = -2\sqrt{3a} \end{cases}$$

$$f'_+\left(\frac{3}{4}\right) - f'_-\left(\frac{3}{4}\right) = 4\sqrt{3a} = 2\sqrt{6} \xrightarrow{\text{توان ۲}} 16 \times 3a = 4 \times 6 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

$$\left. \begin{aligned} x=1 &\Rightarrow y=b+2 \\ x=1 &\Rightarrow y=\frac{a+1}{a+1}=1 \end{aligned} \right\} b+2=1 \Rightarrow b=-1$$

۱۱- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$y'_{(1)} = 2 \Rightarrow \frac{1-a^2}{(a+1)^2} = 2 \Rightarrow \frac{1-a}{1+a} = 2 \Rightarrow a = \frac{-1}{3} \Rightarrow a-b = \frac{-1}{3} + 1 = \frac{2}{3}$$

$$a = \frac{-1 - \frac{4}{3}}{\frac{\pi}{4}} = -\frac{4}{\pi}$$

۱۲- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. آهنگ متوسط تابع اول:

آهنگ متوسط تابع دوم:

$$y = \sin^4 x - \cos^4 x = \sin^2 x - \cos^2 x = -\cos 2x$$

$$b = \frac{1 - \frac{4}{3}}{\frac{\pi}{4}} = \frac{4}{\pi} \Rightarrow \frac{a}{b} = -1$$

۱۳- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. شیب خط $6y - 3x = 1$ برابر $\frac{1}{2}$ است، پس در نقطه مطلوب، شیب خط مماس باید برابر

$$\Rightarrow y' = 2x - 4 = -2 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow y = 2$$

۲- باشد.

نقطه مطلوب (۱، ۲) است.



۱۴- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$y'(1) = \frac{(2+m)(4) - (2+m)}{16} = \frac{3(2+m)}{16} = \frac{3}{4} \Rightarrow m = 2 \quad \Leftarrow \text{نقطه مورد نظر } \left(1, \frac{2+m}{4}\right)$$

$$y = \frac{3}{4}x + \frac{n}{4} \Rightarrow \frac{3}{4} + \frac{n}{4} = \frac{2+m}{4} \Rightarrow m - n = 1 \xrightarrow{m=2} n = 1$$

۱۵- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \left(\sqrt{\frac{2x+1}{5x+9}} \right)^3}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{\frac{2x+1}{5x+9}} \right)^3 = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

۱۶- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ابتدا مشتق را بدست آورید:

$$f(x) = (x-4)\sqrt[3]{x+3} \Rightarrow f'(x) = \sqrt[3]{x+3} + (x-4) \times \frac{1}{3(\sqrt[3]{x+3})^2}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f''(5-h) - 3f'(5-h) + 2}{h(5-h)} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{f(5-h) - 1}{5-h} \right) \times \left(-\frac{f(5-h) - 2}{-h} \right) \\ &= \left(\frac{f(5) - 1}{5} \right) (-f'(5)) = \frac{1}{5} \times \frac{-25}{12} = \frac{-5}{12} \end{aligned}$$

تذکر: این مسأله با قاعده‌ی هوییتال نیز قابل حل است.

۱۷- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\begin{aligned} g(x) &= f(x+1) + f(3x+10) \Rightarrow g'(x) = f'(x+1) + 3f'(3x+10) \\ g'(-2) &= f'(-1) + 3f'(4) \end{aligned}$$

چون دوره تناوب ۵ است پس:

$$\begin{aligned} f(x+5) &= f(x) \Rightarrow f'(x+5) = f'(x) \xrightarrow{x=-1} f'(4) = f'(-1) \\ g'(-2) &= \frac{3}{2} + 3\left(\frac{3}{2}\right) = 6 \end{aligned}$$



«بانک سوال مؤسسه یاوران دانش»

۱۸- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + 5x + b & x \leq 2 \\ 2ax + 5 & x > 2 \end{cases}$$

شرط پیوستگی: $\frac{4}{3}a + 10 + b = \frac{4}{3}a + 5 \Rightarrow b = -5$

شرط مشتق های راست و چپ: $2ax + 5 = 2a \Rightarrow 4a + 5 = 2a \Rightarrow 2a = -5 \Rightarrow a = -\frac{5}{2}$

$$\Rightarrow -5 + \left(\frac{-5}{2}\right) = \frac{-15}{2}$$

۱۹- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\left(f \circ g\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)\right)' = g'\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right) \times f'\left(g\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)\right)$$

$$g(x) = (x^2 - 1)^{\frac{-1}{2}} \Rightarrow g'(x) = \frac{-1}{2}(x^2 - 1)^{\frac{-3}{2}} \times 2x$$

$$\Rightarrow g'\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right) = \frac{-1}{2} \times \underbrace{\left(\frac{5}{4} - 1\right)^{\frac{-3}{2}}}_{2^{-2}} \times \sqrt{5} = \frac{-1}{2} \times 4 \times \sqrt{5} = -4\sqrt{5}$$

$$g\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{\frac{5}{4} - 1}} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^{-}}} = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^{-}} = 2^{+}$$

$$f'(2^{+}) \Rightarrow ((2x)^3)' = (8x^3)' = 24x^2 = 24 \times 4 \Rightarrow \frac{24 \times 4 \times 4 \sqrt{5}}{-48 \sqrt{5}} = 8$$



۲۰- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$f(x) = \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 1} \Rightarrow \sqrt{x}y - y = \sqrt{x} + 1 \Rightarrow \sqrt{x}y - \sqrt{x} = 1 + y \Rightarrow \sqrt{x}(y - 1) = y + 1$$

$$\Rightarrow \sqrt{x} = \frac{y+1}{y-1} \Rightarrow x = \left(\frac{y+1}{y-1}\right)^2$$

$$f^{-1}(x) = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2 \Rightarrow (f^{-1}(x))' = 2\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \times \frac{-2}{(x-1)^2}$$

$$\Rightarrow (f^{-1}(2))' = 2 \times 3 \times -2 = -12$$

۲۱- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + c & x \geq k \\ 2ax + b & x < k \end{cases}$$

$$\text{شرط پیوستگی: } ak^2 + bk + c = 2ak + b$$

$$\text{شرط مشتق پذیری: } 2ak + b = 2a \Rightarrow b = 2a - 2ak$$

$$a = b + c \Rightarrow c = -a + 2ak \Rightarrow ak^2 + (2a - 2ak)k + c - 2a = 0$$

$$k^2 + 2k - 2k^2 - 2 + 2k = 0 \Rightarrow k^2 - 4k + 3 = 0 \Rightarrow k = 1, k = 3 \text{ max}$$

۲۲- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$(f \circ g)' \left(\frac{3}{\sqrt{8}} \right) = g' \left(\frac{3}{\sqrt{8}} \right) f' \left(g \left(\frac{3}{\sqrt{8}} \right) \right)$$

$$g'(x) = \frac{-1}{3} (2x) (x^2 - 1)^{-\frac{4}{3}} = \frac{-2x}{3 \sqrt[3]{(x^2 - 1)^4}} \Rightarrow g' \left(\frac{3}{\sqrt{8}} \right) = \frac{-2 \frac{1}{\sqrt{8}}}{\frac{1}{16}} = -\frac{32}{\sqrt{8}} = -8\sqrt{2}$$

$$f(x) = 16x^2 + 1 \Rightarrow f'(x) = 32x \Rightarrow f'(2) = 64$$

$$\Rightarrow (f \circ g)' \left(\frac{3}{\sqrt{8}} \right) = -8\sqrt{2} \times f'(2) = -8\sqrt{2} \times 64 = -512\sqrt{2}$$

که حاصل چهار برابر $-128\sqrt{2}$ است.

$$\frac{-512\sqrt{2}}{-128\sqrt{2}} = 4$$



۲۳- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$P(x) = ax^2 + bx + c$$

$$P'(x) = 2ax + b$$

$$ax^2 + bx + c = (2ax + b)\left(\frac{1}{2}x + 1\right) - 2 \Rightarrow ax^2 + bx + c = ax^2 + 2ax + \frac{1}{2}bx + b - 2$$

$$\Rightarrow ax^2 + bx + c = ax^2 + \left(2a + \frac{1}{2}b\right)x + b - 2 \Rightarrow b = 2a + \frac{1}{2}b \Rightarrow 2a = \frac{1}{2}b \Rightarrow 4a = b$$

$$\left. \begin{matrix} c = b - 2 \\ b = 4a \end{matrix} \right\} \Rightarrow c = 4a - 2 \Rightarrow p(x) = ax^2 + 4ax + 4a - 2 \Rightarrow p(1) = 9a - 2 \xrightarrow{a \in \mathbb{N}} \min = 7$$

۲۴- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$f'(x) = \frac{2x + 6}{2\sqrt{x^2 + 6x}} \Rightarrow f'(2) = \frac{5}{4}$$

$$\left[\frac{5}{4}\right] = 1 \Rightarrow f'(x) = 2x - 9 \Rightarrow f'(5) = 1$$

$$f'(2) - f'(5) = \frac{5}{4} - 1 = \frac{1}{4}$$

۲۵- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. x را در تابع $y = x\sqrt{x}$ قرار داده و y را حساب می‌کنیم.

$$y = 4\sqrt{4} \Rightarrow y = 8 \Rightarrow A(4, 8)$$

در نقطه A ، y ها و همچنین y' ها برابر هستند.

$$A(4, 8) \Rightarrow \begin{cases} 16 + 4a + b = 8 \Rightarrow 4a + b = -8 \\ 2x + a = \frac{3}{2}\sqrt{x} \Rightarrow 8 + a = 3 \Rightarrow a = -5 \Rightarrow -20 + b = -8 \Rightarrow b = 12 \end{cases}$$

۲۶- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$f(x) = \left(\frac{2x - x^2}{3x + 5}\right)^{\frac{2}{3}}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{2}{3} \left(\frac{2x - x^2}{3x + 5}\right)^{-\frac{1}{3}} \left(\frac{(2 - 2x)(3x + 5) - 3(2x - x^2)}{(3x + 5)^2}\right)$$

$$\Rightarrow f'(-2) = \frac{2}{3} \left(\frac{-4 - 4}{-1}\right)^{-\frac{1}{3}} \left(\frac{6 \times (-1) - 3(-8)}{(-1)^2}\right) = \frac{2}{3} \times (8)^{-\frac{1}{3}} \times 18 = 12 \times \frac{1}{2} = 6$$



۲۷- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$f'(x) = \frac{-3}{(x-1)^2}, \quad g'(x) = 2ax + b$$

$$f(2) = g(2) \Rightarrow 2 = 4a + 2b \Rightarrow 2a + b = 2$$

$$f'(2) = g'(2) \Rightarrow -3 = 4a + b$$

$$\begin{cases} 2a + b = 2 \\ 4a + b = -3 \end{cases} \Rightarrow a = -\frac{5}{2} \Rightarrow b = 7$$

$$x_0 = 4 \Rightarrow y_0 = 8$$

۲۸- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$f'(x) = \frac{5\sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}}(5x-4)}{(\sqrt{x})^2} \Rightarrow m = \frac{3}{2}$$

$$y - 8 = \frac{3}{2}(x - 4) \xrightarrow{x=0} y = 2$$

۲۹- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\frac{f(6) - f(5)}{6 - 5} = f'(x) \Rightarrow -1 = \frac{-2x + 4}{2\sqrt{21 - x^2 + 4x}} \Rightarrow \sqrt{21 - x^2 + 4x} = x - 2$$

$$\Rightarrow 2x^2 - 8x - 17 = 0$$

$$\Delta' = 50$$

$$x = \frac{4 + 5\sqrt{2}}{2}, \quad x = \frac{4 - 5\sqrt{2}}{2} \otimes$$



۳۰- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ابتدا ساده می کنیم.

$$f(x) = \left(\frac{\sqrt[3]{x^2 + 2x}}{x^2 - x} \right)^3 = \frac{x^2 + 2x}{(x^2 - x)^3}$$

$$f'(x) = \frac{(2x+2)(x^2-x)^3 - 3(x^2-x)^2(2x-1)(x^2+2x)}{(x^2-x)^6}$$

$$= \frac{(x^2-x)^2((2x+2)(x^2-x) - 3(x-1)(x^2+2x))}{(x^2-x)^6} = \frac{4(6 \times 2 - 3 \times 3 \times 8)}{2^6}$$

$$= \frac{4(12 - 72)}{64} = \frac{-60}{16} = -\frac{15}{4}$$

۳۱- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ابتدا پیوستگی آن را بررسی می کنیم و سپس مشتق پذیری را حساب می کنیم.

$$\Rightarrow \sqrt{5 - 2(-2)} = -\frac{1}{2}(-2)^2 - 2b + c \Rightarrow 3 = -2 - 2b + c$$

$$\Rightarrow -2b + c = 5$$

$$\Rightarrow \frac{-2}{2\sqrt{5-2x}} = -x + b \xrightarrow{x=-2} \frac{-2}{6} = 2 + b \Rightarrow b = -\frac{7}{3}$$

$$-2b + c = 5 \Rightarrow \frac{14}{3} + c = 5 \Rightarrow c = \frac{1}{3}$$

۳۲- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(4) - f(0)}{4 - 0} = \frac{\left(3 + \frac{1}{5}\right) - (1 + 1)}{4} = \frac{6}{20} = 0.3$$

$$f'(x) = \frac{2}{2\sqrt{2x+1}} - \frac{1}{(x+1)^2} \Rightarrow f'\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{4}{25} = \frac{17}{50} = 0.34$$

$$f'\left(\frac{3}{2}\right) - \frac{\Delta f}{\Delta x} = 0.34 - 0.3 = 0.04$$



۳۳- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$f(x) = \frac{|x(x^2 - 2)|}{x} = \frac{|x(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})|}{x} = \frac{|x| |x - \sqrt{2}| |x + \sqrt{2}|}{x}$$

تابع در $x = 0$ مشتق ندارد چون $0 \notin D_f$

در $x = \pm\sqrt{2}$ نقطه‌ی گوشه (شکسته) است چون ریشه‌ی ساده قدرمطلق است. پس f در ۳ نقطه مشتق ندارد.

۳۴- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. خط به معادله‌ی $y = 3x - 5$ در $x = 2$ بر منحنی $g(x)$ مماس است، پس:

$$\begin{cases} g(2) = 3(2) - 5 = 1 \\ g'(2) = 3 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{2(x-1)} = \frac{2}{3} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \frac{4}{3} \Rightarrow f'(1) = \frac{4}{3}$$

$$(f \circ g)'(2) = g'(2) f'(g(2))' = 3 \times \frac{4}{3} = 4$$

۳۵- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\text{شیب مماس} = \frac{f(8) - f(0)}{8 - 0} = \frac{3 - (-5)}{8} = 1 \Rightarrow f'(x) = 1 \Rightarrow \frac{9}{(x+1)^2} = 1 \Rightarrow (x+1)^2 = 9$$

$$\xrightarrow{0 \leq x \leq 8} x+1=3 \Rightarrow x=2 \Rightarrow f(2) = \frac{3}{3} = 1 \Rightarrow \begin{matrix} T(2, 1) \\ m=1 \end{matrix} \Rightarrow y = x - 1$$

$$\Rightarrow -1 = \text{عرض از مبدا}$$

۳۶- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$f'(x) = \sqrt[3]{\frac{3x+1}{x+2}} + x \left(\frac{6-1}{(x+2)^2} \right) \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{\left(\frac{3x+1}{x+2} \right)^2}} \Rightarrow f'(-3) = 2 + \frac{1}{(-3)(5)} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{4}}$$

$$= 2 - \frac{5}{4} = \frac{3}{4}$$



۳۷- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{a}{ax+b} & x > 2 \\ -x^3 + 6x & x \leq 2 \end{cases}$$

$$\text{شرط پیوستگی: } \frac{a}{2a+b} = -8 + 12 \Rightarrow a = (2a+b)4 \Rightarrow 2a+b = 2$$

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{-a}{(ax+b)^2} & x > 2 \\ -3x^2 + 6 & x \leq 2 \end{cases} \Rightarrow \frac{-a}{(2a+b)^2} = -3(2)^2 + 6$$

$$\Rightarrow \frac{-a}{4} = -6 \Rightarrow -a = -24 \Rightarrow a = 24$$

«بانک سوال موسسه یاوران دانش»

۳۸- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$f(x) = \frac{-x-1}{\sqrt{x}} \Rightarrow f'(x) = \frac{(-1)\sqrt{x} - (-x-1)\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)}{x} \Rightarrow f'\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{-\frac{1}{2} + \frac{5}{4} \times 1}{\frac{1}{4}}$$

$$= -2 + 5 = 3 \Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f\left(\frac{1}{4} + h\right) - f\left(\frac{1}{4}\right)}{h} = f'\left(\frac{1}{4}\right) = 3$$

۳۹- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{x}$$

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(4) - f(1)}{4 - 1} = \frac{\left(8 - \frac{1}{4}\right) - \left(\frac{1}{2} - 1\right)}{3} = \frac{9 - \frac{3}{4}}{3} = 3 - \frac{1}{4}$$

$$f'(x) = x + \frac{1}{x^2} \Rightarrow f'(2) = 2 + \frac{1}{4}$$

$$\text{اختلاف} = \left(3 - \frac{1}{4}\right) - \left(2 + \frac{1}{4}\right) = 1 - \frac{1}{2} = 0.5$$

۴۰- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$g(x) = \frac{2x+1}{x-1} \Rightarrow g'(x) = \frac{2(x-1) - (2x+1)}{(x-1)^2} = \frac{-3}{(x-1)^2} \Rightarrow g'(2) = -3$$

$$(f \circ g)'(2) = 6 \Rightarrow g'(2) \cdot f'(g(2)) = 6 \Rightarrow -3f'(5) = 6 \Rightarrow f'(5) = -2$$



۴۱- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1} & x \geq 2 \\ -x^2 + ax + b & x < 2 \end{cases}$$

$$\text{شرط پیوستگی} = \frac{1}{2-1} = -4 + 2a + b$$

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{-1}{(x-1)^2} & x \geq 2 \\ -2x + a & x < 2 \end{cases} \Rightarrow \frac{-1}{(2-1)^2} = -4 + a \Rightarrow a = 3$$

$$\Rightarrow 1 = -4 + 6 + b \Rightarrow b = -1$$

۴۲- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$f(x) = \frac{1 + \sqrt{x}}{5 - 2x} \Rightarrow f'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(5 - 2x) - (1 + \sqrt{x})(-2)}{(5 - 2x)^2} \Rightarrow f'(4) = \frac{\frac{1}{4}(-3) - (3)(-2)}{9}$$

$$= \frac{-\frac{3}{4} + 6}{9} = \frac{21}{4 \times 9} = \frac{7}{12} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x) - f(4)}{x - 4} = f'(4) = \frac{7}{12}$$

۴۳- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$f(x) = (x+2)\sqrt{4x+1}$$

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = \frac{4 \times 3 - 2}{2} = 5$$

$$f'(x) = \sqrt{4x+1} + (x+2) \frac{4}{2\sqrt{4x+1}} \Rightarrow f'\left(\frac{3}{4}\right) = 2 + \left(\frac{3}{4} + 2\right) \frac{4}{2 \times 2}$$

$$f'\left(\frac{3}{4}\right) = 2 + \frac{3}{4} + 2 = 4 + \frac{3}{4}$$

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} - f'\left(\frac{3}{4}\right) = 5 - 4 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4} = 0.25$$



۴۴- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. توجه کنید:

$$x < 2 \Rightarrow x(x - 2) < 0 \Rightarrow x^2 - 2x < 0 \Rightarrow |x^2 - 2x| = -x^2 + 2x$$

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 2x & x < 2 \\ \frac{1}{2}x^2 + ax + b & x \geq 2 \end{cases}$$

$$\left. \begin{aligned} \text{شرط پیوستگی: } -2^2 + 2(2) = \frac{1}{2}(2^2) + 2a + b \Rightarrow 2a + b = -2 \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} f'(x) = \begin{cases} -2x + 2 & x < 2 \\ x + a & x > 2 \end{cases} \Rightarrow -2(2) + 2 = 2 + a \Rightarrow a = -4 \end{aligned} \right\}$$

$$\Rightarrow b = 6 \Rightarrow a + b = 2$$

۴۵- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$(f \circ g)'(1) = g'(1) \cdot f'(g(1)) = \frac{3}{2} \times \frac{4}{3} = 2$$

$$g(x) = x + \sqrt{x} \Rightarrow \begin{cases} g(1) = 2 \\ g'(x) = 1 + \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow g'(1) = \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \frac{4}{3} \Rightarrow f'(2) = \frac{4}{3}$$