

گنجینه سوال رایگان

+ پاسخ تشریحی

یاوران دانش



راه های ارتباطی با ما:

www.Dyavari.com

۰۲۱-۷۶۷۰۳۸۵۸

۰۹۱۲-۳۴ ۹۴ ۱۳۴



	۱	۲	۳	۴
۱ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۴ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۵ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۶ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۷ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۸ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۹ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۱۰ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۱ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۱۲ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۱۳ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۴ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۵ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۶ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۷ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۱۸ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۹ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۰ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۲۱ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۲ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۳ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۴ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۵ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۶ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۷ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۸ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۲۹ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۰ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۱ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۲ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۳ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۴ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۵ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۳۶ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۷ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۳۸ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۳۹ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۴۰ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>





۱- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\text{Log} \left(\tan \left(\frac{\pi^-}{2} \right) \right) = \text{Log}(+\infty) = +\infty$$

۲- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{2}^+} \frac{ax + \pi}{\sin x + \cos x} = +\infty$$

مخرج کسر وقتی $x \rightarrow \frac{3\pi}{2}^+$ به سمت 0^- میل می کند. پس صورت کسر باید منفی باشد:

$$a \left(\frac{3\pi}{2} \right) + \pi < 0 \Rightarrow a \left(\frac{3\pi}{2} \right) < -\pi \Rightarrow a < -\frac{4}{3} \Rightarrow [a] \leq -2$$

بیشترین مقدار $[a]$ برابر -2 می باشد.

۳- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{2x+3} - |x|}{1 + \sqrt[3]{x}} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{2x+3} + x}{1 + \sqrt[3]{x}} \xrightarrow{\text{HOP}} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\frac{2}{\sqrt{2x+3}} + 1}{\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}}$$

$$\frac{\frac{2}{2 \times 1} + 1}{\frac{1}{3}} = 2 \times 3 = 6$$

۴- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

فرض کنید $f(x) = ax + b$ باشد در این صورت $f^{-1}(x) = \frac{1}{a}x + b'$ است. از طرفی $a = \tan 30^\circ$ است.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{f^{-1}(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax + b}{\frac{1}{a}x + b'} = \frac{a}{\frac{1}{a}} = a^2 = \tan^2 30^\circ = \frac{1}{3}$$



۵- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

چون در مخرج در $x = -2$ برابر صفر بوده و حاصل حد عددی مشخص است پس حد صورت کسر نیز باید برابر صفر باشد، یعنی داریم:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -2} (2x^2 + f(x)) = 0 &\Rightarrow \lim_{x \rightarrow -2} (2x^2 + ax + b) = 0 \\ \Rightarrow b = 2a - 8 \quad (1) \\ \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x^2 + f(x)}{4x^2 + 8x} &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x^2 + ax + 2a - 8}{4x(x + 2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2(x^2 - 4) + a(x + 2)}{4x(x + 2)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x + 2)(2(x - 2) + a)}{4x(x + 2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -2} 2x - 4 + \frac{a}{4x} = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{-8 + a}{-8} = \frac{3}{2} \Rightarrow -16 + 2a = -24 \\ &\Rightarrow 2a = -8 \Rightarrow a = -4 \Rightarrow b = -16 \Rightarrow f(x) = -4x - 16 \\ \Rightarrow f(-5) &= 20 - 16 = 4 \end{aligned}$$

۶- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

چون مرکز بیضی نقطه‌ی $O(-2, 2)$ و مختصات یکی از کانون‌ها $F'(-16, 2)$ است پس فاصله‌ی $OF' = 14$ مقدار پارامتر c را مشخص می‌کند یعنی $c = 14$ (فاصله‌ی مرکز بیضی تا یکی از کانون‌ها برابر c یعنی نصف فاصله‌ی کانونی است).

از طرفی چون طول قطر کوچک بیضی برابر $2b = 24$ است. پس $b = 12$ و در نتیجه داریم:

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 \Rightarrow a^2 = 144 + 196 = 340 \Rightarrow a = \sqrt{340} = 2\sqrt{85} \\ e &= \frac{c}{a} = \frac{14}{2\sqrt{85}} = \frac{7}{\sqrt{85}} \Rightarrow \frac{7}{\sqrt{85}} \in \left(\frac{7}{10}, \frac{7}{9}\right) \end{aligned}$$

خروج از مرکز بیضی

۷- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2 + \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x}} \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{2}{x} \right] \left(2 + \frac{4x-1}{\sqrt{(4x)^2-8x}} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (-1) \left(2 + \frac{4x}{|4x|} \right) = (-1)(2-1) = -1 \end{aligned}$$



۸- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.
مخرج کسر برابر صفر است.

$$2a + \cos \pi = 0 \Rightarrow a = -\frac{1}{2}$$

صورت کسر باید منفی باشد.

$$a\pi + b < 0 \Rightarrow b < -\frac{\pi}{2} \Rightarrow 2b < -\pi \Rightarrow [2b] \leq -4$$

۹- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$x=1 \Rightarrow f(1)=1+a-2+\frac{f(1)}{2} \Rightarrow f(1)=-2+2a$$

$$\Rightarrow f(x)=x^3+ax^2-2x+a-1$$

$$f(3)=0 \Rightarrow 27+9a-6-1+a=0 \Rightarrow a=-2$$

$$x=-2 \Rightarrow R=f(-1)+2f(-1)=3f(-1)=3(-1-2+2-3)=-12$$

۱۰- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.
در نقطه‌ی $x=1$ مخرج باید صفر باشد.

$$x^2 - mx + 4 = 0 \Rightarrow 1 - m + 4 = 0 \Rightarrow m = 5$$

حال از هوییتال استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 - \frac{1}{2\sqrt{x+3}}}{2x-5} = \frac{2 - \frac{1}{4}}{-3} = \frac{-7}{12} = \frac{7}{a} \Rightarrow a = -12 \Rightarrow a+m = -7$$

۱۱- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

چون تابع f روی R پیوسته و اکیداً صعودی است و $f(5)=4$ است پس خواهیم داشت:

$$x < 5 \Rightarrow f(x) < 4, x > 5 \Rightarrow f(x) > 4$$

بنابراین اگر $x \rightarrow 5^-$ آنگاه $f(x) \rightarrow 4^-$ و بنابراین داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 5^-} \frac{x^2 - 15x + 45}{f(x) - 4} = \frac{25 - 75 + 45}{4^- - 4} = \frac{-5}{0^-} = +\infty$$



۱۲- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.
چون حاصل حد موجود است، باید درجه‌ی صورت از مخرج کمتر یا مساوی آن باشد، پس قطعاً $m \geq 3$ است.
بنابراین حالات زیر رخ می‌دهد:

$$m=3, n=3 \xrightarrow{\text{حاصل حد}} \frac{1+n}{n} = \frac{4}{3}$$

$$m=4, n=2 \xrightarrow{\text{حاصل حد}} \frac{1}{n} = \frac{1}{2}$$

$$m=5, n=1 \xrightarrow{\text{حاصل حد}} \frac{1}{n} = 1$$

مجموع مقادیر ممکن برابر است با:

$$\frac{4}{3} + \frac{1}{2} + 1 = \frac{8+3+6}{6} = \frac{17}{6}$$

۱۳- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2^{x+1} - 6}{2^{x+3} + 2} = \frac{2^{-\infty} - 6}{2^{-\infty} + 2} = \frac{0 - 6}{0 + 2} = -3$$

توجه شود که $2^{-\infty} = \frac{1}{2^{+\infty}} = 0$ بنابراین حد فوق حالت مبهم ندارد.

۱۴- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

چون حاصل حد تابع در $x=2$ هم از چپ و هم از راست برابر $-\infty$ شده است پس قطعاً مخرج کسر دارای ریشه‌ی مضاعف $x=2$ بوده است (زیرا در غیر این صورت حد تابع در $x \rightarrow 2^+$ و $x \rightarrow 2^-$ نامتناهی ولی مختلف‌العلامه می‌شد، یعنی یکی برابر $+\infty$ و دیگری برابر $-\infty$ می‌شد)

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{-2}{3x^2 - ax + b} = -\infty$$

$$3x^2 - ax + b = 3(x-2)^2 \Rightarrow 3x^2 - ax + b = 3(x^2 - 4x + 4) \\ \Rightarrow 3x^2 - ax + b = 3x^2 - 12x + 12 \Rightarrow \begin{cases} -a = -12 \Rightarrow a = 12 \\ b = 12 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{a}{2}} \frac{x^2 - 8x + b}{-x^2 + 6x} = \lim_{x \rightarrow 6} \frac{x^2 - 8x + 12}{-x^2 + 6x} = \frac{0}{0} \text{ مبهم}$$

$$\lim_{x \rightarrow 6} \frac{x^2 - 8x + 12}{-x^2 + 6x} = \lim_{x \rightarrow 6} \frac{(x-2)(x-6)}{-x(x-6)} = \lim_{x \rightarrow 6} \frac{x-2}{-x} = \frac{4}{-6} = -\frac{2}{3}$$



«بانک سوال موسسه یاوران دانش»

۱۵- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.
چون حد مخرج در $x = -1$ برابر صفر است و حاصل حد برابر عدد مشخص L شده است پس باید حد صورت نیز برابر صفر باشد تا به حالت مبهم $\frac{0}{0}$ تبدیل شود و پس از رفع ابهام حاصل حد بتواند عددی مشخص مانند L شود.
پس داریم:

$$x = -1 \xrightarrow{\text{جایگذاری در صورت}} \sqrt{2-1} + K = 0 \Rightarrow K = -1$$

از طرفی داریم:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{2x^2 + x + K}}{x^2 + 3x + 2} &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{2x^2 + x - 1}}{x^2 + 3x + 2} \times \frac{\sqrt{2x^2 + x + 1}}{\sqrt{2x^2 + x + 1}} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(2x-1)}{(x+1)(x+2)(\sqrt{2x^2 + x + 1})} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(2x-1)}{(x+2)(\sqrt{2x^2 + x + 1})} = \frac{-3}{2} \\ \Rightarrow \frac{K}{L} &= \frac{-1}{-\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

۱۶- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

فرض می‌کنیم $f(x) = ax + b$ در این صورت $f^{-1}(x) = \frac{1}{a}x - \frac{b}{a}$ است و داریم:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{f^{-1}(x)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{ax + b}{\frac{1}{a}x - \frac{b}{a}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{ax}{\frac{1}{a}x} = a^2$$

$$\Rightarrow a^2 = 36 \Rightarrow a = \pm 6 \xrightarrow{\text{طبق فرض شیب خط منفی است}} a = -6$$

$$\Rightarrow f(x) = -6x + b \Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) = 5 \Rightarrow -6\left(\frac{1}{2}\right) + b = 5$$

$$\Rightarrow b = 8 \Rightarrow f(x) = -6x + 8 \Rightarrow f(-1) = 14$$



۱۷- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} 2x + [-2x] = 2 - 3 = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} 2x + [-2x] = 2 - 2 = 0$$

پس می‌توانیم تابع را با ضابطه‌ی $(x-1)^2$ در نظر بگیریم تا

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x + [-2x]}{-(x-1)^2} = +\infty$$

۱۸- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

برای یافتن باقی‌مانده‌ی f بر $x^2 - 1$ کافی است قرار دهیم $x^2 = 1$

$$\Rightarrow R(x) = x^2 \cdot x + mx + n = (m+1)x + n$$

چون باقی‌مانده‌ی f بر $x^2 - 1$ و $x - a$ با هم برابر است پس باید $R(x)$ یک عدد باشد یعنی $m+1$ یعنی $m = -1$ از طرفی:

$$R(x) = n \Leftarrow \text{باقیمانده‌ی } f \text{ بر } x^2 - 1$$

$$R'(x) = f'(a) = a^3 - a + n \quad \text{باقی‌مانده‌ی } f \text{ بر } x - a$$

$$\Rightarrow a^3 = a \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ a = -1 \\ a = 0 \end{cases}$$

۱۹- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$f(-1) = 0 \Rightarrow -1 + 2 - a - 5 = 0 \Rightarrow a = -4$$

$$\Rightarrow f(x) = x^3 + 2x^2 - 4x - 5$$

$$4x - a = 4x + 4 = 0 \Rightarrow x = -1$$

$$R = f \circ f(-1) \Rightarrow f(-1) = 0$$

$$\Rightarrow R = f(0) = -5$$



۲۰- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$f(x) = \left[\frac{\sqrt{x^2 + x}}{x + 1} \right]$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{\sqrt{x^2 + x}}{\sqrt{(x + 1)^2}} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\sqrt{\frac{x(x + 1)}{(x + 1)^2}} \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\sqrt{\frac{x}{x + 1}} \right] = [1^-] = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{\sqrt{x^2 + x}}{-\sqrt{(x + 1)^2}} \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[-\sqrt{\frac{x^2 + x}{(x + 1)^2}} \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[-\sqrt{\frac{x}{x + 1}} \right] = [-(1^+)] = [(-1)^-] = -1$$

بنابراین حاصل تست برابر $-1 - 1 = -2$ است.



۲۱- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{2}^+} \left[\frac{1}{\sin x} \right] = \left[\frac{1}{(-1)^+} \right] = [-1/\dots] = -2$$

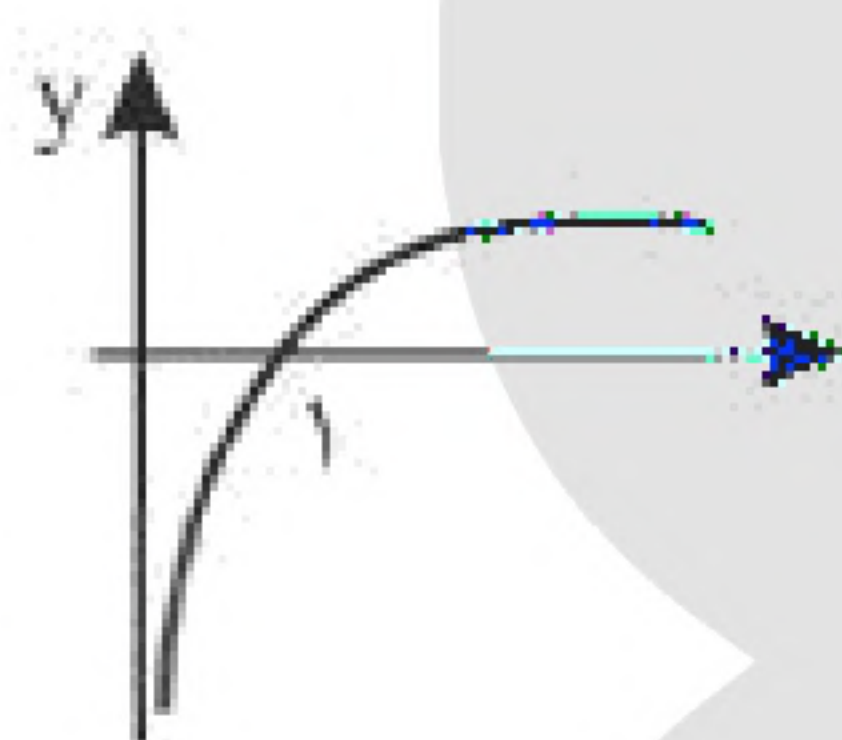
$$\lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{2}^-} \left[\frac{1}{\sin x} \right] = \left[\frac{1}{(-1)^-} \right] = [-1/\dots] = -2$$

چون حدهای چپ و راست تابع در نقطه $x = \frac{3\pi}{2}$ موجود و برابر هستند، حد تابع موجود است.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|4x| + [x]}{[4x] + |x|} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{4x + 0}{0 + x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{4x}{x} = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|4x| + [x]}{[4x] + |x|} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-4x - 1}{-1 - x} = 1$$

بنابراین حد موجود نیست.



$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \log(x-1) = \log(0^+) = -\infty$$

توجه شود که حاصل حد طبق شکل برابر $-\infty$ است و چون حاصل حد برابر عددی مشخص نیست، حد موجود نیست.

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{x^4 - 1} = \sqrt{1^+ - 1} = \sqrt{0^+} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \sqrt{x^4 - 1} = \sqrt{1^- - 1} = \sqrt{0^-} = 0 \text{ تعریف نشده}$$

پس حد تابع در $x = 1$ موجود نیست.

۲۲- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{a|x+1| - 2}{|-x-1| - ax} &= 3 \xrightarrow{\text{پرتوان}} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{a|x|}{|-x| - ax} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-ax}{-x - ax} \\ &= \frac{-a}{-1-a} = 3 \Rightarrow -a = -3 - 3a \Rightarrow 2a = -3 \Rightarrow a = -\frac{3}{2} \end{aligned}$$



۲۳- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.
بررسی گزینه‌ها:

$$۱) \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{f(x) - 2} = \frac{1}{2^- - 2} = \frac{1}{-} = -\infty$$

$$۲) \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{f(x) - 3} = \frac{1}{3^- - 3} = \frac{1}{-} = -\infty$$

$$۳) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{[x]}{f(x)} = \frac{-1 \text{ یا } -2}{+} = -\infty$$

$$۴) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-1}{f(x)} = \begin{cases} 2^+ \rightarrow \frac{-1}{-} = +\infty \\ 2^- \rightarrow \frac{-1}{+} = -\infty \end{cases}$$

۲۴- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x \rightarrow \left(\frac{2}{\pi}\right)^+} \operatorname{tg}\left(\frac{1}{x} - \pi\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{1}{\left(\frac{2}{\pi}\right)^+} - \pi\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi^-}{2} - \pi\right) = \operatorname{tg}\left(\left(-\frac{\pi}{2}\right)^-\right) = +\infty$$



۲۵- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - \sqrt{4x - 3}}{ax + b} = \frac{1}{6}$$

چون حد صورت کسر به ازای $x = 3$ برابر صفر است و حاصل کل حد، عددی مخالف صفر شده است، پس باید حد مخرج هم در $x = 3$ برابر صفر باشد تا به حالت مبهم $\frac{0}{0}$ تبدیل شود، بنابراین داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 3} ax + b = 0 \Rightarrow 3a + b = 0 \Rightarrow b = -3a \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - \sqrt{4x - 3}}{ax - 3a} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - \sqrt{4x - 3}}{a(x - 3)} \times \frac{x + \sqrt{4x - 3}}{x + \sqrt{4x - 3}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 4x + 3}{a(x - 3)(x + \sqrt{4x - 3})} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x - 1)(x - 3)}{a(x - 3)(x + \sqrt{4x - 3})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x - 1)}{a(x + \sqrt{4x - 3})} = \frac{2}{a(6)} = \frac{1}{3a}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3a} = \frac{1}{6} \Rightarrow a = 2 \xrightarrow{(1)} b = -6$$

۲۶- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x \rightarrow 9^-} \frac{|x^2 - 81|}{3 - \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 9^-} \frac{-(x^2 - 81)}{3 - \sqrt{x}} \times \frac{3 + \sqrt{x}}{3 + \sqrt{x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 9^-} \frac{-(x - 9)(x + 9)(3 + \sqrt{x})}{9 - x} = \lim_{x \rightarrow 9^-} (x + 9)(3 + \sqrt{x}) = 18 \times 6 = 108$$

۲۷- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

باقی مانده تقسیم $f(x - 1)$ بر $x + 2$ برابر ۳ است، پس مقدار $f(x - 1)$ به ازای $x = -2$ برابر ۳ می شود یعنی $f(-3) = 3$ است. در عبارت زیر x را برابر ۱ قرار می دهیم:

$$f(2x - 1) = x^3 + mx^2 - x + m - 1$$

$$\xrightarrow{x = -1} f(-3) = -1 + m + 1 + m - 1 = 3 \Rightarrow 2m - 1 = 3 \Rightarrow m = 2$$



۲۸- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{[x]} = \frac{0^+}{\text{صفر مطلق}} \quad \text{موجود نیست.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{[x]}{x} = \frac{[0^-]}{0^-} = \frac{0^-}{0^-} = +\infty$$

۲۹- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$y = \frac{\sqrt{1-x^2}}{[x] + [-x]}$$

$$\begin{cases} 1-x^2 \geq 0 \Rightarrow -1 \leq x \leq 1 \\ [x] + [-x] \neq 0 \Rightarrow x \notin \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow \text{دامنه تابع} = (-1, 1) - \{0\}$$

دامنه این تابع یک همسایگی محذوف $x=0$ است.

۳۰- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$f(x) = 2x^4 + ax^3 + bx^2 - 2x - 4 = \underbrace{(2x^2 - x - 1)}_{(x-1)(2x+1)} q(x) + x - 1$$

$$x=1 \Rightarrow f(1) = 0 \Rightarrow a+b=4$$

$$x=-\frac{1}{2} \Rightarrow f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{2} \Rightarrow \frac{1}{8} - \frac{a}{8} + \frac{b}{4} - 3 = -\frac{3}{2} \Rightarrow \frac{b}{4} - \frac{a}{8} = \frac{11}{8}$$

$$\begin{cases} a+b=4 \\ 2b-a=11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=5 \\ a=-1 \end{cases} \Rightarrow a-b=-6$$

۳۱- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$R = f(3) = 3^5 - 3^5 + 9 - 3 - 1 = 5$$

$$f(x) = (x-3)g(x) + 5$$

$$x=1 \Rightarrow f(1) = -2g(1) + 5 \Rightarrow -9 = -2g(1) + 5 \Rightarrow g(1) = 7$$

۳۲- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$f(1) = g(1) \Rightarrow 2 - a + 4 - b = a + 2 + b - 2$$

$$f(-2) = g(-2) \Rightarrow -16 - 4a - 8 - b = -8a + 8 - 2b - 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+b=3 \\ 4a+b=30 \end{cases} \Rightarrow 3a=27 \Rightarrow \begin{cases} a=9 \\ b=-6 \end{cases}$$

پس $a-b$ برابر ۱۵ است.



«بانک سوال موسسه یاوران دانش»

۳۳- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.
پس $f(2) = 0$ و باقی‌مانده $f(x-2)$ بر $x+1$ برابر ۴۰ است، پس
 $f(x+1)$ بر $x-1$ بخش‌پذیر است، پس $f(-3) = 40$.

$$\begin{cases} 8a + 4b + 4 = 0 \\ -27a + 9b + 4 = 40 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a + b = -1 \\ -3a + b = 4 \end{cases} \Rightarrow 5a = -5 \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 1 \end{cases}$$

۳۴- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin^3 x - \cos^3 x}{\tan x - \cot x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{(\sin x - \cos x)(\sin^2 x + \sin x \cos x + \cos^2 x)}{\frac{\sin x}{\cos x} - \frac{\cos x}{\sin x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{(\sin x - \cos x)(\sin^2 x + \sin x \cos x + \cos^2 x)}{\frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin x \cos x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{(\cancel{\sin x} - \cancel{\cos x})(\sin^2 x + \sin x \cos x + \cos^2 x)}{(\cancel{\sin x} - \cancel{\cos x})(\sin x + \cos x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2})}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{3}{2} \sqrt{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$



۳۵- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

بزرگ‌ترین درجه مخرج $\frac{1}{4}$ است پس $a - 4 = 0$ است و در نتیجه $a = 4$ است.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{bx+1}}{\sqrt{4x+3}} = \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{b}}{2} = \frac{3}{2} \Rightarrow b = 9$$

۳۶- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\begin{aligned} f^{-1}(x) &= -\frac{a}{2}x + a \Rightarrow f(x) = -\frac{2}{a}(x - a) \\ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f \circ f(x)}{2x - f(x)} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{4}{a^2}x - \frac{2}{a}(2 - a)}{2x + \frac{2}{a}(x - a)} = \frac{\frac{4}{a^2}}{2 + \frac{2}{a}} = \frac{2}{a^2 + a} = \frac{1}{3} \\ \Rightarrow a^2 + a - 6 &= 0, \xrightarrow{a > 0} a = 2 \end{aligned}$$



۳۷- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

چون تابع f بر $(x + 1)$ بخش پذیر است، $f(-1) = 0$ است:

$$f(-1) = 0 \Rightarrow -1 - a + 4 = 0 \Rightarrow a = 3$$

حال حد داده شده را می یابیم. ابتدا صورت کسر را گویا می کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{-x} + x}{x^3 + 3x + 4} \times \frac{\sqrt{-x} - x}{\sqrt{-x} - x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{-x - x^2}{(x + 1)(x^2 - x + 4)(\sqrt{-x} - x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{-x(x+1)}{(x+1)(x^2 - x + 4)(\sqrt{-x} - x)} = \frac{1}{(1+1+4)(2)} = \frac{1}{12}$$

تذکر: در تجزیه $x^3 + 3x + 4$ به شکل زیر عمل شده است:

$$\begin{array}{r} x^3 + 3x + 4 \quad | \quad x + 1 \\ \underline{x^3 + x^2} \\ -x^2 + 3x + 4 \\ \underline{-x^2 - x} \\ 4x + 4 \\ \underline{4x + 4} \\ 0 \end{array}$$

۳۸- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ابتدا ضابطه تابع را ساده می کنیم.

$$y = \frac{\sin x}{\cos^2 x} = \frac{\sin x}{\cos^3 x}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} y = \frac{1}{+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} y = \frac{1}{-} = -\infty$$



۳۹- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. خط $x=2$ مجانب قائم است پس مخرج برابر صفر است.

$$8 + 2a + 4 = 0 \Rightarrow a = -6$$

$$\text{مخرج: } 2x^2 - 6x + 4 = 2(x-2)(x-1)$$

$x=1$ ریشه‌ی مخرج است ولی مجانب قائم نیست پس ریشه صورت است.

$$bx - 3 = 0 \xrightarrow{x=1} b = 3$$

۴۰- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. باقی‌مانده برابر $f(2)$ یعنی $R = a - 16$ است.

$$f(x) = (x-2)g(x) + a - 16$$

$$x=1 \Rightarrow f(1) = -g(1) + a - 16 \Rightarrow g(1) = a - 16 - f(1) = -1$$

هدف محاسبه $f(1)$ است.

$$f(1) = f(-1) = -1 - 8 + 8 + a = a - 1$$