

گنجینه سوال رایگان  
+ پاسخ تشریحی

یاوران دانش



راه های ارتباطی با ما:

[www.Dyavari.com](http://www.Dyavari.com)

۰۲۱-۷۶۷۰۳۸۵۸

۰۹۱۲-۳۴ ۹۴ ۱۳۴





	۱	۲	۳	۴
۱ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۲ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۴ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۵ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۶ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۷ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۸ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۹ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۱۰ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۱۱ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۲ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۱۳ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۴ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۵ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۶ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۱۷ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۸ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۹ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۰ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۱ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۲۲ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۳ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۲۴ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۵ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۶ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۲۷ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۸ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۹ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۰ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۱ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۳۲ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۳ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۴ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۵ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۶ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۷ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۳۸ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۹ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۴۰ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>





۱- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. بررسی هریک از گزینه‌ها:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[ \frac{3x-1}{x+1} \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[ \frac{3(x+1)-4}{x+1} \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[ 3 - \frac{4}{x+1} \right] = [3^+] = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[ \frac{3x+1}{x-1} \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[ \frac{3(x-1)+4}{x-1} \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[ 3 + \frac{4}{x-1} \right] = [3^-] = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[ \frac{2x+3}{x+1} \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[ \frac{2(x+1)+1}{x+1} \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[ 2 + \frac{1}{x+1} \right] = [2^-] = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[ \frac{2x+1}{x-1} \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[ \frac{2(x-1)+3}{x-1} \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[ 2 + \frac{3}{x-1} \right] = [2^-] = 1$$

۲- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} (4 - [x])g(x) = \epsilon \Rightarrow 3 \times \lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = \epsilon \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = 2$$

این حد الزاماً به صورت  $\frac{0}{0}$  بوده است. بنابراین کافی است در صورت کسر  $\sqrt{4(x-1)^2}$  داشته باشیم:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{ax^2 + bx + c}}{x-1} = 2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{4(x-1)^2}}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2|x-1|}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2(x-1)}{(x-1)} = 2$$

$$\Rightarrow 4(x-1)^2 = ax^2 + bx + C \Rightarrow 4x^2 - 8x + 4 = ax^2 + bx + C \quad \begin{cases} a = 4 \\ b = -8 \\ c = 4 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{4(x-1)^2}}{x-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2|x-1|}{x-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2(x-1)}{(x-1)} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) + a - b + c = 2 + 4 + 8 + 4 = 18$$





۳- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\left( x + \sqrt{x^2 + mx} \right)}{1} \times \frac{\left( x - \sqrt{x^2 + mx} \right)}{\left( x - \sqrt{x^2 + mx} \right)} = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - x^2 - mx}{x - \sqrt{x^2 + mx}} = 3 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-mx}{x - \sqrt{\left(x + \frac{m}{2}\right)^2 - \frac{m^2}{4}}} = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-mx}{x - \left|x + \frac{m}{2}\right|} = 3 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-mx}{2x + \frac{m}{2}} = 3 \Rightarrow \frac{-m}{2} = 3 \Rightarrow m = -6$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[ \frac{6x+1}{x+2} \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[ \frac{6(x+2)-11}{x+2} \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[ 6 - \frac{11}{x+2} \right] = [6^-] = 5$$

بخش پذیر

$$x+1=0 \Rightarrow x=-1 \xrightarrow{\text{بخش پذیر}} f(-1)=0$$

$$(-1)^3 + a(-1) + 4 = 0 \Rightarrow a = 3$$

۴- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

با تقسیم صورت بر  $x+1$  و ضرب مزدوج برای عبارت مخرج:

$$\lim_{x \rightarrow (-1)} \frac{f(x)}{x + \sqrt{-x}} = \lim_{x \rightarrow (-1)} \frac{x^3 + 3x + 4}{x + \sqrt{-x}} = \lim_{x \rightarrow (-1)} \frac{(x+1)(x^2 - x + 4)(x - \sqrt{-x})}{\underbrace{(x + \sqrt{-x})(x - \sqrt{-x})}_{x^2 + x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow (-1)} \frac{(x+1)(6)(-2)}{x(x+1)} = 12$$

۵- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. چون در  $x \rightarrow (-3)$  مقدار صورت منفی می شود، پس مخرج باید در همسایگی  $x = -3$  به صورت  $0^+$  باشد. بنابراین کافی است که مخرج به صورت  $2(x+3)^2$  باشد:

$$2(x+3)^2 = 2x^2 + 12x + 18 = 2x^2 + ax + b$$

↓  
مقایسه نظیر به نظیر

↓

$$a = 12, b = 18 \Rightarrow a \times b = 216$$





۶- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. در محاسبه حد، مقدار  $[x^3]$  در همسایگی راست ۲، برابر ۸ می‌شود. بنابراین:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^3 - 8}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x-2)(x^2 + 2x + 4)}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 + 2x + 4}{x+2} = \frac{4+4+4}{4} = 3$$

۷- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+7)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+3)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}+7}{\sqrt{x}+3} = \frac{1+7}{1+3} = 2$$

۸- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{(1+\cos x)(1-\cos x + \cos^2 x)}{(1+\cos x)(1-\cos x)} = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1-\cos x + \cos^2 x}{1-\cos x} = \frac{3}{2} = 1.5$$

۹- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ابتدا صورت را بر عامل صفرساز یعنی  $(x+1)$  تقسیم کنید:

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{3(x+1)(x^2 - 6x + 6)}{(x+1)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3(x^2 - 6x + 6)}{x-2} = -13$$

۱۰- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. چون در  $x \rightarrow -3$  مقدار صورت منفی می‌شود، پس مخرج باید در همسایگی  $x = -3$  به صورت  $0^+$  باشد. بنابراین کافی است که مخرج به صورت  $2(x+3)^2$  باشد:

$$2(x+3)^2 = 2x^2 + 12x + 18 = 2x^2 + ax + b \xrightarrow{\text{مقایسه نظیر به نظیر}} a = 12, b = 18 \\ \Rightarrow a \times b = 216$$

۱۱- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$n < 3 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{10(x^3+1)}{nx^n + 5x^3} \cong \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{10x^3}{5x^3} = 2$$

$$n = 3 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{10(x^3+1)}{3x^3 + 5x^3} \cong \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{10x^3}{8x^3} = 1.25$$

$$n > 3 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{10(x^3+1)}{nx^n + 5x^3} \cong \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{10x^3}{nx^n} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{10}{nx^{n-3}} = 0$$

حاصل جمع تمام مقادیر ممکن حد عبارت  $= 2 + 1.25 + 0 = 3.25$





۱۲- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. در محاسبات حد عباراتی که صفرساز نیستند را می‌توانید از همان ابتدا برای خلاصه‌نویسی محاسبه و عدد بگذارید:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - \sqrt{2x - \sqrt{x}}} \times \frac{x + \sqrt{2x - \sqrt{x}}}{x + \sqrt{2x - \sqrt{x}}} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2(x^2 - 1)}{x^2 - 2x + \sqrt{x}} \times \frac{(x^2 - 2x) - \sqrt{x}}{(x^2 - 2x) - \sqrt{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-4(x^2 - 1)}{(x^2 - 2x)^2 - x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-4(x^2 - 1)}{x^4 - 4x^3 + 4x - x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-4(x^2 - 1)}{x(x^3 - 4x^2 + 4x - 1)} \quad \text{با تقسیم بر عامل صفرساز } (x-1) \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-4(x-1)(x+1)}{x(x-1)(x^2 - 3x + 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-4(x+1)}{x(x^2 - 3x + 1)} = 8 \end{aligned}$$

تذکر: این حد را با روش هوپیتال در زمان بسیار کوتاه می‌توانید حل کنید به شرط آنکه در مشتق مسلط باشید.

۱۳- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. همسایگی راست عدد ۳ به صورت بازه  $(3, K)$  است. بنابراین:

$$x^2 + 2x = 3 \quad \begin{cases} x = 1 \Rightarrow (3, -3) \Rightarrow \text{غ ق ق} \\ x = -3 \Rightarrow (3, 9) \Rightarrow \text{اعداد صحیح این بازه } x = 4, 5, 6, 7, 8 \text{ که شامل ۵ عدد صحیح است} \end{cases}$$





۱۴- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. نقطه A را به صورت  $A(x, y)$  در نظر می‌گیریم. داریم:

$$AB = \sqrt{(x-1)^2 + (y+2)^2} = \sqrt{5} \Rightarrow (x^2 - 2x + 1) + (y^2 + 4y + 4) = 5$$

$$AC = \sqrt{(x+3)^2 + (y-4)^2} = 1 \Rightarrow (x^2 + 6x + 9) + (y^2 - 8y + 16) = 1$$

با کم کردن طرفین معادلات اخیر از هم، داریم:

$$(-8x - 8) + (12y - 12) = 4 \Rightarrow 12y = 8x + 24 \Rightarrow 3y = 2x + 6$$

حالا این خط در نقطه  $x = 3$  بر منحنی  $y = xf(x)$  مماس است.

با جایگذاری  $x = 3$  در معادله خط، نقطه مماس به صورت  $(3, 4)$  است و این نقطه روی منحنی  $y = xf(x)$  هم

$$3f(3) = 4 \Rightarrow f(3) = \frac{4}{3}$$

قرار دارد. پس:

از طرفی شیب این خط مماس برابر با  $\frac{2}{3}$  است، پس مشتق تابع  $y = xf(x)$  در  $x = 3$  باید برابر  $\frac{2}{3}$  شود:

$$(xf(x))' = f(x) + xf'(x) \xrightarrow{x=3} f(3) + 3f'(3) = \frac{2}{3} \xrightarrow{f(3)=\frac{4}{3}} \frac{4}{3} + 3f'(3) = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow f'(3) = -\frac{2}{9}$$

نهایتاً برای محاسبه حد خواسته شده که به صورت  $\frac{0}{0}$  است، از هوییتال استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3f^2(x) - f(x) - 4}{x - 3} \xrightarrow{f(3)=\frac{4}{3}} \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{6f(x)f'(x) - f'(x)}{1} = 6f(3)f'(3) \xrightarrow{\substack{f(3)=\frac{4}{3} \\ f'(3)=-\frac{2}{9}}} 6\left(\frac{4}{3}\right)\left(-\frac{2}{9}\right) - \left(-\frac{2}{9}\right)$$

$$= \frac{-16}{9} + \frac{2}{9} = \frac{-14}{9}$$





«بانک سوال موسسه یاوران دانش»

۱۵- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 \sqrt{2x+1} (3 - \sqrt{8x-1})}{ax^n - 1} \xrightarrow{\text{هم ارزی پرتوان}} \sim \frac{x^3 \sqrt{2x} (-\sqrt{8x})}{ax^n}$$

$$= \frac{-x^3 \sqrt{16x^2}}{ax^n} = \frac{-x^3 |4x|}{ax^n} = \frac{-4x^4}{ax^n}$$

$$\begin{cases} n = 4 \\ \frac{-4}{a} = 8 \Rightarrow a = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

برای آن که حاصل این حد برابر با ۸ شود، باید:

پس باید حاصل حد زیر را حساب کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow (-\frac{1}{2})^-} \left( \left[ \frac{1}{x} \right] + [-2x] \right) = \left[ \frac{(-2)^+}{-2} \right] + \left[ \frac{(1)^+}{1} \right] = -2 + 1 = -1$$

۱۶- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. برای آن که حاصل حد فوق، بی نهایت شود، باید  $x = a$  مخرج کسر را صفر کند:

$$|2 \cos^2 a - 2 \cos a - \sin^2 a| = 0 \Rightarrow 2 \cos^2 a - 2 \cos a - \sin^2 a = 0$$

با استفاده از روابط  $\cos^2 a = 2 \cos^2 a - 1$  و  $\sin^2 a = 1 - \cos^2 a$  داریم:

$$2(2 \cos^2 a - 1) - 2 \cos a - (1 - \cos^2 a) = 0 \Rightarrow 5 \cos^2 a - 2 \cos a - 3 = 0$$

$$\xrightarrow{\cos a = t} 5t^2 - 2t - 3 = 0 \Rightarrow t = 1, -\frac{3}{5}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos a = 1 \xrightarrow{a \in [0, 2\pi]} a = 0, 2\pi \\ \cos a = -\frac{3}{5} \xrightarrow{a \in [0, 2\pi]} \end{cases}$$

$a$  دارای دو جواب درست به صورت های  $\pi \pm \alpha$  در ربع های دوم و سوم است

$$0 + 2\pi + (\pi - \alpha) + (\pi + \alpha) = 4\pi$$

پس مجموع مقادیر ممکن برابر  $a$  برابر است با:





۱۷- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$P(x) = (x-2)(x+1)q(x) + 4x+1$$

باقی مانده خارج قسمت

$$x-2=0 \Rightarrow x=2 \Rightarrow P(2)=4(2)+1 \Rightarrow P(2)=9$$

$$x+1=0 \Rightarrow x=-1 \Rightarrow P(-1)=4(-1)+1 \Rightarrow P(-1)=-3$$

$$x-1=0 \Rightarrow x=1 \Rightarrow g(1)=P(-1)+P(2)+3(1)^2+2$$

$$g(1)=(-3)+9+3+2=11$$

$$x-1 \text{ بر } g(x) \text{ تقسیم باقی مانده تقسیم } g(1)=11$$

۱۸- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

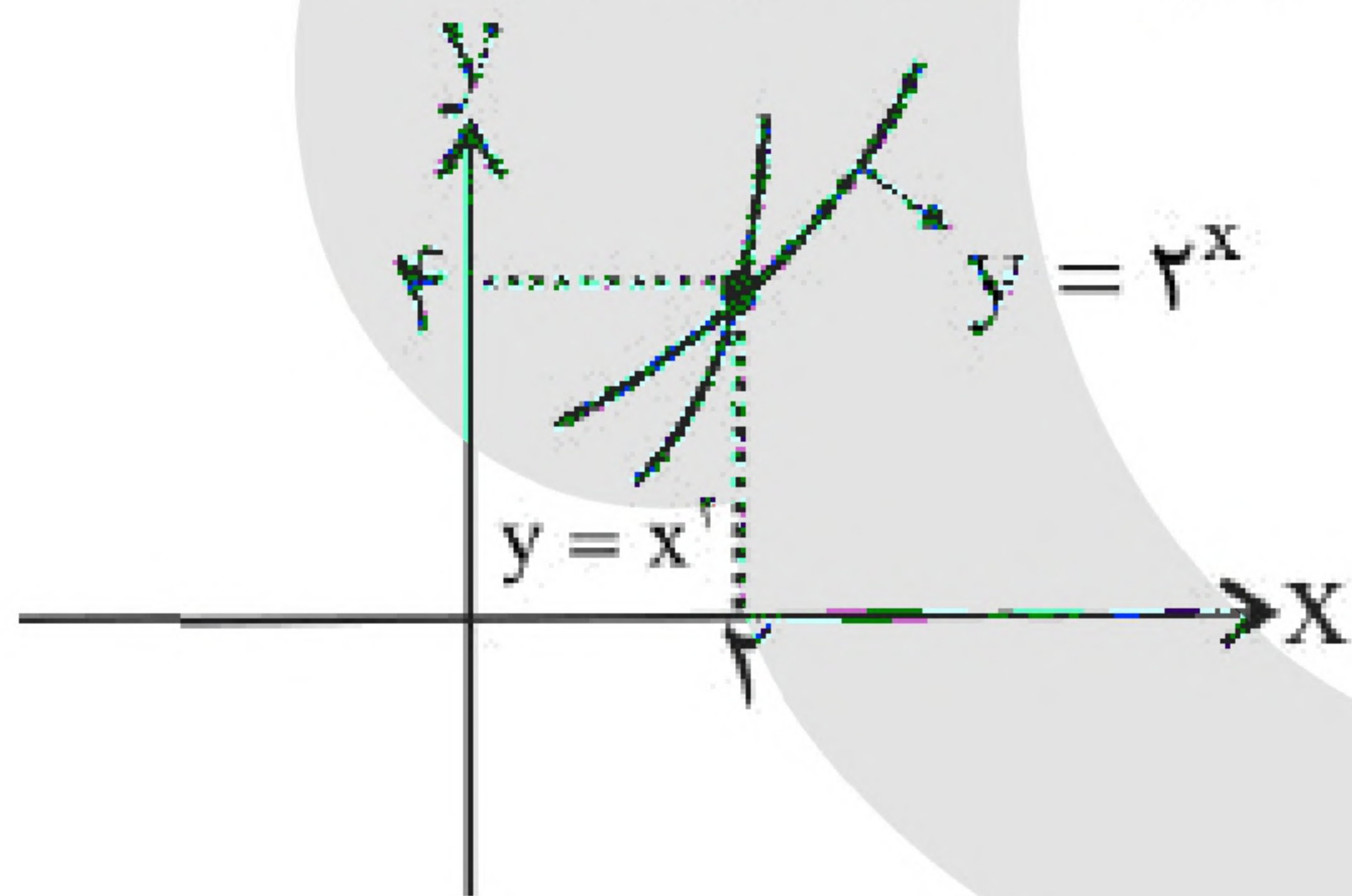
$$n=3 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{40(x^3+1)}{3x^3+5x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{40x^3}{8x^3} = 5$$

$$n>3 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{40(x^3+1)}{nx^n+5x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{40x^3}{nx^n} = 0$$

$$n<3 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{40(x^3+1)}{nx^n+5x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{40x^3}{5x^3} = 8$$

$$13 = 5 + 0 + 8 = \text{حاصل جمع تمام مقادیر حد ممکن}$$

۱۹- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. نمودار دو تابع  $y=x^2$  و  $y=2^x$  در همسایگی  $x=2$  به صورت زیر است:



$$x \rightarrow 2^+: 2^x < x^2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2-3x}{2^x - x^2} = \frac{-4}{0^-} = +\infty$$

$$x \rightarrow 2^-: 2^x > x^2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2-3x}{2^x - x^2} = \frac{-4}{0^+} = -\infty$$

$$\lim f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{f(x+1)}{f(2-x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)}{\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)} = \frac{\text{عدد مثبت}}{0^-} = -\infty = K$$

۲۰- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

با توجه به جملات پرتوان در صورت و مخرج برای محاسبه حد در بی نهایت:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2+2x} + \sqrt[3]{2-x^3}}{x + |2x-3|} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2} + \sqrt[3]{-x^3}}{x + |2x|} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|2x| - x}{x - 2x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3x}{-x} = 3$$





۲۱- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x - \sqrt{ax^2 + bx} \times \frac{x + \sqrt{ax^2 + bx}}{x + \sqrt{ax^2 + bx}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - (ax^2 + bx)}{x + \sqrt{a|x|}} \xrightarrow{\substack{\text{چون } x \rightarrow +\infty \\ \text{پس } |x| = x}} \frac{x^2 - (ax^2 + bx)}{x + \sqrt{a|x|}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(1-a)x^2 - bx}{(1+\sqrt{a})x} = 2 \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ \frac{-b}{2} = 2 \Rightarrow b = -4 \Rightarrow a - b = 5 \end{cases}$$

۲۲- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. در  $x \rightarrow -\infty$  عبارت  $\sqrt{4x^2 + 15x}$  هم‌ارز با  $\sqrt{4x^2}$  و در نهایت  $|2x| = -2x$  است:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{mx^n + 15}{3x - (-2x)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{mx^n}{5x} = -1 \Rightarrow \begin{cases} m = -5 \\ n = 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{-5x + 15}{3x - \sqrt{4x^2 + 15x}} \times \frac{3x + \sqrt{4x^2 + 15x}}{3x + \sqrt{4x^2 + 15x}} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(-5x + 15) \times 18}{9x^2 - 4x^2 - 15x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-5(x-3) \times 18}{5x^2 - 15x} = -6$$

۲۳- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. با توجه به قضیه تقسیم چندجمله‌ای‌ها و فرض سؤال  $f(1) = 4$  و  $f(-2) = 7$  و  $f(x-1) = (x+1)(x-2)g(x) + ax + b$ ، بنابراین:

خارج قسمت  $\downarrow$   
باقیمانده  $= R(x)$

$$\begin{cases} x = 2 \Rightarrow f(1) = 2a + b = 4 \\ x = -1 \Rightarrow f(-2) = -a + b = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 6 \end{cases} \Rightarrow R(x) = 6 - x$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x - ax^2 - ax - bx - b}{x+1} = ,$$

۲۴- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2(1-a) + x(-1-a-b) - b}{x+1} = , \Rightarrow \begin{cases} 1-a = 0 \Rightarrow a = 1 \\ -1-a-b = 0 \Rightarrow b = -2 \end{cases}$$

$$a + b = 1 - 2 = -1$$





۲۵- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. با توجه به جواب  $-\infty$  باید مخرج  $-(x-4)^2$  باشد. بنابراین با مقایسه این عبارت و مخرج کسر:

$$-16 + 8x - x^2 = b - ax - x^2$$

نتیجه می‌گیریم که  $b = -16$  و  $a = -8$  است.

$$\lim_{x \rightarrow (-\infty)} \frac{(a+8)x^3 + bx^2 - 3}{\sqrt{2x} - 2x^2} = \lim_{x \rightarrow (-\infty)} \frac{-16x^2}{-2x^2} = 8$$

۲۶- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. در عبارت فرض سؤال، چون  $\lim_{x \rightarrow 1} (x+2) = 3$  و حاصل نهایی حد  $+\infty$  شده است.

پس مخرج کسر  $2(x-1)^2$  بوده است تا مخرج کسر به  $+\infty$  میل کند.

$$2(x-1)^2 = 2x^2 - 4x + 2 = 2x^2 + ax + b \Rightarrow \begin{cases} a = -4 \\ b = 2 \end{cases}$$

با جایگذاری مقادیر  $a$  و  $b$  به محاسبه حد دوم می‌پردازیم:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x \left( x + \sqrt{x^2 - 8} \right) \times \frac{x - \sqrt{x^2 - 8}}{x - \sqrt{x^2 - 8}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x(x^2 - x^2 + 8)}{x - \sqrt{x^2 - 8}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{8x}{x - |x|} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{8x}{x - (-x)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{8x}{2x} = 4$$

۲۷- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{h \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{h \rightarrow 3^-} \frac{-2(x-3)}{\sqrt{2x+3} - x} \times \frac{\sqrt{2x+3} + x}{\sqrt{2x+3} + x} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{-2(x-3)(\sqrt{2x+3} + x)}{-(x-3)(x+1)}$$

$$= \frac{-2(6)}{-4} = 3 = L$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{3(x-3)}{\sqrt{2x+3} - x} \times \frac{\sqrt{2x+3} + x}{\sqrt{2x+3} + x} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{3(x-3)(\sqrt{2x+3} + x)}{-(x-3)(x+1)}$$

$$= \frac{3(6)}{-4} = -4/5 = R$$

$$L - 4R = 3 - 4(-4/5) = 21$$





$$f(x+1) = \sqrt{x+1+1} + 2 \Rightarrow f(x) = \sqrt{x+1} + 2$$

۲۸- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\sqrt{x+1} = y-2 \Rightarrow x+1 = (y-2)^2 \Rightarrow f^{-1}(x) = (x-2)^2 - 1$$

$$f^{-1}(x) = x^2 - 4x + 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f^{-1}(x)}{\sqrt{2x+3}-3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 4x + 3}{\sqrt{2x+3}-3} \times \frac{\sqrt{2x+3}+3}{\sqrt{2x+3}+3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x-1) \times 6}{2(x-3)} = \frac{2 \times 6}{2} = 6$$

۲۹- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x - \sqrt{x^2 + 2x - 1})(x + \sqrt{x^2 + 2x - 1})}{x + \sqrt{x^2 + 2x - 1}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - |x|}{x + |x|} = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x + x) = -\infty$$

$$x \Rightarrow -\frac{1}{2} \Rightarrow x + \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow 2x + 1 = 0$$

۳۰- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} \frac{x^2}{(2x+1)^2} = +\infty \Rightarrow 4x^2 + 4x + 1 = 4x^2 + ax + b \Rightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = 1 \end{cases}$$

$$x \rightarrow -\frac{1}{2}$$

$$a + b = 4 + 1 = 5$$

۳۱- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3^{10} x^{20} \times 2^{20} x^{40}}{6^{15} x^{60}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6^{10} \times 2^{10} \cancel{x^{60}}}{6^{15} \cancel{x^{60}}} = \frac{2^{10}}{6^5} = \frac{2^{10}}{2^5 \times 3^5} = \frac{2^5}{3^5} = \left(\frac{2}{3}\right)^5 = \frac{32}{243}$$





۳۲- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.  $f(2) = -3, f(-3) = 2$  : با توجه به باقیمانده‌ها

$$(fof)(x) = (x^2 + x - 6)g(x) + \underbrace{mx + n}_{R(x) \text{ باقیمانده}}$$

$$x = 2 \Rightarrow fof(2) = 2m + n \Rightarrow \underbrace{f(f(2))}_{-3} = 2m + n$$

$$f(-3) = 2m + n \Rightarrow 2m + n = 2$$

$$x = -3 \Rightarrow fof(-3) = -3m + n \Rightarrow \underbrace{f(f(-3))}_2 = -3m + n$$

$$f(2) = -3m + n \Rightarrow -3m + n = -3$$

$$\begin{cases} 2m + n = 2 \\ -3m + n = -3 \end{cases} \Rightarrow m = 1, n = 0 \Rightarrow R(x) = x$$

۳۳- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{4x - 1}{a(x - 2)^2} = -\infty \xrightarrow{\text{پایه } a < 0} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4}{ax^2 - 4ax + 4a} = -\infty \Rightarrow 4a = -12 \Rightarrow a = -3$$

$$\Rightarrow -4a = b \Rightarrow b = 12$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (b - a)x \times \frac{4x - 1}{-3x^2 + 12x - 12} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{60x^2 - 15x}{-3x^2 + 12x - 12} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{60x^2}{-3x^2} = -20$$

۳۴- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. می‌دانیم وقتی  $x \rightarrow 3^+$  :  $|9 - x^2| = -(9 - x^2)$  و  $[3^+] = 3$  :

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{3x^3 - 81}{x^2 - 9} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{3(x-3)(x^2 + 3x + 9)}{(x-3)(x+3)} = \frac{3(27)}{6} = 13/2$$





«بانک سوال موسسه یاوران دانش»

$$\text{اگر } n > 3 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{8x^n}{2x^n} = 4$$

۳۵- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\text{اگر } n = 3 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x^3 + 8x^3}{2x^3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{6x^3}{2x^3} = 3$$

$$\left. \begin{array}{l} n = 2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x^2}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x) = +\infty \\ n = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x}{2x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2}{2} = -1 \end{array} \right\} \text{یا}$$

۳۶- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^-} y = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-2}{\sqrt[3]{2-f}} = \frac{-2}{\sqrt[3]{2-2^+}} = \frac{-2}{0^-} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} y = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{-2}{\sqrt[3]{2-f}} = \frac{-2}{\sqrt[3]{2-2^-}} = \frac{-2}{0^+} = -\infty \end{array} \right\} \rightarrow \begin{array}{c} \uparrow \\ x=2 \end{array}$$

۳۷- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{5^n \left( \left(\frac{2}{5}\right)^n + \left(\frac{3}{5}\right)^n + \left(\frac{4}{5}\right)^n + 1 \right)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{5^n} = 5$$





۳۸- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ابتدا با ضرب عبارت سه جمله‌ای (چاق) از طریق اتحاد چاق و لاغر رفع ابهام می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt[3]{5 + \sqrt{x+1}} - 2}{\sqrt{2x} - 4} = \div \times \frac{\sqrt[3]{(5 + \sqrt{x+1})^2} + 2\sqrt[3]{5 + \sqrt{x+1}} + 4}{\sqrt[3]{(5 + \sqrt{x+1})^2} + 2\sqrt[3]{5 + \sqrt{x+1}} + 4}$$

حدا این عبارت وقتی  $x \rightarrow 8$  برابر ۱۲ است

$$\lim_{x \rightarrow 8} \frac{5 + \sqrt{x+1} - 8}{(\sqrt{2x} - 4) \times 12} = \lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt{x+1} - 3}{12(\sqrt{2x} - 4)} \times \frac{\sqrt{x+1} + 3}{\sqrt{x+1} + 3} \times \frac{\sqrt{2x} + 4}{\sqrt{2x} + 4}$$

$$\lim_{x \rightarrow 8} \frac{(x-8)(8)}{12(2(x-8))(6)} = \frac{1}{24 \times 6} = \frac{1}{144}$$

۳۹- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\text{اگر } n > 3 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{8x^n}{2x^n} = 4$$

$$\text{اگر } n = 3 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x^3 + 8x^3}{2x^3} = 3$$

اگر  $n < 3$   
( $n$  طبیعی است)

$$n = 2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x^2}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x) = +\infty$$

$$n = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x}{2x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2}{2} = -1$$





۴۰- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$k > 3 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{kx^3 - bx^k - 3}{2x^k - 4x^2 + 3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-bx^k}{2x^k} = -\frac{b}{2} = 2 \Rightarrow b = -4$$

$$k = 3 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 - bx^3 - 3}{2x^3 - 4x^2 + 3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(3-b)x^3}{2x^3} = \frac{3-b}{2} = 2 \Rightarrow b = -1$$

$$k < 3 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{kx^3 - bx^k - 3}{2x^k - 4x^2 + 3} \neq 2 \quad \text{غیرقابل قبول}$$