

گنجینه سوال رایگان  
+ پاسخ تشریحی

یاوران دانش



راه های ارتباطی با ما:

[www.Dyavari.com](http://www.Dyavari.com)

۰۲۱-۷۶۷۰۳۸۵۸

۰۹۱۲-۳۴ ۹۴ ۱۳۴





	۱	۲	۳	۴
۱ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۴ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۵ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۶ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۷ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۸ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۹ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۰ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۱ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۲ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۱۳ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۴ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۱۵ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۶ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۱۷ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۸ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۹ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۰ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۱ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۲۲ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۳ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۴ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۲۵ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۶ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۷ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۸ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۲۹ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۳۰ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۱ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۳۲ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۳۳ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۳۴ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۵ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۳۶ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۷ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۳۸ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۹ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۴۰ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>







۱- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. با توجه به رابطه  $\cos 4x = 2\cos^2 2x - 1 \Rightarrow \cos^2 2x = \frac{1 + \cos 4x}{2}$

$\Rightarrow \cos 4x = \frac{1 + \cos 4x}{2} \times 2 \Rightarrow \cos 4x = 1$

$$4x = 2K\pi$$

$$x = \frac{K\pi}{2}, K \in \mathbb{Z}$$

$$-2\pi \leq x \leq 2\pi \Rightarrow -2\pi \leq \frac{K\pi}{2} \leq 2\pi \Rightarrow -4 \leq K \leq 4 \Rightarrow K \in \mathbb{Z}$$

K شامل ۹ عدد صحیح می‌شود، پس معادله در این بازه دارای ۹ جواب است.

۲- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\frac{\sin 3x}{\sin x} = 1 \xrightarrow[\text{یعنی } x \neq K\pi]{\text{با شرط } \sin x \neq 0} \sin 3x = \sin x$$

$$\begin{aligned} 3x &= 2K\pi + x \\ 2x &= 2K\pi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3x &= (2K+1)\pi - x \\ 4x &= (2K+1)\pi \\ x &= \frac{2K+1}{4}\pi, K \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

غ ق چون مخرج کسر معادله صفر می‌شود  $x = K\pi$

$$0 \leq x \leq 2\pi \Rightarrow 0 \leq \frac{(2K+1)\pi}{4} \leq 2\pi \Rightarrow 0 \leq \frac{2K+1}{4} \leq 2 \Rightarrow 0 \leq 2K+1 \leq 8$$

$$\Rightarrow -1 \leq 2K \leq 7 \Rightarrow -\frac{1}{2} \leq K \leq \frac{7}{2} \Rightarrow K = 0, 1, 2, 3$$

$$\Rightarrow x = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4} \Rightarrow \text{مجموع جواب ها} = 4\pi$$

۳- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. با توجه به شکل، نمودار شبیه خود  $y = \sin x$  است، یعنی a و b هم علامت هستند. با

$$T = \frac{2\pi}{|b|} = \frac{1}{3} \xrightarrow{b > 0} b = \frac{1}{3}$$

توجه به گزینه‌ها  $a > 0$  و  $b > 0$ :

$$a > 0 \Rightarrow |a| = 2 \xrightarrow{\text{ماکزیمم}} a = 2$$

$$3a + 6b = 3(2) + 6\left(\frac{1}{3}\right) = 8$$





۴- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. عبارت مورنظر  $\sin \alpha \cdot \cos \alpha (\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha)$

$$= \frac{1}{2} \times 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha \cdot (-\cos^2 \alpha)$$

$$= \frac{1}{2} \sin^2 \alpha (-\cos^2 \alpha)$$

$$= -\frac{1}{4} \sin \alpha = -\frac{1}{4} \sin \left( 4 \times \frac{\pi}{16} \right) = -\frac{1}{4} \sin \left( \frac{\pi}{4} \right) = -\frac{1}{4} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = -\frac{\sqrt{2}}{8}$$

۵- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. در تعیین دامنه تابع  $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}}$  مخرج کسر باید مخالف صفر باشد، یعنی

$$\cos \frac{x}{2} \neq 0 \text{ و این شرط فقط برای } x = 2\pi \text{ برقرار است:}$$

$$\cos \frac{2\pi}{2} = \cos \pi = -1 \neq 0$$

۶- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{1}{2} \xrightarrow{\text{توان ۲}} \underbrace{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}_1 + \underbrace{2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha}_{\sin 2\alpha} = \frac{1}{4}$$

$$1 + \sin 2\alpha = \frac{1}{4} \Rightarrow \sin 2\alpha = -\frac{3}{4}$$

$$\cos 4\alpha = 1 - 2 \sin^2 2\alpha = 1 - 2 \left( -\frac{3}{4} \right)^2 = 1 - \frac{9}{8} = -\frac{1}{8}$$

$$\cos 8\alpha = 2 \cos^2 4\alpha - 1 = 2 \left( -\frac{1}{8} \right)^2 - 1 = \frac{-31}{32}$$





۷- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\sin x - \cos x = \frac{1}{2} \xrightarrow{\text{دو طرف به توان ۲}} \underbrace{\sin^2 x + \cos^2 x}_1 - \underbrace{2 \sin x \cdot \cos x}_{\sin 2x} = \frac{1}{4}$$

$$1 - \sin 2x = \frac{1}{4} \Rightarrow \sin 2x = \frac{3}{4} \quad (1)$$

$$\Rightarrow \sin^2 2x + \cos^2 2x = 1 \Rightarrow \frac{9}{16} + \cos^2 2x = 1 \Rightarrow \cos^2 2x = \frac{7}{16}$$

$$\Rightarrow \cos 2x = \pm \frac{\sqrt{7}}{4}$$

$$\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2} \xrightarrow{\times 2} \frac{\pi}{2} < 2x < \pi$$

$$\text{ناحیه دوم مثلثاتی} \quad (\cos 2x < 0) \Rightarrow \cos 2x = -\frac{\sqrt{7}}{4} \quad (2)$$

$$1, 2 \Rightarrow \sin 4x = 2 \sin 2x \cdot \cos 2x = 2 \left( \frac{3}{4} \right) \left( -\frac{\sqrt{7}}{4} \right) = -\frac{3\sqrt{7}}{8}$$

$$\text{عبارت مورد نظر} = \frac{8 \sin 4x}{\sqrt{7}} = \frac{8}{\sqrt{7}} \left( -\frac{3\sqrt{7}}{8} \right) = -3$$

۸- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. خلاصه ضابطه تابع به صورت  $y = a + b \sin x$  می شود و طبق نمودار:

$$f\left(-\frac{5\pi}{6}\right) = 0 \Rightarrow 0 = a + b \sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)$$

$$a + b\left(-\frac{1}{2}\right) = 0 \Rightarrow a = \frac{b}{2} \Rightarrow b = 2a \quad (1)$$

در مبدأ  $y > 0$  بنابراین  $a > 0$  و در نتیجه  $b > 0$ . ماکزیمم تابع برابر ۳ است. بنابراین:

$$\begin{aligned} a + 2a = 3 & \xleftarrow{\text{طبق ۱}} a + b = 3 \xleftarrow{b > 0} a + |b| = 3 \\ 3a = 3 \end{aligned}$$

$$\boxed{a = 1}, \boxed{b = 2} \Rightarrow f(x) = 1 + 2 \sin x$$

$$f\left(\frac{7\pi}{6}\right) = 1 + 2 \sin\left(\frac{7\pi}{6}\right) = 1 + 2 \sin\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = 1 + 2\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$$

ناحیه سوم





۹- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$f(x) = 2(1 - \sin^2 x) - 8\sin x + 9$$

$$f(x) = -2\sin^2 x - 8\sin x + 9 \Rightarrow f(x) = -2(\sin^2 x + 4\sin x) + 9$$

$$\Rightarrow f(x) = -2[(\sin x + 2)^2 - 4] + 9$$

$$f(x) = -2(\sin x + 2)^2 + 17 \begin{cases} \xrightarrow{\sin x = -1} \text{Max} = 15 \\ \xrightarrow{\sin x = 1} \text{Min} = -1 \end{cases} \text{اختلاف Max, Min تابع} = 16$$

$$-1 \leq \sin x \leq 1$$

چون:

۱۰- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$T = 2\left(\frac{5}{4} - \frac{1}{4}\right) = 2 \Rightarrow \frac{2\pi}{|b|} = 2 \Rightarrow |b| = \pi \xrightarrow{b > 0} b = \pi$$

$$f\left(\frac{1}{4}\right) = 0 \Rightarrow a \cos\left(\frac{\pi}{4} + c\right) = 0 \Rightarrow \frac{\pi}{4} + c = \frac{\pi}{2} \Rightarrow c = \frac{\pi}{4}$$

$$f_{\max} = |a| = \frac{1}{4} \Rightarrow a = \pm \frac{1}{4}$$

$$f(x) = \pm \frac{1}{4} \cos\left(\pi x + \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow f(0) = \pm \frac{1}{4} \cos \frac{\pi}{4} \xrightarrow{f(0) > 0} a = \frac{1}{4}$$

$$\frac{b}{ac} = \frac{\pi}{\frac{1}{4} \times \frac{\pi}{4}} = 16$$

«بانک سوال موسسه یاوران دانش»

۱۱- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. با توجه به هم‌ارزی زیر:

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right) = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

می‌توان معادله را به صورت  $\sin^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1$  خلاصه کرد:

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \pm 1 \Rightarrow x + \frac{\pi}{4} = K\pi + \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = K\pi + \frac{\pi}{4}, K \in \mathbb{Z}$$

$$-2\pi \leq K\pi + \frac{\pi}{4} \leq 2\pi \xrightarrow{\div \pi} -2 \leq K + \frac{1}{4} \leq 2$$

$$\frac{-9}{4} \leq K \leq \frac{7}{4} \xrightarrow{K \in \mathbb{Z}} K = -2, -1, 0, 1 \Rightarrow \text{در بازه مورد نظر، معادله 4 جواب دارد.}$$





$$\left. \begin{aligned} |a| + b &= 3 \\ -|a| + b &= -7 \end{aligned} \right\} \Rightarrow b = -2, |a| = 5$$

۱۲- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

تابع در همسایگی راست  $x = 0$  نزولی است، پس  $a > 0$ :

$$f(x) = 5 \cos x - 2 \Rightarrow f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 5 \cos \frac{\pi}{3} - 2 = \frac{5}{2} - 2 = \frac{1}{2}$$

$$4f\left(\frac{\pi}{3}\right) + 3 = 4\left(\frac{1}{2}\right) + 3 = 5$$

۱۳- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. بیشترین مقدار  $b - a$  برابر با مقدار عددی دوره تناوب تابع  $f(x)$  است:

$$\frac{\pi}{\pi|m|} = 8 \Rightarrow |m| = \frac{1}{8}$$

چون تابع  $f(x)$  در بازه  $(a, b)$  نزول اکید است، پس  $m = -\frac{1}{8}$

$$\begin{aligned} f\left(\frac{40}{3}\right) &= 2\sqrt{3} \operatorname{tg}\left(\pi \left(-\frac{1}{8}\right) \left(\frac{40}{3}\right)\right) = -2\sqrt{3} \operatorname{tg}\left(\frac{5\pi}{3}\right) = -2\sqrt{3} \operatorname{tg}\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right) \\ &= -2\sqrt{3} \left(-\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}\right) = +2\sqrt{3} \times \sqrt{3} = 6 \end{aligned}$$

۱۴- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. با فاکتورگیری علامت منفی در کمان  $\operatorname{tg}$ :  $y = 1 + m \operatorname{tg}\left(Kx - \frac{\pi}{3}\right)$  ضابطه تابع می شود.

چون  $\left(-\frac{\pi}{6}\right)$  اولین مجانب در سمت چپ مبدأ مختصات است:

$$K\left(-\frac{\pi}{6}\right) - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow K = 1$$

$$f\left(\frac{13\pi}{12}\right) = 0 \Rightarrow 1 + m \operatorname{tg}\left(\frac{13\pi}{12} - \frac{\pi}{3}\right) = 0 \Rightarrow 1 + m \operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 0$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -1$$

$$\xrightarrow{\quad} 1 - m = 0 \Rightarrow m = 1$$

بنابراین، ضابطه تابع به صورت  $y = 1 + \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$  است و

$$f\left(\frac{\pi}{12}\right) = 1 + \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{12} - \frac{\pi}{3}\right) = 1 + \operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = 1 - 1 = 0$$

$$1 + \operatorname{Cotg}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} \Rightarrow 1 + 9 = \frac{1}{\sin^2 x} \Rightarrow \sin^2 x = \frac{1}{10}$$

۱۵- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\cos^2 x = 1 - 2 \sin^2 x = 1 - 2\left(\frac{1}{10}\right) = \frac{4}{5}$$

$$\cos^4 x = 2 \cos^2 x - 1 = 2\left(\frac{4}{5}\right) - 1 = \frac{7}{5} = 0.78$$





۱۶- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\frac{1 - \sin x}{1 + \sin x} = 4 \Rightarrow 1 - \sin x = 4 + 4 \sin x \Rightarrow \sin x = -\frac{3}{5} \xrightarrow{\text{ربع سوم}} \cos x = \frac{-4}{5} \Rightarrow \operatorname{tg} x = \frac{3}{4}$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2}}{1 - 2 \sin^2 \frac{x}{2}} \xrightarrow{\text{صورت و مخرج تقسیم بر } \cos^2 \frac{x}{2}}$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{\frac{2 \sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2}}}{\frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}} - \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2}}} \Rightarrow \operatorname{tg} x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} - 2 \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} \Rightarrow \operatorname{tg} x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{4} = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} \Rightarrow 3 \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} + 8 \operatorname{tg} \frac{x}{2} - 3 = 0$$

$$\left( \operatorname{tg} \frac{x}{2} \text{ جمع دو مقدار ممکن برای } \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right) = \frac{-b}{a} = \frac{-8}{3}$$

$$M = 2(1 - \cos^2 x) - 16 \cos x + 18$$

$$M = -2 \cos^2 x - 16 \cos x + 20$$

$$M = -2(\cos^2 x + 8 \cos x) + 20$$

$$M = -2((\cos + 4)^2 - 16) + 20 \Rightarrow M = -2(\cos + 4)^2 + 52$$

$$\text{چون } -1 \leq \cos \leq 1 \quad \begin{cases} \xrightarrow{\cos x = -1} \text{Max} = 34 \\ \xrightarrow{\cos x = 1} \text{Min} = 2 \end{cases} \Rightarrow \text{اختلاف Max, Min} = 32$$

۱۷- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.





۱۸- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. باقیمانده تقسیم عبارت موردنظر بر  $x - \cos \alpha$  برابر با ۱ است، یعنی وقتی ریشه مقسوم علیه را پیدا کرده و در مقسوم قرار می دهیم، حاصل برابر با ۱ می شود:

$$x - \cos \alpha = 0 \Rightarrow x = \cos \alpha$$

$$2x^4 - x^2 - \sin^2 \alpha (2\sin^2 \alpha - 1) \xrightarrow{x = \cos \alpha} 2\cos^4 \alpha - \cos^2 \alpha - 2\sin^4 \alpha + \sin^2 \alpha$$

$$= 1 \Rightarrow 2(\cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha) - (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) = 1 \quad (*)$$

می دانیم:

$$\cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha = (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)(\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \cos 2\alpha$$

پس عبارت (\*) به این صورت خواهد بود:

$$2\cos 2\alpha - \cos 2\alpha = 1 \Rightarrow \cos 2\alpha = 1 \Rightarrow 2\alpha = 2k\pi \Rightarrow \alpha = k\pi$$

$$AB = BC$$

۱۹- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. چون مثلث ABC متساوی الساقین است، پس:

طول BC، برابر فاصله بین دو قله و دره متوالی تابع است که برابر با نصف دوره تناوب است.

چون در تابع  $f(x) = a \sin\left(\frac{\pi}{3}x\right) + b$ ،  $T = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{3}} = 6$  می باشد، پس:

$$BC = \frac{T}{2} = 3 \Rightarrow AB = 3$$

$$\begin{cases} a = \frac{3}{2} \\ b = \frac{3}{2} \end{cases}$$

یعنی مقدار ماکزیمم این تابع برابر با ۳ بوده و به این ترتیب به سرعت نتیجه می شود که:

(دقت کنید که شروع نمودار از روی محور yها صعودی بوده و لذا  $a > 0$  است.)

$$a \times b = \frac{3}{2} \times \frac{3}{2} = \frac{9}{4}$$

۲۰- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow 1 + (-3)^2 = \frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow 10 = \frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow \cos^2 x = \frac{1}{10}$$

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 = 2\left(\frac{1}{10}\right) - 1 = -\frac{8}{10}$$

$$\cos 4x = 2\cos^2(2x) - 1 = 2\left(-\frac{8}{10}\right)^2 - 1 = \frac{1}{25} - 1 = -\frac{24}{25}$$

۲۱- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$y = a \sin(b\pi x) \Rightarrow T = \frac{2\pi}{|b|\pi} = \frac{2}{|b|} = 6 \Rightarrow |b| = \frac{1}{3} \Rightarrow b = \pm \frac{1}{3}$$

با توجه به شکل، a و b هم علامت هستند، چون شکل اولیه  $y = \sin x$  حفظ شده است. بنابراین می توانیم a و b را مثبت فرض کنیم:

$$\frac{a}{b} = \frac{2}{1} = 6$$





۲۲- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. تابع  $tg$  در محل ریشه‌های مخرج کسر  $\infty$  می‌شود، بنابراین:

$$\cos\left(-\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{6}\right) = 0 \Rightarrow \cos\left(\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{6}\right) = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}x - \frac{\pi}{6} = K\pi + \frac{\pi}{2}$$

$$x = 2K\pi + \frac{4\pi}{3} \begin{cases} x = -\frac{2\pi}{3} \Rightarrow a = -\frac{2\pi}{3} & \text{اولین ریشه منفی} \\ x = \frac{4\pi}{3} \Rightarrow b = \frac{4\pi}{3} & \text{اولین ریشه مثبت} \end{cases}$$

$$y = \operatorname{tg}\left(\frac{-\frac{4\pi}{3}}{-\frac{2\pi}{3}}x\right) \Rightarrow y = \operatorname{tg} 2x \Rightarrow \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$$

در بازه صعودی اکید است. (می‌دانیم  $y = \operatorname{tg} x$  در بازه  $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$  صعودی اکید است.)

$$2\sin x(1 - 2\sin^2 x) + \sin x - 1 = 0$$

$$4\sin^3 x - 3\sin x + 1 = 0 \Rightarrow (\sin x + 1)(2\sin x - 1)^2 = 0$$

$$\left. \begin{aligned} \sin x + 1 = 0 &\Rightarrow \sin x = -1 \Rightarrow x = \frac{3\pi}{2} \\ 2\sin x - 1 = 0 &\Rightarrow \sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} \end{aligned} \right\} \text{مجموع جواب ها} = 2/5\pi$$

۲۳- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

۲۴- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$-\sin 3x = \cos^2 2x - \sin^2 2x \Rightarrow -\sin 3x = \cos 4x \Rightarrow \cos 4x = \cos\left(\frac{\pi}{2} + 3x\right)$$

$$\begin{cases} \Rightarrow 4x = 2K\pi + \frac{\pi}{2} + 3x \xrightarrow{K \in \mathbb{Z}} x = 2K\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} \\ \Rightarrow 4x = 2K\pi - \frac{\pi}{2} - 3x \xrightarrow{K \in \mathbb{Z}} x = \frac{2K\pi}{7} - \frac{\pi}{14} \Rightarrow x = \frac{3\pi}{14}, \frac{\pi}{2}, \frac{11\pi}{14}, \frac{15\pi}{14}, \frac{19\pi}{14}, \frac{23\pi}{14}, \frac{27\pi}{14} \end{cases}$$

$$\text{مجموع جواب های متمایز (بدون تکرار)} = \frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{14} + \frac{11\pi}{14} + \frac{15\pi}{14} + \frac{19\pi}{14} + \frac{23\pi}{14} + \frac{27\pi}{14}$$

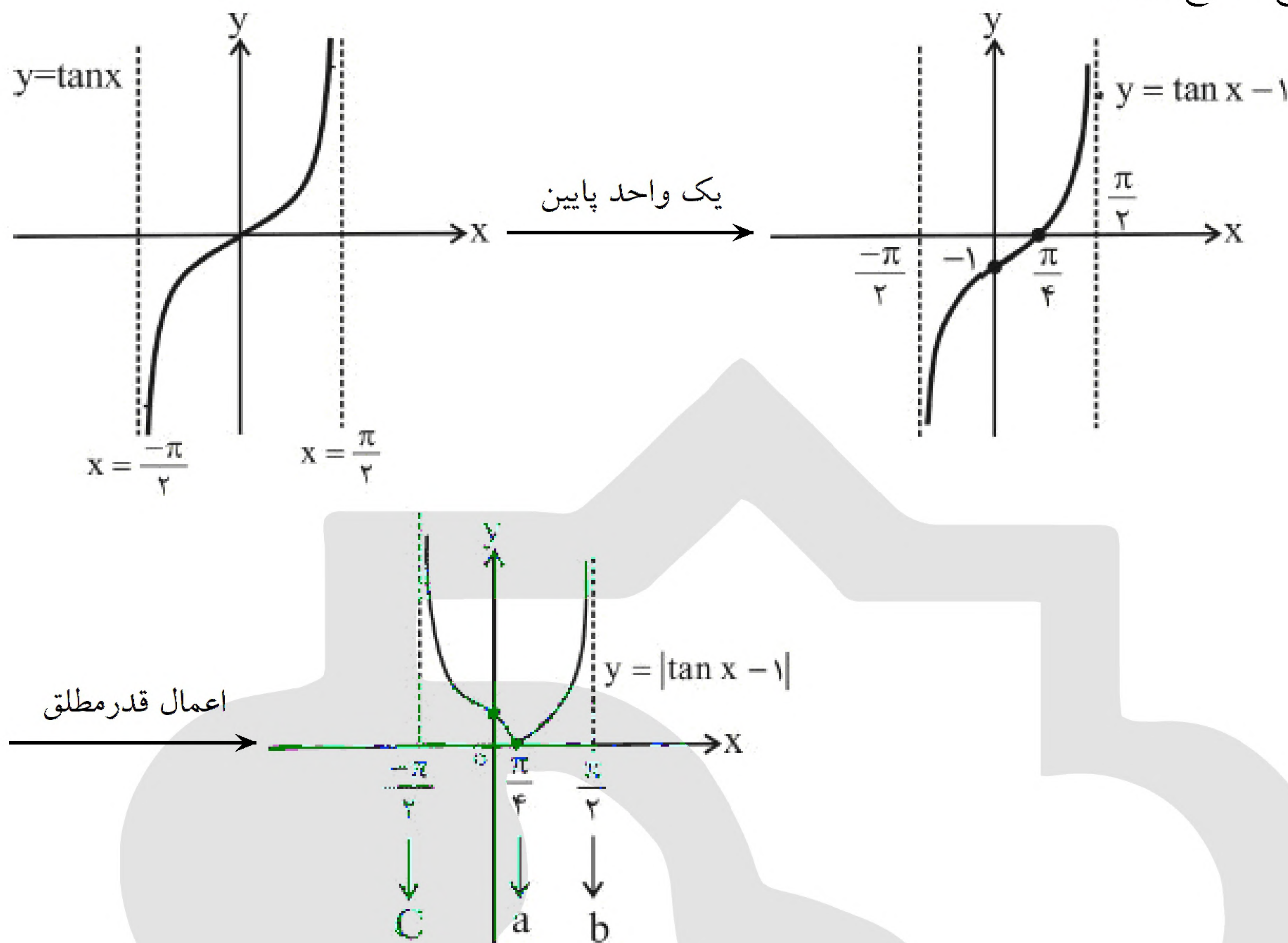
توجه:  $\frac{\pi}{2}$  تکراری است

$$= \frac{105\pi}{14} = 7/5\pi$$





۲۵- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.



$$[a, b) = \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \text{صعودی اکید}$$

$$(c, b] = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right] \Rightarrow \text{نزولی اکید}$$

$$\frac{a - c}{b - a} = \frac{\frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)}{\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}} = \frac{\frac{3\pi}{4}}{\frac{\pi}{4}} = 3$$

۲۶- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\begin{aligned} \max = 2 &\Rightarrow \begin{cases} a + |b| = 2 \\ a - |b| = -6 \end{cases} \Rightarrow a = -2, |b| = 4 \Rightarrow \\ \min = -6 &\Rightarrow \end{aligned}$$

با توجه به شکل،  $b$  و  $C$  هم علامت هستند، بنابراین  $b$  و  $C$  را مثبت فرض می کنیم:

$$f(x) = \cdot \Rightarrow -2 + 4 \sin(cx) = \cdot \Rightarrow \sin(cx) = \frac{1}{4} \Rightarrow cx = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$$

$$\begin{cases} C\alpha = \frac{\pi}{6} \\ C \times 5 = \frac{5\pi}{6} \Rightarrow C = \frac{\pi}{6}, \alpha = 1 \end{cases} \begin{cases} f(x) = -2 + 4 \sin\left(\frac{\pi}{6}x\right) \\ f(3\alpha) = f(3) = -2 + 4 \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 \end{cases}$$





۲۷- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$y = a + b \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$y_{\max} = a + |b| = \frac{5}{2} \xrightarrow{\text{با توجه به شکل } b < 0} a - b = \frac{5}{2} \quad (1)$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \rightarrow a + b \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}\right) = 0 \rightarrow a + b \cos\frac{\pi}{3} = 0 \rightarrow a + \frac{b}{2} = 0 \quad (2)$$

$$(1) \text{ و } (2) \Rightarrow a = \frac{5}{6}, b = -\frac{5}{3}$$

$$f(x) = \frac{5}{6} - \frac{5}{3} \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$\begin{aligned} f\left(\frac{3\pi}{2}\right) + 2\sqrt{3}f(\pi) &= \left(\frac{5}{6} - \frac{5}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)\right) + 2\sqrt{3}\left(\frac{5}{6} - \frac{5}{3}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) \\ &= \frac{5}{3} + \frac{5\sqrt{3}}{3} + 5 = \frac{5(4 + \sqrt{3})}{3} \end{aligned}$$

۲۸- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ماکزیمم نمودار در وسط بازه (۰, ۴) یعنی  $x = 2$  واقع شده است بنابراین:

$$\left. \begin{array}{l} \text{صدق در } f \\ \text{مبدأ } (0, 0) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \xrightarrow{\text{صدق در } f} 4 = a - b \\ \xrightarrow{\text{مبدأ}} 0 = a + b \end{array} \Rightarrow a = 2, b = -2 \Rightarrow f(x) = 2 - 2 \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$$

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{3}\right) + f\left(\frac{4}{3}\right) &= 2 - 2 \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + \left(2 - 2 \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) \\ &= 4 - 2 \cos\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) - 2 \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = 4 + 2 \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + 2 \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \\ &= 4 + 2\left(\frac{1}{2}\right) + 2\left(\frac{1}{2}\right) = 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \max : |x| + c &= 3 \\ \min : -|a| + c &= 1 \end{aligned} \Rightarrow c = 2 \Rightarrow |a| = 1 \Rightarrow a = 1$$

۲۹- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$T = \frac{2\pi}{|b|} = 4\pi \Rightarrow b = \frac{1}{2}$$

$$y = \cos\frac{x}{2} + 2$$

$$a + b + c = 1 + \frac{1}{2} + 2 = \frac{7}{2}$$





۳۰- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$f(x) = \operatorname{tg}(\pi - \pi ax) = -\operatorname{tg}(\pi ax)$$

این تابع نسبت به مبدأ مختصات متقارن است و با توجه به شکل دوره تناوب آن  $T = 4$  است. بنابراین:

$$|a| = \frac{1}{4}, T = \frac{\pi}{\pi a} = 4$$

با توجه به روند نزولی اکید تابع در هر دو دوره تناوب (بین دو مجانب قائم متوالی) و ضابطه نهایی  $f(x) = -\operatorname{tg}(\pi ax)$  مقدار  $a$  باید مثبت باشد:

$$a = \frac{1}{4} \Rightarrow f(x) = -\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}x\right) \Rightarrow f\left(\frac{1}{3a}\right) \times f\left(\frac{-2}{3a}\right) = f\left(\frac{4}{3}\right) \times f\left(\frac{-8}{3}\right) = (-\sqrt{3}) \times (-\sqrt{3}) = 3$$

۳۱- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ماکزیمم این تابع ۵ است. بنابراین  $a \sin(bx) + 2 \leq 5$  یعنی  $a = 3$ . دوره تناوب

$$\frac{\pi}{3} - \left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{2\pi}{3} \text{ است، در نتیجه: } \frac{2\pi}{b} = \frac{2\pi}{3} \leftarrow b = 3 \text{ (با توجه به شکل } a \text{ و } b \text{ هم علامت هستند.)}$$

$$f(x) = 3 \sin(3x) + 2 \Rightarrow f\left(\frac{\pi}{18}\right) = 3 \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) + 2 = 3\left(\frac{1}{2}\right) + 2 = 3/5$$

۳۲- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. با توجه به نمودار تابع  $a > 0$  و  $b > 0$ :

$$\min = b \Rightarrow a - |b| = b \xrightarrow{b > 0} a - b = b \Rightarrow a = 2b \quad (1)$$

$$T = \frac{2\pi}{\left|\frac{b\pi}{9}\right|} = \frac{18}{|b|} = \frac{18}{b} = a \Rightarrow ab = 18 \quad (2)$$

چون  $b > 0$

$$(1), (2) \Rightarrow 2b^2 = 18 \xrightarrow{b > 0} b = 3, a = 6 \Rightarrow a + b = 9$$

۳۳- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\sin(\pi \cos 4x) = 1 \Rightarrow \pi \cos 4x = 2K\pi + \frac{\pi}{2}, K \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow \cos 4x = 2K + \frac{1}{2}, K \in \mathbb{Z} \xrightarrow{\text{فقط } K = 0 \text{ درست است}} \cos 4x = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow 4x = 2K\pi \pm \frac{\pi}{3} \xrightarrow{\div 4} x = \frac{K\pi}{2} \pm \frac{\pi}{12}$$

$$\textcircled{1} \quad 0 \leq \frac{K\pi}{2} + \frac{\pi}{12} \leq 2\pi \xrightarrow{\times \frac{2}{\pi}} 0 \leq K + \frac{1}{6} \leq 4 \xrightarrow{K \in \mathbb{Z}} K = 0, 1, 2, 3$$

$$\textcircled{2} \quad 0 \leq \frac{K\pi}{2} - \frac{\pi}{12} \leq 2\pi \xrightarrow{\times \frac{2}{\pi}} 0 \leq K - \frac{1}{6} \leq 4 \xrightarrow{K \in \mathbb{Z}} K = 1, 2, 3, 4$$

این معادله در بازه  $[0, 2\pi]$  مجموعاً به تعداد ۸ جواب متمایز دارد.





«بانک سوال موسسه یاوران دانش»

۳۴- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$2 \cos^2 \left( x - \frac{\pi}{\lambda} \right) - 3 \sin \left( \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{\lambda} - x \right) = -1$$

$$2 \cos^2 \left( x - \frac{\pi}{\lambda} \right) - 3 \cos \left( x - \frac{\pi}{\lambda} \right) + 1 = 0, \cos(-\alpha) = \cos \alpha$$

$$\cos \left( x - \frac{\pi}{\lambda} \right) = 1 = \cos 0 \Rightarrow x - \frac{\pi}{\lambda} = 2k\pi \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{\lambda}$$

$$\cos \left( x - \frac{\pi}{\lambda} \right) = \frac{1}{2} = \cos \frac{\pi}{3} \Rightarrow x - \frac{\pi}{\lambda} = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{\lambda} \\ x = 2k\pi - \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{\lambda} \end{cases}$$

$$x = \frac{\pi}{\lambda}, x = \frac{11\pi}{24}, x = \frac{43\pi}{24} \Rightarrow \frac{43\pi}{24} - \frac{3\pi}{24} = \frac{40\pi}{24} = \frac{5\pi}{3}$$

۳۵- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. با توجه به نمودار سینوس:

$$\begin{aligned} \max &= |a| + c = 3 \\ \min &= -|a| + c = -1 \Rightarrow c = 1 \Rightarrow |a| = 2 \Rightarrow a = -2 \end{aligned}$$

$$T = \frac{2\pi}{b} = \frac{2\pi}{\lambda} - \left( -\frac{5\pi}{\lambda} \right) = \pi \Rightarrow b = 2$$

$$a + b + c = -2 + 2 + 1 = 1$$

۳۶- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$1 + \cos 4x = 2 \sin^2 x \Rightarrow \cos 4x = 2 \sin^2 x - 1 \Rightarrow \cos 4x = -\cos 2x \Rightarrow \cos 4x = \cos(\pi - 2x)$$

$$\Rightarrow 4x = 2K\pi \pm (\pi - 2x) \begin{cases} 4x = 2K\pi + \pi - 2x \Rightarrow x = \frac{K\pi}{3} + \frac{\pi}{6} & (1) \\ 4x = 2K\pi - \pi + 2x \Rightarrow x = K\pi - \frac{\pi}{2} & (2) \end{cases}$$

$$(1) \Rightarrow x = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}, \frac{11\pi}{6}$$

$$(2) \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \quad (\text{تکرار ریشه‌های (۱) متمایز نیستند})$$

$$\text{مجموع ریشه‌های متمایز} = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2} + \frac{5\pi}{6} + \frac{7\pi}{6} + \frac{3\pi}{2} + \frac{11\pi}{6} = 6\pi$$





۳۷- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$A = \sin x \cdot \cos x (\cos^2 x - \sin^2 x) = \frac{1}{2} \sin 2x \underbrace{(\cos^2 x - \sin^2 x)}_{\cos 2x} \underbrace{(\cos^2 x + \sin^2 x)}_1$$

$$A = \frac{1}{2} \sin 2x \cdot \cos 2x = \frac{1}{4} \sin 4x \xrightarrow{x = \frac{\pi}{24}} A = \frac{1}{4}$$

با تقسیم صورت و مخرج بر  $\cos 15^\circ$ :

$$B = \frac{\cos\left(\frac{3\pi}{2} + 15^\circ\right) - \sin\left(\frac{3\pi}{2} - 15^\circ\right)}{\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \pi - 15^\circ\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2} + 15^\circ\right)} = \frac{\sin 15^\circ + \cos 15^\circ}{\sin 15^\circ - \cos 15^\circ}$$

↓  
دور دایره صرف نظر می شود

$$B = \frac{\operatorname{tg} 15^\circ + 1}{\operatorname{tg} 15^\circ - 1} = \frac{0.28 + 1}{0.28 - 1} = \frac{-16}{9}$$

$$8A - 9B = 8\left(\frac{1}{4}\right) - 9\left(\frac{-16}{9}\right) = 17$$

۳۸- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\frac{2 \sin 20^\circ \cdot \cos 20^\circ \cdot \cos 20^\circ}{(\cancel{1} + 2 \cos^2 20^\circ \cancel{-1}) \sin 10^\circ} = \frac{\cancel{1} \sin 20^\circ \cdot \cos^2 20^\circ}{2 \cos^2 20^\circ \cdot \sin 10^\circ} = \frac{2 \cancel{\sin 10^\circ} \cdot \cos 10^\circ}{\cancel{\sin 10^\circ}} = 2 \cos 10^\circ$$

$$\frac{\cos^2 x + 5 \cos x + 3 \sin^2 x}{\sin x \cos x} = ,$$

۳۹- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\cos^2 x + 5 \cos x + 3(1 - \cos^2 x) = , \Rightarrow -2 \cos^2 x + 5 \cos x + 3 = ,$$

$$\cos x = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 24}}{-4} = \begin{cases} 3 & \text{غ ق ق} \\ -\frac{1}{2} & \text{ق ق} \end{cases}$$

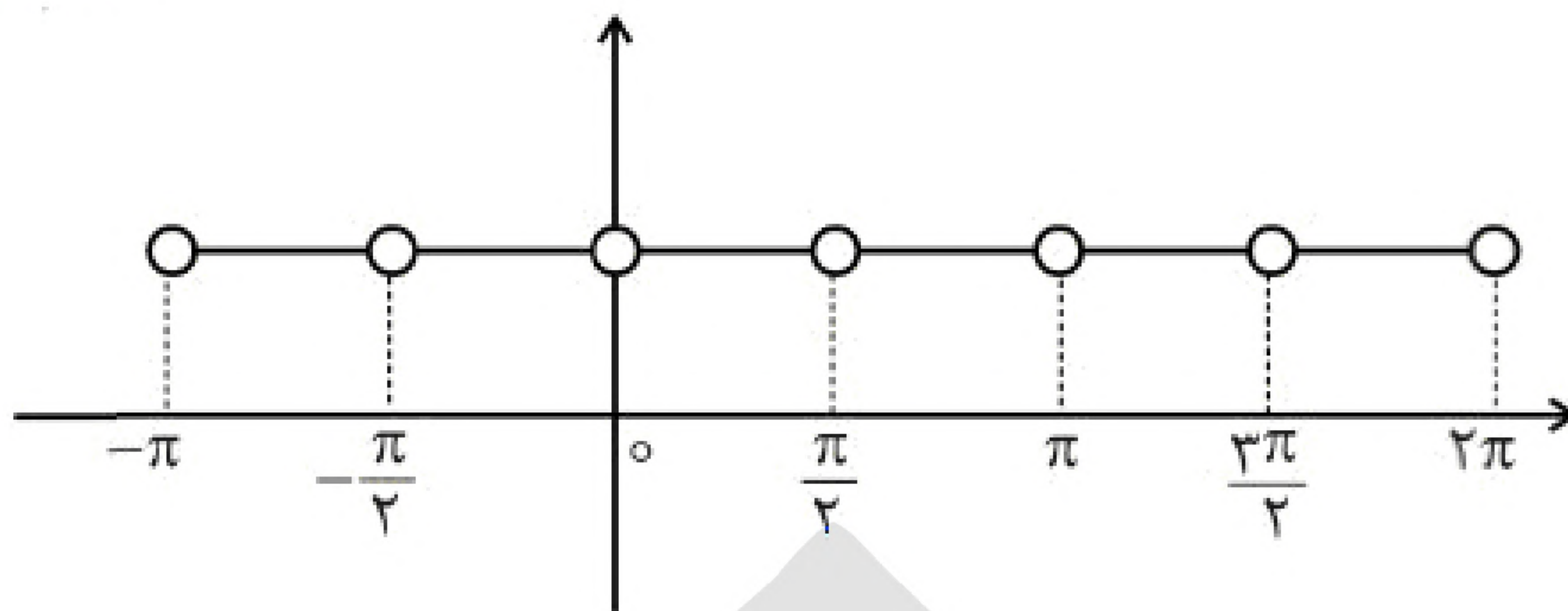
$$\cos x = -\frac{1}{2} = \cos \frac{2\pi}{3} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \Rightarrow x = \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$$

$$\frac{4\pi}{3} - \frac{2\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$$





۴۰- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.  
 $f(x) = \frac{\sin x}{\cos x} \times \frac{\cos x}{\sin x} = 1 \quad \cos x \neq 0, \sin x \neq 0$



$$x \neq k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x \neq \frac{k\pi}{2}$$
$$x \neq k\pi + \pi$$
$$T = \frac{\pi}{2}$$