

گنجینه سوال رایگان

+ پاسخ تشریحی

یاوران دانش



راه های ارتباطی با ما:

www.Dyavari.com

۰۲۱-۷۶۷۰۳۸۵۸

۰۹۱۲-۳۴ ۹۴ ۱۳۴



	۱	۲	۳	۴
۱ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۳ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۴ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۵ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۶ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۷ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۸ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۹ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۰ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۱ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۱۲ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۳ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۴ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۵ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۱۶ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۷ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۱۸ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۹ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۰ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۱ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۲ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۳ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۴ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۵ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۶ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۷ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۲۸ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۹ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۰ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۱ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۲ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۳۳ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۴ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۳۵ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۳۶ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۷ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۸ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۹ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۴۰ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>





۱- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$f(x) = \begin{cases} (2+K)x - 2 & ; x \geq 0 \\ (2-K)x - 2 & ; x < 0 \end{cases}$$

اگر شیب دو خط در ضابطه تابع هم علامت باشند، f در هر دو ضابطه یک رفتار صعودی اکید یا نزولی اکید در کل دامنه خواهد داشت، بنابراین:
 توجه داشته باشید که به ازای $K = 2$ یا $K = -2$ یک ضابطه از تابع ثابت می شود و یکنوایی اکید در کل دامنه به هم می خورد.

۲- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. چون به ازای هر عدد حقیقی x علامت f' منفی است، پس تابع f به ازای هر $x \in \mathbb{R}$ نزولی اکید است، بنابراین:
 در نتیجه:

$$\begin{aligned} f(2K^2 - 1) &> f(3K + 4) \\ \downarrow \text{چون } f \text{ نزولی اکید است} \\ 2K^2 - 1 &< 3K + 4 \\ \downarrow \\ 2K^2 - 3K - 5 &< 0 \\ \downarrow \\ -1 &< K < \frac{5}{2} \\ \downarrow K \in \mathbb{Z} \\ K &= 0, 1, 2 \\ \downarrow \\ \text{با توجه به حدود نامعادله، ۳ عدد صحیح برای } K \text{ وجود دارد.} \end{aligned}$$

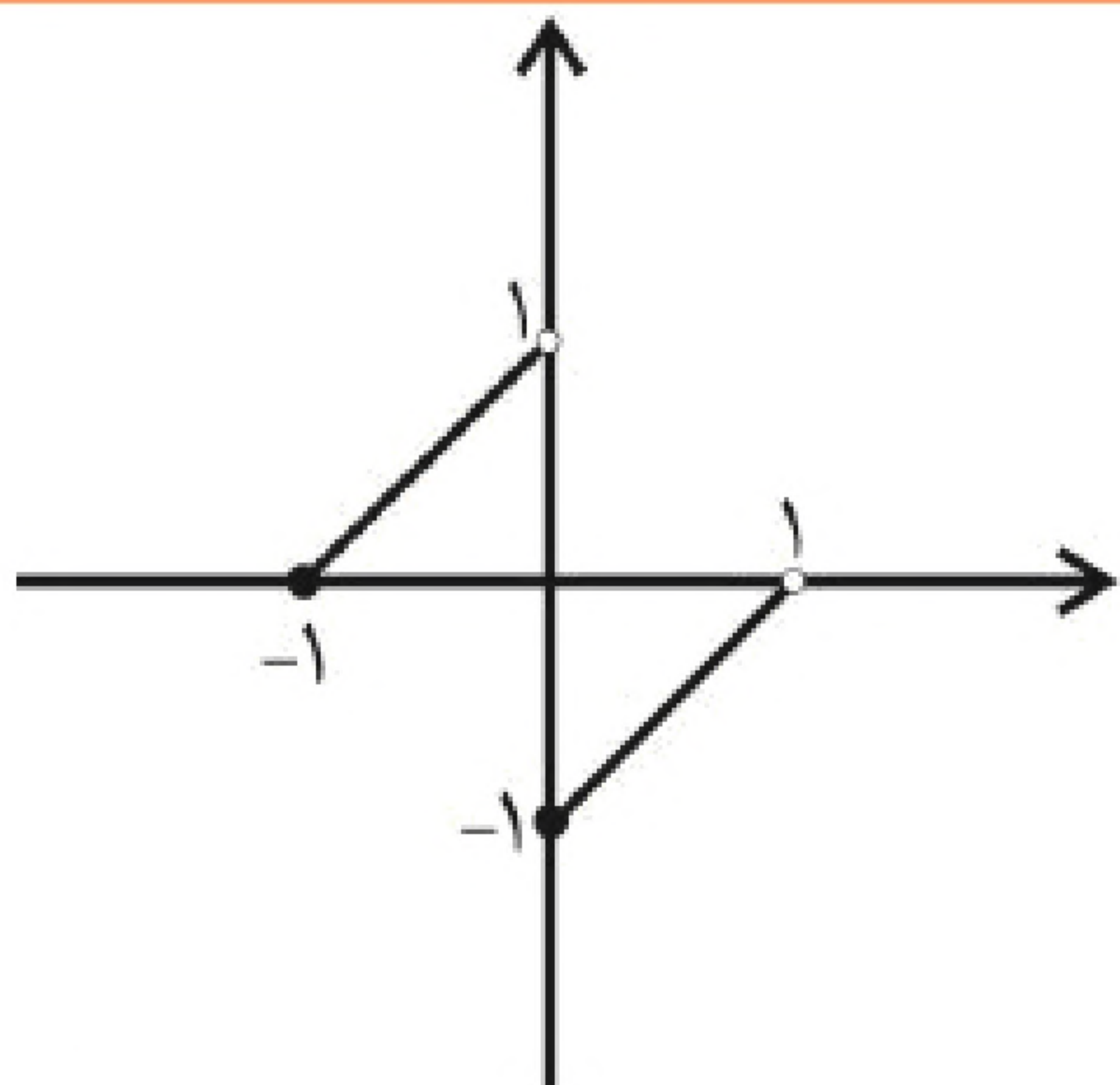
۳- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\begin{aligned} f(x) = 2^{-x} &\xrightarrow[\text{قرینه نسبت به محور } x \text{ ها}]{y \rightarrow (-y)} y = -2^{-x} \xrightarrow[\text{قرینه نسبت به محور } y \text{ ها}]{x \rightarrow (-x)} \\ y = -2^x &\xrightarrow[+4 \text{ واحد در راستای قائم}]{g(x) = -2^x + 4} g(x) = -2^x + 4 \quad * \\ g(x) - \sqrt{f(|x|)} = 0 &\Rightarrow -2^x + 4 - \sqrt{2^{-|x|}} = 0 \\ \text{اگر } x \geq 0, \frac{|x|}{x} = 1 &\xrightarrow{\text{با فرض } 2^x = t} -2^x + 4 - \sqrt{2^{-x}} = 0 \xrightarrow{\text{با فرض } 2^x = t} (-t + 4 - \sqrt{\frac{1}{t}} = 0) \times (-t) \end{aligned}$$

$$t^2 - 4t + \sqrt{t} = 0 \xrightarrow{\Delta < 0} \text{ریشه حقیقی ندارد}$$

$$\text{اگر } x < 0, \frac{|x|}{x} = -1 \xrightarrow{} -2^x + 4 - \sqrt{2^x} = 0 \Rightarrow 4 = \sqrt{2^x} \Rightarrow 2^x = \frac{1}{4} \Rightarrow x = -2 \Rightarrow K = -2$$

$$g(2K^2 + 1) + \sqrt{f(2K)} = g(3) + \sqrt{f(-2)} = (-2^3 + 4) + \sqrt{2^2} = (-8 + 4) + 2 = -2$$



۴- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. فاصله $f(x)$ را ساده کرده و نمودار آن را

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & -1 \leq x < 0 \\ x-1 & 0 \leq x < 1 \end{cases} \quad \text{رسم می کنیم:}$$

واضح است که این تابع در فواصل $(-1, 0)$ و $(0, 1)$ اکیداً صعودی است، اما به خاطر پرش نمودار از بالا به پایین در $x = 0$ ، در کل بازه $(-1, 1)$ غیریکنواست.

حالا ضابطه $f \circ f(x)$ را به دست می آوریم:

$$f \circ f(x) = f(f(x)) = \begin{cases} f(x)+1 & -1 \leq f(x) < 0 \\ f(x)-1 & 0 \leq f(x) < 1 \end{cases}$$

با توجه به نمودار:

$$\begin{cases} 0 \leq x < 1 \Rightarrow -1 \leq f(x) < 0, f(x) = x-1 \\ -1 \leq x < 0 \Rightarrow 0 \leq f(x) < 1, f(x) = x+1 \end{cases}$$

$$f(f(x)) = \begin{cases} (x-1)+1 = x & 0 \leq x < 1 \\ (x+1)-1 = x & -1 \leq x < 0 \end{cases}$$

پس داریم:

پس $f(f(x)) = x$ بوده و اکیداً صعودی است.

۵- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. در تابع هموگرافیک $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ در صورتی که $a+d=0$ باشد، توابع f و f^{-1}

با هم برابر بوده و نمودارهای آنها بر هم منطبق می شود، به عبارتی نمودار ب نسبت به خط $y=x$ متقارن خواهد بود.

$$a+d=0 \Rightarrow m^2+2m-15=0 \Rightarrow m=-5, 3$$

پس در اینجا داریم:

به ازای $m=3$ تابع هموگرافیک فوق به صورت زیر درمی آید:

$$f(x) = \frac{9x+9}{-9x-9} = \frac{9(x+1)}{-9(x+1)} = -1 \quad (x \neq -1)$$

در واقع چون $ad-bc=0$ می شود، تابع هموگرافیک به صورت تابع ثابت درمی آید و وارون پذیر نمی شود که با فرض سؤال در تناقض است.

پس فقط $m=-5$ قابل قبول است.



۶- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. تابع درجه دو هرگز بر روی R یک به یک و وارون پذیر نیست. یعنی این تابع نمی تواند درجه دو باشد:

بنابراین با تابع خطی $f(x) = (n+1)x - 4 - n + 2k$ طرفیم.
می دانیم تلاقی تابع خطی و وارونش حتماً روی خط $y = x$ قرار دارد، مگر تابع خطی با شیب -1 که خودش و وارونش برابر بوده و بی شمار نقطه تلاقی دارند.

در اینجا چون نقطه تلاقی $(-1, 7)$ است که روی خط $y = x$ نیست، نتیجه می گیریم این تابع خطی دارای شیب -1 بوده و در تمام نقاط واقع بر آن، از جمله در $(-1, 7)$ وارونش را قطع می کند. پس:

$$-1 \Rightarrow n+1 = -1 \Rightarrow n = -2$$

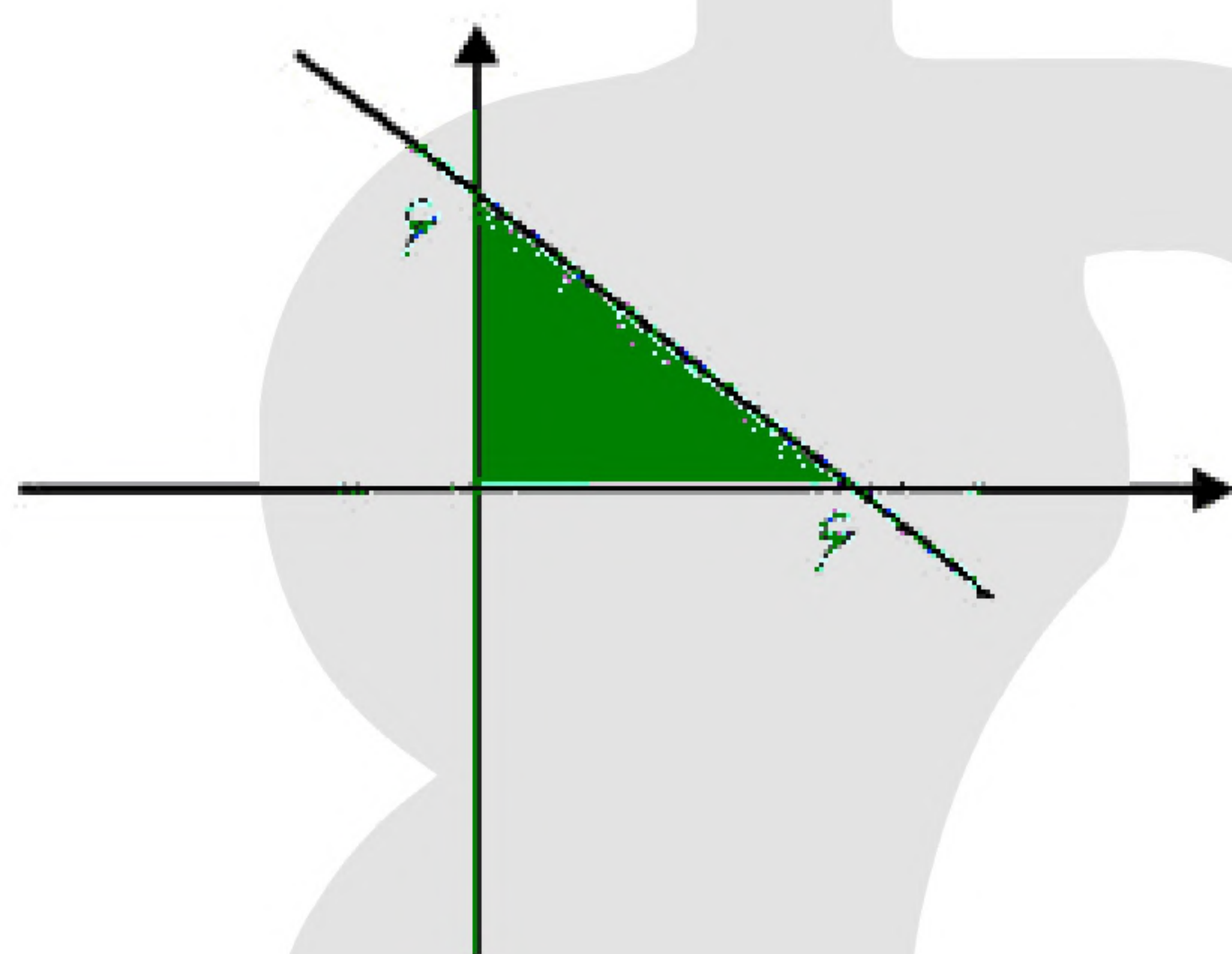
$$f(x) = (n+1)x - 4 - n + 2k \xrightarrow{n = -2} -x - 4 - (-2) + 2k \Rightarrow f(x) = -x - 2 + 2k$$

$$7 = -(-1) - 2 + 2k \Rightarrow 2k = 8 \Rightarrow k = 4$$

حالا نقطه $(-1, 7)$ را در آن صدق می دهیم:

$$f(x) = -x - 2 + 2k \xrightarrow{k = 4} -x - 2 + 8 \Rightarrow f(x) = -x + 6$$

چون f و f^{-1} با هم برابرند، پس:



$$f^{-1}(x) = -x + 6$$

$$S = \frac{6 \times 6}{2} = 18$$



۷- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. تساوی $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f$ موقعی برقرار است که دامنه و برد تابع f با هم برابر باشند:

$$\begin{cases} D_f : 2x - k \geq 0 \Rightarrow x \geq \frac{k}{2} \Rightarrow \frac{k}{2} = 2 \Rightarrow k = 4 \\ R_f : y \geq 2 \end{cases}$$

پس $f(x) = 2 + \sqrt{2x - 4}$ و از آنجا که تابعی اکیداً صعودی است، تقاطع آن با وارونش حتماً روی خط $y = x$ بوده و کافی است معادله $f(x) = x$ را حل کنیم:

$$2 + \sqrt{2x - 4} = x \Rightarrow \sqrt{2x - 4} = x - 2 \xrightarrow{\text{توان دو}} 2x - 4 = x^2 - 4x + 4$$

$$\Rightarrow x^2 - 6x + 8 = 0 \Rightarrow x = 2, 4$$

هر دو جواب به دست آمده قابل قبول هستند و لذا محل تقاطع توابع f ، f^{-1} ، نقاط $(2, 2)$ و $(4, 4)$ است که چون نقطه با طول کمتر مدنظر است:

برای پیدا کردن نقطه B که متناظر با نقطه A روی نمودار $g(x) = -2f(3 - x) + 4$ است، کافی است:

$$2 \xrightarrow{-3} -1 \xrightarrow{\div -1} 1$$

از طول نقطه A ، ابتدا ۳ واحد کم کرده و سپس آن را بر ۱- تقسیم کنیم:

$$2 \xrightarrow{\times -2} -4 \xrightarrow{+4} 0$$

عرض نقطه A را ابتدا ۲- برابر کرده و سپس ۴ واحد به آن اضافه کنیم:

پس $B(1, 0)$ بوده و طول پاره خط AB برابر با فاصله دو نقطه $A(2, 2)$ و $B(1, 0)$ است:

$$AB = \sqrt{(2-1)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{5}$$



۸- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

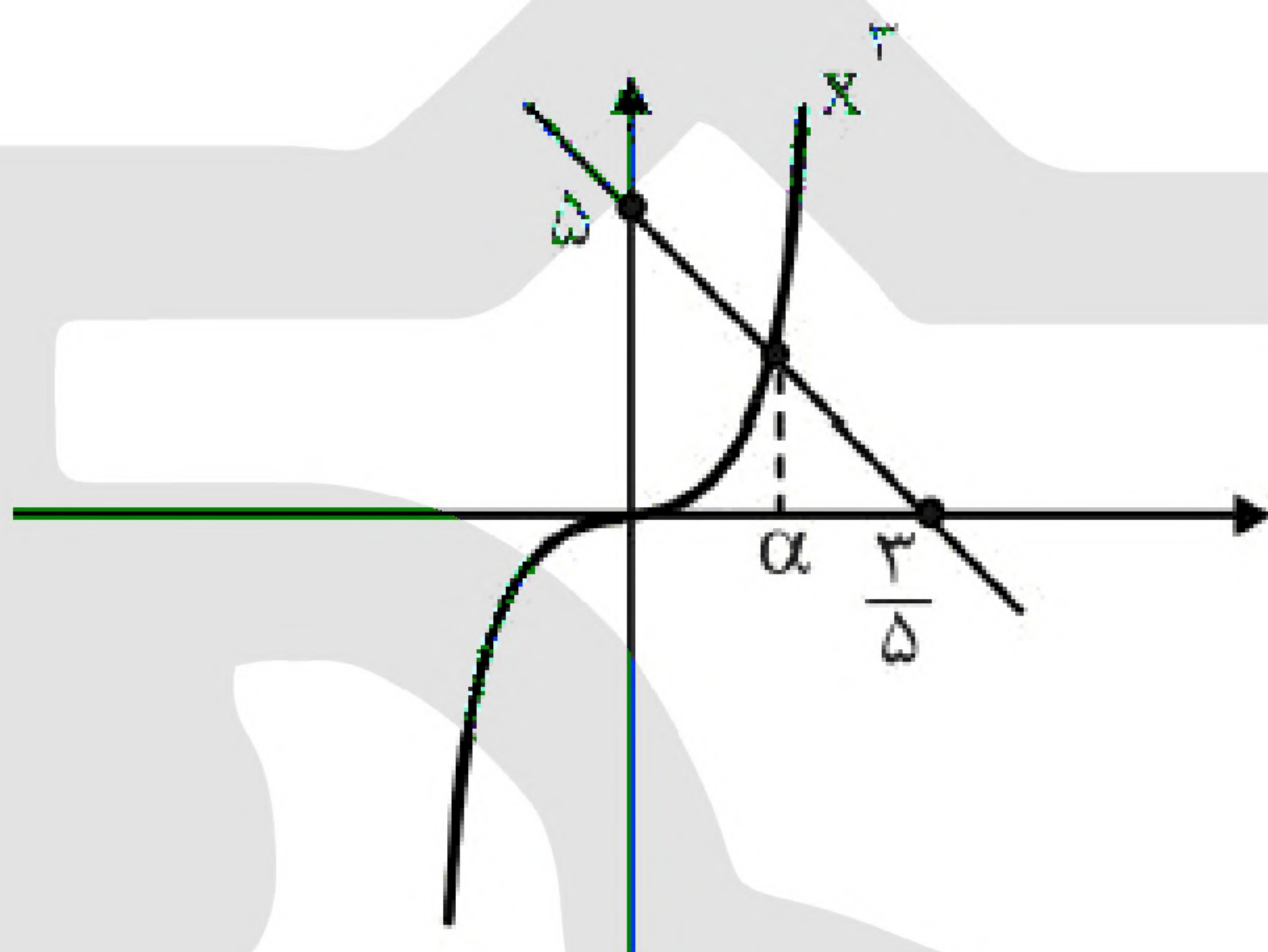
$$f \circ f(x) = 1 - 3f^2(x) \Rightarrow f(f(x)) = 1 - 3f^2(x) \Rightarrow f(x) = 1 - 3x^2$$

$$\begin{aligned} h(g(x)) &= h(x-1) = (x-1)^3 + 2(x-1) + 1 = (x^3 - 3x^2 + 3x - 1) + (2x - 2) + 1 \\ &= x^3 - 3x^2 + 5x - 2 \end{aligned}$$

حالا معادله $h(g(x)) = f(x)$ را حل می‌کنیم:

$$x^3 - 3x^2 + 5x - 2 = 1 - 3x^2 \Rightarrow x^3 + 5x - 3 = 0 \Rightarrow x^3 = -5x + 3$$

برای حل این معادله، به روش هندسی عمل می‌کنیم، نمودارهای دو طرف معادله را رسم کرده و محل تلاقی را پیدا می‌کنیم:



واضح است که α در بازه $(0, \frac{3}{5})$ قرار دارد.

۹- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\left. \begin{aligned} f &= \{(1,2)(-2,3)(-1,4)\} \\ f \circ g &= \{(-2,-1)(-1,8)\} \end{aligned} \right\} \Rightarrow g = \{(-2,2)(-1,-2)\} \Rightarrow g^{-1} = \{(2,-2)(-2,-1)\}$$

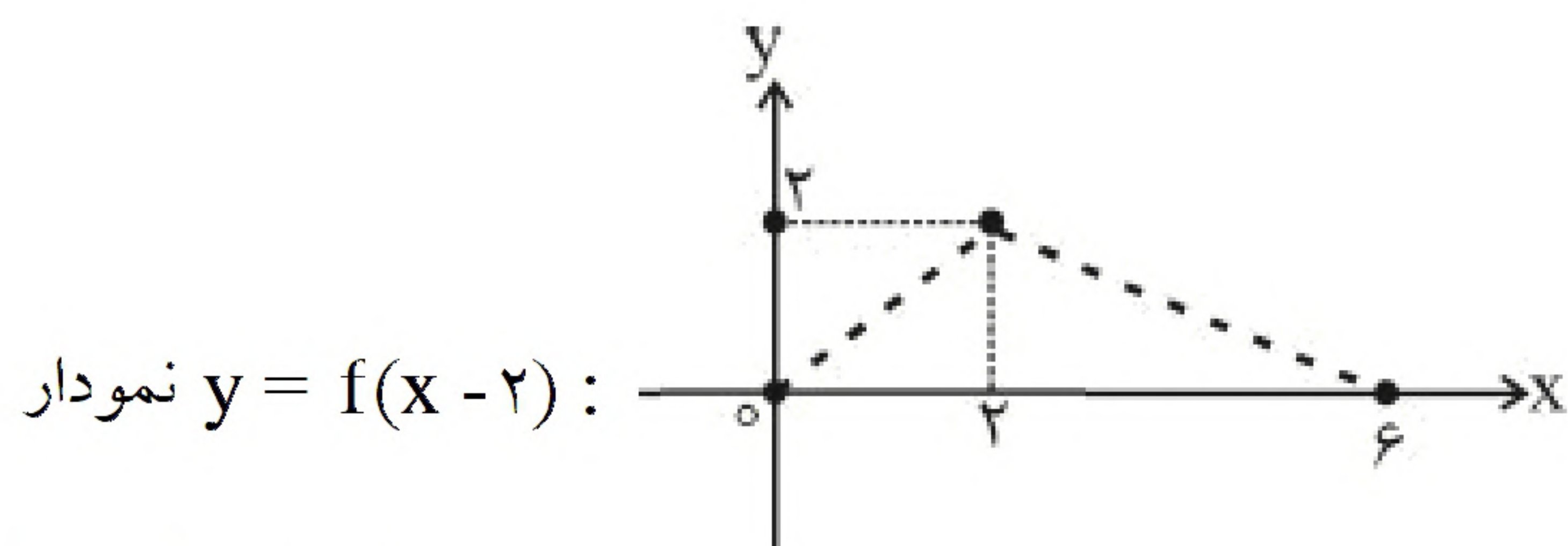
$$\begin{array}{cc} \downarrow & \downarrow \\ 3 - 2g = -1 & 4 - 2g = 8 \\ \downarrow & \downarrow \\ g = 2 & g = -2 \end{array}$$

$$f \circ g^{-1} = \{(2,3)(-2,4)\}$$

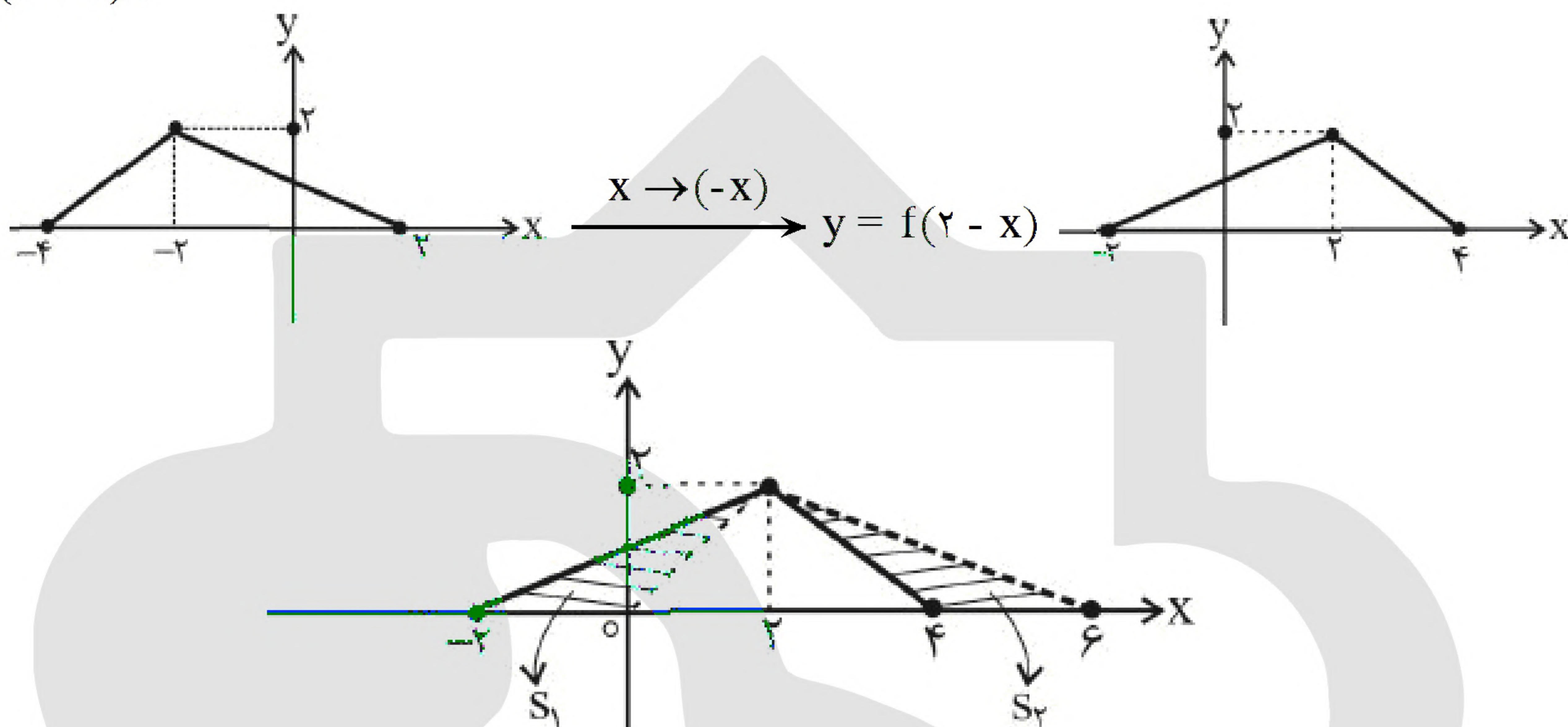
$$f \circ g^{-1} = \{(2,3)(-2,4)\} \Rightarrow \text{حاصل ضرب اعضای برد} = 3 \times 4 = 12$$



۱۰- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.



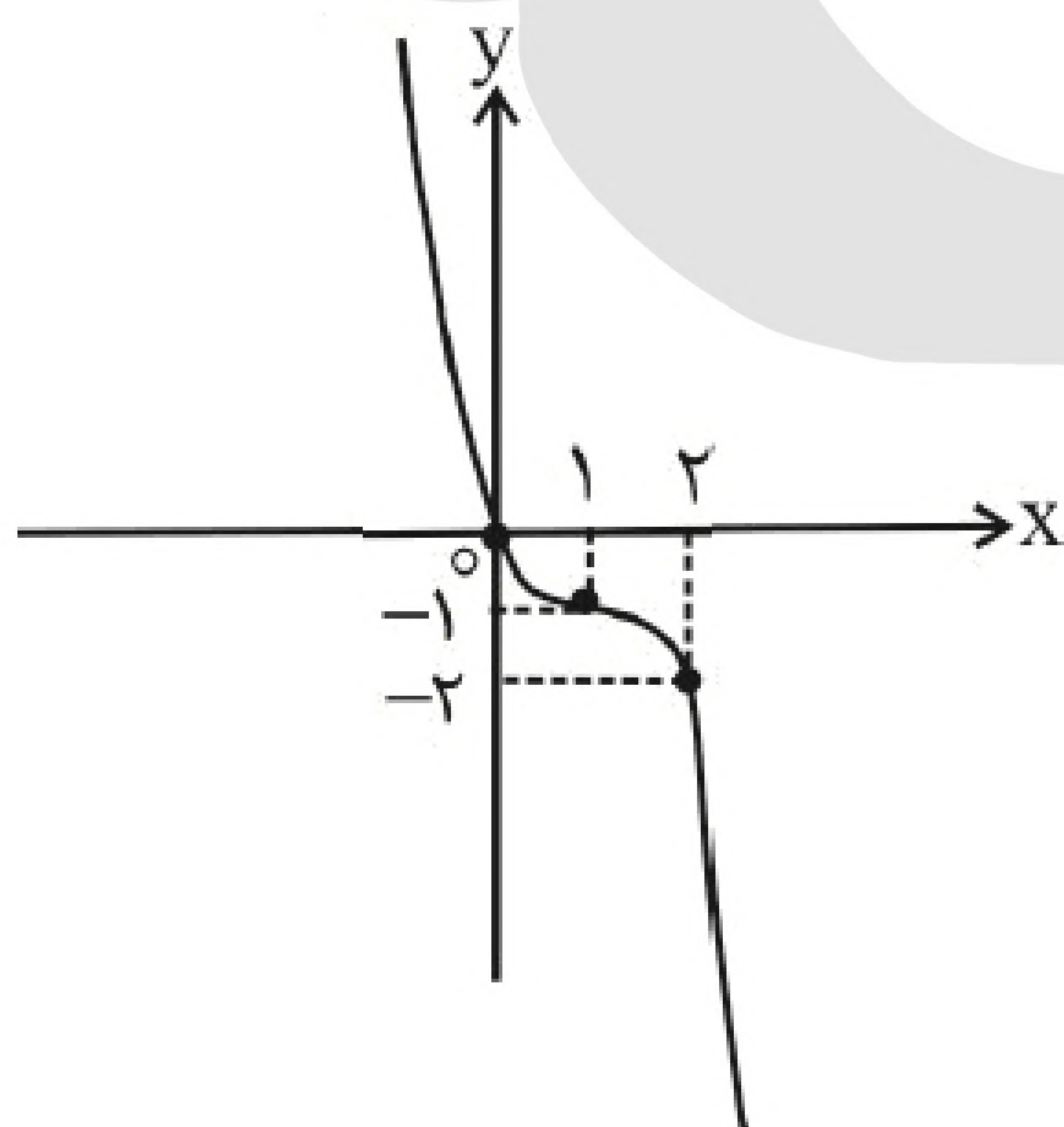
$y = f(2 + x)$:



$$S_1 + S_2 = \frac{2 \times 2}{2} + \frac{2 \times 2}{2} = 4$$

مساحت بین دو نمودار

۱۱- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.



$$1 - x = t \Rightarrow x = 1 - t$$

$$f(1 - x) = x^3 - 1 \Rightarrow f(t) = (1 - t)^3 - 1$$

$$\Rightarrow f(x) = -(t - 1)^3 - 1$$

نمودار $y = f(x)$ فقط از نواحی دوم و چهارم مختصاتی می‌گذرد.



$$f^{-1}: (3, 2) \Rightarrow f: (2, 3), f(x) = x^3 - x + 2K - 23$$

۱۲- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$3 = 2^3 - 2 + 2K - 23$$

$$K = 10 \Rightarrow f(x) = x^3 - x - 3$$

$$f(3) - f(-3) = (27 - 3 - 3) - (-27 + 3 - 3) = 48$$

۱۳- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\begin{aligned} -2 \leq x \leq 22 &\xrightarrow{\div 2} -1 \leq \frac{x}{2} \leq 11 \Rightarrow -1 \leq \frac{3-4x}{2} \leq 11 \\ &\xrightarrow{-3} -4 \leq -4x \leq 8 \\ &\xrightarrow{\div (-4)} -2 \leq x \leq 1 \\ &\downarrow \quad \downarrow \\ &a \quad b \end{aligned}$$

$$a^2 + b^2 = (-2)^2 + 1^2 = 5$$

۱۴- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. اگر تابع f روی یک مجموعه، اکیداً نزولی باشد، آنگاه برای $a < b$ الزاماً $f(a) > f(b)$ است و نیز اگر f روی یک مجموعه اکیداً صعودی باشد، آنگاه برای $a < b$ الزاماً $f(a) < f(b)$ خواهد بود، بنابراین:

$$K^2 + 3 < 2K^2 + 13 \xrightarrow{\text{g اکیدا صعودی}} g(K^2 + 3) < g(2K^2 + 13) \xrightarrow{\text{f اکیدا نزولی}}$$

$$f(g(K^2 + 3)) > f(g(2K^2 + 13))$$

$$(f \circ g)(K^2 + 3) > (f \circ g)(2K^2 + 13)$$

$$3m - 1 > 2m + 7$$

این بازه شامل ۸ عدد طبیعی ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵ و ۶ و ۷ و ۸ نمی شود. $m > 8 \Rightarrow$

«بانک سوال موسسه یاوران دانش»

۱۵- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$f^{-1} \leftrightarrow f \quad \Rightarrow 3 = 2^3 - 2 + 2K - 17 \Rightarrow \boxed{K = 7}$$

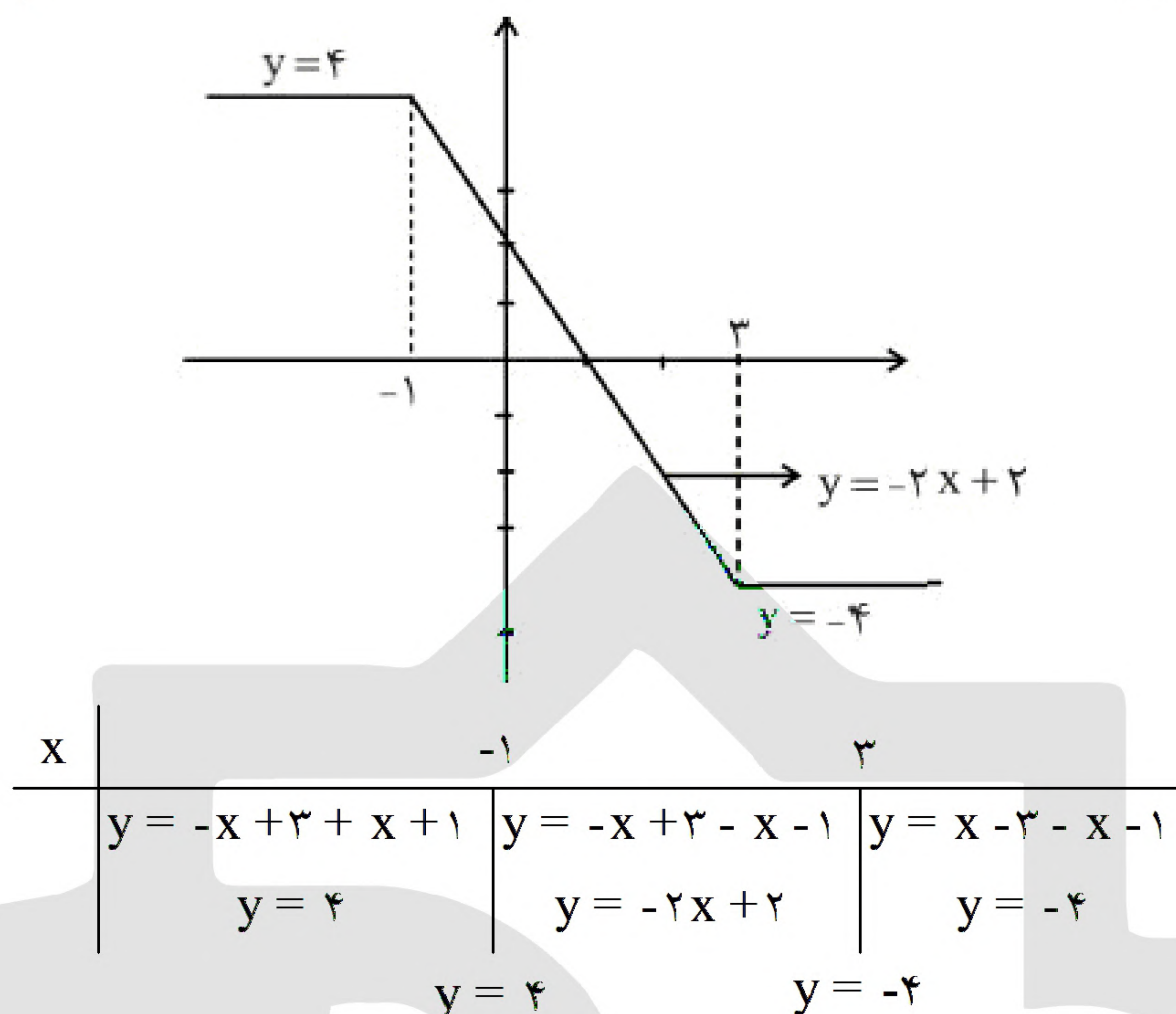
$$\boxed{f(x) = x^3 - x - 3}$$

$$f(2) - f(-2) = 3 - (-9) = 12$$



$$y = |x - 3| - |x + 1|$$

۱۶- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.



$$g(x) = ax^2 + bx + c$$

$$(0, -2) \in g \Rightarrow -2 = c$$

$$(2, 0) \in g \Rightarrow 4a + 2b - 2 = 0$$

$$x_1 = -\frac{b}{2a} = 0 \Rightarrow b = 0 \Rightarrow a = \frac{1}{2} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} g(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2$$

$$D_{\text{fog}} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}, D_g = [0, +\infty), D_f = (-\infty, 0)$$

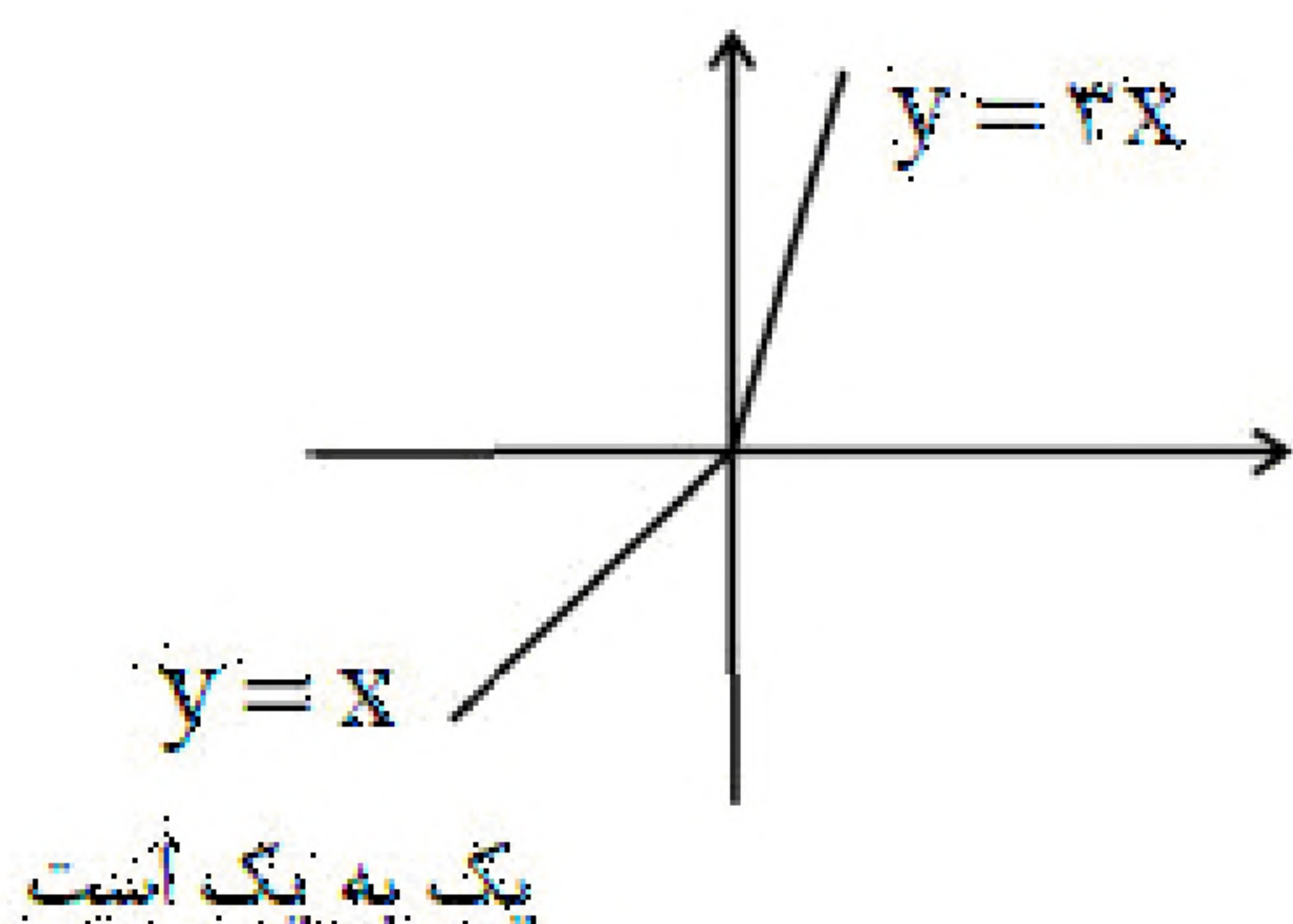
$$D_{\text{fog}} = \left\{ [0, +\infty) \mid \frac{1}{2}x^2 - 2 \in (-\infty, 0) \right\}$$

$$\frac{1}{2}x^2 - 2 < 0 \Rightarrow \frac{1}{2}x^2 < 2 \Rightarrow x^2 < 4 \Rightarrow -2 < x < 2$$

$$D_{\text{fog}} = \{ [0, +\infty) \cap (-2, 2) \} = [0, 2)$$

۱۷- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

۱۸- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.



$$y = |x| + 2x = \begin{cases} 3x & x \geq 0 \\ x & x < 0 \end{cases}$$



۱۹- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$f(x) = \frac{(3x+1)(x-2)}{x-2} \Rightarrow f(x) = 3x+1, D_f = \mathbb{R} - \{2\} \xrightarrow{x=2} y=7$$

$$\Rightarrow R_f = \mathbb{R} - \{7\} \Rightarrow D_{f^{-1}} = R_f = \mathbb{R} - \{7\}$$

$$\mathbb{R} - \{7\} \text{ پیدا کردن وارون } f \text{ با دامنه } y = 3x+1 \Rightarrow x = \frac{y-1}{3} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x-1}{3} \times \frac{x-7}{x-7}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x^2 - 8x + 7}{3x - 21}$$

$$\text{با مقایسه در صورت سؤال} \begin{cases} a = -8 \\ b = 7 \\ c = -21 \end{cases}$$

$$f^{-1}(2b - a - c) = f^{-1}(14 + 8 + 21) = f^{-1}(43) = 14$$

$$y = 4x^2 - 4x + 1 - 3, x \leq 0 \Rightarrow y \geq -3$$

$$y = (2x-1)^2 - 3$$

$$(2x-1)^2 = y+3 \Rightarrow 2x-1 = \begin{cases} \sqrt{y+3} & \text{قق غ} \\ -\sqrt{y+3} & \text{قق ق} \end{cases}$$

$$2x = 1 - \sqrt{y+3} \Rightarrow x = \frac{1 - \sqrt{y+3}}{2} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{1 - \sqrt{x+3}}{2} \quad x \geq -3$$

$$f = \{(1, 2), (-2, 3), (-1, 4)\}$$

$$D_{f \circ g} = D_f \cap D_g = \{1, -2, -1\} \cap D_g = \{-2, -1\}$$

۲۱- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

با توجه به دامنه بالا عدد ۱ قطعاً در دامنه تابع g نیست:

$$f(-2) - 2g(-2) = -1 \Rightarrow 3 - 2g(-2) = -1 \Rightarrow g(-2) = 2 \Rightarrow (2, -2) \in g^{-1} \quad (1)$$

$$f(-1) - 2g(-1) = 8 \Rightarrow 4 - 2g(-1) = 8 \Rightarrow g(-1) = -2 \Rightarrow (-2, -1) \in g^{-1} \quad (2)$$

$$(1) \Rightarrow f \circ g^{-1}(2) = f(-2) = f(-2) = 3$$

$$(2) \Rightarrow f \circ g^{-1}(-2) = f(-1) = 4$$

$$\text{حاصل ضرب اعضای برد} = 3 \times 4 = 12$$

$$D_{f^{-1}} = R_f \Rightarrow \sqrt{x-2} \geq 0 \Rightarrow -\sqrt{x-2} \leq 0$$

۲۲- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$2K - \sqrt{x-2} \leq 2K \xrightarrow{R_f = (-\infty, 3]} 2K = 3 \Rightarrow f(x) = 3 - \sqrt{x-2}$$

$$f^{-1}(1) = ? \Rightarrow 3 - \sqrt{x-2} = 1 \Rightarrow x = 6 \Rightarrow f^{-1}(1) = 6$$

$$f(3) = 2 \Rightarrow f^{-1}(1) + f(3) = 6 + 2 = 8$$



۲۳- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$(۱) \text{ دامنه تابع جدید } ۳ \leq x \leq ۵ \Rightarrow ۲ \leq x-۱ \leq ۴ \Rightarrow ۲ \leq ۱ - \frac{x}{۲} \leq ۴ \Rightarrow -۶ \leq x \leq -۲$$

$$(۲) \text{ برد تابع جدید } -۱ \leq ۲f-۳ \leq ۳ \Rightarrow ۱ \leq f \leq ۳ \xrightarrow{x-۳} -۹ \leq -۳f \leq -۳ \Rightarrow -۱۲ \leq -۳f-۳ \leq -۶$$

بنابراین اجتماع ۱ و ۲ به صورت $[-۱۲, -۲]$ و دارای ۱۱ عدد صحیح است.

۲۴- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$f(x) = \sqrt{1-x} - 1 \xrightarrow{\text{دامنه } f} 1-x \geq 0 \Rightarrow x \leq 1 \Rightarrow D_f = (-\infty, 1]$$

$$\sqrt{1-x} \geq 0 \xrightarrow{\text{برد } f} \sqrt{1-x} \geq -1 \Rightarrow R_f = [-1, +\infty)$$

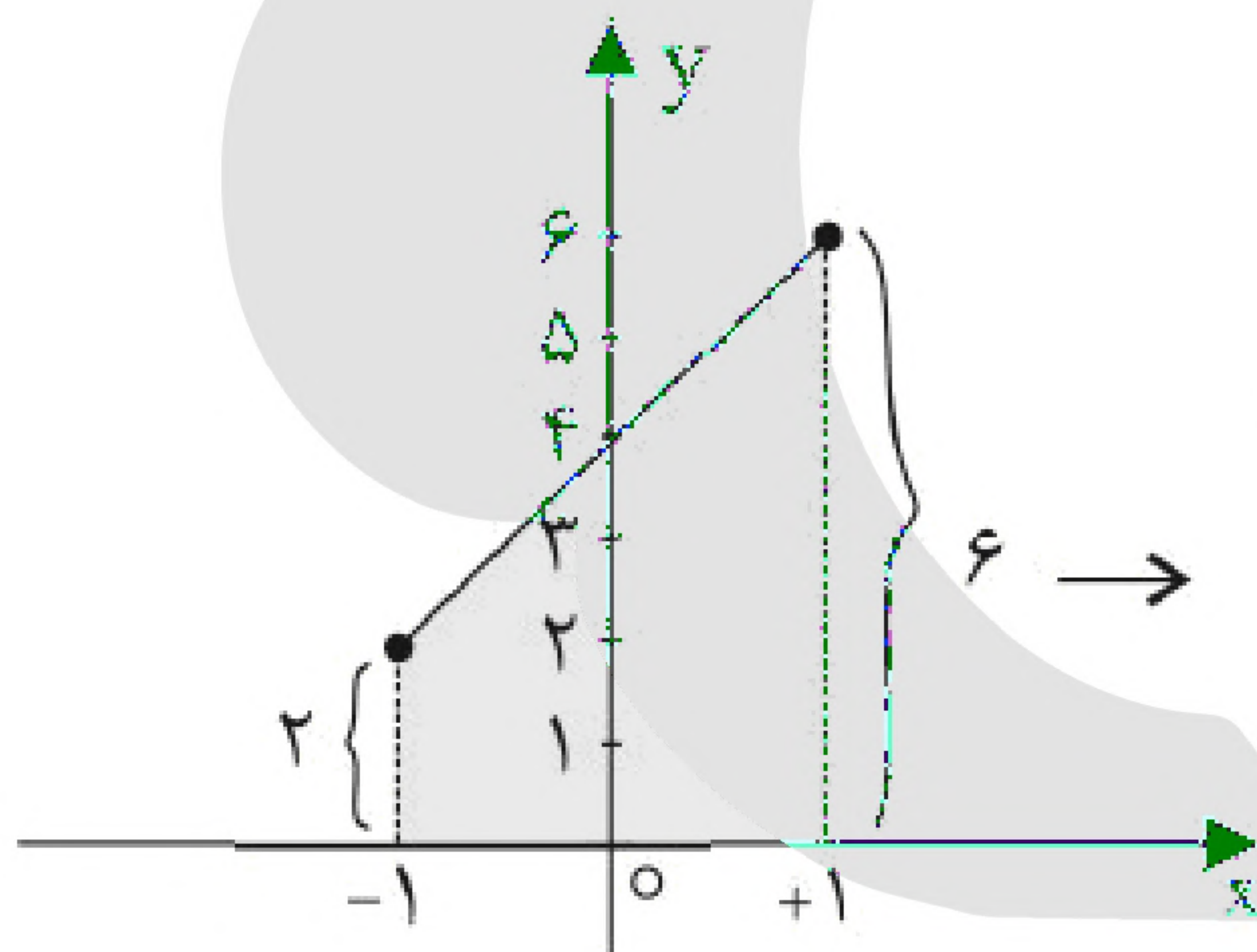
$$f^{-1} \circ f(x) = x; D_{f^{-1} \circ f} = D_f = (-\infty, 1] \quad (۱)$$

$$f \circ f^{-1}(x) = x; D_{f \circ f^{-1}} = D_{f^{-1}} = R_f = [-1, +\infty) \quad (۲)$$

$$۱, ۲ \Rightarrow g(x) = f^{-1} \circ f(x) + f \circ f^{-1}(x) + ۴ = ۲x + ۴$$

$$D_g = D_f \cap R_f = [-1, 1]$$

بنابراین باید نمودار خط $y = 2x + 4$ را در بازه $[-1, 1]$ رسم و مساحت محدود به آن با محور x ها را حساب کنیم:



$$S_{\text{دوزنقه}} = \frac{(۲ + ۶) \times ۲}{۲} = ۸$$

۲۵- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\begin{aligned} x \geq 1, g(x) &= x+1 \geq 2 \\ -1 \leq x < 1, 1 \leq g(x) &= x+2 < 3 \Rightarrow (f \circ g)(x) = \begin{cases} (x+1)^2 + 1 & x \geq 1 \\ (x+2)^2 + 1 & -1 \leq x < 1 \\ (x+2)^3 + 1 & x < -1 \end{cases} \\ x < -1, g(x) &= x+2 < 1 \end{aligned}$$



۲۶- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$x_1 = \frac{-m}{2(3-m^2)} = 1 \Rightarrow 6 - 2m^2 = -m \Rightarrow 2m^2 - m - 6 = 0$$

$$m = \frac{1 \pm \sqrt{1+48}}{4} = \begin{cases} 2 \Rightarrow f(x) = -x^2 + 2x + 1 & \text{ق ق} \\ -\frac{3}{2} \Rightarrow f(x) = \frac{3}{4}x^2 - \frac{3}{2}x + 1 & \text{غ ق ق} \end{cases}$$

(تابع در $x = 1$ مینیمم دارد و در $(-\infty, 1)$ نزولی است.)

$$x_1 = 1 \Rightarrow y_1 = -1 + 2 + 1 = 2 \quad \text{ماکزیمم تابع}$$

$$m + y_1 = 2 + 2 = 4$$

$$(\sqrt{a^2}, 2b), (|a|, 2) \Rightarrow 2b = 2 \Rightarrow b = 1$$

۲۷- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$f = \left\{ (1, a-2), (\sqrt{a^2}, 2), (1, 2a), (|a|, 2), (a^2, 4) \right\}$$

$$(1, a-2), (1, 2a) \Rightarrow a-2 = 2a \Rightarrow a = -2$$

$$f = \{(1, -4), (2, 2), (1, -4), (4, 4)\} = \{(1, -4), (2, 2), (4, 4)\}$$

$$g = \{(2a, b), (b^2, 2b), (a+1, -b), (a, b+3)\} = \{(-4, 1), (1, 2), (-1, -1), (-2, 4)\}$$

$$fog = \{(-4, -4), (1, 2), (-2, 4)\}$$

$$R_{fog} = \{-4, 2, 4\} \Rightarrow -4 + 2 + 4 = 2$$

$$D_f = [-4, 6]$$

$$D_f = [-3, 2] = \text{تبدیل یافته}$$

۲۸- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

نمودار تابع، ضمن قرینه شدن نسبت به محور X ها، دو برابر روی محور X ها فشرده شده است.

$$R_f = [-2, 3]$$

$$R_f = \left[-\frac{3}{2}, 1\right] = \text{تبدیل یافته}$$

نمودار تابع، ضمن قرینه شدن نسبت به محور Y ها دو برابر روی محور Y ها فشرده شده است. در نتیجه برد تابع نصف شده است.

$$f(x) = x^4 - 2x^2 + 2 = (x^2 - 1)^2 + 1, \quad x \geq 1$$

۲۹- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$y = (x^2 - 1)^2 + 1 \Rightarrow |x^2 - 1| = \sqrt{y-1} \Rightarrow x^2 = \sqrt{y-1} + 1$$

$$|x| = \sqrt{\sqrt{y-1} + 1} \Rightarrow x = \sqrt{1 + \sqrt{y-1}} \Rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt{1 + \sqrt{x-1}}$$



۳۰- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$f(g(x)) = [g(x)]^2 - 2 = x + 2\sqrt{x+1}$$

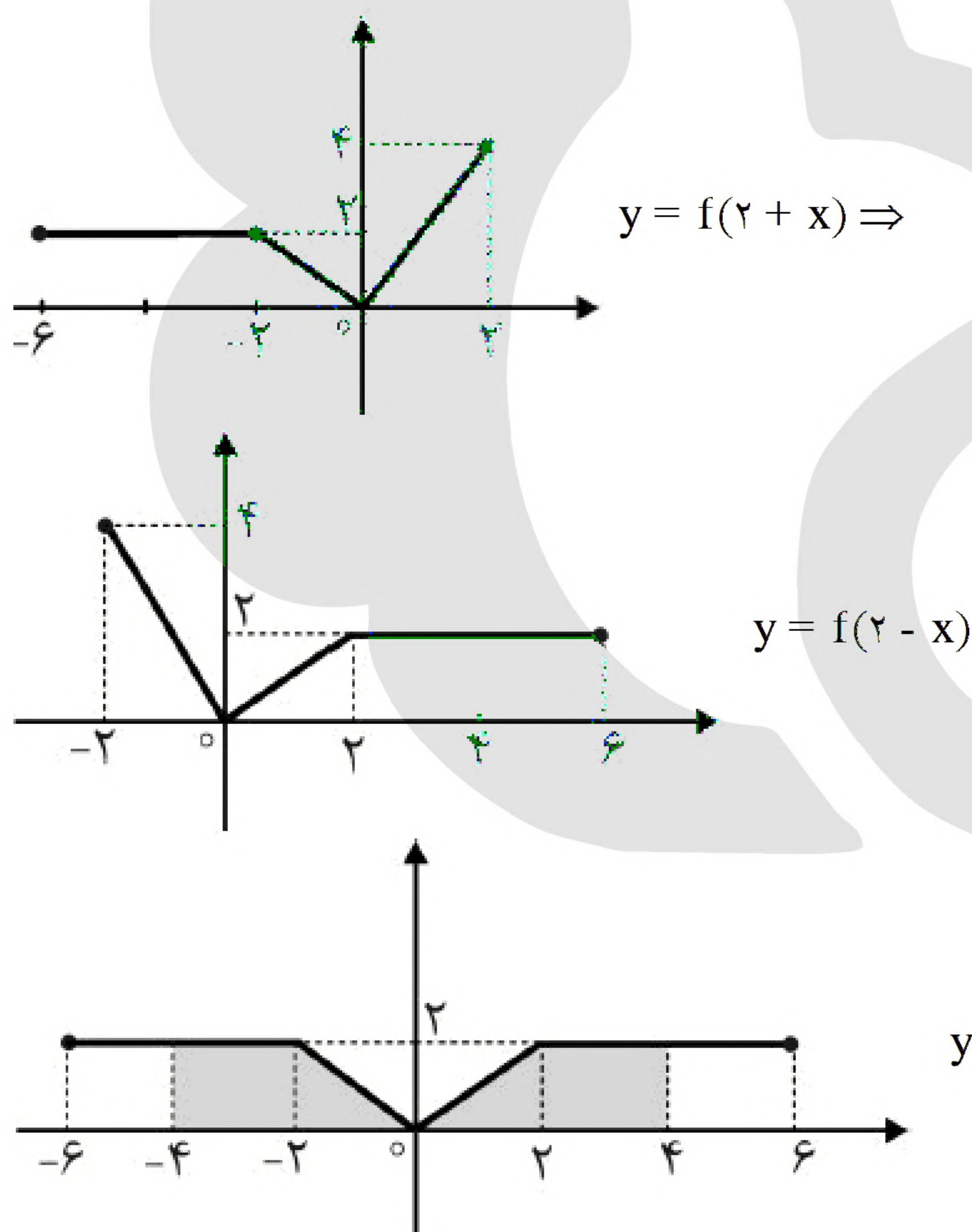
$$[g(x)]^2 = x + 2 + 2\sqrt{x+1} = (\sqrt{x+1} + 1)^2 \Rightarrow g(x) = 1 + \sqrt{x+1} \Rightarrow D_g = [-1, +\infty)$$

$$f(x) = x^2 - 2 \Rightarrow D_f = \mathbb{R}$$

$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 2 \geq -1\}$$

$$\{x \in \mathbb{R} \cap (x \leq -1 \text{ یا } x \geq 1)\} = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty) = \mathbb{R} - (-1, 1)$$

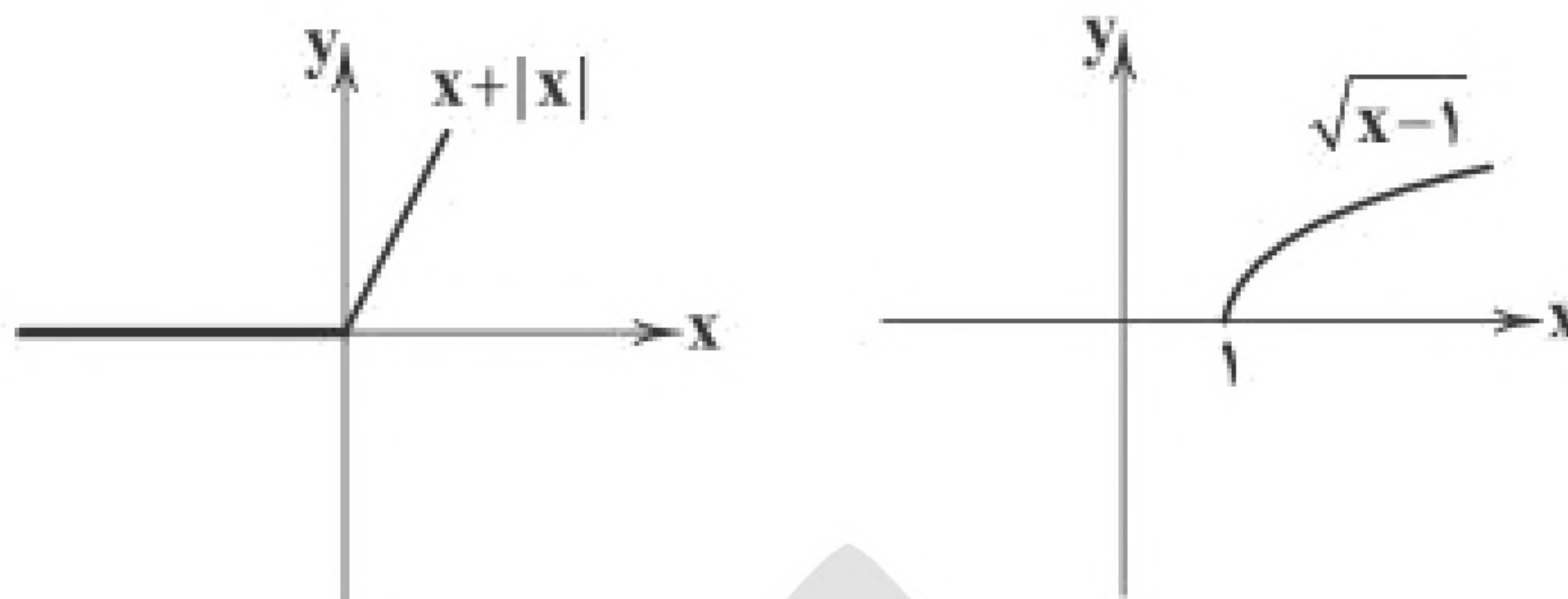
۳۱- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. با انتقال نمودار:



$$[-4, 4] \text{ مساحت در بازه } = 2S_{\text{ذوزنقه}} = 2 \left(\frac{(4+2) \times 2}{2} \right) = 12$$



۳۲- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. منظور سؤال این است که کدام تابع نزولی اکید است. تابع $x + |x|$ صعودی، تابع $-x^2 + 2x$ چون درجه دوم است، گاهی صعودی و گاهی نزولی و تابع $\sqrt{x-1}$ صعودی اکید است:



تابع $4 - 2x^3$ نزولی اکید است، زیرا:

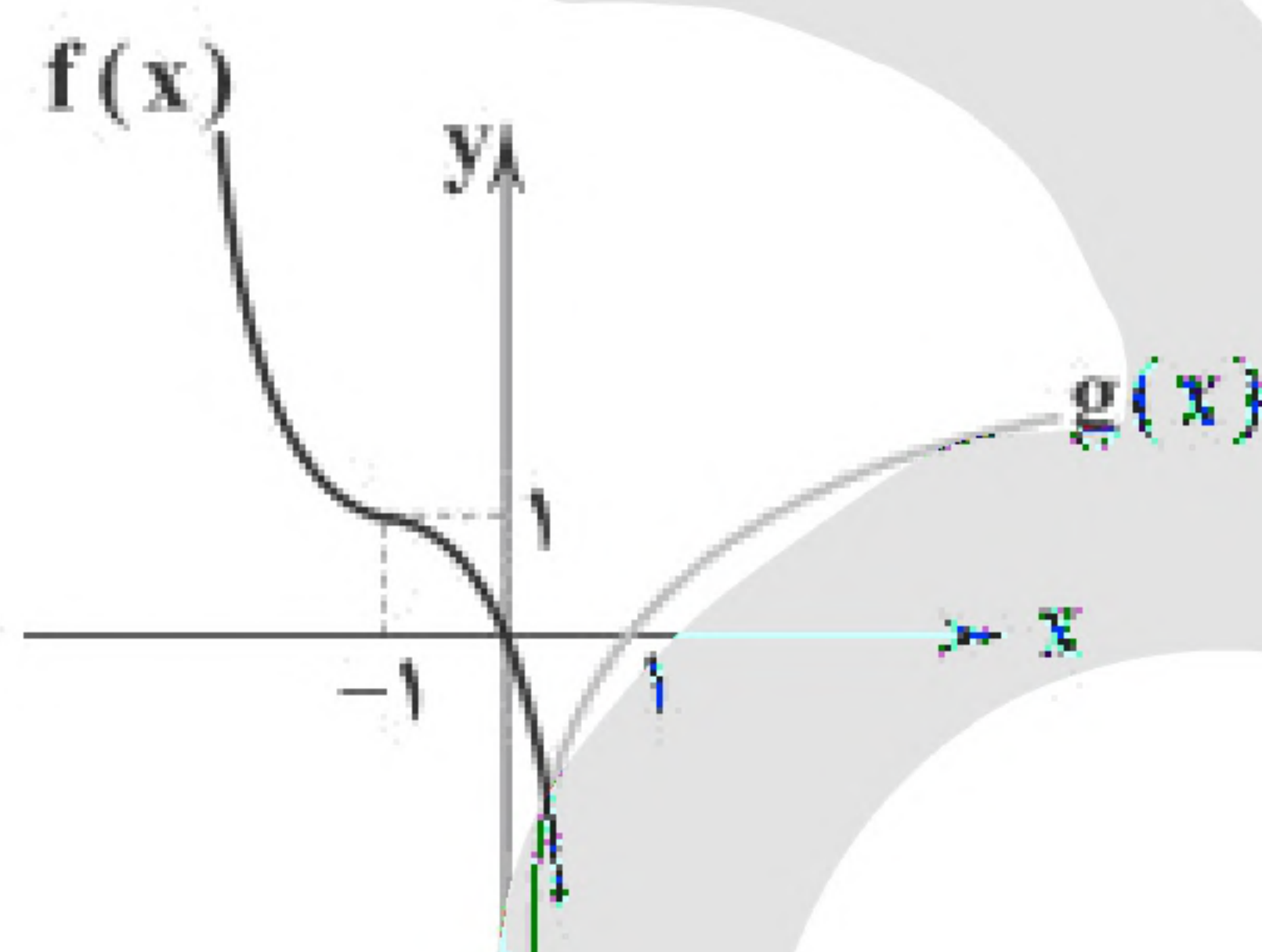
$$x^3 \xrightarrow{\text{صعودی اکید}} -x^3 \xrightarrow{\text{نزولی اکید}} -2x^3 \xrightarrow{\text{نزولی اکید}} -2x^3 - 4$$

«بانک سوال موسسه یاوران دانش»

۳۳- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$f(x) = -x^3 - 3x^2 - 3x = -(x+1)^3 + 1$$

نمودار دو تابع را ببینید:



ملاحظه می کنید که طول نقطه‌ی برخوردی عددی در بازه $(0, 1)$ است.

۳۴- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. فرض کنیم $f^{-1}(3) = \alpha$ باشد، آن گاه:

$$f(\alpha) = 3 \Rightarrow \begin{cases} 4\alpha + 2 = 3 \Rightarrow 4\alpha = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{1}{4} \notin [2, +\infty) & \times \\ 2\alpha + 15 = 3 \Rightarrow 2\alpha = -12 \Rightarrow \alpha = -6 \in (-\infty, -2] & \checkmark \end{cases}$$

۳۵- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. $y = f(x)$ از ناحیه‌ی اول نمی‌گذرد، بنابراین نمودار $y = f(-x)$ که قرینه‌ی $y = f(x)$ نسبت به محور y هاست از ناحیه‌ی دوم نمی‌گذرد. سپس نمودار $y = f(-x)$ را نسبت به محور طول قرینه کنیم که $y = -f(-x)$ به دست آید. بنابراین نمودار $y = -f(-x)$ از ناحیه‌ی سوم نمی‌گذرد.



۳۶- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. با توجه به ماشین داده شده می توان نتیجه گرفت که:

$$g(f(x+1)) = \frac{1}{x} \quad (1)$$

برای محاسبه ی $g\left(\frac{1}{4}\right)$ به صورت زیر عمل می کنیم:

$$f(x+1) = \frac{1}{4}$$

$$f(x-1) = x+2 \xrightarrow[\text{تبدیل می کنیم}]{x \text{ را به } x+2} f(x+1) = x+4 = \frac{1}{4} \Rightarrow x = -\frac{15}{4}$$

در رابطه (۱) به جای x عدد $-\frac{15}{4}$ را قرار می دهیم:

$$g\left(f\left(-\frac{15}{4}\right)\right) = \frac{-4}{15} \Rightarrow g\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{-4}{15}$$

۳۷- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. چون $f(x)$ چندجمله ای از درجه ۳ است، پس باید درجه چهارها حذف شوند و در نتیجه

$m = -1$ خواهد بود و ارگ $g(x)$ چندجمله ای از درجه دوم باشد، باید درجه سومها از بین بروند، پس باید $n = \frac{1}{4}$

باشد.

$$f(x) = x^4 - (x-1)^4 + \frac{1}{2}x^2$$

$$g(x) = (x-1)^3 - (x+1)^3 - 1$$

$$f(2) = 2^4 - 1^4 + \frac{1}{2} \times 4 = 16 - 1 + 2 = 17$$

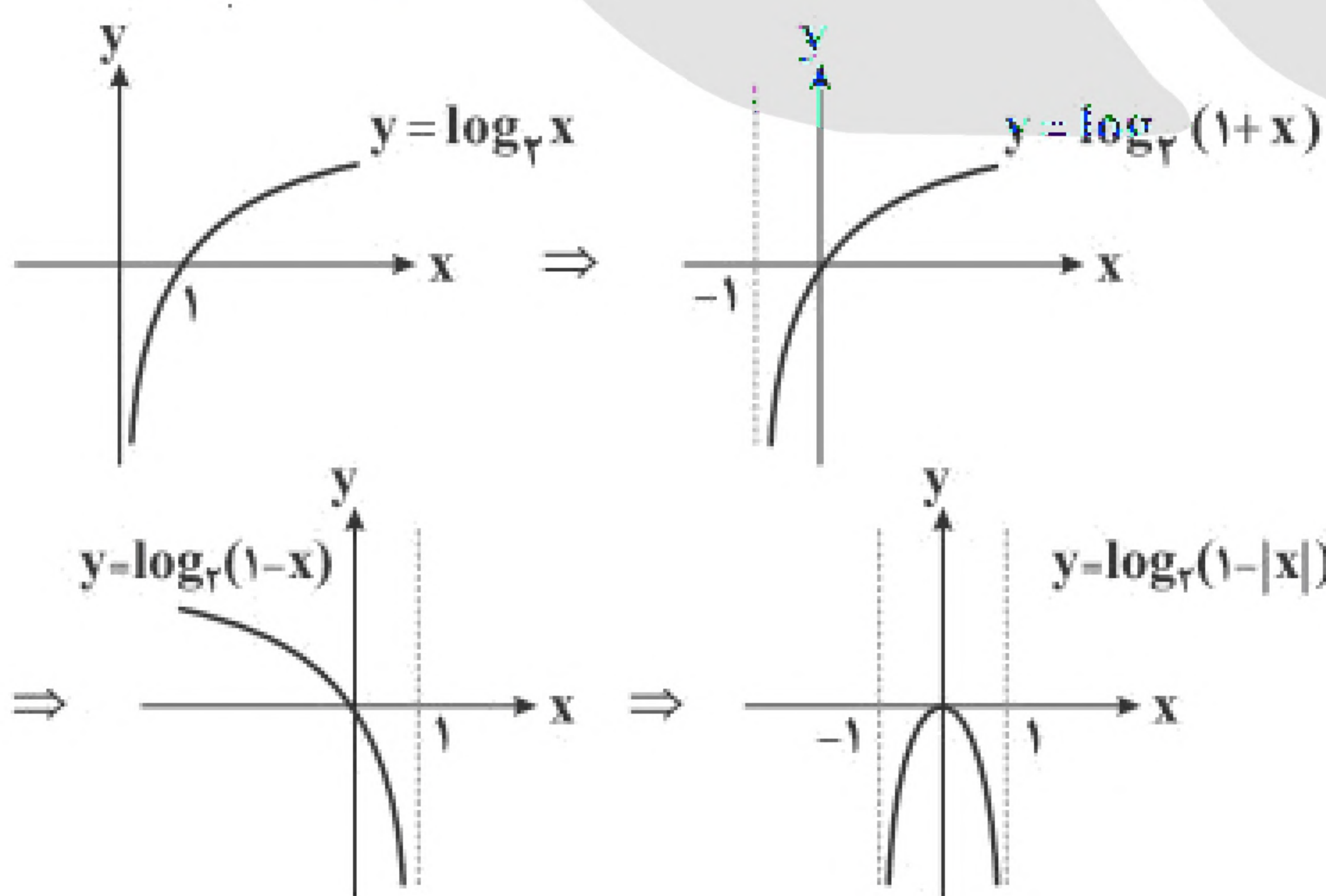
$$g(2) = 1^3 - 3^3 - 1 = -27$$

$$(f+g)(2) = f(2) + g(2) = 17 - 27 = -10$$

۳۸- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

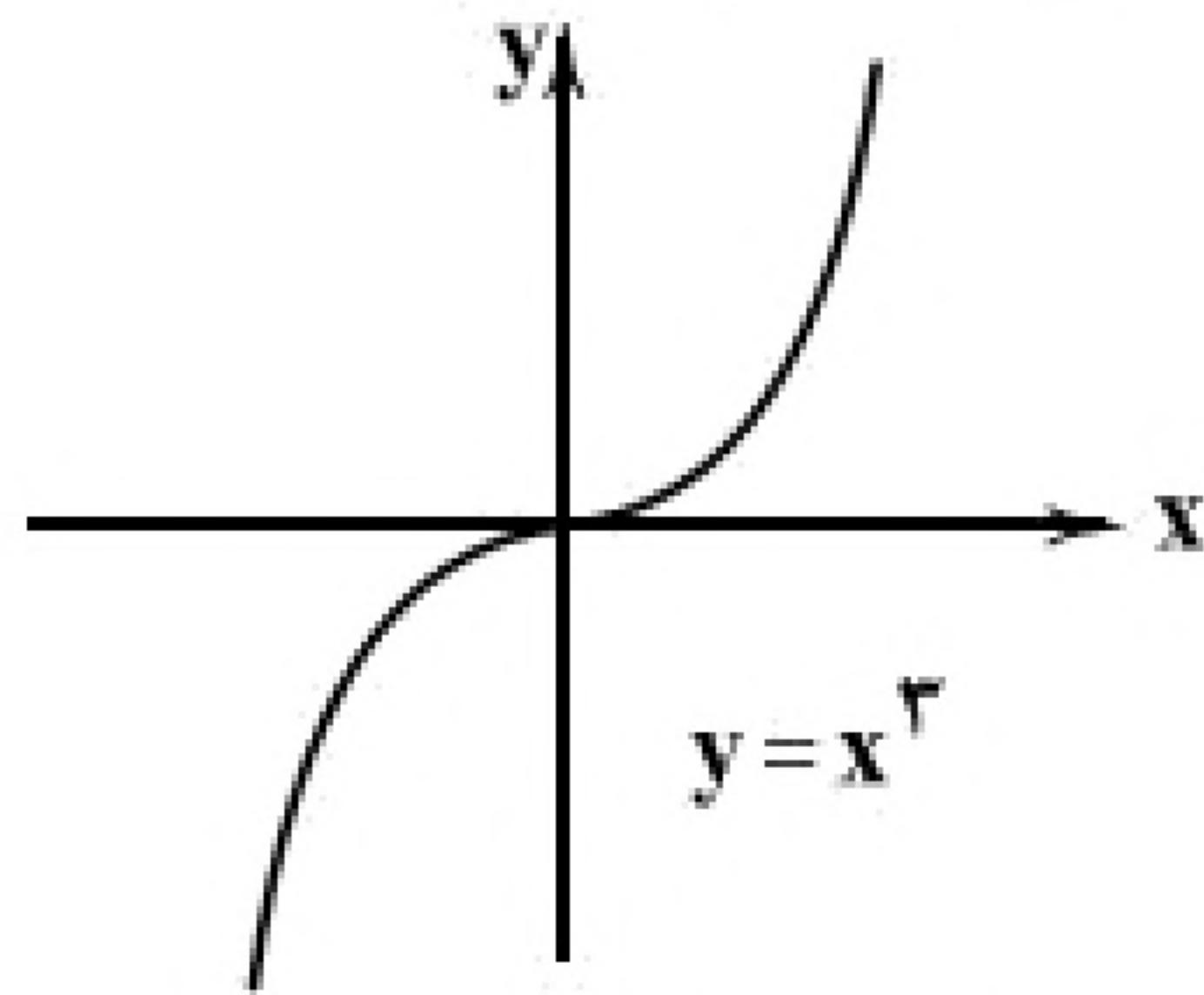
$$y = 1 - 2^x \Rightarrow 2^x = 1 - y \Rightarrow x = \log_2(1 - y) \Rightarrow f^{-1}(x) = \log_2(1 - x)$$

$$y = \log_2(1 - |x|)$$





۳۹- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. تابع $y = x^3$ به صورت زیر است:



اگر تابع $f(x)$ فقط از ناحیه‌ی دوم و چهارم عبور کند، باید از مبدأ مختصات عبور کند در غیر این صورت از سه ناحیه عبور خواهد کرد.

$$f(0) = 0 \Rightarrow -a^2 + 8 = 0 \Rightarrow a^2 = 8 \Rightarrow a = \pm 2\sqrt{2}$$

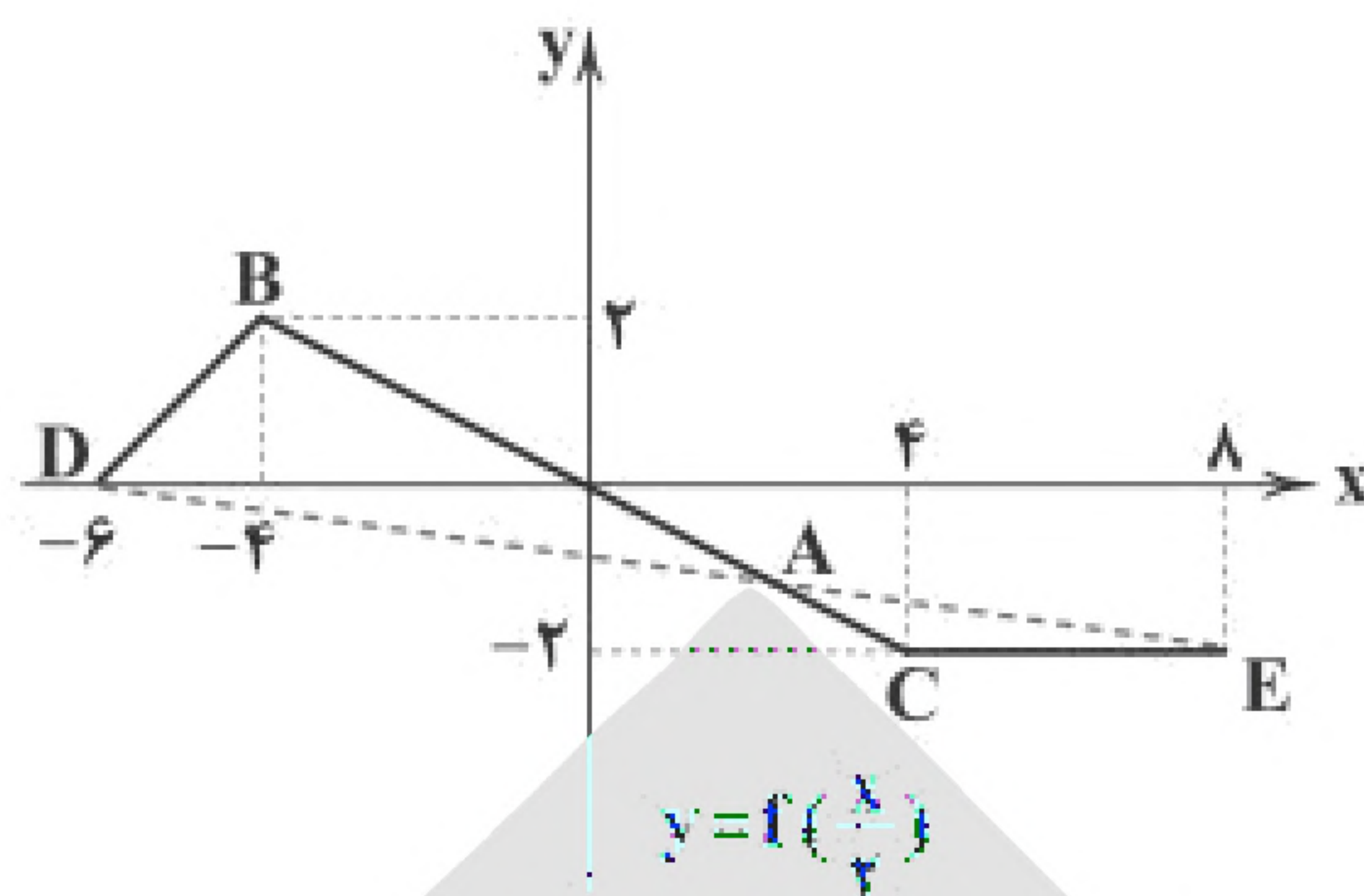
اگر $a = 2\sqrt{2}$ باشد، آن‌گاه $f(x) = (2\sqrt{2} - 2)x^3$ خواهد شد که از ناحیه‌ی اول و سوم عبور می‌کند اما اگر

$a = -2\sqrt{2}$ باشد، آن‌گاه $f(x) = (-2\sqrt{2} - 2)x^3$ خواهد شد که در این صورت فقط از ناحیه‌ی دوم و چهارم عبور خواهد کرد.

$$f(2) = -2(\sqrt{2} + 1)(2)^3 = -16(\sqrt{2} + 1) \Rightarrow \frac{f(2)}{1 + \sqrt{2}} = -16$$



۴۰- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. طول نقاط را دو برابر و عرض آن‌ها را ثابت در نظر می‌گیریم تا تابع $f\left(\frac{x}{2}\right)$ به دست آید.



اگر ابتدا و انتهای تابع را به هم وصل کنیم، تابع را در A قطع می‌کند. معادله‌ی خط گذرا از B و C را می‌نویسیم و با خط گذرا از D و E قطع می‌دهیم.

$$D = (-6, 0), E = (8, -2)$$

$$\Rightarrow DE: y - 0 = \frac{0 + 2}{-6 - 8}(x + 6) \Rightarrow y = -\frac{1}{7}(x + 6)$$

$$B = (-4, 2), C = (4, -2)$$

$$\Rightarrow BC: y - 2 = \frac{2 + 2}{-4 - 4}(x + 4) \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x$$

دو تابع را برابر هم قرار می‌دهیم.

$$-\frac{1}{7}(x + 6) = -\frac{1}{2}x \xrightarrow{\times (-14)} 2x + 12 = 7x \Rightarrow 5x = 12 \Rightarrow x = \frac{12}{5} = 2\frac{2}{5} \Rightarrow y = -1\frac{1}{5}$$