

گنجینه سوال رایگان
+ پاسخ تشریحی

یاوران دانش



راه های ارتباطی با ما:

www.Dyavari.com

۰۲۱-۷۶۷۰۳۸۵۸

۰۹۱۲-۳۴ ۹۴ ۱۳۴



	۱	۲	۳	۴
۱ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۲ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۴ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۵ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۶ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۷ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۸ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۹ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۰ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۱۱ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۲ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۳ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۴ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۱۵ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۱۶ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۷ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۸ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۹ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۰ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۲۱ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۲۲ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۳ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۴ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



$$f(x) = \begin{cases} |[-x] - x| & \text{فرد } [x] \\ k - x + [x] & \text{زوج } [x] \end{cases}$$

۱- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\xrightarrow[n=2]{(1)} \begin{cases} 2^+ \rightarrow k - 2 + 2 = k \\ 2^- \rightarrow |-2 - 2| = 4 \\ 2 \rightarrow k \end{cases}$$

$$\xrightarrow[n=-2]{(2)} \begin{cases} -2^+ \rightarrow k + 2 - 2 = k \\ -2^- \rightarrow |2 + 2| = 4 \\ 2 \rightarrow k \end{cases}$$

$$\xrightarrow{1, 2} k = 4$$

$$n=1 \Rightarrow \begin{cases} 1^+ \rightarrow |-2 - 1| = +3 \\ 1^- \rightarrow k - 1 \\ 1 \rightarrow -2 \end{cases}$$

برای زوج فقط برقرار است

۲- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. $x = a$ باید ریشه مضاعف زیر رادیکال باشد:

$$\Delta = 0 \Rightarrow (m-1)^2 - 12(m-4) = 0 \Rightarrow (m-7)^2 = 0 \Rightarrow m = 7$$

$$x = a \Rightarrow a = -1 \text{ ریشه صورت و مخرج}$$

$$\text{صورت: } \frac{\sqrt{3(x+1)^2}}{|x^3+1|} = \frac{\sqrt{3}|x+1|}{|x+1|(x^2-x+1)} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \text{صورت} = \lim_{x \rightarrow (-1)} \text{صورت} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{مخرج: } x = a = -1 : \frac{2 \sin b}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \sin b = \frac{\sqrt{3}}{2}$$



۳- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. می‌توانیم برای $n = 1$ و $n = 2$ مسئله را بررسی کنیم، پس پیوستگی را در $x = \pm 1$ و $x = \pm 2$ بررسی می‌کنیم:

$$x = 1 : \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) = 1 - 1 + k = k$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} |x - [-x]| = 2$$

$$x = -1 : \lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = f(-1) = k$$

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} |x - [-x]| = 2$$

$$x \rightarrow (-1)^- \quad x \rightarrow (-1)^+$$

پس اگر $k = 2$ باشد به ازای $x = \pm 1$ پیوستگی داریم، این یعنی مقادیر فرد n قابل قبول‌اند.

$$x = 2 : \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} |x - [-x]| = 5$$

$$f(2) = 2 - (-2) = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (x - [x] + k) = 1 + k$$

$$x \rightarrow 2^- \quad x \rightarrow 2^+$$

پس به ازای هیچ مقدار زوج n پیوستگی نداریم.

۴- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. حد چپ و راست در ۲ برابر نیستند، پس در ۲ پیوسته نیست و در نتیجه در \mathbb{R} پیوسته نیست.

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{|(x+1)(x-2)|}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-(x+1)(x-2)}{x-2} = -3$$

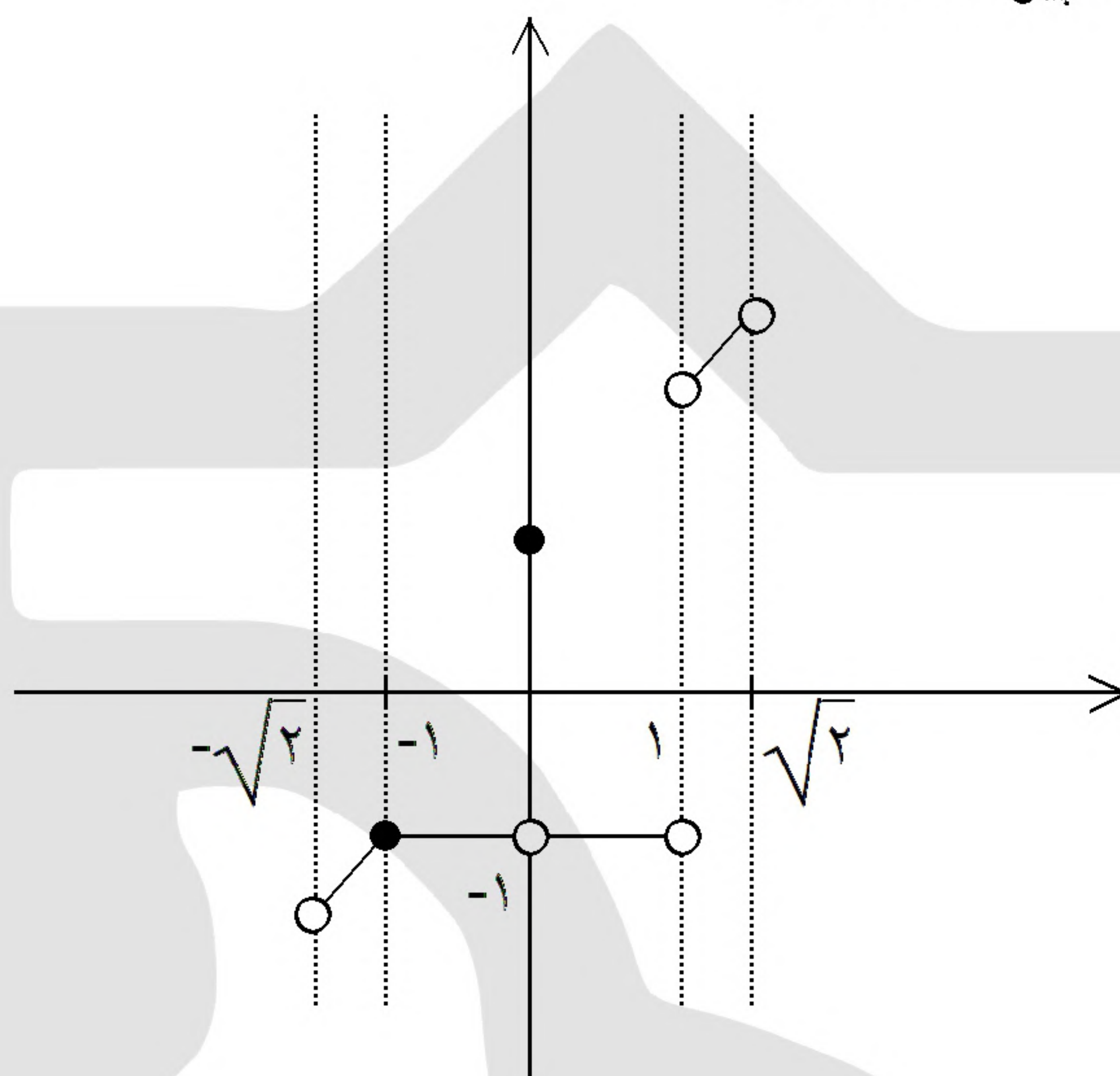
$$\left. \begin{array}{l} f(2) = -2a + 3 + 3a = a + 3 \\ a + 3 = -3 \Rightarrow a = -6 \end{array} \right\}$$



۵- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$f(x) = \begin{cases} -1 & -1 < x < 1 - \{0\} \\ \cos(\pi x) & x = 0, 1, -1 \\ |x|([x] + 1) & 1 < x < \sqrt{2} \text{ یا } -\sqrt{2} < x < -1 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} -1 & -1 < x < 1 - \{0\} \\ -1 & x = \pm 1 \\ 1 & x = 0 \\ 2x & 1 < x < \sqrt{2} \\ x & -\sqrt{2} < x < -1 \end{cases}$$

پس این تابع در $x = 1$ و $x = 0$ ناپیوسته است.



۶- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$x = 1 \text{ پیوستگی راست در } x = 1 : \begin{cases} f(1) = \tan\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)(x+2)}{-a(x-1)} = \frac{3}{-a} \end{cases} \left\{ \frac{3}{-a} = -1 \Rightarrow a = 3 \right.$$

$$x = 5 \text{ پیوستگی چپ در } x = 5 : \begin{cases} f(5) = b(5 - [-5]) = 10b \\ \lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) = \frac{|25 + 5 - 2|}{3(1 - 5)} = \frac{28}{3 \times -4} = \frac{-7}{3} \end{cases} \left\{ 10b = \frac{-7}{3} \Rightarrow b = \frac{-7}{30} \right.$$

$$\Rightarrow ab = -0.7$$

۷- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\begin{aligned} \text{ریشه} = 1 &\Rightarrow 5 - a + b = 0 \Rightarrow a - b = 5 \\ f \text{ ریشه صورت} = 1 &\Rightarrow 1 + a + b = 0 \Rightarrow a + b = -1 \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -3 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\left[\frac{b - 2a}{3} \right] = \left[\frac{-3 - 4}{3} \right] = -3$$

تذکر: تنها نقطه‌ای که تابع f در آن ناپیوسته است، $x = 1$ است و چون f در آن حد دارد، پس صورت کسر باید به ازای $x = 1$ صفر شود، در غیر این صورت حد، بی‌نهایت می‌شود.



۸- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. چون تابع در R پیوسته است پس در $x=0$ هم پیوسته است. حال برای دو حالت $a \in Z$ و $a \notin Z$ داریم:

$$a \notin Z \quad \left\{ \begin{array}{l} f(0) = 0 \\ f(0^+) = 0 \\ f(0^-) = |0 - [-a]| = [-a] \end{array} \right\} \quad \text{غ ق ق} \quad [-a] = 0 \Rightarrow 0 \leq -a < 1 \Rightarrow -1 < a \leq 0$$

با شرط $a < -1$ اشتراک ندارد.

$$a \in Z \quad \left\{ \begin{array}{l} f(0) = 0 \\ f(0^+) = 0 \\ f(0^-) = |0 + a - [0^-]| = |a + 1| \end{array} \right.$$

$$|a + 1| = 0 \Rightarrow a = -1$$

با شرط $a < -1$ اشتراک ندارد.

پس به ازای هیچ مقدار $a < -1$ پیوسته نمی‌شود.
تذکر: تابع فقط به ازای $a = -1$ روی R پیوسته می‌شود.

۹- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.
راه اول:

$$g(x) = \frac{2f(x) - 1}{2(x-1)} = \frac{2x\sqrt{x} - 1}{2x^2 + x - 1} = \frac{2x\sqrt{x} - 2x^2 - (x-1)}{2(x-1)(2x^2 + x - 1)} = \frac{-2x\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1) - (x-1)}{2(x-1)(2x^2 + x - 1)}$$

$$= \frac{-2x\sqrt{x} \frac{x-1}{\sqrt{x}+1} - (x-1)}{2(x-1)(2x^2 + x - 1)}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} g(x) = \frac{\frac{-2}{1+1} - 1}{2(2+1-1)} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$$

راه دوم:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2f(x) - 1}{2(x-1)} \xrightarrow{\frac{0}{0}, \text{HOP}} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2f'(x)}{2} = f'(1) \Rightarrow \frac{1/5(2) - 5(1)}{(2)^2} = \frac{3-5}{4} = -\frac{1}{2}$$

۱۰- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$x \rightarrow -1^+ \Rightarrow x+1 > 0 \Rightarrow |x+1| = x+1 \Rightarrow [x] = -1 \Rightarrow -x \rightarrow 1^- \Rightarrow [-x] = 0$$

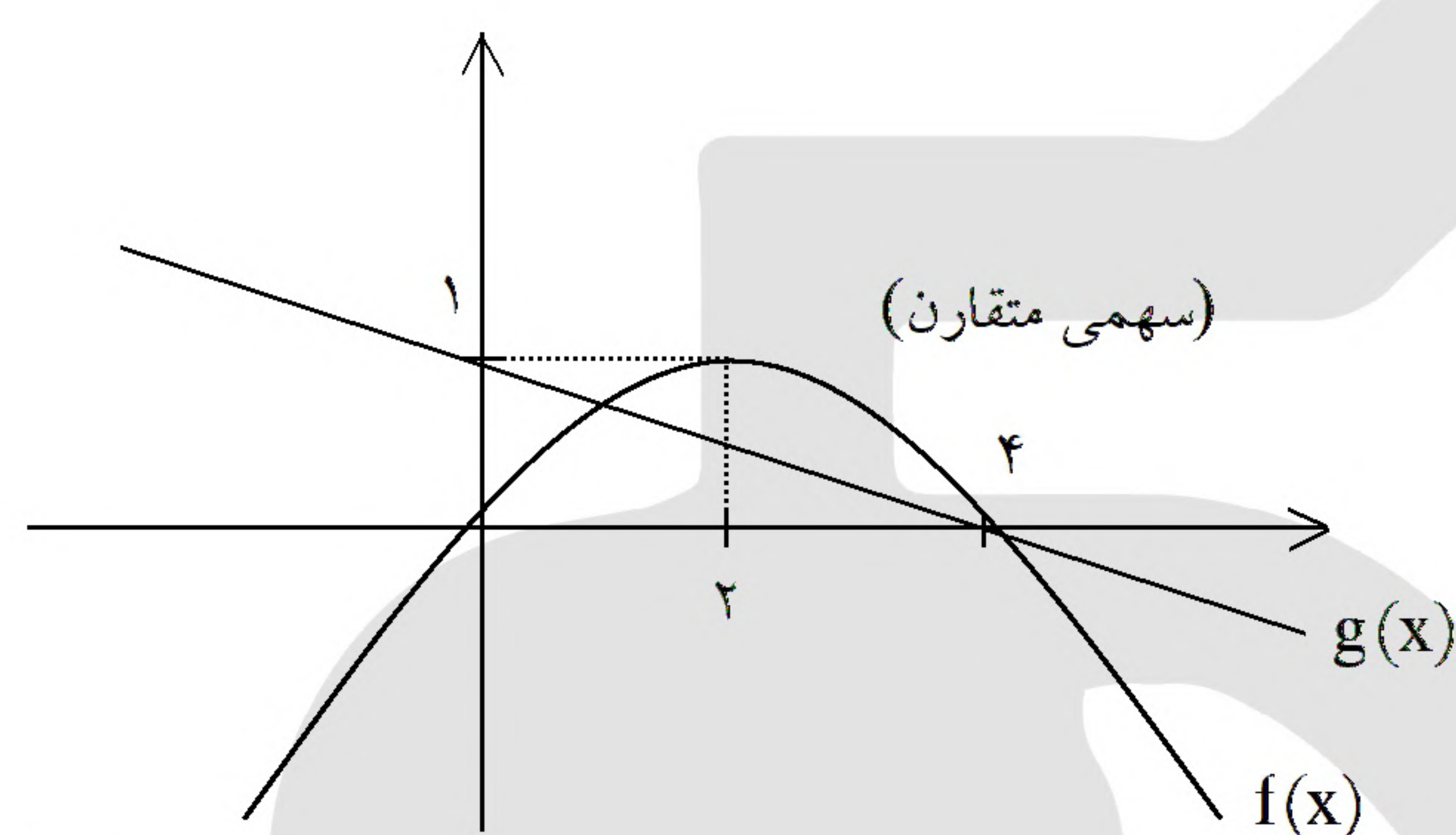
$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{|x+1| + [x]}{x - [-x]} = \frac{x+1-1}{x} = \frac{x}{x} = 1$$



۱۱- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ضابطه سوم در بیشمار نقطه ناپیوسته است پس نیازی به بررسی بقیه ضابطه‌ها و نقاط مرزی نیست.

$$f(x) = \begin{cases} |x| + [-x] & -1 < x < 1, x \neq 0 \\ 1 + \cos \pi x & x = 0, 1, -1 \\ [x^2] - [x] & x > 1 \text{ یا } x < -1 \end{cases}$$

۱۲- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.



$$= \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{f(x)}{4-x} + \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{g(x)}{4-x}$$

$$\xrightarrow{\text{HOP}} -f'(4) - g'(4)$$

$$(0, 1), (4, 0) \Rightarrow g(x) : y - 0 = \frac{0-1}{4-0}(x-4) \Rightarrow y = \frac{-1}{4}(x-4) \Rightarrow g(x) = \frac{-1}{4}x + 1$$

$$x_1 = 0, x_2 = 4 \Rightarrow f(x) = ax(x-4) \xrightarrow{(2,1)} f(x) = \frac{-1}{4}x(x-4) \Rightarrow f(x) = \frac{-1}{4}x^2 + x$$

$$g'(x) = \frac{-1}{4}, f'(x) = \frac{-1}{2}x + 1$$

$$-f'(4) - g'(4) = -(-1) - \left(\frac{-1}{4}\right) = \frac{5}{4}$$

۱۳- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. در $\sin x$ اگر x در همسایگی چپ $\frac{\pi}{6}$ باشد، حاصل از $\frac{1}{4}$ کمتر است.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}^-} [2 \sin x] - 1 = [1^-] - 1 = -1$$

۱۴- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

از آنجا که $\sin(\pi x)$ در همه اعداد صحیح به عنوان عامل صفر عمل می‌کند، بنابراین در همه اعداد پیوسته است.



۱۵- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} f(x) = f\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

روش اول: برای آن که تابع در $x = \frac{\pi}{2}$ پیوسته باشد، باید:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{2 \sin^2 x - \sin x - 1}{\cos^2 x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{(\sin x - 1)(2 \sin x + 1)}{(1 - \sin x)(1 + \sin x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{(\cancel{\sin x - 1})(2 \sin x + 1)}{-(\cancel{\sin x - 1})(1 + \sin x)} = \frac{3}{-2}$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = a$$

$$\Rightarrow a = -\frac{3}{2}$$

$$a = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{2 \sin^2 x - \cos x}{-\sin^2 x} \stackrel{\text{Hop}}{=} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{4 \cos^2 x + \sin x}{-2 \cos^2 x} = \frac{-4 + 1}{2} = -\frac{3}{2}$$

روش دوم:

«بانک سوال موسسه یاوران دانش»

۱۶- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$|x - 1| = 1 \Rightarrow x - 1 = \pm 1 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 0 \end{cases}$$

با توجه به شروط داده شده باید در نقاط $x = 2$, $x = 0$ پیوستگی‌ها بررسی شوند.

$$f(x) = \begin{cases} (x - 1)[x] & ; 0 < x < 2 \\ x^2 + ax + b & ; x \leq 0 \text{ یا } x \geq 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(2) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 4 + 2a + b \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = (2 - 1)[2^-] = 1 \end{cases} \Rightarrow 4 + 2a + b = 1 \Rightarrow 2a + b = -3$$

$$\begin{cases} f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0 + 0 + b = b \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = (0 - 1)[0^+] = 0 \end{cases} \Rightarrow b = 0$$

$$b = 0 \rightarrow 2a + 0 = -3 \Rightarrow a = -\frac{3}{2}$$



۱۷- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x - \sqrt{x+5}}{2x - \sqrt{3x+1}} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{HOP}} = \frac{2 - \frac{1}{2}}{2 - \frac{3}{4}} = \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{5}{4}} = -\frac{1}{2}$$

۱۸- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$f(x) = \begin{cases} x[x] & |x| < 1 \\ ax + b & |x| \geq 1 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} x[x] & -1 < x < 1 \\ ax + b & x \geq 1, x \leq -1 \end{cases}$$

کافی است f در $x = 1$ و $x = -1$ پیوسته باشد.

$$\begin{aligned} x = 1 & \begin{cases} f(1) = a + b \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (ax + b) = a + b \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} x[x] = 1 \times 1 = 1 \end{cases} \Rightarrow a + b = 1 \\ x = -1 & \begin{cases} f(-1) = -a + b \\ \lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} (ax + b) = -a + b \\ \lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} x[x] = (-1)(-1) = 1 \end{cases} \Rightarrow -a + b = 1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow a = -\frac{1}{2}, b = \frac{1}{2}$$

۱۹- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sin^2 \pi x}{[x] + \cos(\pi x)} &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1 - \cos^2(\pi x)}{1 + \cos(\pi x)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(1 - \cos \pi x)(1 + \cos \pi x)}{1 + \cos(\pi x)} \\ &= 1 - \cos \pi = 1 - (-1) = 2 \end{aligned}$$



۲۰- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.
روش اول:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2 - \sqrt{3x+2}}{5x^2 - 18x + 16} \times \frac{4 + 2\sqrt{3x+2} + \sqrt[3]{(3x+2)^2}}{4 + 2\sqrt{3x+2} + \sqrt[3]{(3x+2)^2}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\cancel{-(x-2)}^3 (1 - 3x - 2)}{(\cancel{x-2})(5x-8) \left(4 + 2\sqrt{3x+2} + \sqrt[3]{(3x+2)^2}\right)} = \frac{-3}{2(12)} = -\frac{1}{8}$$

روش دوم: در این روش از هوییتال استفاده می‌کنیم.

$$\xrightarrow{\text{HOP}} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\frac{3}{\sqrt[3]{(3x+2)^2}}}{10x - 18} = \frac{-3}{2 \times 2} = -\frac{1}{8}$$

۲۱- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$f(2) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 4}{2(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x+2}{2} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 - 4}{-2(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x+2}{-2} = -2$$

پس f در $x = 2$ فقط از راست پیوسته است.



۲۲- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x \rightarrow -8} \frac{x^2 + 10x + 16}{12 + 6\sqrt[3]{x}} = \lim_{x \rightarrow -8} \frac{(x+2)(x+8)}{6(2+\sqrt[3]{x})} = \lim_{x \rightarrow -8} \frac{(x+2)((\sqrt[3]{x})^3 + 2^3)}{6(2+\sqrt[3]{x})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -8} \frac{(x+2)(\cancel{\sqrt[3]{x}+2})(\sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt[3]{x} + 4)}{6(\cancel{2+\sqrt[3]{x}})} = \frac{-6(12)}{6} = -12$$

روش دوم: هوییتال

$$\xrightarrow{\text{HOP}} \lim_{x \rightarrow -8} \frac{2x + 10}{6\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)} = \frac{-6}{6\left(\frac{1}{12}\right)} = \frac{-6}{\frac{1}{2}} = -12$$

«بانک سوال موسسه یاوران دانش»

۲۳- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$f(-2) = a$$

$$\lim_{x \rightarrow (-2)^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-2)^-} \frac{8 + x^3}{-(x+2)} = \lim_{x \rightarrow (-2)^-} \frac{(x+2)(x^2 - 2x + 4)}{-(x+2)} = -12 \Rightarrow a = -12$$

۲۴- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3x-6}{x-\sqrt{x+2}} & x > 2 \\ ax-1 & x \leq 2 \end{cases}$$

کافی است f در $x=2$ پیوسته باشد:

$$f(2) = 2a - 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (ax - 1) = 2a - 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3x-6}{x-\sqrt{x+2}} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3(x-2)(x+\sqrt{x+2})}{x^2 - x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3\cancel{(x-2)}(x+\sqrt{x+2})}{\cancel{(x-2)}(x+1)}$$

$$= \frac{3 \times 4}{3} = 4$$

$$2a - 1 = 4 \Rightarrow a = 5/2$$