

گنجینه سوال رایگان

+ پاسخ تشریحی

یاوران دانش



راه های ارتباطی با ما:

www.Dyavari.com

۰۲۱-۷۶۷۰۳۸۵۸

۰۹۱۲-۳۴ ۹۴ ۱۳۴

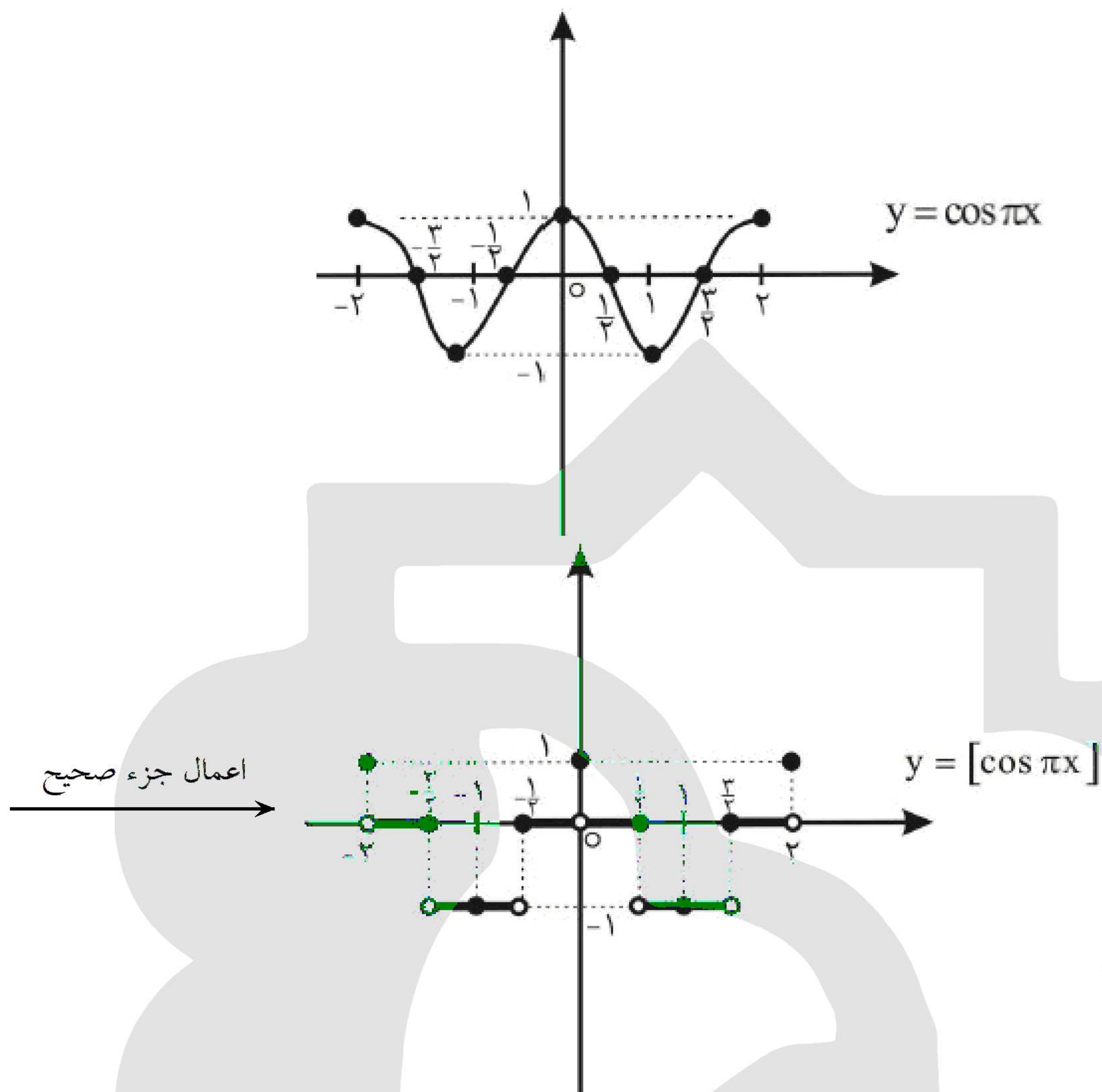


	۱	۲	۳	۴
۱ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۴ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۵ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۶ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۷ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۸ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۹ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۰ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۱۱ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۲ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۳ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۱۴ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۱۵ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۱۶ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۷ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۸ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۹ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۰ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۱ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۲ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۳ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۴ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۲۵ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۶ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۲۷ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۲۸ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۹ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۰ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۱ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۲ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۳ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۴ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۳۵ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۳۶ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۳۷ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۸ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۹ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۴۰ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>





۱- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.



مطابق نمودار، تابع $f(x) = [\cos \pi x]$ در هفت نقطه $2, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, -2$ ناپیوسته است.



۲- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. در $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} + a}{x^2 - 1}$ چون حد مخرج در $x \rightarrow 1$ صفر است باید حد صورت هم در این

شرایط صفر باشد، بنابراین:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt[3]{x} - 1)(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1)}{(x^2 - 1)(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)}{(x-1)(x+1) \times 3} = \frac{1}{6} \quad f(1) = a - 2b = -1 - 2b$$

برای پیوستگی در $x = 1$:

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) \Rightarrow \frac{1}{6} = -1 - 2b \Rightarrow b = \frac{-7}{12} \Rightarrow 5a - 24b = 5(-1) - 24\left(\frac{-7}{12}\right) = -5 + 14 = 9$$

۳- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 7)}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 3)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} + 7}{\sqrt{x} + 3} = \frac{8}{4} = 2$$

۴- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{(1 + \cos x)(1 - \cos x + \cos^2 x)}{(1 + \cos x)(1 - \cos x)} = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 - \cos x + \cos^2 x}{1 - \cos x} = \frac{3}{2} = 1.5$$



۵- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ابتدا صورت را بر عامل صفرساز یعنی $(x+1)$ تقسیم کنید:

$$\lim_{x \rightarrow (-1)} \frac{3(x+1)(x^2 - 6x + 6)}{(x+1)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3(x^2 - 6x + 6)}{x-2} = -13$$





۶- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. برای پیوستگی باید $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$ باشد.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 - \sqrt{x^2 + ax + b}}{x - 1} = 4$$

چون حد منخرج صفر می شود پس حتماً حد صورت در $x \rightarrow 1$ هم صفر است:

$$2 - \sqrt{1 + a + b} = 0 \Rightarrow 2 = \sqrt{1 + a + b} \Rightarrow a + b = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 - \sqrt{x^2 + ax + b}}{x - 1} \times \frac{2 + \sqrt{x^2 + ax + b}}{2 + \sqrt{x^2 + ax + b}} = 4$$

$\underbrace{2 + \sqrt{x^2 + ax + b}}_{x \rightarrow 1 \text{ در } = 4}$

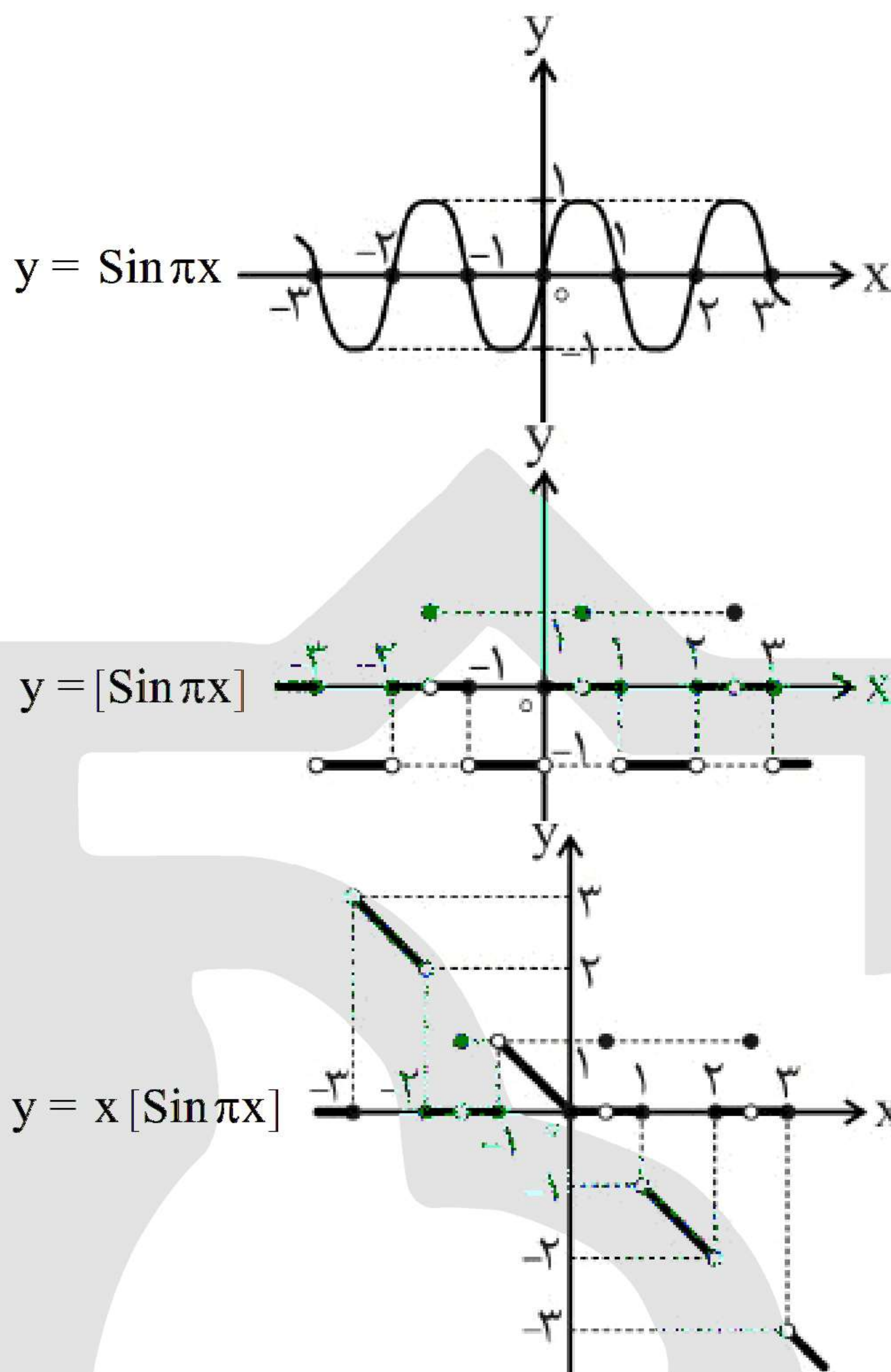
$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{-x^2 - ax - b + 4}{(x - 1)(4)} = 4$$

با تقسیم صورت بر $x - 1$ خارج قسمت برابر $(-x - a - 1)$ می شود و منخرج با توجه به شرط $a + b = 3$ مساوی صفر می شود:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(-x-a-1)}{4(x-1)} = 4 \Rightarrow \frac{-1-a-1}{4} = 4 \Rightarrow a = -18 \quad b = 21 \quad a \times b = -378$$



۷- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.



مطابق تعریف پیوستگی در بازه $[a, b]$ و با توجه به نمودار نهایی $y = x [\sin \pi x]$ در بازه $[-3, 3]$ ، این تابع در نقاط -3 و -2 و $-\frac{3}{2}$ و -1 و $-\frac{1}{2}$ و 1 و 2 و $\frac{5}{2}$ (۸ نقطه) ناپیوسته است.



۸- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$g(x) = 4 - x^2$ تعیین علامت

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$
		-	+	-

$$\Rightarrow (f \circ g)(x) = \begin{cases} -2 & ; x < -2 \text{ یا } x > 2 \\ 2 & ; -2 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

تابع مرکب fog در $x = -2$ و $x = 2$ ناپیوسته است (۲ نقطه ناپیوستگی)

$$(g \circ f)(x) = \begin{cases} 0 & ; x \geq 0 \\ 0 & ; x < 0 \end{cases} \Rightarrow (g \circ f)(x) = 0, x \in \mathbb{R}$$

\Rightarrow gof در \mathbb{R} پیوسته است (صفر نقطه ناپیوستگی)



$$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = [(-2)^+]^2 - [(-2)^+] = 4 - (-2) = 6$$

۹- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$f(-2) = [(-2)]^2 - [(-2)] = 4 - (-2) = 6 \quad \text{در } -2 \text{ پیوستگی راست دارد}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = [(-1)^+]^2 - [(-1)^+] = 1 - (-1) = 2 = f(-1) \quad \text{در } -1 \text{ ناپیوسته است}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = [(-1)^-]^2 - [(-1)^-] = 4 - (-2) = 6$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = [(0)^-]^2 - [(0)^-] = 1 + 1 = 2 \quad \text{در صفر ناپیوسته}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = [(0)^+]^2 - [(0)^+] = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = [1^-]^2 - [1^-] = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = [1^+]^2 - [1^+] = 0 = f(1) \quad \text{در } 1 \text{ پیوسته}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = [2^-]^2 - [2^-] = 0, \quad f(2) = [2]^2 - [2] = 2 \quad \text{در } 2 \text{ ناپیوسته}$$



$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} ax + 2b = 3a + b = 6$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} ax^2 + bx + 2 = 9a + 3b + 2 = 2$$

$$\begin{cases} 3a + 2b = 6 \\ 9a + 3b = 0 \end{cases} \Rightarrow -3b = -18 \Rightarrow b = 6 \Rightarrow a = -2$$

$$a + b = 4$$

۱۰- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.





«بانک سوال مؤسسه یاوران دانش»

۱۱- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{h \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{h \rightarrow 3^-} \frac{-2(x-3)}{\sqrt{2x+3}-x} \times \frac{\sqrt{2x+3}+x}{\sqrt{2x+3}+x} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{-2(\cancel{x-3})(\sqrt{2x+3}+x)}{-(\cancel{x-3})(x+1)}$$

$$= \frac{-2(6)}{-4} = 3 = L$$

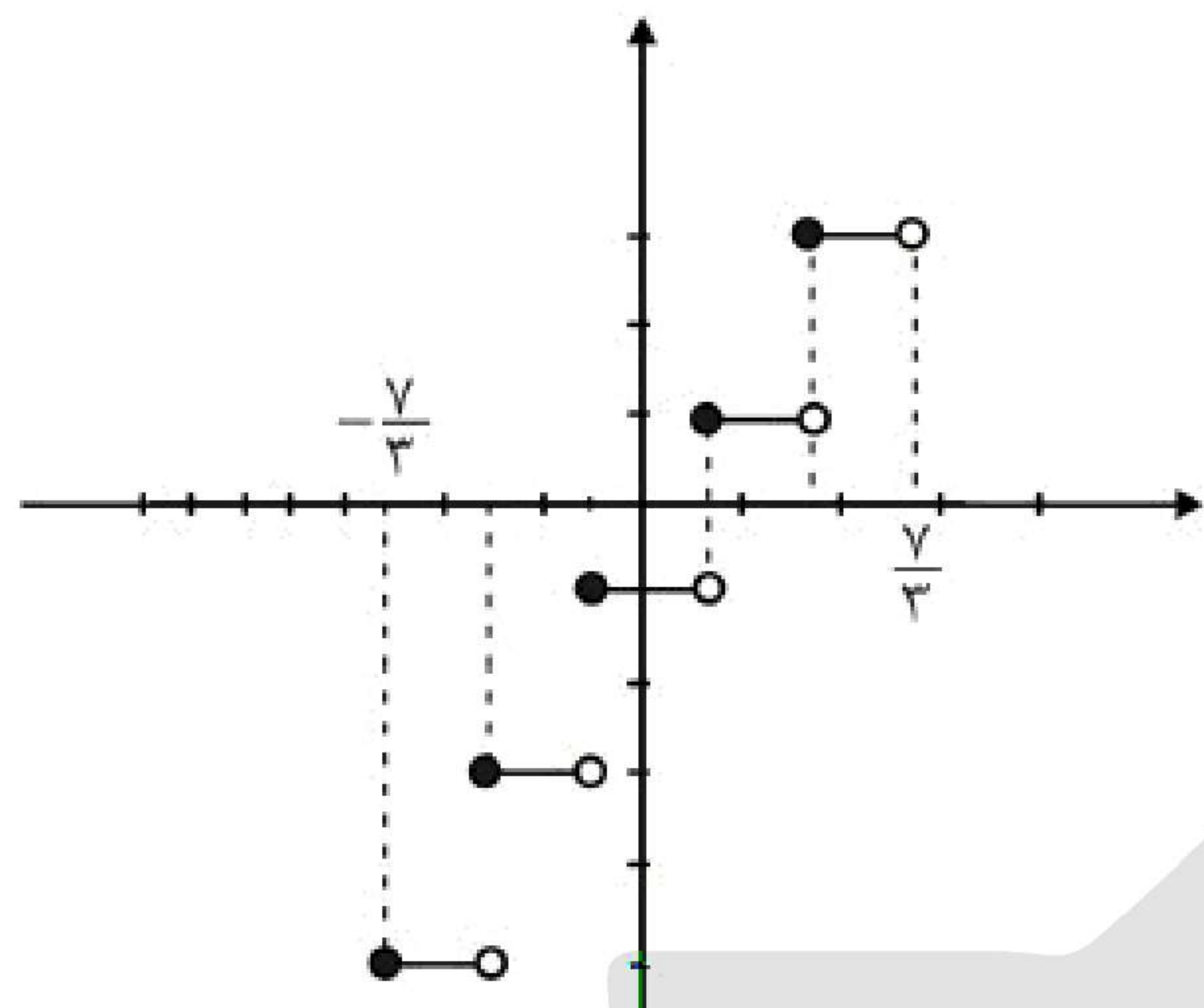
$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{3(x-3)}{\sqrt{2x+3}-x} \times \frac{\sqrt{2x+3}+x}{\sqrt{2x+3}+x} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{3(\cancel{x-3})(\sqrt{2x+3}+x)}{-(\cancel{x-3})(x+1)}$$

$$= \frac{3(6)}{-4} = -4/5 = R$$

$$L - 4R = 3 - 4(-4/5) = 21$$



۱۲- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.



$$f(x) = 2 \left[x + \frac{1}{3} \right] - 1$$

$$-\frac{1}{3} \leq x < \frac{2}{3} \leftarrow 0 \leq x + \frac{1}{3} < 1$$

$$\Rightarrow \left[x + \frac{1}{3} \right] = 0 \Rightarrow y = -1$$

$$\frac{2}{3} \leq x < \frac{5}{3} \leftarrow 1 \leq x + \frac{1}{3} < 2$$

$$\Rightarrow \left[x + \frac{1}{3} \right] = 1 \Rightarrow y = 1$$

$$\frac{5}{3} \leq x < \frac{8}{3} \leftarrow 2 \leq x + \frac{1}{3} < 3 \Rightarrow \left[x + \frac{1}{3} \right] = 2 \Rightarrow y = 3$$

$$-\frac{4}{3} \leq x < -\frac{1}{3} \leftarrow -1 \leq x + \frac{1}{3} < 0 \Rightarrow \left[x + \frac{1}{3} \right] = -1 \Rightarrow y = -3$$

$$-\frac{7}{3} \leq x < -\frac{4}{3} \leftarrow -2 \leq x + \frac{1}{3} < -1 \Rightarrow \left[x + \frac{1}{3} \right] = -2 \Rightarrow y = -5$$

تابع در نقاط $-\frac{4}{3}$, $-\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{3}$ ناپیوسته است.

$$f(x) = [x] - [-x]$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} ([x] - [-x]) = [1^-] - [- (1^-)] = 0 - (-1) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} ([x] - [-x]) = [1^+] - [- (1^+)] = 1 - (-2) = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) + \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1 + 3 = 4$$

۱۳- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.



۱۴- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$(۱) \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} \times \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\cancel{x-1}}{(\cancel{x-1})(\sqrt{x}+1)} = \frac{1}{2}$$

$$(۲) \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1 + a$$

$$(۳) f(1) = 1 + a$$

$$(۴) \lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = (1-b)(1) = 1-b$$

$$(۵) \lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = (1-b)(1) = 1-b$$

$$(۶) f(1) = (1-b)(1) = 1-b$$

$$۱, ۲, ۳ \Rightarrow 1+a = \frac{1}{2} \Rightarrow a = -\frac{1}{2} \quad (۷)$$

$$۴, ۵, ۶ \Rightarrow 1-b = 0 \Rightarrow b = 1 \quad (۸)$$

$$۷, ۸ \Rightarrow 2a+b = 0$$

۱۵- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. تابع $y = [x]$ فقط در نقاط صحیح بازه موردنظر به جز $x = -3$ (که پیوستگی راست دارد) یعنی $۳, ۲, ۱, ۰, -۱, -۲, -۳$ ناپیوسته است. اما چون عبارت $x^3 - x$ در سه نقطه $x = ۱$ و $x = ۰$ و $x = -۱$ صفر می شود، مشکل ناپیوستگی در این نقاط را رفع کرده و f در آن‌ها پیوسته می شود. بنابراین تابع $f(x)$ فقط در سه نقطه $x = ۲$ و $x = ۳$ و $x = -۲$ ناپیوسته است.

۱۶- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. می دانیم وقتی $x \rightarrow 3^+$: $|9 - x^2| = -(9 - x^2)$ و $[3^+] = 3$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{3x^3 - 81}{x^2 - 9} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{3(\cancel{x-3})(x^2 + 3x + 9)}{(\cancel{x-3})(x+3)} = \frac{3(27)}{6} = 13/2$$



$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(\sqrt{x}-1)(2\sqrt{x}-1)}{a(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = \frac{1}{2a}$$

$$f(1) = 2b - 1$$

۱۷- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

(توجه: اگر $0 < x < 1$ آنگاه $\sqrt{x} > x$)

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^3 - 1}{-(x - \sqrt{x})} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{-(x-\sqrt{x})} \times \frac{x+\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3(x-1)(2)}{-x(x-1)} = -6$$

$$\frac{1}{2a} = -6 = 2b - 1 \quad \begin{cases} a = -\frac{1}{12} \\ b = -\frac{5}{2} \end{cases}$$

شرط پیوستگی

$$4(3a - b) = 4\left(-\frac{1}{4} + \frac{5}{2}\right) = 9$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{(1 + \cos x)(1 - \cos x + \cos^2 x)}{(1 + \cos x)(1 - \cos x)} = \frac{3}{2}$$

۱۸- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.



۱۹- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$3x - 5 = 7 \Rightarrow 3x = 12 \Rightarrow x = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 7} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4} f(3x - 5) = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x-3}}{2x-3} = \frac{\sqrt{4-3}}{2(4)-3} = \frac{1}{5} = 0.2$$

۲۰- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sqrt{x+1} - \sqrt{x+4}}{1 - \sqrt{x+1}}$$

$x \rightarrow 0$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2\sqrt{x+1} - \sqrt{x+4})(2\sqrt{x+1} + \sqrt{x+4})(1 + \sqrt{x+1})}{(1 - \sqrt{x+1})(1 + \sqrt{x+1})(2\sqrt{x+1} + \sqrt{x+4})}$$

$x \rightarrow 0$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(4x+4-x-4)(1+\sqrt{x+1})}{(1-x-1)(2\sqrt{x+1}+\sqrt{x+4})} = -3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+\sqrt{x+1}}{2\sqrt{x+1}+\sqrt{x+4}} = -3 \times \frac{1+1}{2+2} = -\frac{3}{2}$$

۲۱- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 + \cos^3 x}{\sin^3 x} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{(1 + \cos x)(1 - \cos x + \cos^2 x)}{1 - \cos^2 x}$$

$x \rightarrow \pi$

$x \rightarrow \pi$

$$= \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{(1 + \cancel{\cos x})(1 - \cos x + \cos^2 x)}{(1 + \cancel{\cos x})(1 - \cos x)}$$

$x \rightarrow \pi$

$$= \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 - \cos x + \cos^2 x}{1 - \cos x} = \frac{1 - (-1) + (-1)^2}{1 - (-1)} = \frac{3}{2}$$

$x \rightarrow \pi$



۲۲- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. در نزدیکی $x = 2$ ، عبارت $x + 1$ مثبت و عبارت $(1 - 2x)$ منفی است، پس داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\overbrace{|x+1|}^{(+)} - \overbrace{|1-2x|}^{(-)}}{x^3 - 8} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+1) - (-1+2x)}{x^3 - 8}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\cancel{(x-2)}}{\cancel{(x-2)}(x^2 + 2x + 4)} = \frac{-1}{4 + 4 + 4} = \frac{1}{12}$$

۲۳- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. با توجه به شکل داریم:

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = 1, \lim_{x \rightarrow 1^+} [f(x)] = [3^-] = 2$$

$$\Rightarrow \text{جواب تست} = 1 + 2 = 3$$

۲۴- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. با قرار دادن $x = -\frac{\pi}{3}$ داریم:

$$\frac{2 \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) + \tan\left(-\frac{\pi}{3}\right)}{\cos\left(2\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) - \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)} = \frac{-2 \sin \frac{\pi}{3} - \tan \frac{\pi}{3}}{\cos \frac{2\pi}{3} - \cos \frac{\pi}{6}}$$

$$= \frac{-2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \sqrt{3}}{\cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{-2\sqrt{3}}{-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{-2\sqrt{3}}{-\frac{1}{2}(1 + \sqrt{3})}$$

ربع دوم

$$= \frac{4\sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} - 1} = \frac{4\sqrt{3}(\sqrt{3} - 1)}{2} = 6 - 2\sqrt{3}$$



۲۵- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

از روی نمودار $f(x)$ واضح است که اگر از سمت چپ به عدد ۲ نزدیک شویم، مقدار حد از ضابطه‌ی $y = 2$ (در محدوده‌ی $1 \leq x < 2$) به دست می‌آید. با توجه به این که تابع $y = 2$ ، ثابت است، مقدار حد نیز در سمت چپ ۲، برابر ۲ است:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(f(x)) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(2) = \lim_{x \rightarrow 2^-} 2 = 2$$

۲۶- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. تابع موردنظر باید در $x = 1$ ، $x = 2$ و $x = 3$ پیوسته باشد.

$$f(2) = \lim_{x \rightarrow 2} f(x) \Rightarrow b = a$$

$$f(1) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \Rightarrow a + b = b + c \Rightarrow a = c$$

$$f(3) = \lim_{x \rightarrow 3} f(x) \Rightarrow c = 9 - 1 \Rightarrow c = 8$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} (a + b + c + f^2(x)) = 16 + c^2 = 16 + 64 = 80$$

۲۷- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x \rightarrow 5} (f(x) + 4g(x)) = 7 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 5} f(x) + 4 \lim_{x \rightarrow 5} g(x) = 7$$

$$\lim_{x \rightarrow 5} (f(x) - 2g(x)) = -5 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 5} f(x) - 2 \lim_{x \rightarrow 5} g(x) = -5$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 5} f(x) = -1, \lim_{x \rightarrow 5} g(x) = 2$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 5} \frac{2f(x) + g(x)}{\sqrt{g(x) - f(x)}} = \frac{2 \lim_{x \rightarrow 5} f(x) + \lim_{x \rightarrow 5} g(x)}{\sqrt{\lim_{x \rightarrow 5} g(x) - \lim_{x \rightarrow 5} f(x)}} = \frac{-2 + 2}{\sqrt{2 + 1}} = 0$$



۲۸- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. باید نقاطی که درون براکت صحیح می‌شوند، نقاط مرزی ضابطه‌ها و نقاط ابتدا و انتهای دامنه بررسی شوند.

$x = -2$: نقطه‌ی ابتدای دامنه است.

$$x = -2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow (-2)} f(x) = \text{وجود ندارد}, \lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x) = -2$$

در نتیجه در $x = -2$ ناپیوسته است.

$$x = -1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = [(-1)^-] = -2, \lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = -1$$

در نتیجه در $x = -1$ هم ناپیوسته است.

$$x = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = [0^-] = -1, \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = [0^+] = 0$$

در نتیجه در $x = 0$ هم ناپیوسته است.

$$x = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = [1^-] = 0, \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 3(1) - 3 = 0$$

$$f(1) = 3(1) - 3 = 0$$

در نتیجه در $x = 1$ پیوسته است.

$$x = 4 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = 3 \times 4 - 3 = 9, \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = 4^2 - 7 = 9$$

$$f(4) = 16 - 7 = 9$$

در نتیجه در $x = 4$ پیوسته است.

$$x = 5 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) = 5^2 - 7 = 18, \lim_{x \rightarrow 5^+} f(x) = \text{وجود ندارد}$$

در نتیجه در $x = 5$ نیز ناپیوسته است، پس در ۴ نقطه ناپیوسته است.

۲۹- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} [-x] [-x^2] = [-(2^+)] [-(4^+)] = [(-2)^-] [(-4)^-] = (-3)(-5) = 15$$



۳۰- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. بازه $[2, 5]$ را به زیربازه‌هایی به طول یک تقسیم می‌کنیم تا تکلیف $[X]$ مشخص شود:

$$۱) 2 \leq x < 3 \Rightarrow [x] = 2 \Rightarrow f(x) = x - 2 + \cos\left(\frac{\pi}{2} \times 2\right) = x - 2 + (-1) = x - 3$$

$$۲) 3 \leq x < 4 \Rightarrow [x] = 3 \Rightarrow f(x) = x - 3 + \cos\left(\frac{\pi}{2} \times 3\right) = x - 3 + 0 = x - 3$$

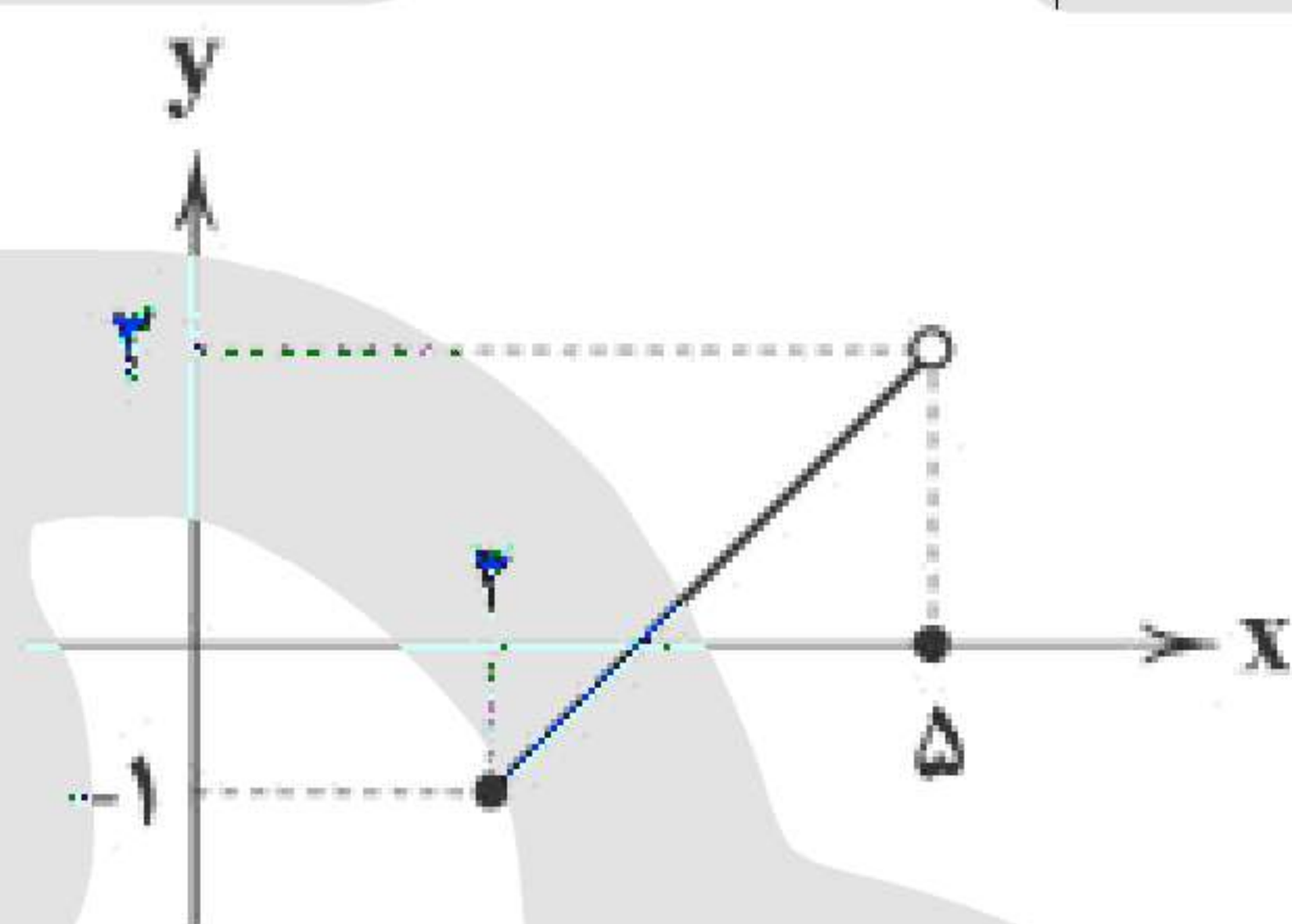
$$۳) 4 \leq x < 5 \Rightarrow [x] = 4 \Rightarrow f(x) = x - 4 + \cos\left(\frac{\pi}{2} \times 4\right) = x - 4 + 1 = x - 3$$

$$x = 5 \Rightarrow f(5) = 5 - 5 + \cos\left(\frac{5\pi}{2}\right) = 0 + 0 = 0$$

بنابراین ضابطه‌ی تابع f به صورت زیر ساده می‌شود:

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} x - 3 & 2 \leq x < 5 \\ 0 & x = 5 \end{cases}$$

حال نمودار تابع را در بازه $[2, 5]$ رسم می‌کنیم:



با توجه به نمودار، تابع فقط در $x = 5$ ناپیوسته است.

۳۱- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (-x + 5) = -1 + 5 = 4 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 4 - 1 = 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) - \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 4 - 1 = 3$$



۳۲- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$A = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x^3 + 1) + (x + 1)}{(x^2 - 1)(x^2 + 1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x + 1)(x^2 - x + 1 + 1)}{(x + 1)(x - 1)(x^2 + 1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x^2 - x + 2)}{(x - 1)(x^2 + 1)}$$

$$= \frac{1 + 1 + 2}{(-1 - 1)(1 + 1)} = \frac{4}{-2} = -1$$

$$B = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} [\sin x] = [1^-] = *$$

$$A + B = -1 + * = -1$$

۳۳- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. تابع g در $x = *$ پیوستگی راست ندارد زیرا:

$$\begin{cases} g(*) = * \\ \lim_{x \rightarrow *^+} [-2x] = -1 \end{cases}$$

تابع g در مضارب $\frac{1}{2}$ پیوسته نیست.

تابع g در $x = \frac{1}{2}$ پیوستگی چپ دارد زیرا:

$$\begin{cases} g\left(\frac{1}{2}\right) = [-1] = -1 \\ \lim_{x \rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^-} [-2x] = \left[-2\left(\frac{1}{2}\right)^-\right] = [-(1^-)] = -1 \end{cases}$$

بنابراین تابع g در بازه $\left(0, \frac{1}{2}\right]$ پیوسته است.



«بانک سوال موسسه یاوران دانش»

۳۴- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) + \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} f(x) = 5$$

$$\Rightarrow 2 + 3 + \lim_{x \rightarrow a} f(x) = 5 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$$

با توجه به نمودار تابع f در دو نقطه حد تابع $f(x)$ برابر صفر است یکی از آنها $x = 2$ است و دیگری محل برخورد نیم‌خط با محور x است.

$$A(1, 3), B(0, 2) \Rightarrow y = x + 2$$

$$\lim_{x \rightarrow a} (x + 2) = 0 \Rightarrow a = -2$$

پس مجموع مقادیر a برابر صفر است.

۳۵- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. باید مقدار تابع، حد چپ و راست را در $x = 2$ به دست آوریم:

$$f(2) = [8] - [-4] = 8 - (-4) = 12$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = [8^+] - [- (4^+)] = 8 - (-5) = 13 \neq f(2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = [8^-] - [- (4^-)] = 7 - (-4) = 11 \neq f(2)$$

بنابراین گزینه‌ی (۴) پاسخ درست است.

۳۶- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{5x + 1}{[x]} = \frac{5(2) + 1}{2} = \frac{11}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{5x + 1}{[x]} = \frac{5(2) + 1}{1} = 11$$

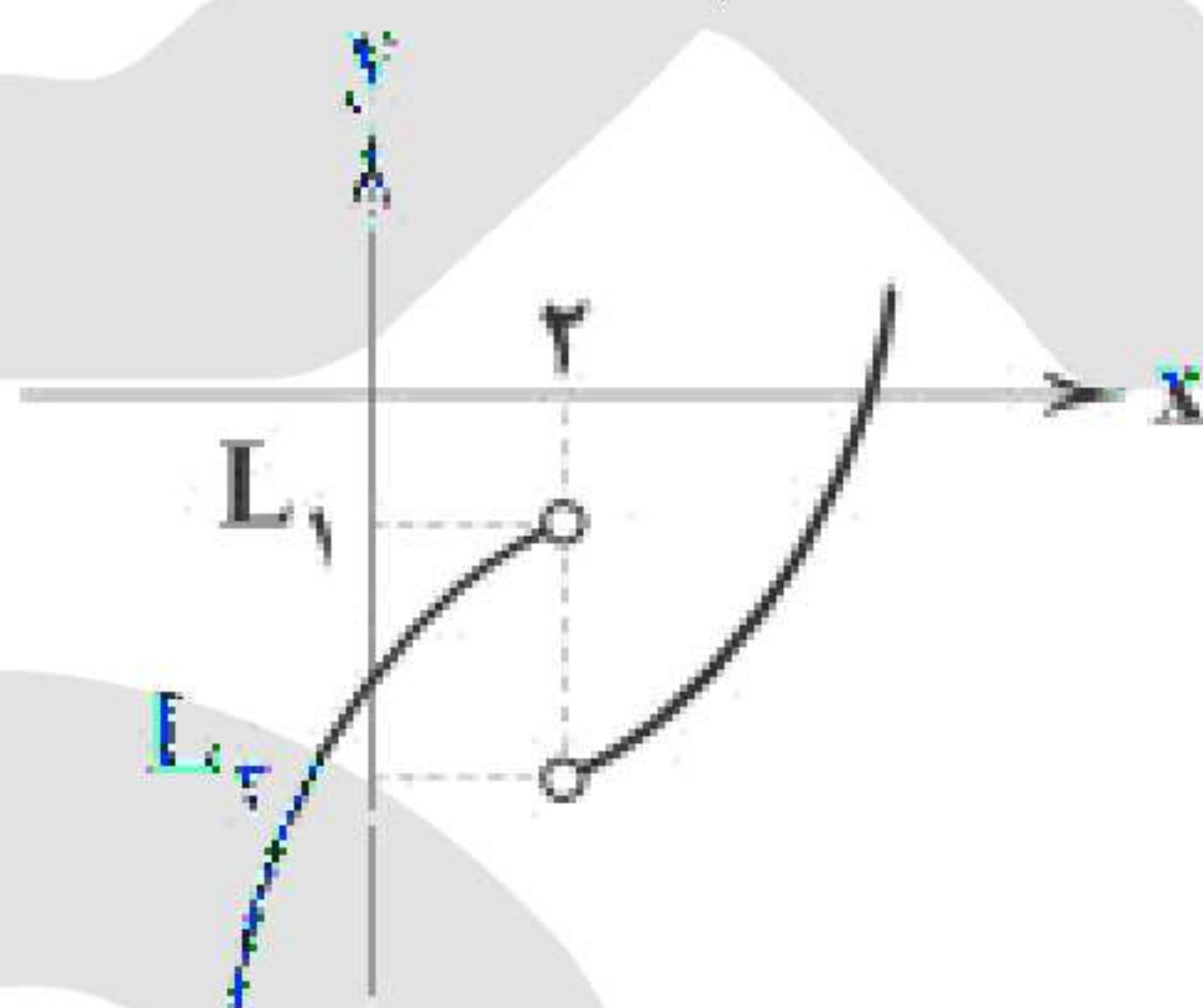
$$\Rightarrow 11 - \frac{11}{2} = \frac{11}{2} = 5.5$$



۳۷- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. تابع f در $x = 1$ حد دارد. $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \sqrt[3]{1-1} = 0$

دقت کنید که اگر فرجه ی رادیکال، عددی زوج بود، آن گاه باید وجود حد راست و چپ بررسی می شد.

۳۸- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. شکل زیر را در نظر می گیریم:



$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{|f(x)|}{f(x)} = \frac{|L_2|}{L_2} \stackrel{L_2 < 0}{=} -\frac{L_2}{L_2} = -1 \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{|f(x)|}{f(x)} = \frac{|L_1|}{L_1} \stackrel{L_1 < 0}{=} -\frac{L_1}{L_1} = -1 \end{array} \right.$$

چون حد چپ و راست هر دو برابر (-1) است، پس حد تابع در $x = 2$ برابر (-1) است.

۳۹- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. دامنه ی تابع $f(x) = \sqrt{9-x^2}$ ، بازه ی $[-3, 3]$ است، زیرا:

$$9 - x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \leq 9 \Rightarrow -3 \leq x \leq 3$$

در نتیجه در $x = -3$ فقط حد راست دارد و در $x = 3$ فقط حد چپ و هر دو برابر با صفر هستند.



۴۰- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$f(0) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x(x+1)}{2x+x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cancel{x}(x+1)}{3\cancel{x}} = \frac{1}{3} \neq f(0)$$

پس تابع در $x = 0$ پیوستگی راست ندارد.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x(x+1)}{2x+(-x)} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\cancel{x}(x+1)}{\cancel{x}} = 0 + 1 = 1 = f(0)$$

پس تابع در $x = 0$ فقط پیوستگی چپ دارد.

