

گنجینه سوال رایگان
+ پاسخ تشریحی

یاوران دانش



راه های ارتباطی با ما:

www.Dyavari.com

۰۲۱-۷۶۷۰۳۸۵۸

۰۹۱۲-۳۴ ۹۴ ۱۳۴



	۱	۲	۳	۴
۱ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۴ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۵ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۶ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۷ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۸ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۹ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۰ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۱ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۲ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۳ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۱۴ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۵ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۶ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۷ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۸ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۱۹ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۰ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۱ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۲ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۲۳ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۴ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۵ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۶ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۷ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۸ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۹ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۰ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۱ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۲ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۳ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۴ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۵ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۶ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۷ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۸ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۳۹ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۴۰ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>





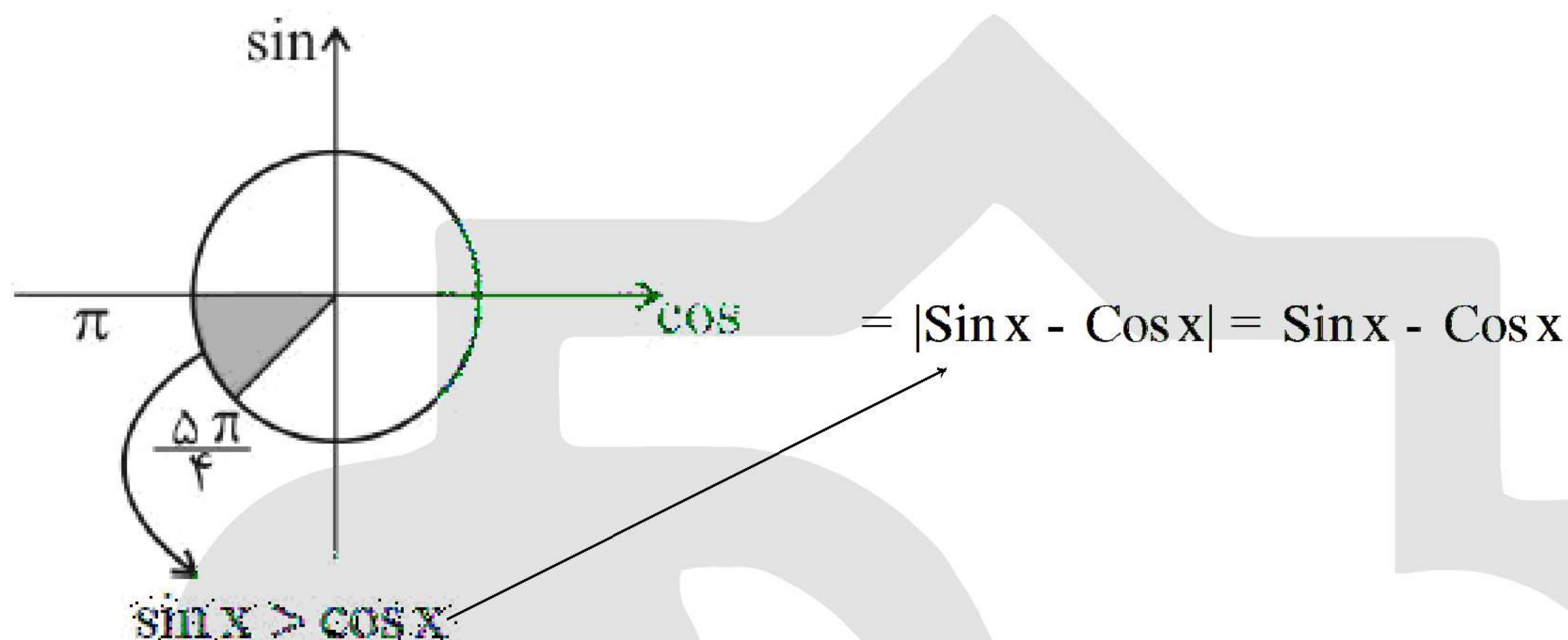
$$\sqrt{1 - 2\sqrt{\sin^2 x (1 - \sin^2 x)}} = \sqrt{1 - 2\sqrt{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}}$$

۱- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\pi < x < \frac{5\pi}{4} \Rightarrow \sin x < 0, \cos x < 0$$

$$= \sqrt{1 - 2|\sin x||\cos x|} \xrightarrow{\pi < x < \frac{5\pi}{4}}$$

$$= \sqrt{1 - 2\sin x \cos x} = \sqrt{(\sin x - \cos x)^2}$$



۲- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

θ بر حسب رادیان است

\uparrow

$\widehat{AB} = R \cdot \theta$

$OA = OB = R$ شعاع دایره

\uparrow رادیان

OAB محیط $= 2R + R \cdot \theta = 10.8$

رادیان $2 \times 2.4 + 2.4\theta = 10.8 \Rightarrow \theta = 2/5$

θ بر حسب درجه $= \frac{180}{\pi} \times 2/5 = \frac{180}{3} \times 2/5 = 150^\circ$

۳- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. کسینوس، منفی کمان خود را حذف ولی تانژانت، منفی کمان را به ضریب منتقل می کند:

$$4 \sin\left(6\pi - \frac{\pi}{3}\right) \cos\left(3\pi - \frac{\pi}{6}\right) - 8 \operatorname{tg}\left(5\pi - \frac{\pi}{4}\right) \sin\left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right)$$

دوره های دایره در محاسبه نسبت مثلثاتی تأثیری ندارند.

$$-4 \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) - 8 \operatorname{tg}\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$$

$$= +4 \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) - 8 \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}\right) \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - 8 \times 1 \times \frac{1}{2} = 3 - 4 = -1$$



۴- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. شیب خط برابر است با تانژانت زاویه‌ای که خط با جهت مثبت محور افقی می‌سازد، بنابراین:

$$y = \underbrace{-0.4x + \frac{1}{3}}_{\text{شیب خط}} \Rightarrow \text{tg } 160^\circ = -0.4 \Rightarrow \text{tg}(\pi - 20^\circ) = -0.4 \Rightarrow -\text{tg } 20^\circ = -0.4 \Rightarrow \text{tg } 20^\circ = 0.4$$

شیب خط = $\text{tg } \alpha$

$$\frac{\sin\left(\frac{3\pi}{2} - 20^\circ\right) + \sin(2\pi - 20^\circ)}{\cos(2\pi + \pi + 20^\circ) - \cos\left(\frac{\pi}{2} + 20^\circ\right)} = \frac{-\cos 20^\circ - \sin 20^\circ}{-\cos 20^\circ + \sin 20^\circ}$$

صورت و مخرج بر $\cos 20^\circ$ تقسیم می‌شود

$$\frac{-1 - \text{tg } 20^\circ}{-1 + \text{tg } 20^\circ} = \frac{-1 - 0.4}{-1 + 0.4} = \frac{-1.4}{-0.6} = \frac{7}{3}$$

۵- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$1 + \text{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow 1 + \frac{9}{16} = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow \cos \alpha = \pm \frac{4}{5}$$

ناحیه دوم مثلثاتی

$$\cos \alpha = -\frac{4}{5}$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \Rightarrow \frac{-3}{4} = \frac{\sin \alpha}{-\frac{4}{5}} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{3}{5}$$

$$\text{Cotg } \alpha = \frac{1}{\text{tg } \alpha} = -\frac{4}{3}$$

عبارت مورد نظر

$$= \frac{25 \sin^2 \alpha - 9 \text{Cotg } \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{25 \times \frac{9}{25} - 9 \left(-\frac{4}{3}\right)}{1 - \frac{4}{5}} = \frac{21}{\frac{1}{5}} = 105$$

۶- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

صرف نظر از دور دایره

$$\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} + 14^\circ\right) - \sin(\cancel{2\pi} + \pi - 14^\circ)}{-\cos\left(\frac{3\pi}{2} + 14^\circ\right) - \sin\left(\frac{3\pi}{2} - 14^\circ\right)} = \frac{\cos 14^\circ - \sin 14^\circ}{+\sin 14^\circ + \cos 14^\circ}$$

صورت و مخرج تقسیم بر $\cos 14^\circ$

$$\frac{1 - \text{tg } 14^\circ}{\text{tg } 14^\circ + 1} = \frac{1 - 0.25}{0.25 + 1} = \frac{0.75}{1.25} = \frac{3}{5} = 0.6$$



۷- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. می‌دانیم:

$$\sin\left(\frac{19\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{16\pi + 3\pi}{4}\right) = \sin\left(4\pi + \frac{3\pi}{4}\right) = \sin\frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos(945^\circ) = \cos(\underbrace{720^\circ}_{2 \times 360^\circ} + 225^\circ) = \cos(225^\circ) = \cos(180^\circ + 45^\circ) = -\cos 45^\circ = \frac{-\sqrt{2}}{2}$$

پس فرض مسئله به این صورت می‌شود:

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \sin \alpha + \left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right) \cos \alpha = \frac{1}{3} \xrightarrow[\text{طرفین تقسیم بر } \frac{\sqrt{2}}{2}]{\text{طرفین تقسیم بر } \frac{\sqrt{2}}{2}} \sin \alpha - \cos \alpha = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$\Rightarrow \sin \alpha - \cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

طرفین تساوی اخیر را به توان دو می‌رسانیم:

$$(\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2 \Rightarrow \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha - 2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{2}{9} = 1 - \sin^2 \alpha = \frac{2}{9}$$

$$\Rightarrow \sin^2 \alpha = \frac{7}{9}$$

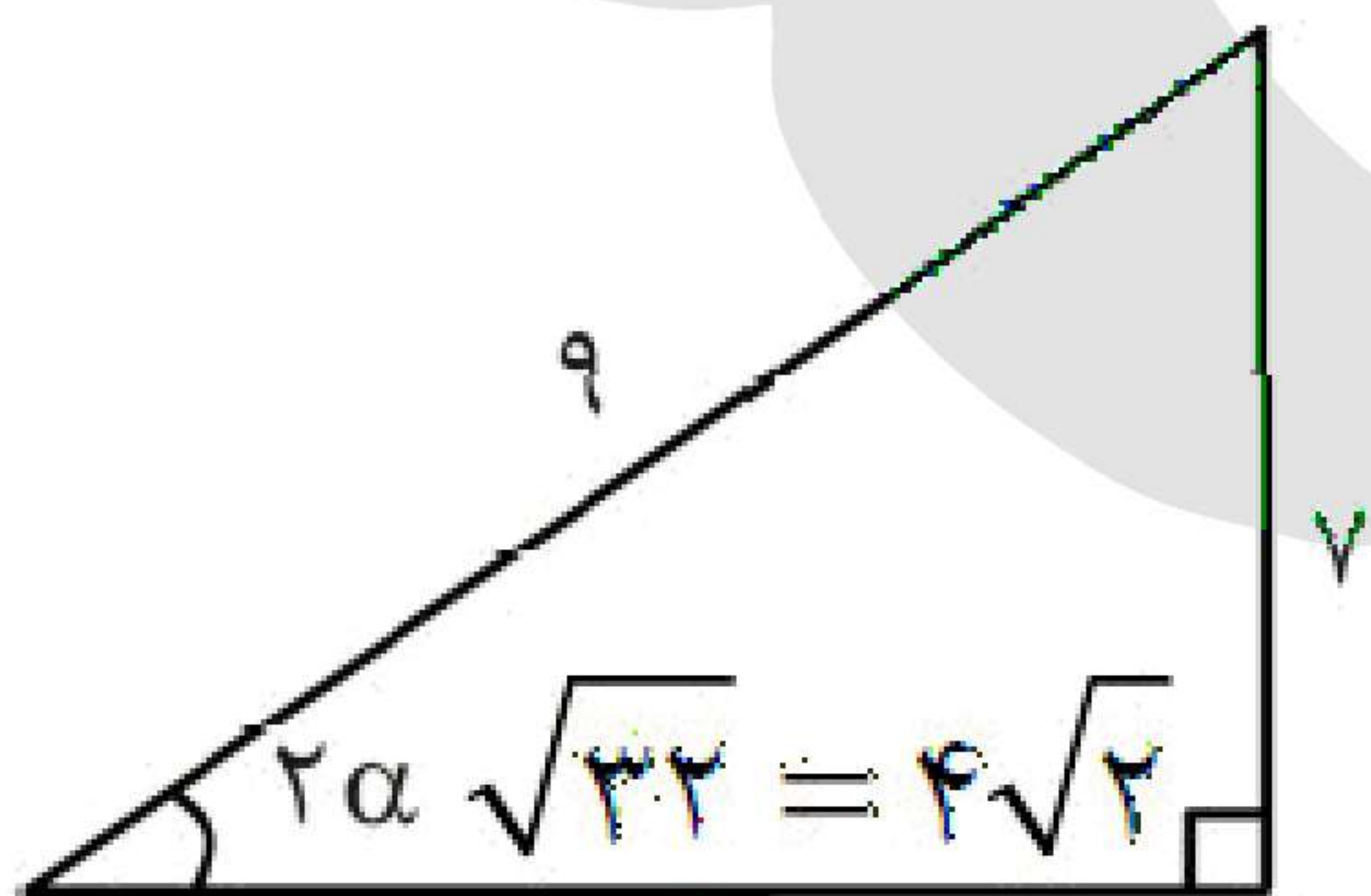
می‌دانیم شیب یک خط، \tan زاویه‌ای است که آن خط با جهت مثبت محور x ها می‌سازد که در اینجا می‌شود:

$$m = \tan 2\alpha$$

$$\begin{cases} \sin^2 \alpha = \frac{7}{9} \\ \tan 2\alpha = ? \end{cases}$$

یعنی:

از طریق رسم یک مثلث قائم‌الزاویه فرضی عمل می‌کنیم:



$$\Rightarrow \tan 2\alpha = \frac{7}{4\sqrt{2}} \Rightarrow m = \frac{?}{4\sqrt{2}}$$

(دقت کنید که $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$ و لذا $0 < 2\alpha < \frac{\pi}{2}$ است، یعنی زاویه 2α در ربع اول دایره مثلثاتی و مقدار \tan آن

مثبت است) پس معادله خط موردنظر به صورت $y = \frac{7}{4\sqrt{2}}x + h$ است که با جایگذاری نقطه $(\sqrt{2}, 0)$ در آن

$$0 = \frac{7}{4\sqrt{2}}(\sqrt{2}) + h \Rightarrow 0 = \frac{7}{4} + h \Rightarrow h = \frac{-7}{4}$$

داریم:



$$\cos \alpha = \frac{2}{2m-1}$$

۸- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. واضح است که:

$$\cos \beta = \frac{3}{5-m}$$

α , β هر دو در ربع اول دایره مثلثاتی و \cos آن‌ها مثبت است، یعنی عددی بین صفر و یک، پس داریم:

$$\begin{cases} 0 < \frac{2}{2m-1} < 1 \Rightarrow \begin{cases} 0 < 2m-1 \Rightarrow \frac{1}{2} < m \\ 2 < 2m-1 \Rightarrow \frac{3}{2} < m \end{cases} \Rightarrow \frac{3}{2} < m \quad (1) \\ 0 < \frac{3}{5-m} < 1 \Rightarrow \begin{cases} 0 < 5-m \Rightarrow m < 5 \\ 3 < 5-m \Rightarrow m < 2 \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} m < 2 \quad (2) \end{cases}$$

$$\frac{3}{2} < m < 2$$

از اشتراک بین ۱ و ۲ داریم:

دقت کنید با توجه به صورت تست، $\alpha < \beta$ است و لذا در ربع اول:

$$\cos \alpha > \cos \beta \Rightarrow \frac{2}{2m-1} > \frac{3}{5-m}$$

برای حل این نامساوی، طرفین را در عبارت‌های $(5-m)$ و $(2m-1)$ (که در قسمت قبل دیدیم، عبارت‌هایی همواره مثبت هستند) ضرب می‌کنیم:

$$2(5-m) > 3(2m-1) \Rightarrow 10-2m > 6m-3 \Rightarrow 13 > 8m \Rightarrow m < \frac{13}{8}$$

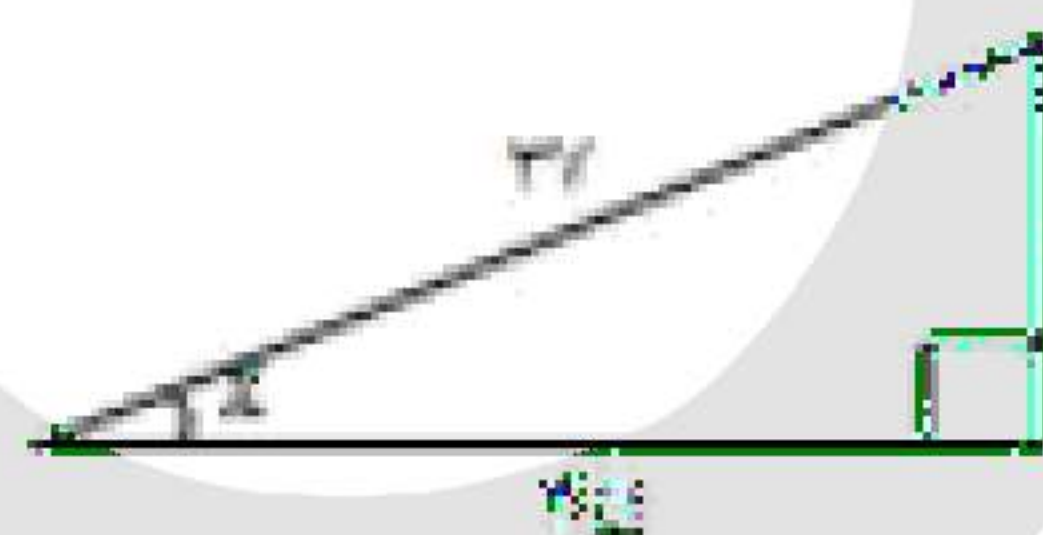
$$\frac{3}{2} < m < \frac{13}{8}$$

از اشتراک این محدوده با $\frac{3}{2} < m < 2$ داریم:

۹- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

اعداد ۱۲ و ۳۵ و ۳۷ فیثاغورثی‌اند، بنابراین ساده‌ترین روش برای به‌دست آوردن نسبت‌ها مثلثاتی x در نظر

گرفتن مثلث قائم‌الزاویه و توجه به این نکته است که در ناحیه‌ی چهارم مثلثاتی فقط \cos



مثبت و سه نسبت دیگر \sin و \tan و \cot منفی‌اند:

$$\cot x = \frac{-35}{12}, \tan x = \frac{-12}{35}, \sin x = \frac{-12}{37}, \cos x = \frac{35}{37}$$

$$36 \tan\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - 35 \cot\left(-\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)\right) - 74 \cos(-(\pi - x)) - 111 \cos\left(-\left(\frac{13\pi}{2} - x\right)\right)$$

$$= -36 \cot x + 35 \tan x + 74 \cos x - 111 \sin x$$

$$= -36 \left(\frac{-35}{12}\right) + 35 \left(\frac{-12}{35}\right) + 74 \left(\frac{35}{37}\right) - 111 \left(\frac{-12}{37}\right) = 105 - 12 + 70 + 36 = 199$$



۱۰- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\frac{2 \sin(2 \times 360^\circ + 180^\circ - 15^\circ) + \cos(2 \times 360^\circ + 90^\circ + 15^\circ)}{2 \sin(2 \times 360^\circ + 90^\circ - 15^\circ) - \cos(2 \times 360^\circ + 15^\circ)} \cdot \frac{\sin(180^\circ + 75^\circ)}{\cos(360^\circ + 75^\circ)}$$

$$= \frac{2 \sin 15^\circ - \sin 15^\circ}{2 \cos 15^\circ - \cos 15^\circ} \cdot \frac{-\sin 75^\circ}{\cos 75^\circ} = -\operatorname{tg} 15^\circ \cdot \operatorname{tg} 75^\circ = -\operatorname{tg} 15^\circ \cdot \operatorname{Cotg} 15^\circ = -1$$

۱۱- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$f(x) = 2 \sin^2 x - 5(1 - \sin^2 x) + 11$$

$$f(x) = 7 \sin^2 x + 6$$

$$\text{چون } 0 \leq \sin^2 x \leq 1 \xrightarrow{\times 7} 0 \leq 7 \sin^2 x \leq 7 \xrightarrow{+6} 6 \leq 7 \sin^2 x + 6 \leq 13 \Rightarrow 6 \leq f(x) \leq 13$$

نمودار تابع ۸ خط افقی با عرض صحیح $y = 6$ و $y = 7$ و ... و $y = 13$ را قطع می‌کند.

۱۲- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$-\cos \alpha \cdot \cos \alpha + 2 \cos \alpha (\cos \alpha) + \sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$$

۱۳- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\sin \theta = \frac{-5}{13} \Rightarrow \cos^2 \theta = 1 - \frac{25}{169} = \frac{144}{169} \Rightarrow \cos \theta = \pm \frac{12}{13} \Rightarrow \cos \theta = \frac{12}{13}$$

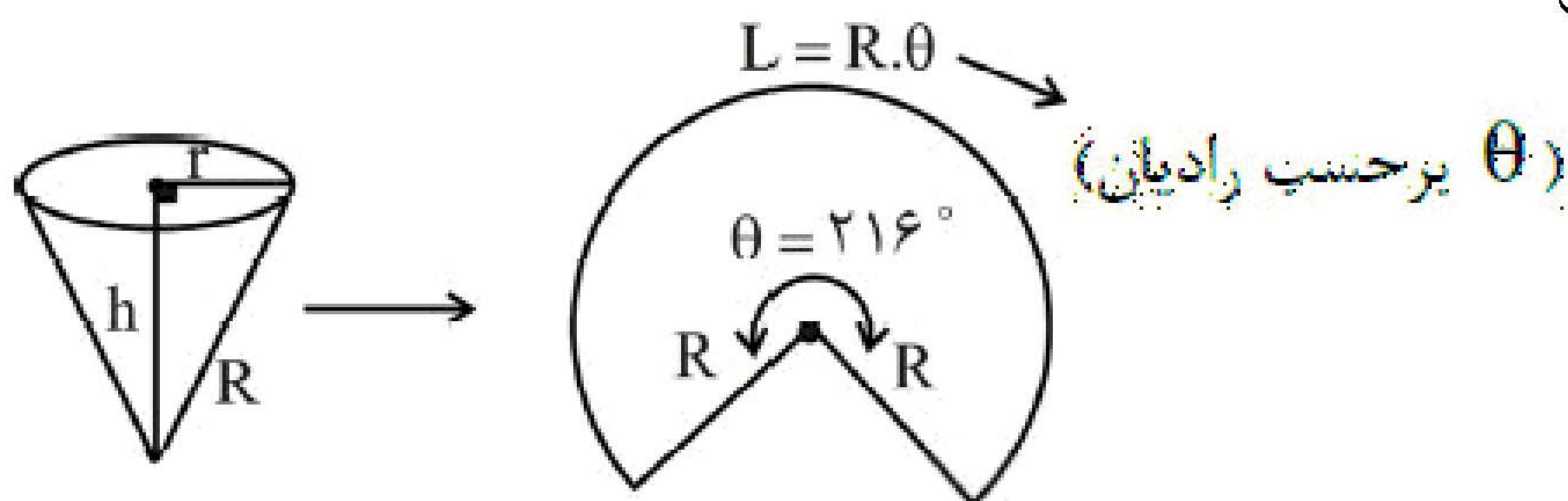
انتهای کمان در ربع چهارم

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\frac{-5}{13}}{\frac{12}{13}} = -\frac{5}{12}, \operatorname{Cotg} \theta = -\frac{12}{5}$$

$$-5 \operatorname{Cotg} \theta + 12 \operatorname{tg} \theta - \cos \theta + \cos \theta = -5 \left(-\frac{12}{5} \right) + 12 \left(-\frac{5}{12} \right) = 12 - 5 = 7$$



۱۴- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.



$$\frac{D \text{ درجه}}{180} = \frac{\theta \text{ رادیان}}{\pi} \Rightarrow \frac{216}{180} = \frac{\theta}{\pi} \Rightarrow \theta = \frac{6\pi}{5} \text{ رادیان} \xrightarrow{\pi=3} \theta = \frac{18}{5}$$

$$\theta = \frac{L}{R} \Rightarrow \frac{18}{5} = \frac{L}{R} \Rightarrow L = \frac{18}{5}R \quad \text{طول کمان قطاع}$$

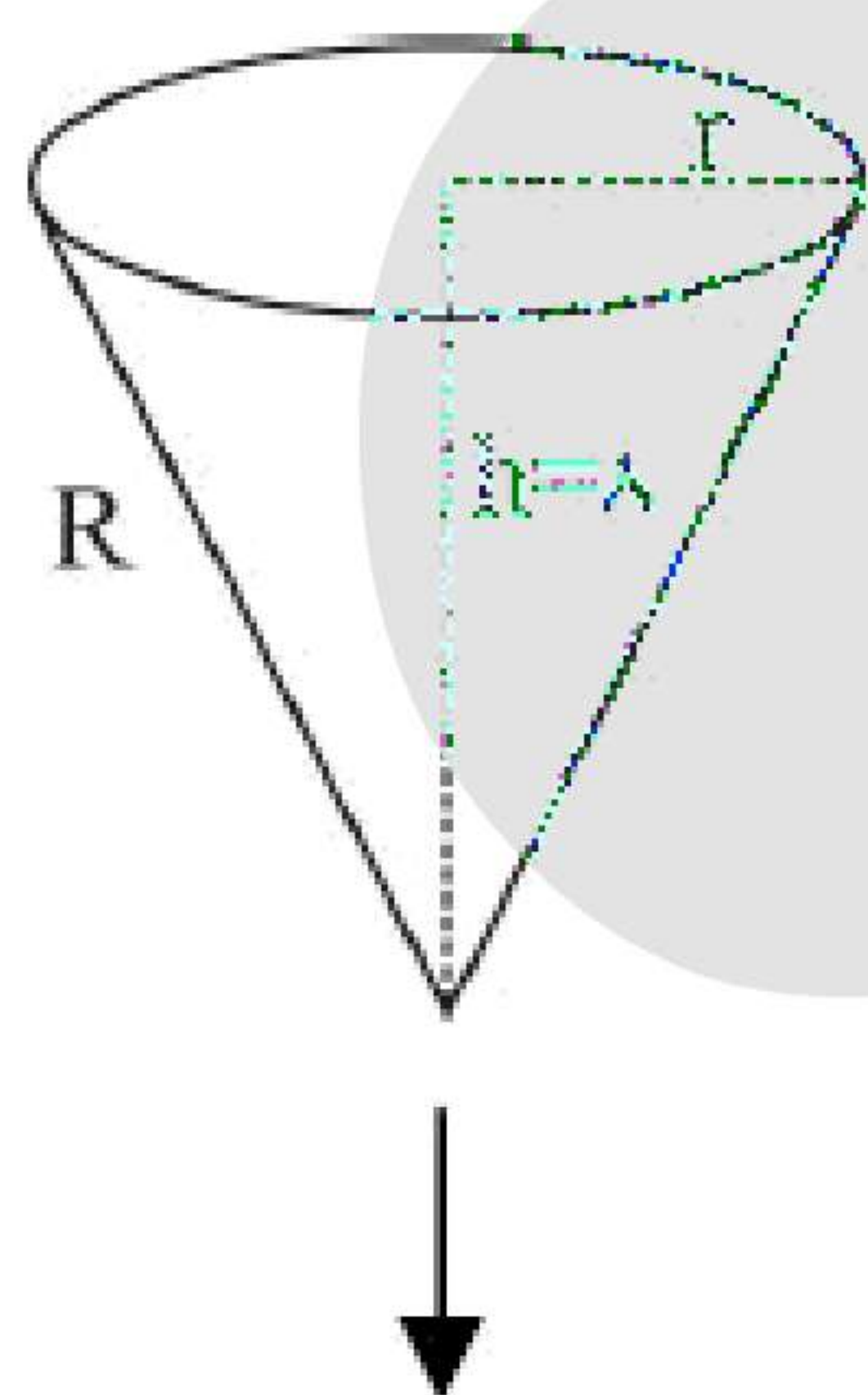
$$\text{محیط قطاع} = 56 \Rightarrow 2R + L = 56 \Rightarrow 2R + \frac{18}{5}R = 56 \Rightarrow R = 10$$

$$2\pi r = L \Rightarrow 2 \times 3 \times r = \frac{18}{5} \times 10 \Rightarrow r = 6$$

$$R^2 = r^2 + h^2 \Rightarrow 10^2 = 6^2 + h^2 \Rightarrow h = 8$$

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot h = \frac{1}{3} \times 3 \times 6^2 \times 8 = 288$$

۱۵- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.



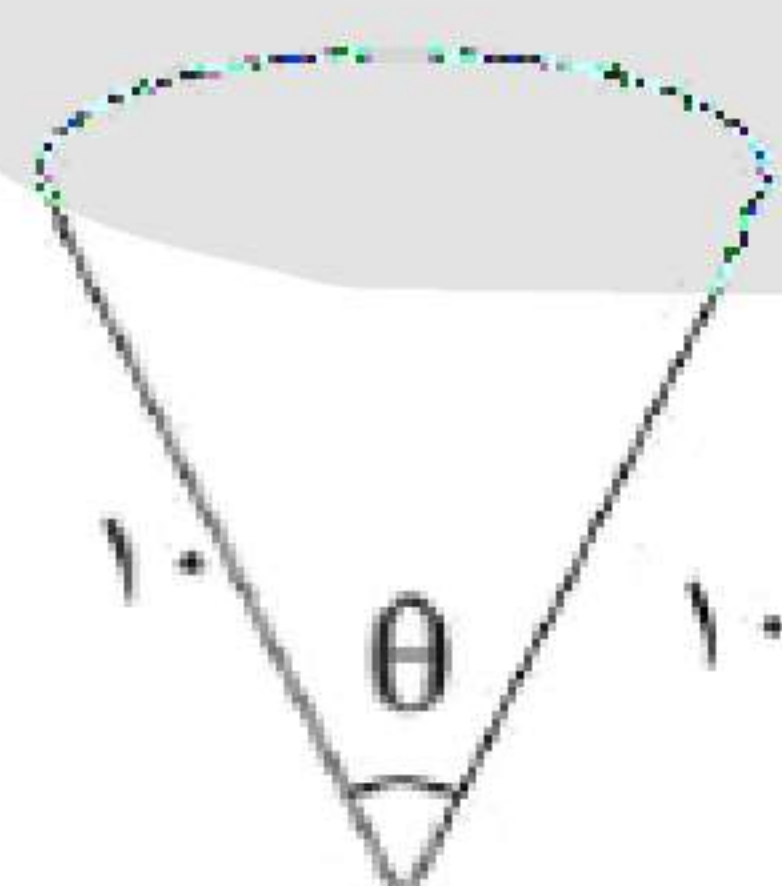
$$v = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot h$$

$$288 = \frac{1}{3} \times 3 \times r^2 \times 8$$

$$r = 6 \Rightarrow r^2 + h^2 = R^2 \Rightarrow R = 10$$

$$L = 2\pi r = 36$$

قطاع حاصل از شکل گسترده



$$\begin{cases} \text{محیط} = 10 + 10 + 36 = 56 \\ L = R \cdot \theta \Rightarrow \text{رادیان} \end{cases}$$

$$36 = 10 \times \theta \Rightarrow \theta = \frac{3}{5} \text{ رادیان}$$

$$s_{\text{قطاع}} = \frac{1}{2}R^2 \cdot \theta \Rightarrow s_{\text{قطاع}} = \frac{1}{2}(10)^2 \times \frac{3}{5} = 150$$

$$\text{اختلاف محیط و مساحت قطاع} = 150 - 56 = 94$$



۱۶- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$A = \frac{3 \sin(90^\circ + 20^\circ) + \sin(720^\circ - 20^\circ)}{2 \cos(180^\circ + 20^\circ) + \cos(270^\circ - 20^\circ)} = \frac{3 \cos 20^\circ - \sin 20^\circ}{-2 \cos 20^\circ - \sin 20^\circ}$$

صورت و مخرج را بر $\cos 20^\circ$ تقسیم می‌کنیم.

$$A = \frac{3 - \tan 20^\circ}{-2 - \tan 20^\circ} = \frac{3 - 0.4}{-2 - 0.4} = \frac{2.6}{-2.4} = -\frac{13}{12}$$

«بانک سوال موسسه یاوران دانش»

۱۷- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\frac{D}{\pi} = \frac{D}{180} \Rightarrow \frac{R}{\pi} = \frac{180}{180} \Rightarrow R = \frac{4\pi}{9}$$

$$\angle AOB = \frac{\pi}{4} + \frac{4\pi}{9} = \frac{9\pi + 16\pi}{36} = \frac{25\pi}{36}$$

$$L = R\theta \Rightarrow \frac{25\pi}{18} = \frac{25\pi}{36} R \Rightarrow R = 2$$

$$S = \pi R^2 \Rightarrow \frac{S}{\pi} = R^2 = 4$$

۱۸- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$A = \sqrt{1 + \cot^2 x + \cos^2 x - 2 \cot x} = \sqrt{\frac{1}{\sin^2 x} + \cos^2 x - \frac{2 \cos x}{\sin x}}$$

$$A = \sqrt{\left(\frac{1}{\sin x} - \cos x\right)^2} = \left|\frac{1}{\sin x} - \cos x\right|$$

x در ناحیه‌ی اول و در نتیجه $0 < \sin x < 1$ و $0 < \cos x < 1$ می‌باشد پس می‌توان نتیجه گرفت که $\frac{1}{\sin x} > \cos x$ و در نهایت $A = \frac{1}{\sin x} - \cos x$ است.

$$A = \frac{1 - \sin x \cos x}{\sin x}$$

۱۹- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$f(x) = \sin\left(-\left(x - \frac{\pi}{6}\right)\right) = -\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$$

تابع $f(x)$ از انتقال $\sin x$ به اندازه‌ی $\frac{\pi}{6}$ واحد به سمت راست و سپس قرینه شدن نسبت به محور x ها به دست آمده است. اندازه‌ی BC برابر π است و اندازه‌ی AB برابر ۲ است.

$$S(\widehat{ABC}) = \frac{1}{2} \times 2 \times \pi = \pi$$



۲۰- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. هر یک رادیان تقریباً $57/3^\circ$ است پس $\alpha = 10^\circ \text{ rad} = 573^\circ$
 $\alpha = 573^\circ = 360^\circ + 213^\circ$

پس α در ناحیه سوم قرار دارد و $\tan \alpha > 0$ و $\sin \alpha \cos \alpha > 0$ است. حال $\frac{\alpha}{2}$ و $\frac{\alpha}{4}$ را حساب کنیم:

$$\frac{\alpha}{2} = 5^\circ \text{ rad}$$

5° rad در ناحیه چهارم و $\sin \frac{\alpha}{2} < 0$ است.

$$\frac{\alpha}{4} = 2/5^\circ \text{ rad}$$

$2/5^\circ \text{ rad}$ در ناحیه دوم و $\cos \frac{\alpha}{4}$ منفی است، پس $-\cos \frac{\alpha}{4} > 0$ می باشد.

۲۱- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\alpha - \beta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \beta = \alpha - \frac{\pi}{2} \Rightarrow \tan \beta = \tan \left(\alpha - \frac{\pi}{2} \right) \Rightarrow \tan \beta = -\cot \alpha = \frac{-1}{\tan \alpha} \quad (*)$$

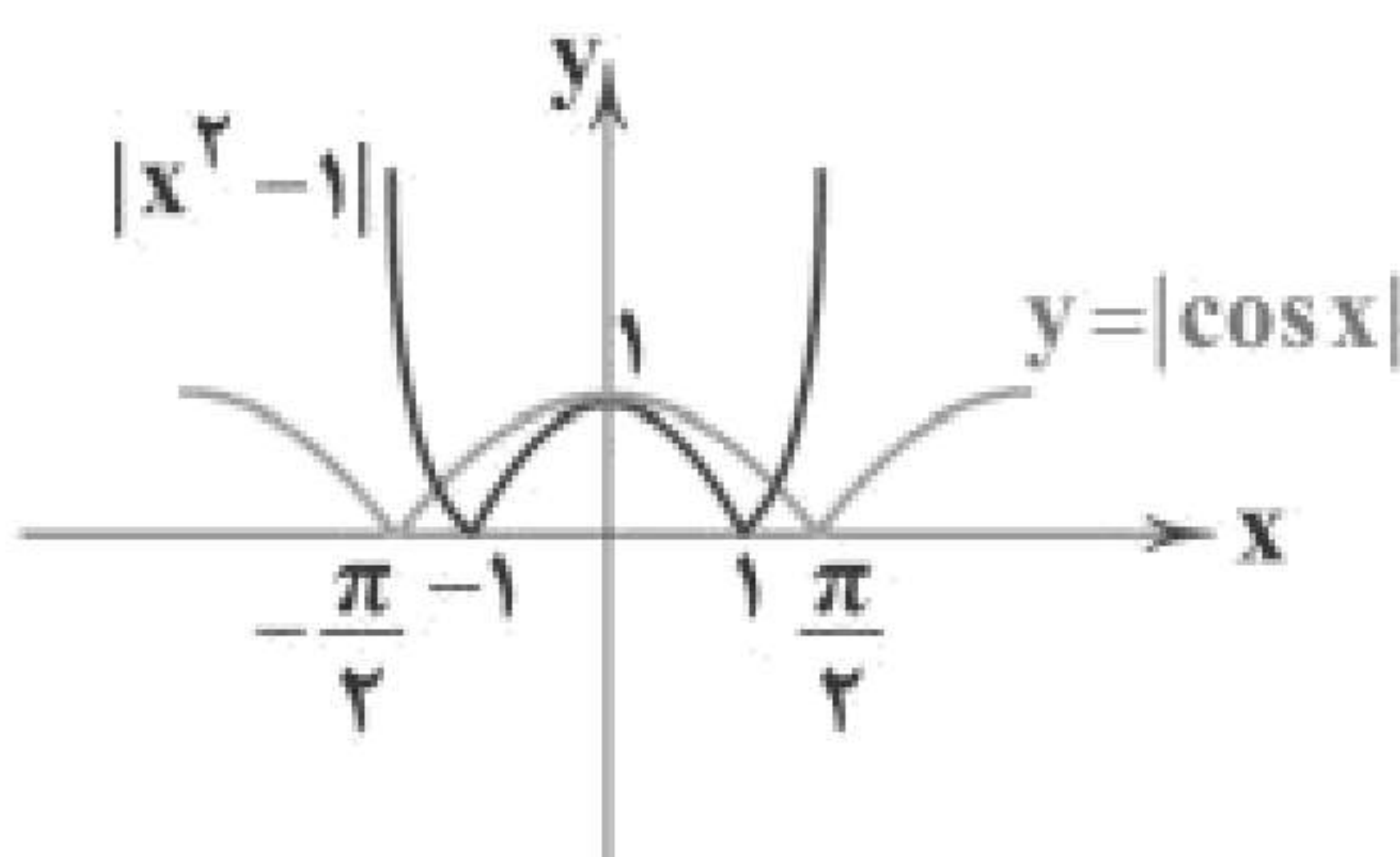
از طرفی داریم:

$$1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow 1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\left(-\frac{1}{3}\right)^2} \Rightarrow 1 + \tan^2 \alpha = 9$$

$$\Rightarrow \tan^2 \alpha = 8 \xrightarrow[\tan \alpha < 0]{\alpha \text{ در ربع دوم}} \tan \alpha = -2\sqrt{2}$$

$$\xrightarrow{(*)} \tan \beta = \frac{-1}{-2\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

۲۲- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. نمودار دو تابع را رسم می کنیم. با توجه به نمودارهای رسم شده، دو تابع در سه نقطه مشترکند. یکی $x = 0$ و دو نقطه در بازه های $\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$ و $\left(-\frac{\pi}{2}, -1\right)$.





۲۳- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. بررسی گزینه‌ها:

$$۱) g(x) = \sin\left(\frac{7\pi}{2} - x\right) + \cos\left(\frac{5\pi}{2} + x\right) = \sin\left(2\pi + \frac{\pi}{2} - x\right) + \cos\left(2\pi + \frac{\pi}{2} + x\right)$$

$$= -\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\cos x - \sin x$$

$$۲) h(x) = \sin x + \cos(7\pi - x) = \sin x - \cos x$$

$$۳) m(x) = \sin(3\pi + x) - \cos x = -\sin x - \cos x$$

$$۴) k(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \cos(\pi - x) = \cos x - \cos x = ۰$$

۲۴- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$A = \frac{\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) \cos\left(\frac{\pi}{2} + \beta\right)}{\cos(\pi + \beta) \sin(3\pi - \alpha)} = \frac{(-\cos \alpha)(-\sin \beta)}{(-\cos \beta)(\sin \alpha)}$$

$$A = \frac{\cos \alpha \sin \beta}{\cos \beta \sin \alpha}$$

$$\alpha + \beta = ۰ \Rightarrow \alpha = -\beta \Rightarrow A = -\frac{\cos(-\beta) \sin \beta}{\cos \beta \sin(-\beta)} = ۱$$

۲۵- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

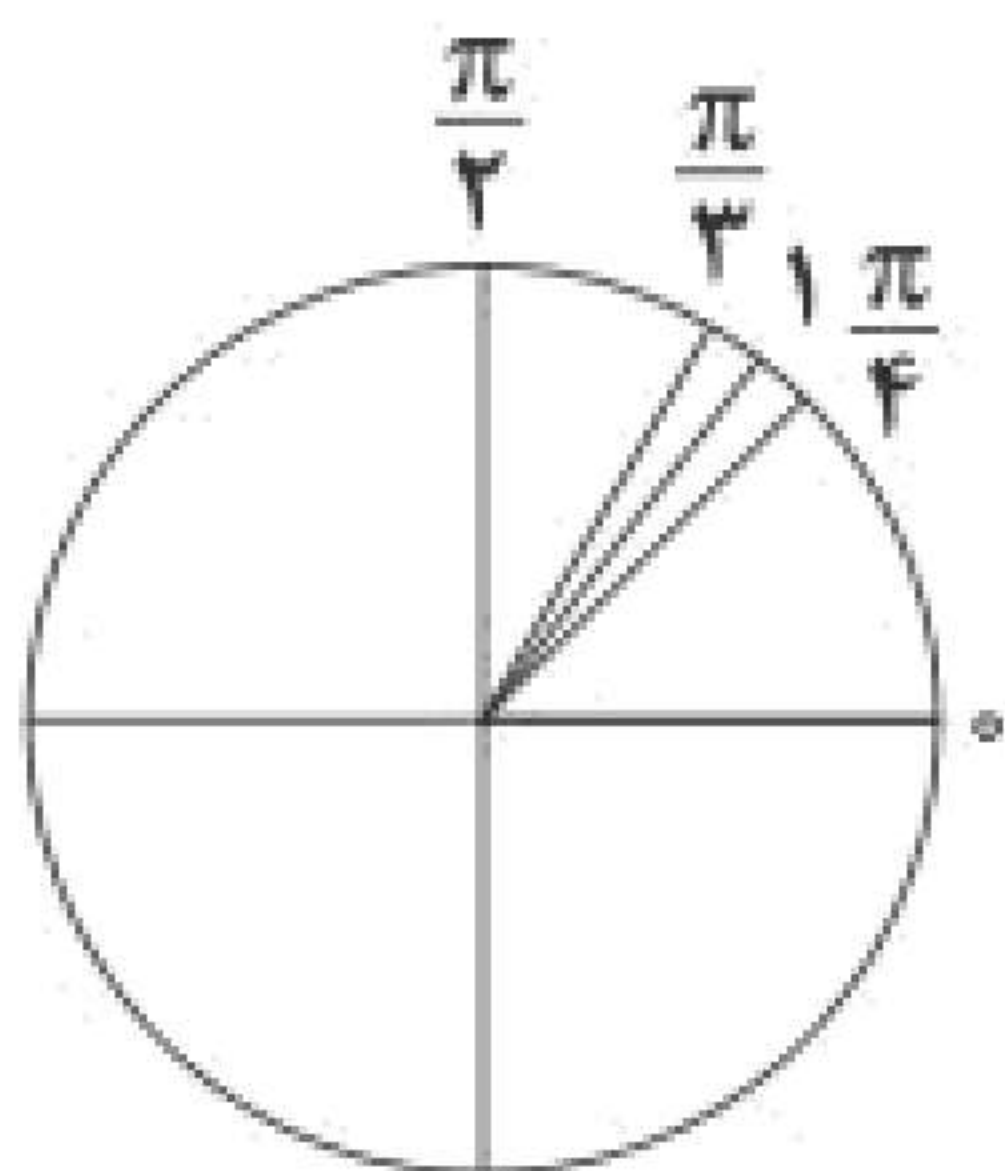
$$L = ۲۴$$

$$\theta = ۳۶ \times \frac{\pi}{۱۸۰} = \frac{\pi}{۵}$$

$$L = r\theta \Rightarrow ۲۴ = \frac{\pi}{۵} r \Rightarrow r = \frac{۱۲۰}{\pi}$$

۲۶- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۱ رادیان بیشتر از $\frac{\pi}{۴}$ رادیان و کمتر از $\frac{\pi}{۳}$ رادیان است.

پس $۰ < \cos(۱) < \sin(۱) < ۱$ خواهد بود.



$$x = y \sin(۱) = z \cos(۱) \Rightarrow x < y < z$$



۲۷- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. مثلث OAB متساوی الاضلاع به ضلع R است. پس $AB = R$ خواهد بود:

$$|\widehat{AB}| = L, L = R\theta = R \frac{\pi}{3}$$

$$\text{محیط} = R + \frac{\pi}{3} R = 3 + \pi \Rightarrow R = 3$$

$$S = \pi R^2 = 9\pi$$

۲۸- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\begin{aligned} \frac{\cos 57^\circ + \tan 24^\circ}{2 \cos 48^\circ + \sin 33^\circ} &= \frac{\cos(36^\circ + 21^\circ) + \tan(24^\circ)}{2 \cos(36^\circ + 12^\circ) + \sin(36^\circ - 3^\circ)} \\ &= \frac{\cos(18^\circ + 3^\circ) + \tan(18^\circ + 6^\circ)}{2 \cos(18^\circ - 6^\circ) + \sin(-3^\circ)} = \frac{-\cos 3^\circ + \tan 6^\circ}{-2 \cos 6^\circ - \sin 3^\circ} \\ &= \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}}{-2 \left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}} = \frac{\frac{1-\sqrt{3}}{2}}{-\frac{3}{2}} = -\frac{1-\sqrt{3}}{3} = -\tan 3^\circ = \tan(18^\circ - 3^\circ) = \tan 15^\circ \end{aligned}$$

۲۹- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. طول کمان AB را حساب می‌کنیم. فرض می‌کنیم شعاع دایره‌ی C برابر R باشد و چون $\widehat{AOB} = \frac{\pi}{2}$ است، پس:

$$|\widehat{AB}| = R \frac{\pi}{2}$$

محیط دایره‌ی C' برابر طول کمان AB است. فرض می‌کنیم شعاع دایره‌ی C' برابر r باشد.

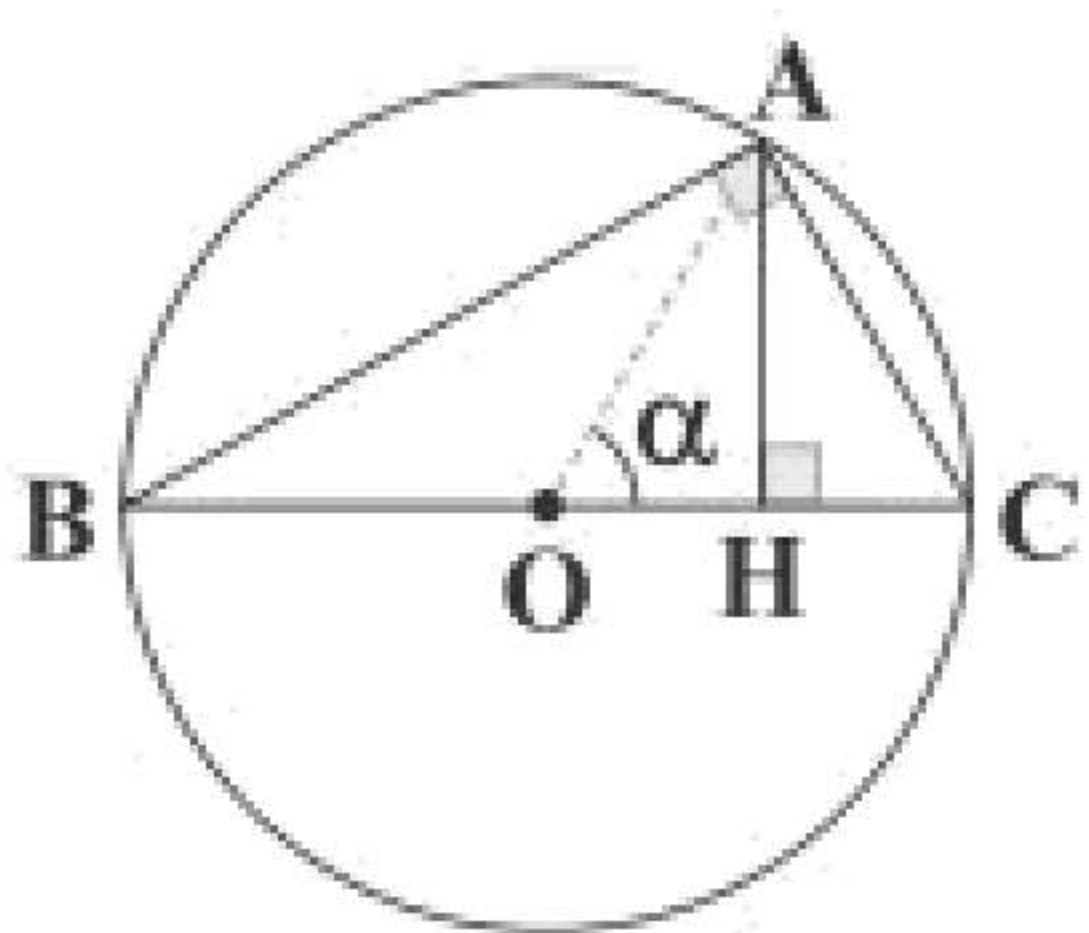
$$2\pi r = R \frac{\pi}{2} \Rightarrow 4r = R \Rightarrow 16r^2 = R^2 \Rightarrow 16\pi r^2 = \pi R^2$$

پس مساحت دایره‌ی C، ۱۶ برابر مساحت دایره‌ی C' است.

۳۰- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$S_{\text{دایره}} = 9\pi \Rightarrow \pi r^2 = 9\pi \Rightarrow r = 3 \Rightarrow OA = OB = OC = 3$$

از نقطه‌ی A به مرکز دایره وصل می‌کنیم و در شکل داریم:



$$\widehat{OAH} : \sin \alpha = \frac{AH}{OA} = \frac{\frac{3}{2}}{3} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \alpha = 30^\circ \text{ یا } \frac{\pi}{6} \Rightarrow \widehat{AC} = \frac{\pi}{6}$$

$$\Rightarrow \widehat{AB} = \pi - \widehat{AC} = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$$



«بانک سوال موسسه یاوران دانش»

۳۱- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. π رادیان تقریباً برابر $3/14$ رادیان است.

۱) $0 < 1/56 < \frac{\pi}{2} \Rightarrow$ (۱/۵۶ رادیان در ناحیه اول است.)

۲) $\pi < 3/15 < \frac{3\pi}{2} \Rightarrow$ (۳/۱۵ رادیان در ناحیه سوم است.)

۳) $\pi < 4/54 < \frac{3\pi}{2} \Rightarrow$ (۴/۵۴ رادیان در ناحیه سوم است.)

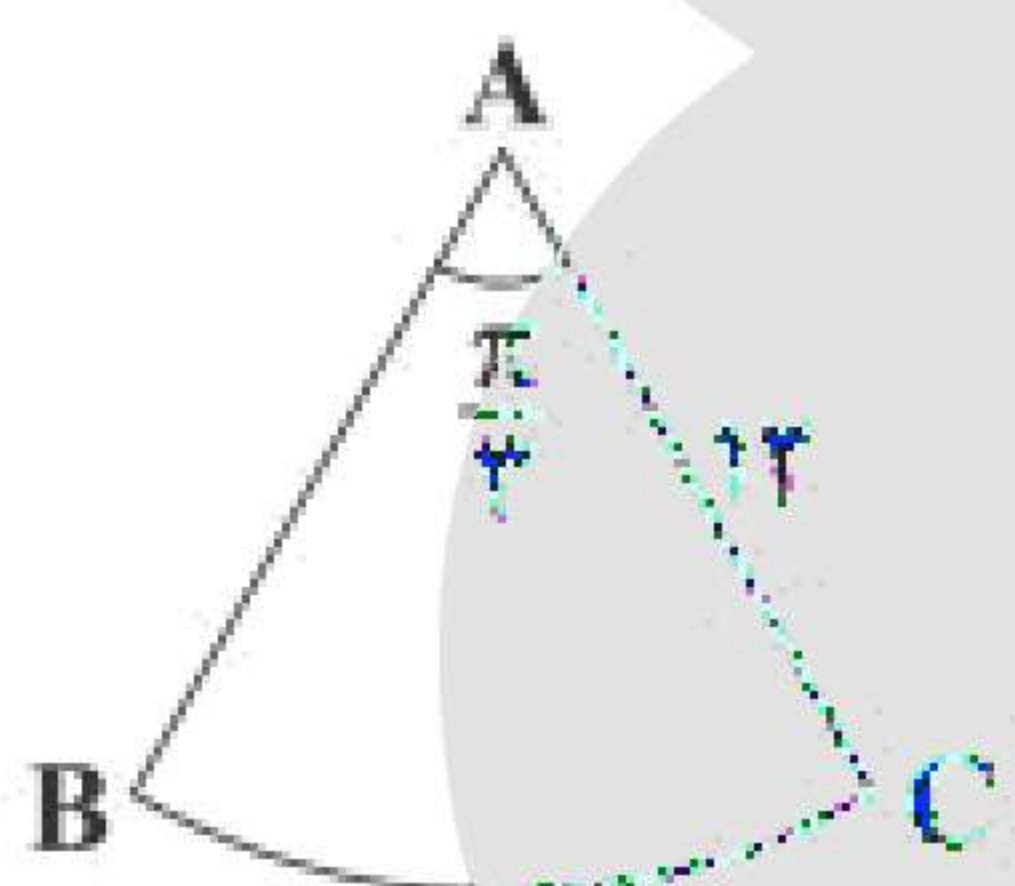
۴) $2\pi < 6/3 < \frac{5\pi}{2} \Rightarrow$ (۶/۳ رادیان در ناحیه اول قرار دارد.)

۳۲- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$A = \frac{\sin(360^\circ + 90^\circ) \sin(360^\circ + 180^\circ - 20^\circ)}{\cos(720^\circ + 70^\circ) + \cos(360^\circ + 20^\circ)} + \frac{\cos(720^\circ - 20^\circ) \cos(20^\circ \times 360^\circ)}{\cos(720^\circ + 70^\circ) + \cos(360^\circ + 20^\circ)}$$

$$A = \frac{\sin 20^\circ + \cos 20^\circ}{\cos 70^\circ + \cos 20^\circ} = \frac{\sin 20^\circ + \cos 20^\circ}{\sin 20^\circ + \cos 20^\circ} = 1$$

۳۳- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.



$$BC \text{ کمان} = r\theta = 12 \times \frac{\pi}{3} = 4\pi$$

کمان BC در حقیقت گسترده‌ی محیط قاعده‌ی مخروط است، پس:

$$BC = 2\pi R \Rightarrow 4\pi = 2\pi R \Rightarrow R = 2 \text{ (شعاع قاعده ی مخروط)}$$

۳۴- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\begin{cases} \frac{5\pi}{3} = 2\pi - \frac{\pi}{3} \Rightarrow \cos \frac{5\pi}{3} = \cos \left(-\frac{\pi}{3}\right) = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \\ \frac{11\pi}{3} = \frac{12\pi - \pi}{3} = 4\pi - \frac{\pi}{3} \Rightarrow \sin \left(\frac{11\pi}{3}\right) = \sin \left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\sin \frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{8\pi}{3} = 2\pi + \frac{2\pi}{3} \Rightarrow \sin \left(\frac{8\pi}{3}\right) = \sin \left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow A = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1}{4} - \frac{3}{4} = -\frac{1}{2}$$



۳۵- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. می دانیم طول کمان $L = R\theta$ و مساحت قطاع $S = \frac{1}{2} R^2 \theta$ است.

$$P = 2R + L = 12 + 2\pi \Rightarrow 12 + L = 12 + 2\pi \Rightarrow L = 2\pi$$

$$L = R\theta \Rightarrow 2\alpha = \theta \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$$

$$S = \frac{1}{2} R^2 \theta \Rightarrow S = \frac{1}{2} \times 36 \times \frac{\pi}{3} = 6\pi$$

۳۶- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta = 1 - \left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right)^2 = 1 - \frac{9}{10} = \frac{1}{10}$$

$$\xrightarrow[\cos \theta < 0]{\theta \text{ ربع دوم}} \cos \theta = -\sqrt{\frac{1}{10}} = -\frac{1}{\sqrt{10}}$$

$$\Rightarrow \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \cos \theta + \sin \theta = -\frac{1}{\sqrt{10}} + \frac{3}{\sqrt{10}} = \frac{2}{\sqrt{10}} = \frac{2\sqrt{10}}{10} = \frac{\sqrt{10}}{5}$$

۳۷- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. چون $\frac{\pi}{5} + \frac{3\pi}{10} = \frac{\pi}{2}$ است، پس $\frac{\pi}{5}$ و $\frac{3\pi}{10}$ متکمیل یکدیگرند. در نتیجه $\sin \frac{\pi}{5} = \cos \frac{3\pi}{10}$ و $\cos \frac{\pi}{5} = \sin \frac{3\pi}{10}$ خواهد بود.

$$A = \frac{\sin \frac{2\pi}{3} \cos \frac{\pi}{5} + \sin \frac{2\pi}{3} \sin \frac{\pi}{5}}{\cos \frac{\pi}{6} \left(\cos \frac{\pi}{5} + \sin \frac{\pi}{5} \right)} = \frac{\sin \frac{2\pi}{3} \left(\cos \frac{\pi}{5} + \sin \frac{\pi}{5} \right)}{\cos \frac{\pi}{6} \left(\cos \frac{\pi}{5} + \sin \frac{\pi}{5} \right)}$$

$$= \frac{\sin \frac{2\pi}{3}}{\cos \frac{\pi}{6}} = \frac{\sin \left(\pi - \frac{\pi}{3} \right)}{\cos \frac{\pi}{6}} = \frac{\sin \frac{\pi}{3}}{\cos \frac{\pi}{6}} = 1$$

۳۸- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

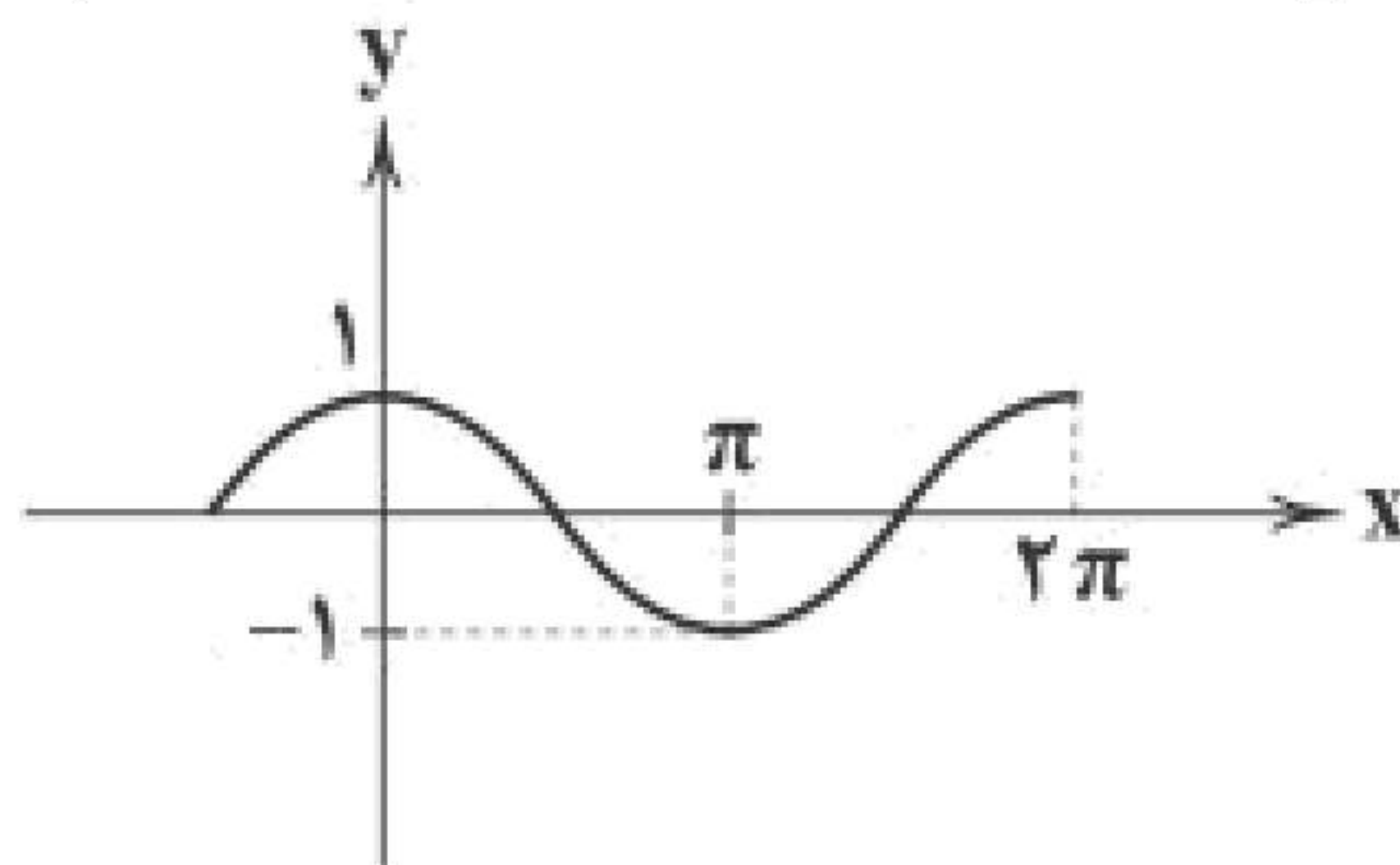
$$\begin{cases} 70^\circ = 72^\circ - 2^\circ \Rightarrow \sin 70^\circ = \sin(-2^\circ) = -\sin 2^\circ \\ 47^\circ = 36^\circ + 9^\circ + 2^\circ \Rightarrow \sin 47^\circ = \sin(9^\circ + 2^\circ) = \cos 2^\circ \\ 88^\circ = 72^\circ + 18^\circ - 2^\circ \Rightarrow \cos(18^\circ - 2^\circ) = -\cos 2^\circ \\ -38^\circ = -36^\circ - 2^\circ \Rightarrow \cos(-38^\circ) = \cos(-2^\circ) = -\cos 2^\circ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{\sin 70^\circ + \sin 47^\circ}{\cos 88^\circ - \cos(-38^\circ)} = \frac{-\sin 2^\circ + \cos 2^\circ}{-\cos 2^\circ - \cos 2^\circ}$$

$$= \frac{-\sin 2^\circ}{-2 \cos 2^\circ} + \frac{\cos 2^\circ}{-2 \cos 2^\circ} = \frac{1}{2} \tan 2^\circ - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \times 0.36 - \frac{1}{2} = 0.18 - 0.5 = -0.32$$



۳۹- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ابتدا نمودار تابع $y = \cos x$ را بررسی می‌کنیم:



با مقایسه نمودار $y = \cos x$ و نمودار تابع $f(x)$ ، مشاهده می‌کنیم که نمودار $\cos x$ ، به اندازه‌ی $\frac{\pi}{3}$ به سمت چپ منتقل شده و سپس یک واحد به سمت بالا برده شده و در نتیجه نمودار تابع $f(x)$ به دست آمده است، پس:

$$y = \cos x \xrightarrow{\text{به سمت چپ } \frac{\pi}{3}} y = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \xrightarrow{\text{یک واحد به بالا}} f(x) = 1 + \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$$

بنابراین داریم:

$$\begin{cases} c = 1 \\ b = -\frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow b \times c = -\frac{1}{3}$$

۴۰- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\begin{aligned} r_1 &= 5 \\ r_2 &= 7 \\ \theta &= \frac{\pi}{3} \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} L_1 = r_1 \theta = 5 \times \frac{\pi}{3} = 5 \\ L_2 = r_2 \theta = 7 \times \frac{\pi}{3} = 7 \end{cases}$$

$$\text{محیط} = 5 + 7 + 4 = 16$$