

گنجینه سوال رایگان
+ پاسخ تشریحی

یاوران دانش



راه های ارتباطی با ما:

www.Dyavari.com

۰۲۱-۷۶۷۰۳۸۵۸

۰۹۱۲-۳۴ ۹۴ ۱۳۴



	۱	۲	۳	۴
۱ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۴ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۵ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۶ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۷ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۸ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۹ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۰ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۱۱ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۱۲ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۳ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۴ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۵ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۶ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۷ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۸ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۹ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۰ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۱ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۲۲ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۳ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۲۴ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۵ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۶ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۷ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۲۸ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۹ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۰ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۱ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۳۲ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۳ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۳۴ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۳۵ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۳۶ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۳۷ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۸ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۹ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۴۰ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>





۱- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. تابع درجه دو هرگز بر روی R یک به یک و وارون پذیر نیست. یعنی این تابع نمی تواند درجه دو باشد:

بنابراین با تابع خطی $f(x) = (n+1)x - 4 - n + 2k$ طرفیم.
می دانیم تلاقی تابع خطی و وارونش حتماً روی خط $y = x$ قرار دارد، مگر تابع خطی با شیب -1 که خودش و وارونش برابر بوده و بی شمار نقطه تلاقی دارند.

در اینجا چون نقطه تلاقی $(-1, 7)$ است که روی خط $y = x$ نیست، نتیجه می گیریم این تابع خطی دارای شیب -1 بوده و در تمام نقاط واقع بر آن، از جمله در $(-1, 7)$ وارونش را قطع می کند. پس:

$$-1 \Rightarrow n+1 = -1 \Rightarrow n = -2$$

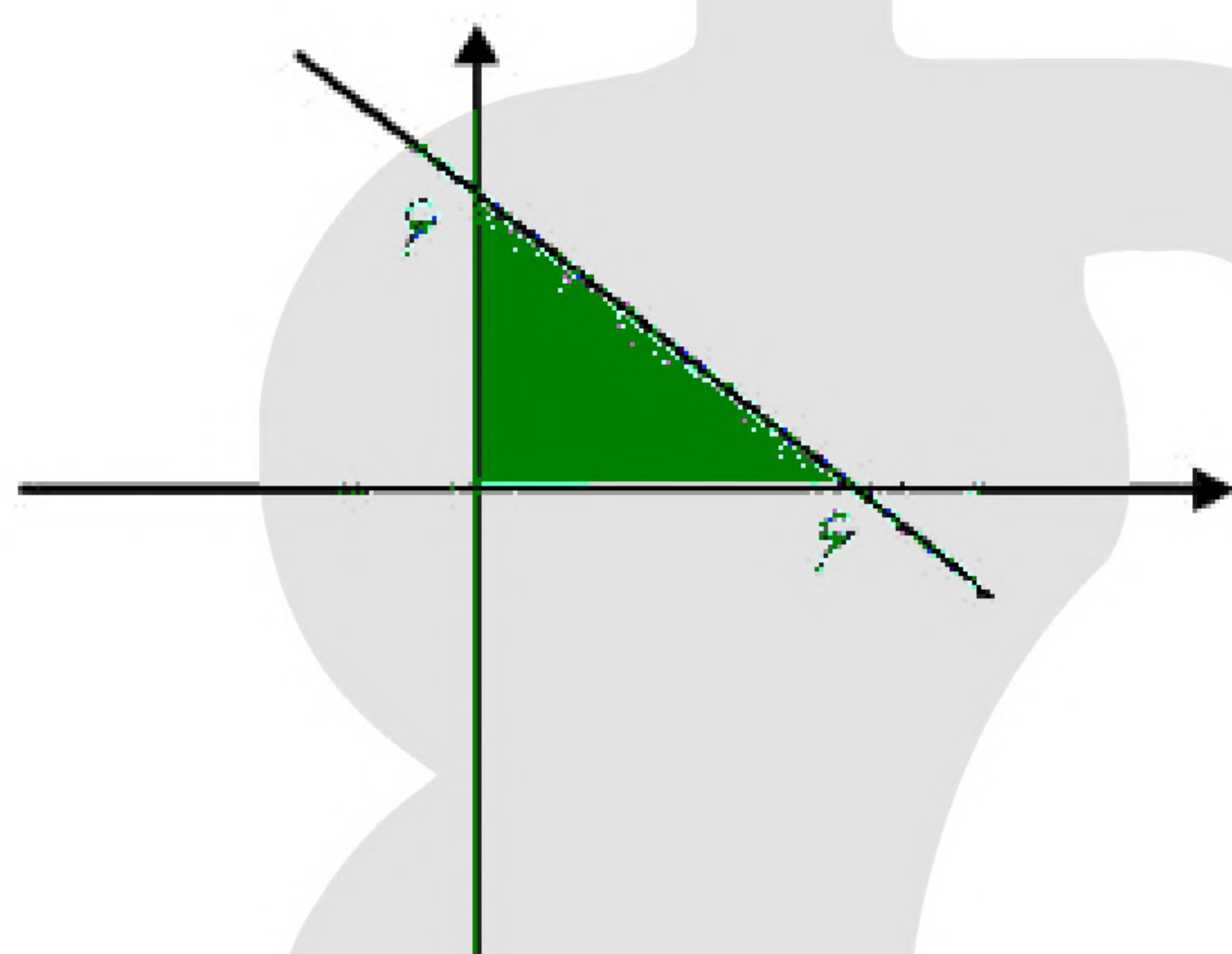
$$f(x) = (n+1)x - 4 - n + 2k \xrightarrow{n = -2} -x - 4 - (-2) + 2k \Rightarrow f(x) = -x - 2 + 2k$$

$$7 = -(-1) - 2 + 2k \Rightarrow 2k = 8 \Rightarrow k = 4$$

حالا نقطه $(-1, 7)$ را در آن صدق می دهیم:

$$f(x) = -x - 2 + 2k \xrightarrow{k = 4} -x - 2 + 8 \Rightarrow f(x) = -x + 6$$

چون f و f^{-1} با هم برابرند، پس:



$$f^{-1}(x) = -x + 6$$

$$S = \frac{6 \times 6}{2} = 18$$



۲- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. چون f همان است، پس $f(0) = 0$ یعنی:

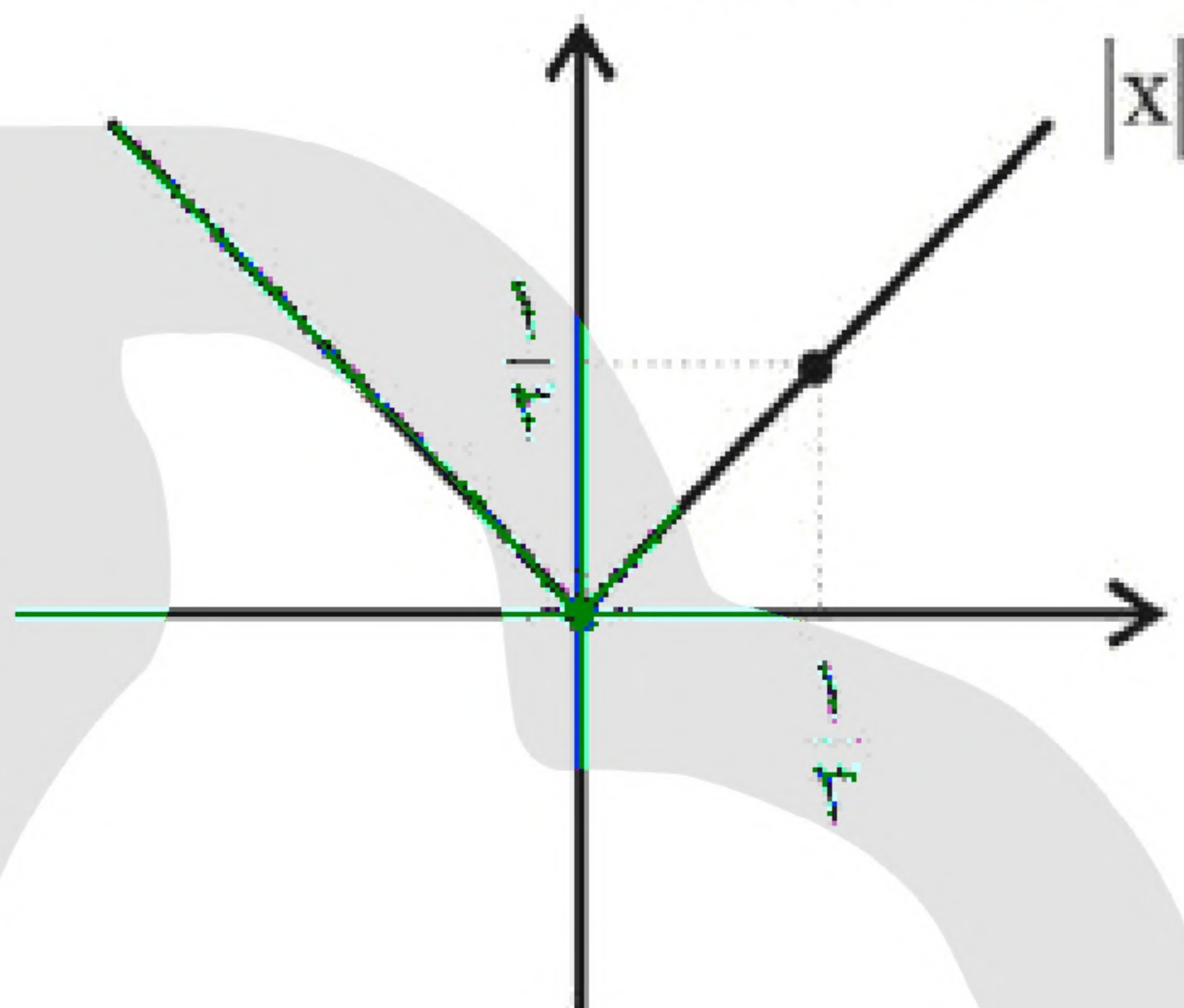
$$3x^2 - [x] = [-x] + 4x \Rightarrow 3x^2 - 4x = [x] + [-x]$$

تابع $y = [x] + [-x]$ تابع معروفی است که به ازای اعداد صحیح، خروجی صفر و به ازای اعداد غیر صحیح، خروجی ۱- می‌دهد. پس دو حالت زیر را در نظر می‌گیریم:

$$x \in \mathbb{Z}: 3x^2 - 4x = 0 \Rightarrow x(3x - 4) = 0 \Rightarrow x = \begin{cases} 0 \\ \frac{4}{3} \end{cases} \text{ غ ق ق}$$

$$x \notin \mathbb{Z}: 3x^2 - 4x = -1 \Rightarrow 3x^2 - 4x + 1 = 0 \Rightarrow x = \begin{cases} 1 \\ \frac{1}{3} \end{cases} \text{ غ ق ق}$$

در واقع تابع f ، یک تابع همانی دو عضوی به صورت $f = \left\{ (0, 0), \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) \right\}$ است و با توجه به نمودارهای زیر، دو تلاقی در همین دو نقطه با نمودار $g(x) = |x|$ دارد:





۳- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\begin{aligned} f'(x)g(x) + \frac{1}{g(x)} &= g'(x)f(x) + \frac{1}{f(x)} \xrightarrow{\text{مخرج مشترک}} \frac{f'(x)g'(x) + 1}{g(x)} \\ &= \frac{g'(x)f'(x) + 1}{f(x)} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} f''(x)g'(x) + f(x) = g''(x)f'(x) + g(x) \\ \Rightarrow f''(x)g'(x) - g''(x)f'(x) + f(x) - g(x) &= 0 \\ \Rightarrow f''(x)g'(x)(f(x) - g(x)) + (f(x) - g(x)) &= 0 \Rightarrow (f(x) - g(x))(f''(x)g'(x) + 1) = 0 \\ \Rightarrow \begin{cases} f(x) - g(x) = 0 \Rightarrow f(x) = g(x) \\ f''(x)g'(x) + 1 = 0 \Rightarrow (f(x)g(x))' = -1 \end{cases} \end{aligned}$$

پس توابع f و g باید برابر باشند.

از آنجا که نقطه مرکزی $g(x)$ ، $x = 2$ است، پس ریشه قدرمطلق $f(x)$ هم $x = 2$ و لذا $m = -2$ است پس:

$$f(x) = x + |x - 2| = \begin{cases} 2x - 2 & x \geq 2 \\ 2 & x < 2 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} \frac{ax^2 + bx - 4}{x + c} & x \geq 2 \\ dx + e & x < 2 \end{cases}$$

حالا از مقایسه این تابع با $g(x)$ داریم:

$$\text{اولا: } \frac{ax^2 + bx - 4}{x + c} = 2x - 2 \Rightarrow ax^2 + bx - 4 = 2x^2 + (2c - 2)x - 2c$$

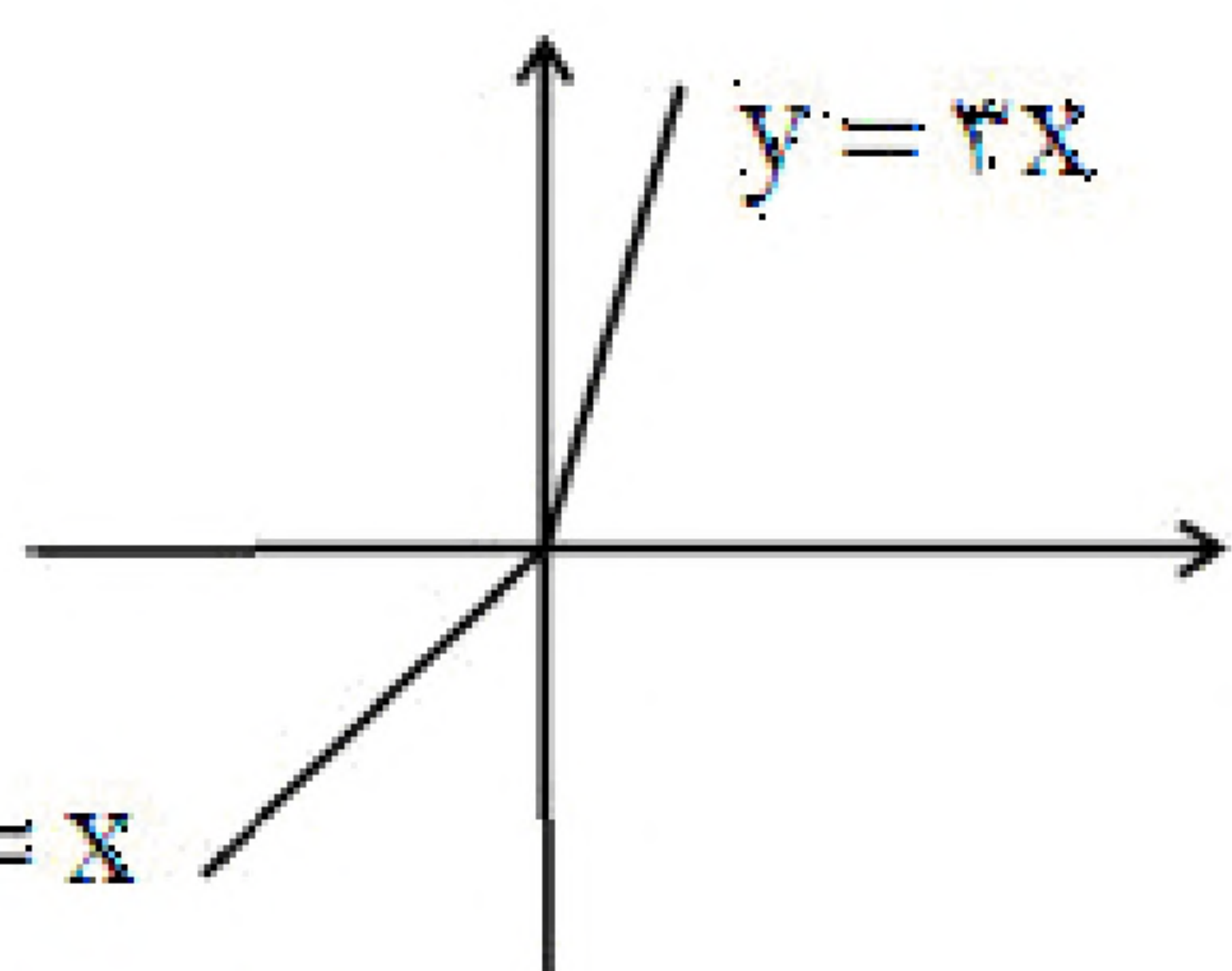
$$\Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 2c - 2 \\ -4 = -2c \Rightarrow c = 2 \Rightarrow b = 2 \end{cases}$$

$$\text{ثانیا: } dx + e = 2 \Rightarrow \begin{cases} d = 0 \\ e = 2 \end{cases}$$

حالا باید طول پاره‌خطی که سهمی $h(x) = 2x^2 + 2x - 2$ بر روی محور x ها جدا می‌کند را به دست بیاوریم. منظور از آن، همان فاصله بین صفرهای تابع $h(x)$ یا در واقع همان تفاضل ریشه‌ها در معادله $h(x) = 0$ است:

$$\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = \frac{\sqrt{(2)^2 - 4(2)(-2)}}{2} = \frac{\sqrt{20}}{2} = \sqrt{5}$$

۴- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

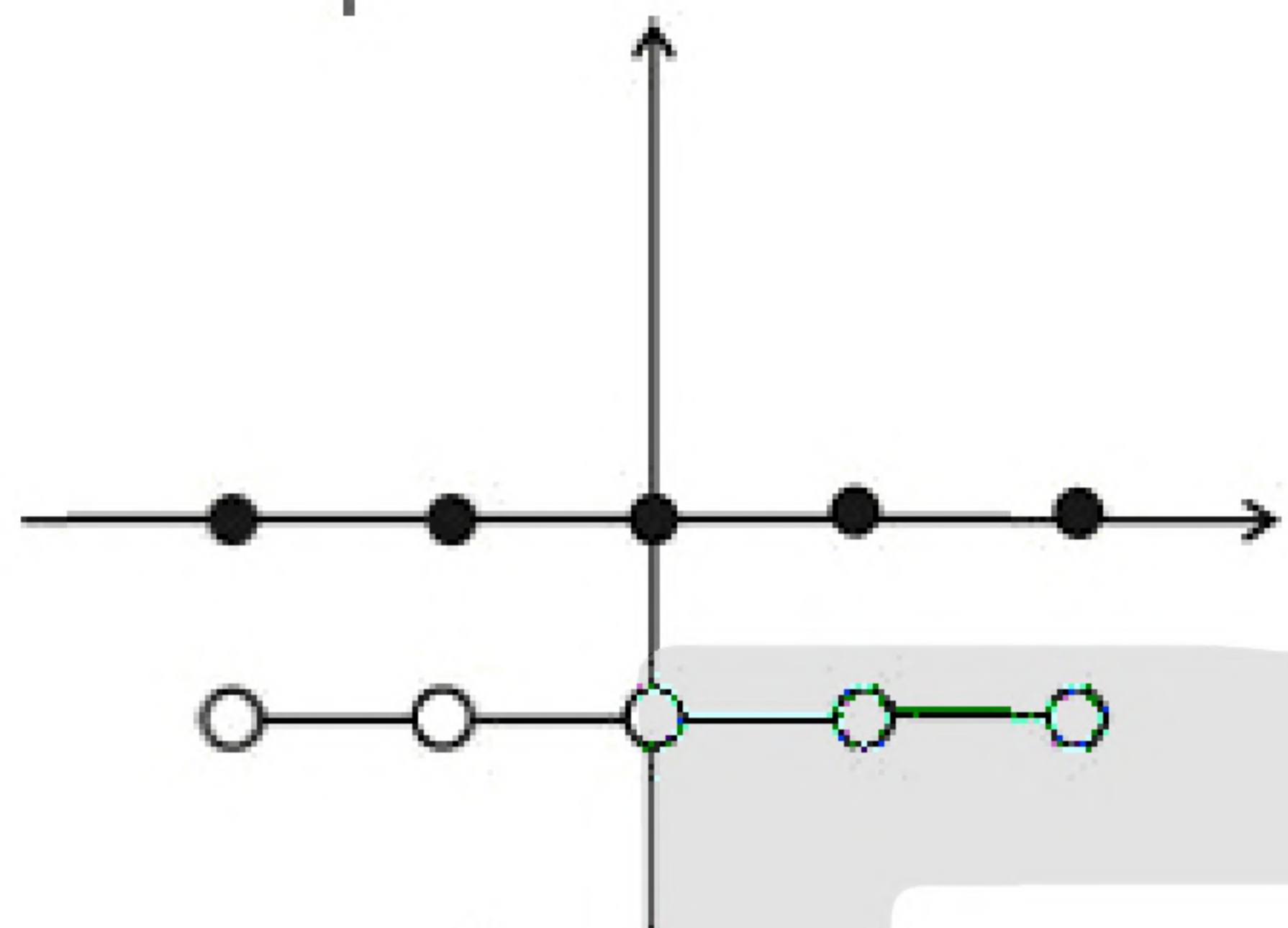
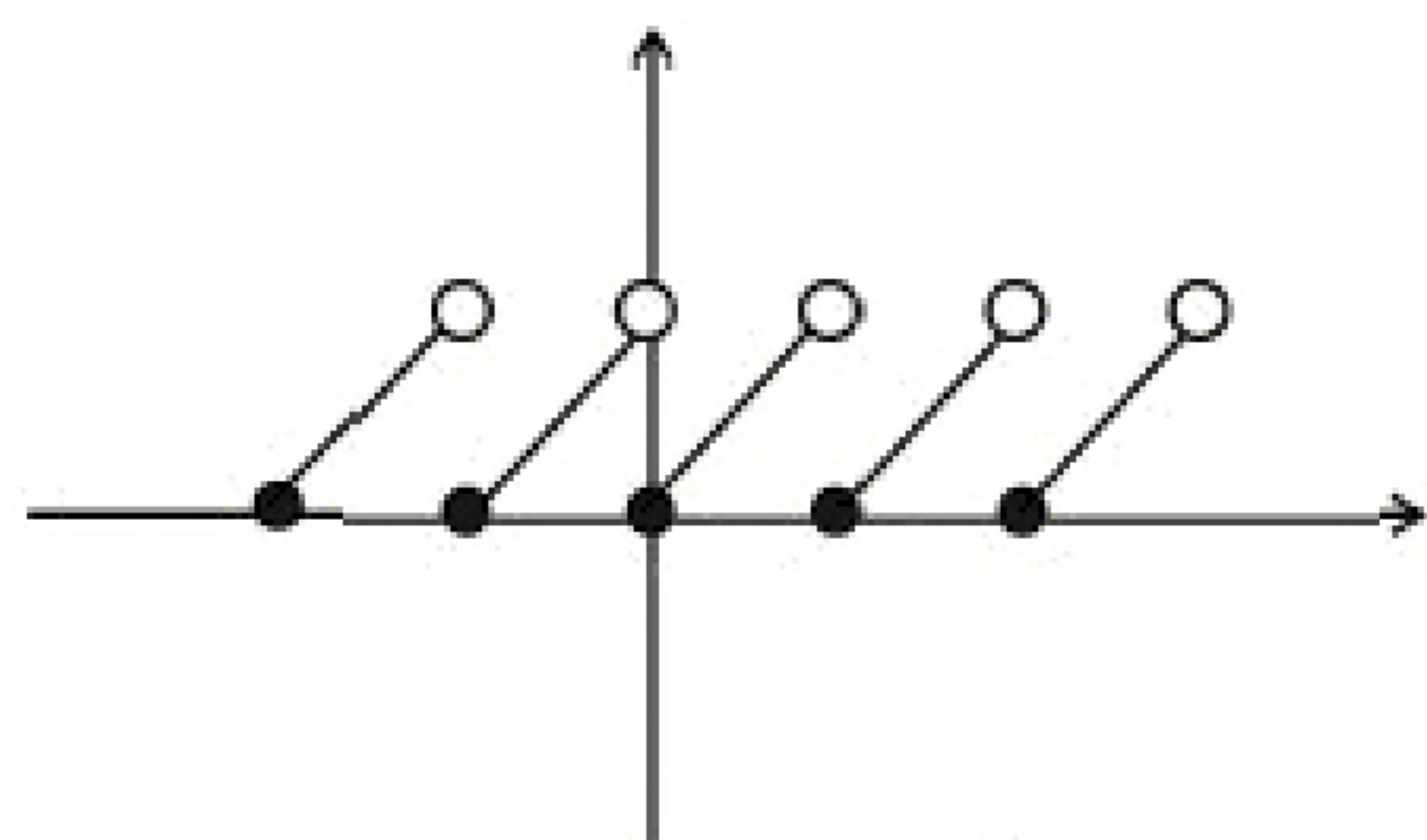


یک به یک است

$$y = |x| + 2x = \begin{cases} 3x & x \geq 0 \\ x & x < 0 \end{cases}$$



۵- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

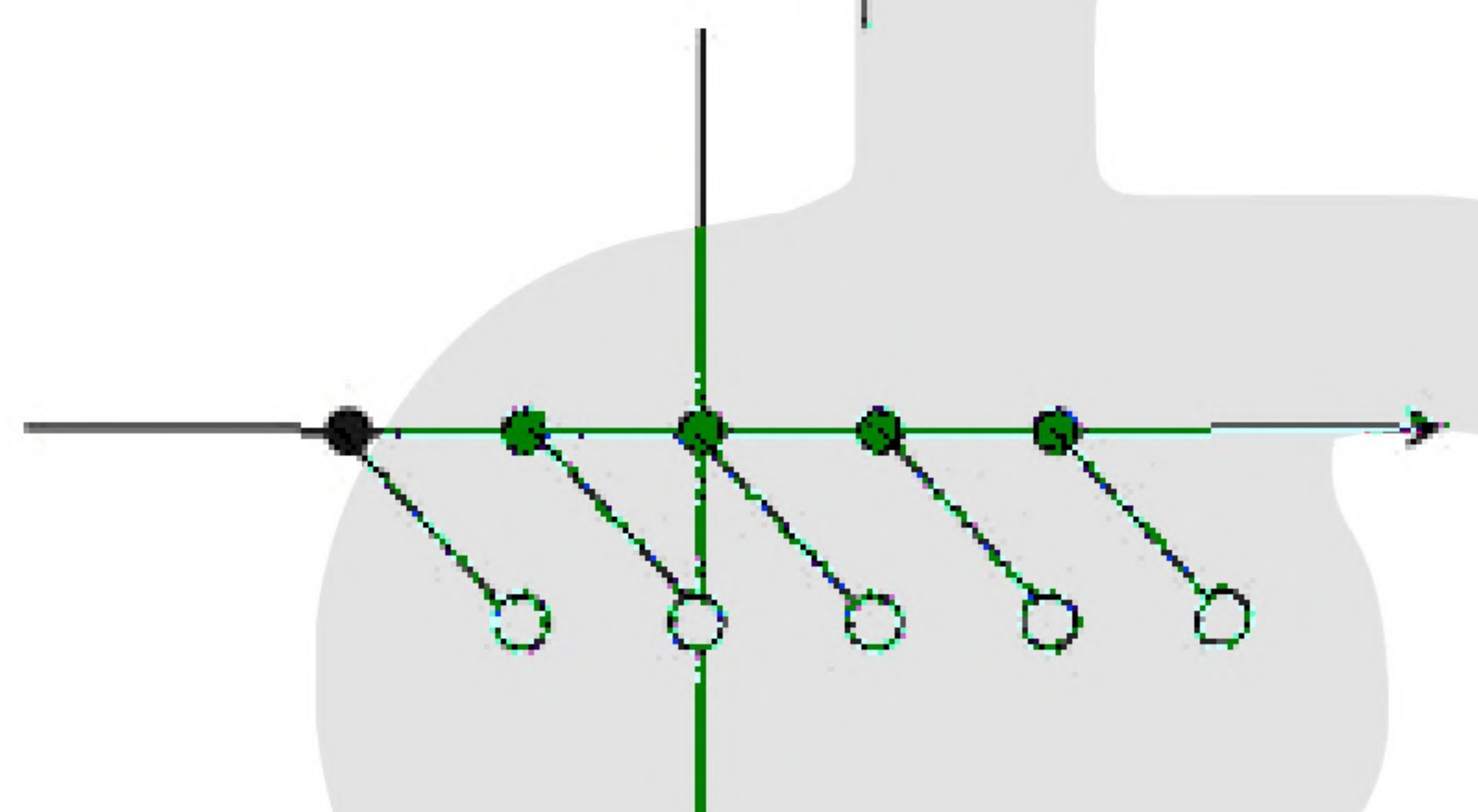


$$f(x) = x - [x] \Rightarrow \begin{cases} x - [x] = 0, & x \in \mathbb{Z} \\ 0 < x - [x] < 1, & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$g(x) = [x] + [-x] \Rightarrow [x] + [-x] = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{Z} \\ -1, & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$(f - g)(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{Z} \\ -1 < [x] - x < 0, & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$(f \times g)(x) = [x] - x$$



۶- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$f(x) = \sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} = \sqrt{(1 + \sqrt{x-1})^2} = 1 + \sqrt{x-1}, x \geq 1$$

$$g(x) = \sqrt{x - 2\sqrt{x-1}} = \sqrt{(1 - \sqrt{x-1})^2} = 1 - \sqrt{x-1}$$

$$1 - \sqrt{x-1} \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x-1} \leq 1 \Rightarrow x-1 \leq 1 \Rightarrow x \leq 2$$

$$f(x) + g(x) = 1 + \sqrt{x-1} + 1 - \sqrt{x-1} = 2$$

$$f(x) = \frac{x^2 + 2 + 1}{\sqrt{x^2 + 2}} = \sqrt{x^2 + 2} + \frac{1}{\sqrt{x^2 + 2}} > 2$$

$$x^2 = 0 \Rightarrow \sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} \Rightarrow R_f = \left[\frac{3\sqrt{2}}{2}, +\infty \right)$$

۷- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.



۸- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

یادآوری:

$$[x] + [-x] = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Z} \\ -1 & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$x \notin \mathbb{Z} \Rightarrow [x] + [-x] = -1$$

$$[x + 2[-x]] + [x] + 1 - 2 = [x] + 2[-x] + [x] - 1 = 2[x] + 2[-x] - 1 = 2([x] + [-x]) - 1$$

$$2(-1) - 1 = -3$$

۹- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$f(x) + g(x) = (f + g)(x) = 3[x] - 2x + 1 + 3x - 4[x] - 3 = -[x] + x - 2$$

$$(f + g)(x) = -[x] + x - 2 = x \Rightarrow [x] = -2 \Rightarrow -2 \leq x < -1$$

$$[a, b) = [-2, -1) \Rightarrow a = -2, b = -1$$

$$a + b = -3$$

۱۰- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$f = \{(0, 1), (2, 0), (1, 2), (3, 1), (5, 4)\}$$

$$g = \{(1, 0), (0, 2), (2, 2), (3, 1), (4, 5)\}$$

$$g^2 = g \times g = \{(1, 0), (0, 4), (2, 4), (3, 1), (4, 25)\}$$

$$D_f \cap D_g = \{0, 1, 2, 3\}$$

$$f - g = \{(0, -1), (1, 2), (2, -2), (3, 0)\}$$

$$D_{\frac{g}{f-g}} = D_g \cap D_{f-g} - \{x \mid (f-g)(x) = 0\} = \{0, 1, 2, 3\} - \{3\} = \{0, 1, 2\}$$

$$\frac{g}{f-g} = \{(0, -4), (1, 0), (2, -2)\}$$

$$\text{حاصل جمع عضوهای برد} = -4 + 0 + (-2) = -6$$

$$a_n \text{ جملات دنباله } 0, 1, 0, 1, 0, 1, \dots$$

$$b_n \text{ جملات دنباله } 2, 0, 1, 0, 1, 0, \dots$$

$$a_1 + b_1 = 0 + 2 = 2$$

$$a_2 + b_2 = 1 + 0 = 1$$

$$a_3 + b_3 = 0 + 1 = 1$$

.

.

.

$$a_n + b_n = 1$$

$$2 + (n-1)(1) = 100 \Rightarrow n = 99$$

۱۱- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.



«بانک سوال موسسه یاوران دانش»

$$f(n) = \frac{1}{2} \left[\frac{-n}{2} \right]$$

۱۲- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

n	۱	۲	۳	۴	...
f(n)	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	-۱	-۱	...

۱۳- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$[x - 2] = 3 \Rightarrow 3 \leq x - 2 < 4 \Rightarrow 0 \leq x - 5 < 1 \Rightarrow |x - 5| = x - 5$$

$$\Rightarrow f(x) = x - 5 + x = 2x - 5 \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x + 5}{2}$$

داریم که $D_f = [5, 6)$ و برد آن $[5, 7)$ خواهد بود، پس دامنه‌ی f^{-1} برابر $[5, 7)$ است.

۱۴- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$(x - 2)(x - 3) = 0 \Rightarrow x^2 - 5x + 6 = 0 \xrightarrow{\times 2} 2x^2 - 10x + 12 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = -10 \\ b = 12 \end{cases}$$

$$g(x) = \sqrt{-10x - 10 - 20} \Rightarrow -10x - 10 \geq 0 \Rightarrow -10x \geq 10 \Rightarrow x \leq -1 \Rightarrow D_g = (-\infty, -1]$$

۱۵- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$D_f = \{2, -1, 0\}$$

$$D_g = \{2, 0, -2\} \Rightarrow D_f \cap D_g = \{0, 2\}$$

$$(f + g)(x) = \left\{ (0, 0 + 4), \left(2, -1 + \frac{1}{2} \right) \right\} = \left\{ (0, 4), \left(2, -\frac{1}{2} \right) \right\}$$

$$D_{\frac{f+g}{g}} = D_{f+g} \cap D_g - \{x \mid g(x) = 0\} = \{2, 0\} - \{-2\} = \{2, 0\}$$

$$D_{\frac{f+g}{g}} = \left\{ \left(2, \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} \right), \left(0, \frac{4}{4} \right) \right\} = \{(2, -1), (0, 1)\}$$

پس برد تابع $\frac{f+g}{g}$ برابر $\{-1, 1\}$ است.۱۶- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. خط به معادله‌ی $x = a$ تابع نیست. پس در معادله، بایستی y نداشته باشیم پس $m = 4$ است.

$$m = 4 \Rightarrow 4y - 3x = 4y - 1 \Rightarrow x = \frac{1}{3}$$

خط $x = \frac{1}{3}$ محور x ها را در $\frac{1}{3}$ قطع می‌کند.



۱۷- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$D_{\frac{f}{g}}^f = D_f \cap D_g - \{x \mid g(x) = 0\}$$

$$D_{\frac{f}{g}}^f = \underbrace{\{-2 \leq x \leq 2\} \cap \{1 \leq x \leq 2\}}_{1 \leq x \leq 2} - \{x \mid [x] - 1 = 0\}$$

$$[x] - 1 = 0 \Rightarrow [x] = 1 \xrightarrow[\text{تابع جز صحیح}]{\text{طبق تعریف}} 1 \leq x < 2$$

$$D_{\frac{f}{g}}^f = \{1 \leq x \leq 2\} - \{1 \leq x < 2\} = \{2\}$$

$$\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[\text{تعریف می شود}]{\text{فقط در } x=2} \frac{f(2)}{g(2)} = \frac{\frac{1}{4}(2) + 1}{[2] - 1} = \frac{\frac{1}{2} + 1}{1} = \frac{3}{2}$$

۱۸- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$f(x) = 3 - \sqrt{(x-1)^2} \Rightarrow f(x) = 3 - |x-1|$$

$$g(x) = |x|$$

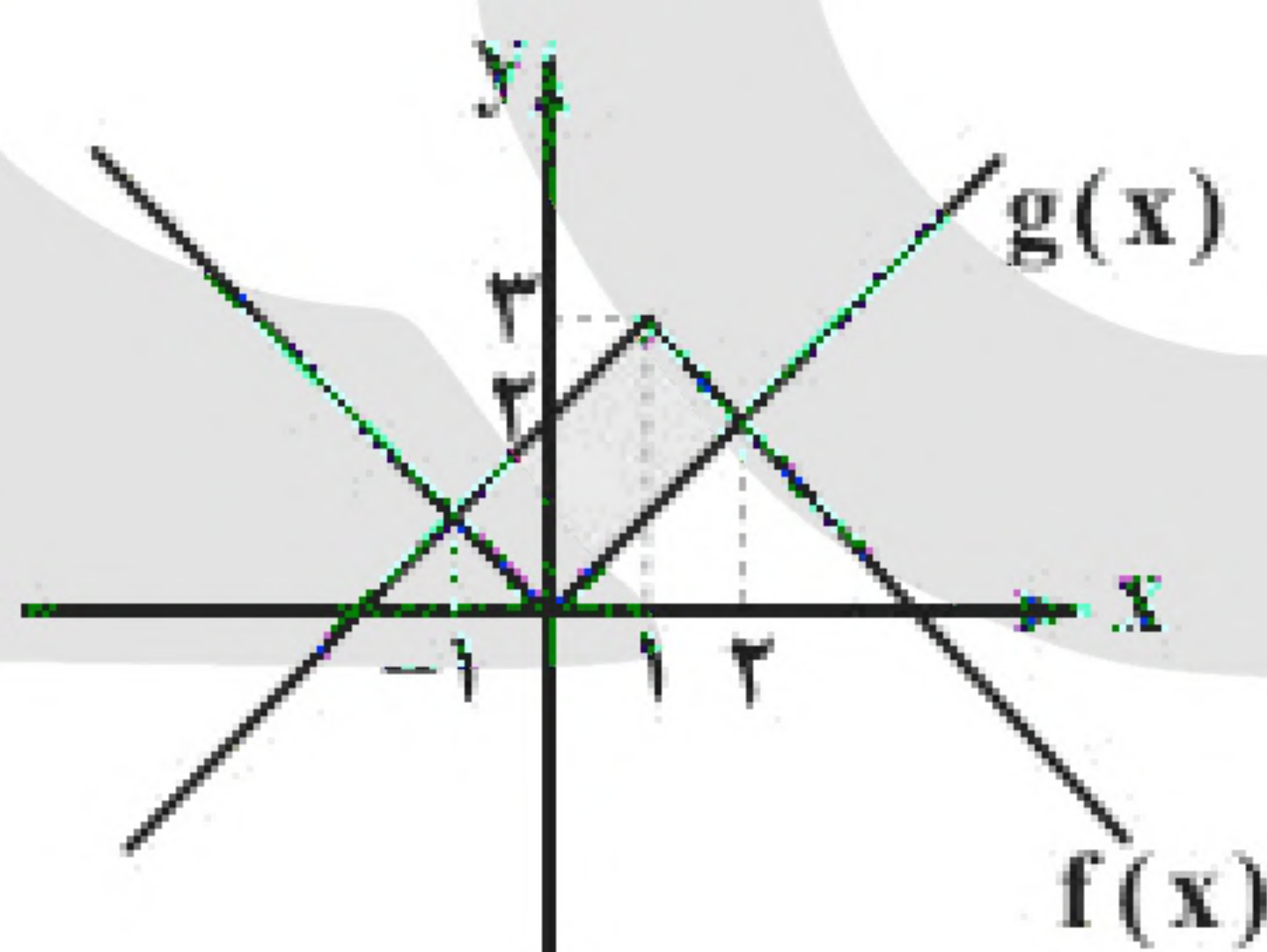
ابتدا محل تلاقی این دو تابع را حساب می کنیم.

$$|x| = 3 - |x-1| \Rightarrow |x| + |x-1| = 3$$

$$x \geq 1 \Rightarrow x + x - 1 = 3 \Rightarrow 2x = 4 \Rightarrow x = 2 \quad \text{ق ق}$$

$$0 \leq x < 1 \Rightarrow x - x + 1 = 3 \Rightarrow 1 = 3 \quad \times$$

$$x < 0 \Rightarrow -x - x + 1 = 3 \Rightarrow -2x = 2 \Rightarrow x = -1 \quad \text{ق ق}$$



$$S = \sqrt{2} \times 2\sqrt{2} = 4$$



۱۹- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$f(x) = \frac{a}{b(x+1)} \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{-1\}$$

$$D_g : 3x - c = 0 \Rightarrow x = \frac{c}{3} \Rightarrow D_g = \mathbb{R} - \left\{\frac{c}{3}\right\}$$

$$\xrightarrow{D_f = D_g} \frac{c}{3} = -1 \Rightarrow c = -3$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(x) = \frac{a}{b(x+1)} \\ g(x) = \frac{5}{3(x+1)} \end{cases}$$

$$\xrightarrow{f(x) = g(x)} \frac{a}{b(x+1)} = \frac{5}{3(x+1)} \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{3}{5}$$

$$\frac{b}{ac} = \frac{b}{a} \times \frac{1}{c} = \frac{3}{5} \times \frac{1}{-3} = -\frac{1}{5}$$

۲۰- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. تابع $f(x)$ یک تابع خطی با شیب مثبت است، از طرفی تابع $(fg)(x)$ یک سهمی و دهانه‌ی آن رو به پایین است و محور x ها را در $x = 3$ قطع کرده است، پس تابع $g(x)$ بایستی شیب منفی داشته باشد و همچنین محور x ها را در $x = 3$ قطع کند. در نتیجه نمودار موردنظر شبیه نمودار گزینه‌ی (۲) است.

۲۱- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$D_f = \left\{0, \frac{1}{2}\right\}, D_g = \{1, 0, -2\} \Rightarrow D_f \cap D_g = \{0\}$$

$$\left. \begin{matrix} f(0) = -1 \\ g(0) = \frac{3}{4} \end{matrix} \right\} \Rightarrow (f+g)(0) = f(0) + g(0) = -1 + \frac{3}{4} = -\frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow f+g = \left\{\left(0, -\frac{1}{4}\right)\right\} \xrightarrow[\text{سؤال}]{\text{طبق}} \left\{\left(a-2b, \frac{a}{2}\right)\right\}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{2} = -\frac{1}{4} \Rightarrow 2a = -1 \Rightarrow a = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow a - 2b = 0 \xrightarrow{a = -\frac{1}{2}} -\frac{1}{2} - 2b = 0 \Rightarrow -2b = \frac{1}{2} \Rightarrow b = -\frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow a - b = -\frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = -\frac{1}{4}$$



۲۲- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. اگر تابع خطی f و f^{-1} متقاطع نباشند، باید شیب تابع خطی برابر یک و عرض از مبدأ مخالف صفر باشد.

$$f^{-1}(1) = 2 \Rightarrow f(2) = 1 \Rightarrow A(2, 1) \in f$$

$$\text{معادله خط: } y - 1 = 1(x - 2) \Rightarrow y = x - 1 \Rightarrow f(x) = x - 1 \Rightarrow f(3) = 2$$

۲۳- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$f(x) = 2x - [1 - x]$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 2\left(\frac{1}{2}\right) - \left[1 - \frac{1}{2}\right] = 1 - \left[\frac{1}{2}\right] = 1 - 0 = 1$$

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = 2\left(-\frac{1}{2}\right) - \left[1 - \left(-\frac{1}{2}\right)\right] = -1 - \left[1 + \frac{1}{2}\right] = -1 - \left[\frac{3}{2}\right] = -1 - 1 = -2$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) + 2f\left(-\frac{1}{2}\right) = 1 + 2(-2) = 1 - 4 = -3$$

۲۴- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. طبق تعریف تابع جزء صحیح داریم:

$$k \leq x < k + 1 \Leftrightarrow [x] = k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{5}{4} < x \leq 2 \xrightarrow{\text{ضرب طرفین در } -3} -5 > -3x \geq -6$$

$$\xrightarrow{\text{اضافه کردن (۱)}} -5 + 1 > -3x + 1 \geq -6 + 1 \Rightarrow -4 > -3x + 1 \geq -5$$

$$\xrightarrow[\text{جزء صحیح}]{\text{طبق تعریف تابع}} [-3x + 1] = -5 \quad \text{یا} \quad -5 \leq -3x + 1 < -4$$

۲۵- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$D_{\frac{f-g}{f \cdot g}} = D_f \cap D_g - \{x | (f \cdot g)(x) = 0\} = \{3, 4, 5\} - \{3\} = \{4, 5\}$$

$$\left(\frac{f-g}{f \cdot g}\right)(4) = \frac{f(4) - g(4)}{f(4) \cdot g(4)} = \frac{2 \times 2 - (-1)}{2 \times (-1)} = \frac{5}{-2} = -\frac{5}{2}$$

$$\left(\frac{f-g}{f \cdot g}\right)(5) = \frac{f(5) - g(5)}{f(5) \cdot g(5)} = \frac{2 \times 3 - (-3)}{3 \times (-3)} = -1$$

$$\Rightarrow \frac{f-g}{f \cdot g} = \{(4, -\frac{5}{2}), (5, -1)\}$$



۲۶- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. $x = \frac{7}{4}$ در دامنه $x \geq 0$ قرار دارد، پس $f\left(\frac{7}{4}\right)$ را با استفاده از ضابطه اول به دست می‌آوریم:

$$f\left(\frac{7}{4}\right) = \left[\frac{7}{4} + \frac{1}{2}\right] = \left[\frac{9}{4}\right] = [2/25] = 2$$

$x = -\frac{1}{4}$ در دامنه $x < 0$ قرار دارد، پس $f\left(-\frac{1}{4}\right)$ را با استفاده از ضابطه دوم به دست می‌آوریم.

$$f\left(-\frac{1}{4}\right) = \left|-\frac{1}{4} - 1\right| = \left|-\frac{5}{4}\right| = \frac{5}{4}$$

$$f\left(\frac{7}{4}\right) + f\left(-\frac{1}{4}\right) = 2 + \frac{5}{4} = \frac{13}{4} = 3/25$$

حاصل عبارت موردنظر را تعیین می‌کنیم:

۲۷- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$D = D_f \cap D_g = \{1, 2, -3, 0\} \cap \{x \leq 1\} = \{0, 1, -3\}$$

$$\begin{cases} (f + 2g)(0) = f(0) + 2g(0) = 1 + 2(1) = 3 \\ (f + 2g)(1) = f(1) + 2g(1) = 3 + 2(0) = 3 \\ (f + 2g)(-3) = f(-3) + 2g(-3) = (-1) + 2\sqrt{1+3} = (-1) + 4 = 3 \end{cases}$$

$\Rightarrow (f + 2g) \text{ برد} = \{3\} \Rightarrow$ تنها شامل یک عضو است.

۲۸- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$-x^2 + 7x - 12 > 0 \Rightarrow (x - 3)(x - 4) < 0 \Rightarrow 3 < x < 4 \quad (1)$$

$$x - 2 > 0 \Rightarrow x = 2 \quad (2)$$

$$D_f = (1) \cap (2) = (3, 4)$$

دامنه‌ی تابع f شامل هیچ عدد صحیحی نیست.

۲۹- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. تابع داده‌شده موقعی تعریف می‌شود که مخرج کسر مخالف صفر باشد، پس:

$$f^2 - 4f + 3 = 0 \Rightarrow (f - 3)(f - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} f = 3 \\ f = 1 \end{cases}$$

به ازای $x = 5$ ، مقدار f برابر ۳ و به ازای $x = -3$ مقدار f برابر یک است، یعنی $g(5)$ و $g(-3)$ وجود ندارد، لذا تابع g شامل دو زوج مرتب می‌باشد.

$$\begin{cases} g(3) = 0 \\ g(4) = \frac{2 \times 7}{7^2 - 4 \times 7 + 3} = \frac{14}{24} = \frac{7}{12} \end{cases}$$



۳۰- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. می‌دانیم که دامنه‌ی توابع گویا به صورت $\{ \text{ریشه‌های مخرج} \} - R$ است. با توجه به فرض تست، نتیجه می‌گیریم که $x = b$ ریشه‌ی مضاعف مخرج است:

$$3x^2 - 18x + a = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = b$$

$$\Rightarrow \begin{cases} S = x_1 + x_2 \Rightarrow \frac{18}{3} = b + b \Rightarrow b = 3 \\ P = x_1 x_2 \Rightarrow \frac{a}{3} = 3 \times 3 \Rightarrow a = 27 \end{cases} \Rightarrow a + b = 30$$

۳۱- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$f(x) = [x] + |2 - x|$$

$$f(\sqrt{3}) = [\sqrt{3}] + \underbrace{|2 - \sqrt{3}|}_{(+)} = 1 + (2 - \sqrt{3}) = 1 + 2 - \sqrt{3} = 3 - \sqrt{3}$$

$$f(\sqrt{5}) = [\sqrt{5}] + \underbrace{|2 - \sqrt{5}|}_{(-)} = 2 + (\sqrt{5} - 2) = 2 + \sqrt{5} - 2 = \sqrt{5}$$

$$\Rightarrow f(\sqrt{3}) + f(\sqrt{5}) = 3 - \sqrt{3} + \sqrt{5}$$

۳۲- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. برای دامنه‌ی تابع $2f - g$ داریم:

$$D_{2f - g} = D_f \cap D_g = \{2\}$$

از طرفی برای دامنه‌ی تابع $f(x)$ و $g(x)$ داریم:

$$D_f: 2x - 2a \geq 0 \Rightarrow x \geq \frac{2a}{2}$$

$$D_g: b - 3x \geq 0 \Rightarrow x \leq \frac{b}{3}$$

برای آن‌که اشتراک دامنه‌های توابع f و g تنها عدد ۲ باشد باید داشته باشیم:

$$\frac{2a}{2} = \frac{b}{3} = 2 \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{4}{2} \\ b = 6 \end{cases}$$

بنابراین می‌توان نوشت:

$$(2f - g)(2) = \frac{k}{2} \Rightarrow 2f(2) - g(2) = \frac{k}{2} \Rightarrow 2(0 + k + 1) - (0 - 2k) = \frac{k}{2}$$

$$\Rightarrow 4k + 2 = \frac{k}{2} \Rightarrow \frac{8k}{2} = -2 \Rightarrow k = -\frac{4}{8}$$

و در نهایت داریم:

$$2a + b - 8k = 4 + 6 + 4 = 14$$



۳۳- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ضابطه تابع همانی $f(x) = x$ می باشد که در آن ضریب x برابر با یک است. بنابراین:

$$5a - 6 = 1 \Rightarrow 5a = 7 \Rightarrow a = \frac{7}{5} = 1\frac{2}{5}$$

ضابطه تابع ثابت $f(x) = c$ می باشد که در آن c مقداری ثابت است و جمله شامل x وجود ندارد. بنابراین:

$$\frac{b}{2} + 3 = 0 \Rightarrow \frac{b}{2} = -3 \Rightarrow b = -6$$

اکنون حاصل عبارت خواسته شده را به دست می آوریم.

$$[a - b] = [1\frac{2}{5} - (-6)] = [7\frac{2}{5}] = 7\frac{2}{5}$$

«بانک سوال موسسه یاوران دانش»

۳۴- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. نقطه‌ی روی تابع $f(x)$ را به صورت $M(x, \sqrt{x-1})$ در نظر می گیریم و فاصله‌ی

آن را تا $A(2, 0)$ برابر $\sqrt{13}$ قرار می دهیم.

$$|AM| = \sqrt{13} \Rightarrow |AM|^2 = 13$$

$$\Rightarrow (x - 2)^2 + (\sqrt{x-1} - 0)^2 = 13$$

$$\Rightarrow x^2 - 4x + 4 + x - 1 = 13 \Rightarrow x^2 - 3x - 10 = 0$$

$$\Rightarrow (x - 5)(x + 2) = 0 \xrightarrow{x \geq 1} x = 5 \Rightarrow f(5) = 2$$

۳۵- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$D\left(\frac{f}{g}\right) = D_f \cap D_g - \{x | g(x) = 0\}$$

$$\begin{cases} D_f : x + 2 > 0 \Rightarrow x > -2 \\ D_g : x^2 - 1 \neq 0 \Rightarrow x^2 \neq 1 \Rightarrow x \neq \pm 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow D_f \cap D_g = (-2, +\infty) - \{-1, 1\} \quad (*)$$

$$g(x) = 0 \Rightarrow \frac{x-3}{x^2-1} = 0 \Rightarrow x = 3 \quad (**)$$

$$(*) \text{ و } (**) \Rightarrow D\left(\frac{f}{g}\right) = ((-2, +\infty) - \{-1, 1\}) - \{3\} = (-2, +\infty) - \{-1, 1, 3\}$$

پس دامنه‌ی این تابع، شامل ۲ عدد طبیعی (۱) و (۳) نیست.



۳۶- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$D_f^g = D_g \cap D_f - \{x | f(x) = 0\}$$

$$D_g = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$D_f = 3x - x^2 \geq 0 \Rightarrow x(3 - x) \geq 0 \Rightarrow \begin{array}{c} | \quad \cdot \quad 3 \\ - \quad + \quad - \end{array} \Rightarrow D_f = [0, 3]$$

$$f(x) = 0 \Rightarrow \sqrt{3x - x^2} = 0 \Rightarrow 3x - x^2 = 0 \Rightarrow x(3 - x) = 0 \Rightarrow x = 0, 3$$

$$\Rightarrow D_f^g = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\} \cap [0, 3] - \{0, 3\} = \{1, 2\}$$

۳۷- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\begin{cases} x > 0 \Rightarrow \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{x - x}{x + x} = 0 \\ x < 0 \Rightarrow \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{x + x}{x - x} = \text{تعریف نشده} \end{cases}$$

پس ضابطه $\frac{f}{g}$ برابر $y = 0$ و دامنه آن $x > 0$ است که نمایش یک نیم خط می باشد.

۳۸- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. دامنه ی تابع f از حل نامعادله ی $b - ax \geq 0$ به دست می آید، پس $x = 1$ باید ریشه ی عبارت زیر رادیکال باشد، لذا داریم:

$$b - a = 0 \Rightarrow a = b \Rightarrow f(x) = 3 - \sqrt{a - ax} \quad (*)$$

$$\begin{cases} f(x) = 3 - \sqrt{a - ax} \xrightarrow{\text{تلاقی با محور } x \text{ ها}} 0 = 3 - \sqrt{a - ax} \Rightarrow \sqrt{a - ax} = 3 \quad (1) \\ 3x - 2y = 12 \xrightarrow{\text{تلاقی با محور } x \text{ ها}} 3x - 0 = 12 \Rightarrow x = 4 \quad (2) \end{cases}$$

$$\xrightarrow{(1) \text{ و } (2)} \sqrt{a - 4a} = 3 \Rightarrow \sqrt{-3a} = 3 \Rightarrow -3a = 9 \Rightarrow a = -3$$

$$\xrightarrow{(*) \text{ در }} f(x) = 3 - \sqrt{3x - 3} \xrightarrow{\text{تلاقی با } y = 2} 2 = 3 - \sqrt{3x - 3}$$

$$\Rightarrow \sqrt{3x - 3} = 1 \Rightarrow 3x - 3 = 1 \Rightarrow x = \frac{4}{3}$$

۳۹- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$(f - g)(1) = 4 \Rightarrow f(1) - g(1) = 4 \Rightarrow (2 - b) - (4 - c) = 4 \Rightarrow c - b = 6$$

$$(f - g)(2) = f(2) - g(2) = (4 - b) - (10 - c) = c - b - 6 = 6 - 6 = 0$$



۴۰- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\begin{cases} 4 - x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \leq 4 \Rightarrow -2 \leq x \leq 2 \\ [x] = 0 \Rightarrow 0 \leq x < 1 \end{cases}$$

اشتراک می گیریم

$$\xrightarrow{\text{اشتراک می گیریم}} \text{دامنه} = [-2, 2] - [0, 1) = [-2, 0) \cup [1, 2]$$

شامل اعداد صحیح ۲، -۱، ۱ و ۰ می باشد.

