

گنجینه سوال رایگان

+ پاسخ تشریحی

یاوران دانش



راه های ارتباطی با ما:

www.Dyavari.com

۰۲۱-۷۶۷۰۳۸۵۸

۰۹۱۲-۳۴ ۹۴ ۱۳۴

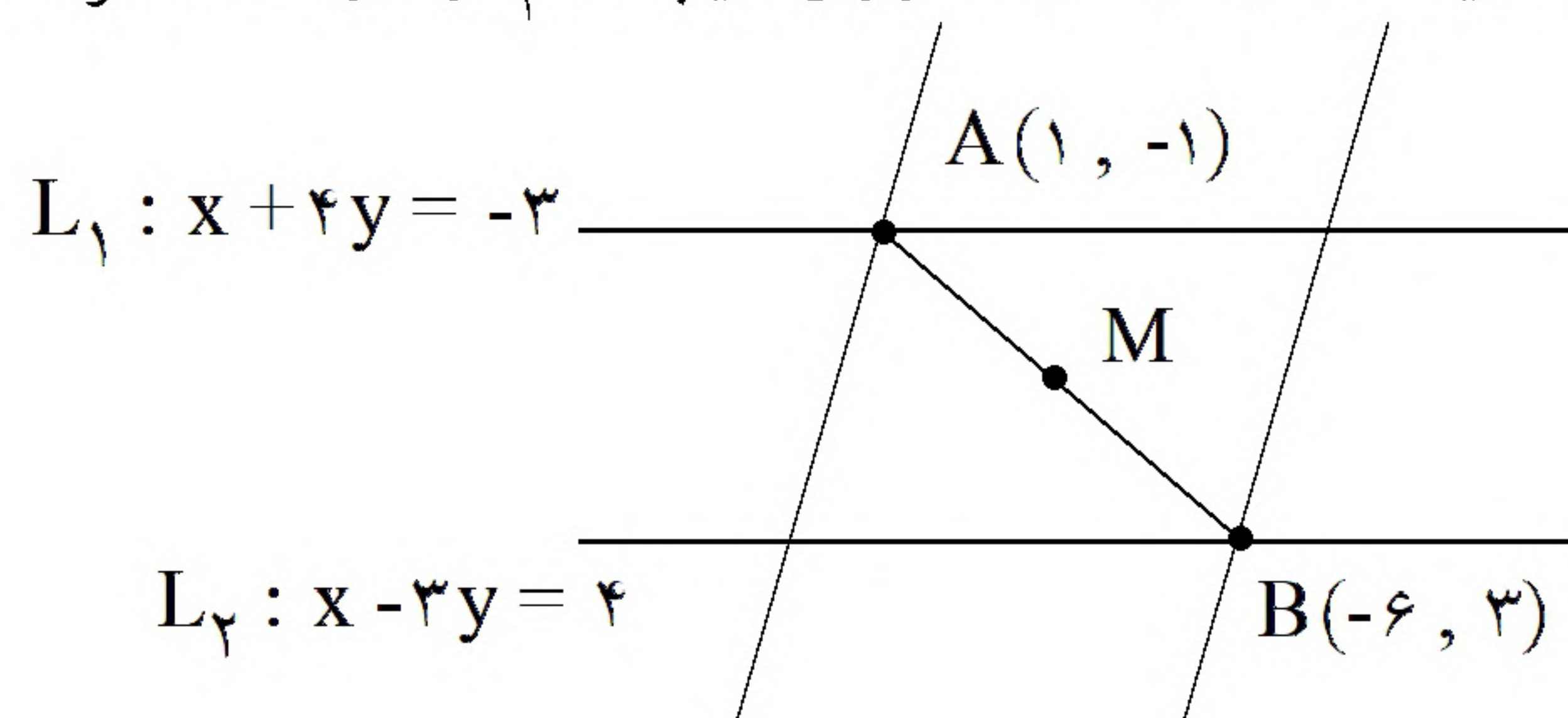


	۱	۲	۳	۴
۱ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۴ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۵ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۶ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۷ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۸ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۹ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۱۰ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۱ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۲ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۳ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۱۴ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۵ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۶ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۱۷ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۱۸ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۹ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۰ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۱ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۲ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۳ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۴ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۲۵ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۶ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۷ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۸ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۹ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۰ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۱ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۲ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۳۳ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۴ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۵ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۶ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۷ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۸ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۹ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۴۰ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

	۱	۲	۳	۴
۴۱ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۴۲ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۴۳ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۴۴ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۴۵ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۴۶ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۴۷ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۴۸ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۴۹ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۵۰ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۵۱ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>



۱- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. دقت کنید که $B(-6, 3)$ روی هیچکدام از دو خط ذکر شده نیست.



$$\begin{cases} y = \frac{x-4}{3} \\ y = \frac{-x-3}{4} \end{cases} \xrightarrow{\text{تقاطع}} \frac{x-4}{3} = \frac{-x-3}{4} \Rightarrow x = 1 \Rightarrow y = -1$$

$A(1, -1)$

$$L_1 \text{ فاصله از خط } M\left(-\frac{5}{2}, 1\right) \Rightarrow \frac{\left|-\frac{5}{2} + 4 + 3\right|}{\sqrt{17}}$$

$$L_2 \text{ فاصله از خط } \Rightarrow \frac{\left|-\frac{5}{2} - 3 - 4\right|}{\sqrt{10}} = \frac{19}{2\sqrt{10}}$$

۲- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\frac{(2-x)^2 + x^2}{x^2(2-x)^2} = \frac{40}{9} \Rightarrow \frac{4-4x+2x^2}{\underbrace{(2x-x^2)}_t} = \frac{40}{9}$$

$$\frac{4-2t}{t^2} = \frac{40}{9} \Rightarrow \frac{2-t}{t^2} = \frac{20}{9} \Rightarrow 20t^2 + 9t - 18 = 0 \Rightarrow \Delta = 1521 \Rightarrow \frac{-9 \pm \sqrt{1521}}{40}$$

$$= \frac{3}{4}, -\frac{12}{10} = t$$

$$\begin{cases} -x^2 + 2x = -\frac{12}{10} \Rightarrow -x^2 + 2x + \frac{12}{10} = 0, \Delta > 0 \rightarrow S = 2 \\ -x^2 + 2x - \frac{3}{4} = 0, \Delta > 0 \rightarrow S = 2 \xrightarrow{\text{جواب}} 2+2=4 \end{cases}$$



۳- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\begin{aligned} 3x^2 - 12x - a &= 0 \Rightarrow x^2 - 4x - \frac{a}{3} = 0 \\ \alpha + \beta &= 4 \Rightarrow \beta = 4 - \alpha \\ \alpha^2 - 4\alpha - \frac{a}{3} &= 0 \Rightarrow \alpha^2 = 4\alpha + \frac{a}{3} \\ \beta^2 &= 4\beta + \frac{a}{3} = 4(4 - \alpha) + \frac{a}{3} = 16 - 4\alpha + \frac{a}{3} \\ 2\alpha^2 + \beta^2 - 4\alpha &= 7 \Rightarrow \cancel{\alpha^2} + \frac{2a}{3} + 16 - \cancel{4\alpha} + \frac{a}{3} - 4\alpha = 7 \\ \Rightarrow a &= -9 \Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = 3 \end{cases} \\ \Rightarrow \frac{a}{\beta} &= \frac{-9}{3} = -3 \end{aligned}$$

۴- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\begin{aligned} AB \parallel CD &\Rightarrow \frac{4-1}{-1-3} = \frac{-3}{2x+1} \Rightarrow 2x+1 = 4 \Rightarrow x = \frac{3}{2} \\ AB \perp BC &\Rightarrow \frac{-3}{4} \times \frac{y-1}{\frac{3}{2}} = -1 \Rightarrow \frac{y-1}{\frac{3}{2}} = -1 \Rightarrow y = -1 \Rightarrow C\left(\frac{3}{2}, -1\right) \\ \text{محیط} &= 2(AB + BC) = 2\left(5 + \frac{5}{2}\right) = 15 \end{aligned}$$

۵- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\begin{aligned} 2x^2 - (m+2)x + m &= 0 \xrightarrow{a+b+c=0} x=1, \frac{m}{2} \Rightarrow S = \frac{1}{2} \left| m \left(\frac{m}{2} - 1 \right) \right| \\ \text{محور عرض: } y(0) &= m \\ \Rightarrow \left| m \left(\frac{m}{2} - 1 \right) \right| &= \frac{3}{2} \Rightarrow |m(m-2)| = 3 \begin{cases} m = -1 \Rightarrow \frac{m}{2} = \frac{-1}{2} \checkmark \\ m = 3 \Rightarrow \frac{m}{2} = \frac{3}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

۶- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\begin{aligned} \text{نسبت طلایی} &= \frac{1+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow \frac{x}{4} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \Rightarrow x = 2(\sqrt{5}+1) \quad \text{طول مستطیل جدید} \\ \frac{S_2}{S_1} &= \frac{4 \times 2(\sqrt{5}+1)}{4 \times 5} = \frac{2}{5}(\sqrt{5}+1) \end{aligned}$$



۷- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. دو خط $4x + y = 3$ و $x - 4y = 5$ بر هم عمودند و نقطه $(\frac{4}{5}, 2)$ روی هیچ کدام از آنها نیست، پس فاصله این نقطه از خطهای داده شده اضلاع مستطیل را می دهد:

$$a = \frac{|4 \times (\frac{4}{5}) + 2 - 3|}{\sqrt{4^2 + 1^2}} = \frac{17}{\sqrt{17}} = \sqrt{17}$$

$$b = \frac{|\frac{4}{5} - 4(2) - 5|}{\sqrt{4^2 + 1^2}} = \frac{1/5}{\sqrt{17}} = \frac{\sqrt{17}}{2}$$

فاصله وسط قطراز هر قطر (طبق تعمیم قضیه تالس) برابر نصف ضلع دیگر است، پس بیشترین فاصله موردنظر $\frac{\sqrt{17}}{2}$ است.



۸- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. از آنجا که $\frac{x+1-x}{2} = \frac{1}{2}$ است، معادله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\frac{1}{\left(\frac{1}{2} + t\right)^2} + \frac{1}{\left(\frac{1}{2} - t\right)^2} = \frac{160}{9}$$

$$\frac{\frac{1}{4} + t^2 - t + \frac{1}{4} + t^2 + t}{\left(\frac{1}{4} - t^2\right)^2} = \frac{160}{9} \Rightarrow \frac{2t^2 + \frac{1}{2}}{t^4 - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{16}} = \frac{160}{9}$$

و داریم:

$$\Rightarrow 160t^4 - 80t^2 + 10 = 18t^2 + \frac{9}{2} \Rightarrow 160t^4 - 98t^2 + \frac{11}{2} = 0$$

در این معادله دو مجذوری، Δ ، S و P همگی مثبت هستند، یعنی ۴ مقدار متفاوت برای t پیدا می‌شود که دو به دو گزینه هستند، پس داریم:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = \left(\frac{1}{2} + t_1\right) + \left(\frac{1}{2} - t_1\right) + \left(\frac{1}{2} + t_2\right) + \left(\frac{1}{2} - t_2\right) = 4 \times \frac{1}{2} = 2$$

راه دوم:

$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x-1)^2} = \frac{160}{9} \Rightarrow \frac{(x-1)^2 + x^2}{(x^2 - x)^2} = \frac{160}{9} \Rightarrow \frac{2x^2 - 2x + 1}{(x^2 - x)^2} = \frac{160}{9}$$

$$\xrightarrow{x^2 - x = t} \frac{2t + 1}{t^2} = \frac{160}{9} \xrightarrow{+1} \frac{2t + 1}{t^2} + \frac{t^2}{t^2} = \frac{160}{9} + \frac{9}{9}$$

$$\Rightarrow \frac{(t+1)^2}{t^2} = \frac{169}{9} \Rightarrow \left(1 + \frac{1}{t}\right)^2 = \left(\frac{13}{3}\right)^2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1 + \frac{1}{t} = \frac{13}{3} \Rightarrow t = \frac{3}{10} \Rightarrow x^2 - x = \frac{3}{10} \Rightarrow x_1 + x_2 = 1 \\ 1 + \frac{1}{t} = -\frac{13}{3} \Rightarrow t = -\frac{3}{16} \Rightarrow x^2 - x = -\frac{3}{16} \Rightarrow x_3 + x_4 = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 + 1 = 2$$



۹- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. معادله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$x^2 - x - \frac{b}{a} = 0 \text{ یا } x^2 - x + P = 0$$

در این معادله $S = 1$ است. حال داریم:

$$4\beta^2 + 2\alpha^2 - 2\beta = 17 \Rightarrow 2\beta^2 + \alpha^2 - \beta = \frac{17}{2}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\alpha^2 + \beta^2}_{S^2 - 2P} + \underbrace{\beta^2 - \beta}_{-P} = \frac{17}{2} \Rightarrow 1 - 3P = \frac{17}{2} \Rightarrow P = -\frac{1}{2}$$

اختلاف ریشه‌های معادله $x^2 - x + \frac{1}{2} = 0$ برابر $\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$ است.

$$\Rightarrow |\alpha - \beta| = \sqrt{1 - \frac{1}{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

۱۰- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. طول رأس سهمی $x_S = \frac{-5+3}{2} = -1$ و عرض آن $y_S = 1$ است. پس معادله سهمی

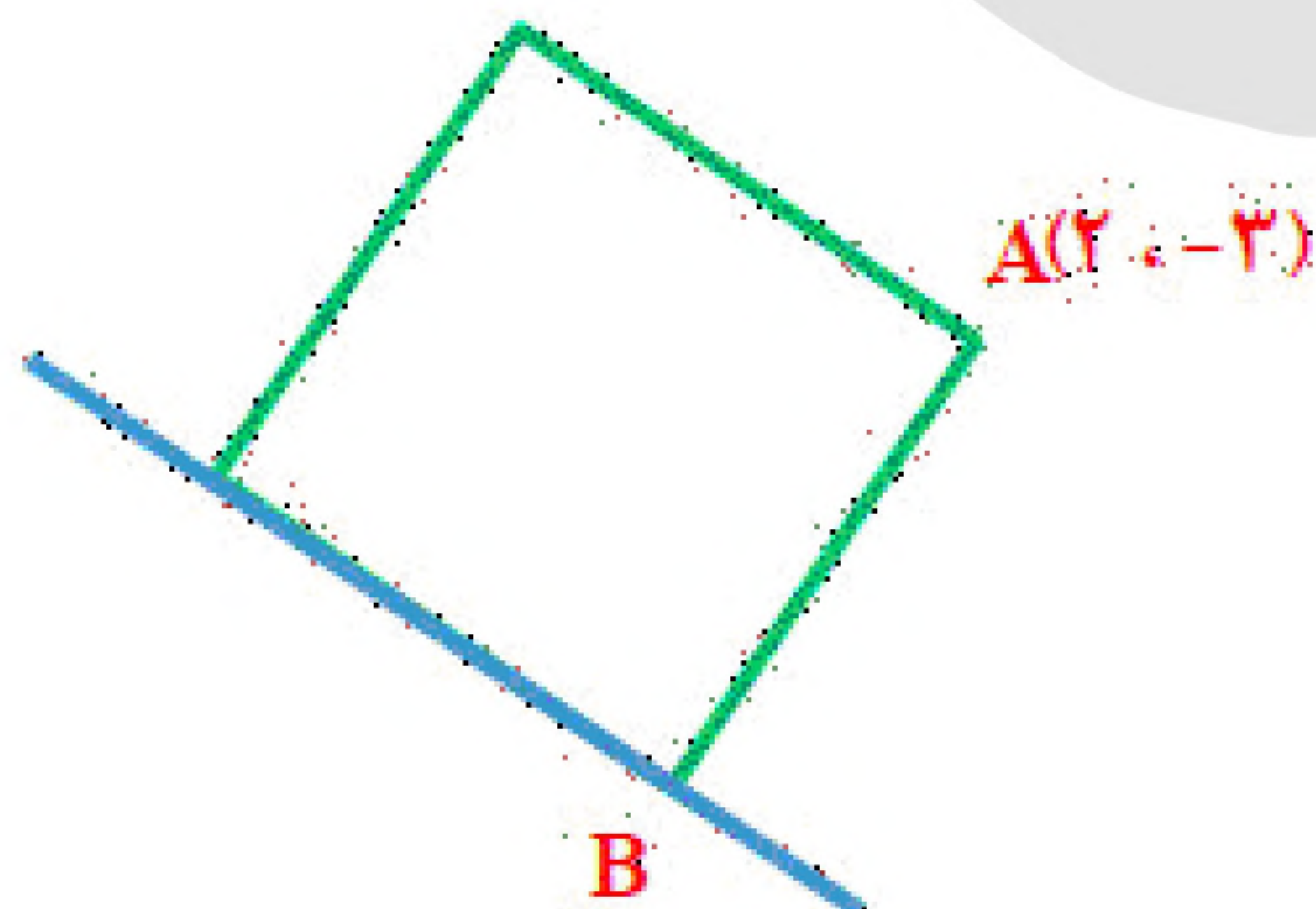
$y = a(x+1)^2 + 1 = ax^2 + 2ax + a + 1$ خواهد بود. جواب‌های معادله $y = 0$ ، α و β هستند و داریم:

$$\alpha^2 + \beta^2 = S^2 - 2P = (-2)^2 - 2\left(\frac{a+1}{4}\right) = 4 - \frac{2a+2}{4} = 5 \Rightarrow \frac{2a+2}{4} = -1 \Rightarrow a = -\frac{2}{3}$$

در نتیجه عرض از مبدأ سهمی $\frac{1}{3} = a + 1$ خواهد شد.

«بانک سوال موسسه یاوران دانش»

۱۱- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.



$$4x + 3y - 9 = 0 \Rightarrow AB = \frac{|4(2) + 3(-3) - 9|}{\sqrt{4^2 + 3^2}}$$

$$= \frac{10}{5} = 2$$

$$S = AB^2 = 2^2 \Rightarrow S = 4$$

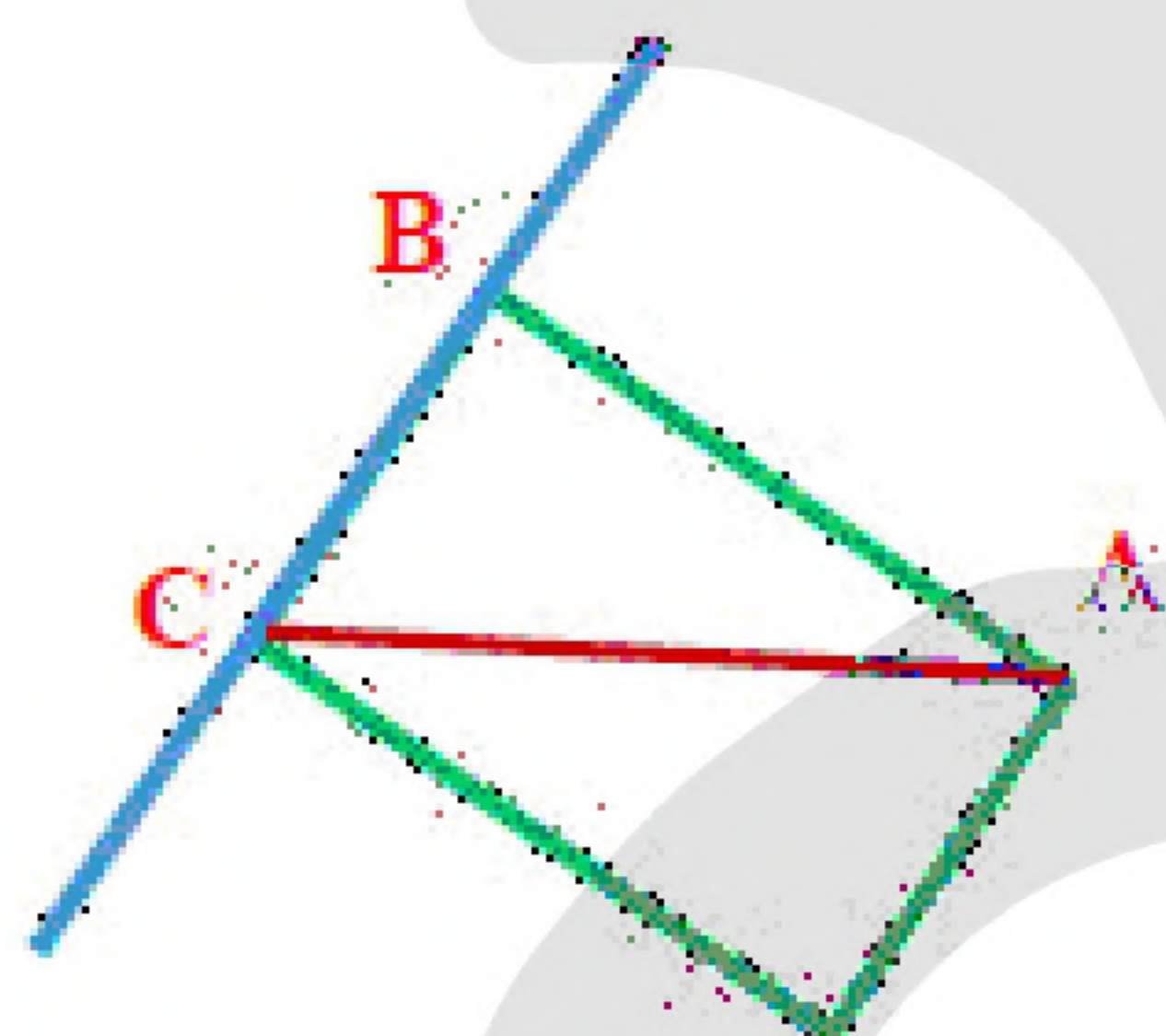


۱۲- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\frac{1}{\sqrt{x^2-2x}} - \frac{1}{\sqrt{x^2-2x} + \sqrt{x^2+2x}} = \frac{x+5}{\sqrt{x^2+2x}}$$

$$\Rightarrow \frac{2\sqrt{x^2+2x}}{-4x} = \frac{x+5}{\sqrt{x^2+2x}} \Rightarrow x^2+2x = -2x^2-10x \Rightarrow 3x^2+12x=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=-4 \end{cases}$$

۱۳- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.



$$x-2y-2=0 \Rightarrow AB = \frac{|2-10-2|}{\sqrt{1+4}} = \frac{10}{\sqrt{5}}, BC = \sqrt{(4\sqrt{5})^2 - \left(\frac{10}{\sqrt{5}}\right)^2} = \sqrt{60}$$

$$S = \frac{10}{\sqrt{5}} \times \sqrt{60} \Rightarrow S = 20\sqrt{3}$$



۱۴- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. به دلیل اینکه ضریب x زوج است، بهتر است طرفین معادله را تقسیم بر ۲ کنیم تا محاسبات ساده‌تر شود:

$$2x^2 + 6x + a = 0 \Rightarrow x^2 + 3x + \frac{a}{2} = 0$$

$$\begin{cases} S = \alpha + \beta = -3 \\ P = \alpha\beta = \frac{a}{2} \\ \beta = \frac{-3 - \sqrt{9 - 2a}}{2} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \alpha^3 + \beta^3 + \beta^2 &= -\frac{21}{2} + \frac{3}{2}\sqrt{3} \Rightarrow S^3 - 3PS + \beta^2 = -\frac{21}{2} + \frac{3}{2}\sqrt{3} \\ \Rightarrow -27 - 3\left(\frac{a}{2}\right)(-3) + \left(\frac{9 + 9 - 2a + 6\sqrt{9 - 2a}}{4}\right) &= -\frac{21}{2} + \frac{3}{2}\sqrt{3} \\ \Rightarrow -27 + \frac{9a}{2} + \frac{9}{2} - \frac{a}{2} + \frac{3}{2}\sqrt{9 - 2a} &= -\frac{21}{2} + \frac{3}{2}\sqrt{3} \Rightarrow 9 - 2a = 3 \Rightarrow 2a = 6 \Rightarrow a = 3 \end{aligned}$$

۱۵- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$a = \frac{1}{a} \Rightarrow a^2 = 1$$

$$\begin{cases} a = 1 : y = x, y = x + 1 \quad \checkmark (1, 2) \\ a = -1 : y = -x + 2, y = -x + 1 \quad \times \end{cases}$$

عرض = فاصله نقطه $(1, 2)$ از خط $y = x$ = $\frac{|2 - 1|}{\sqrt{1 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\begin{cases} \text{عرض} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \text{طول} = \sqrt{25 - \frac{1}{2}} = \frac{7}{\sqrt{2}} \Rightarrow \text{مساحت} = \frac{7}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = 3\frac{1}{2} \\ \text{قطر} = 5 \end{cases}$$

۱۶- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\left. \begin{aligned} 2 - x &\geq 0 \\ x - 2 &\geq 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow x = 2 \xrightarrow{\text{جایگذاری}} \sqrt{1} = \sqrt{2} - \sqrt{0}$$

جواب ندارد



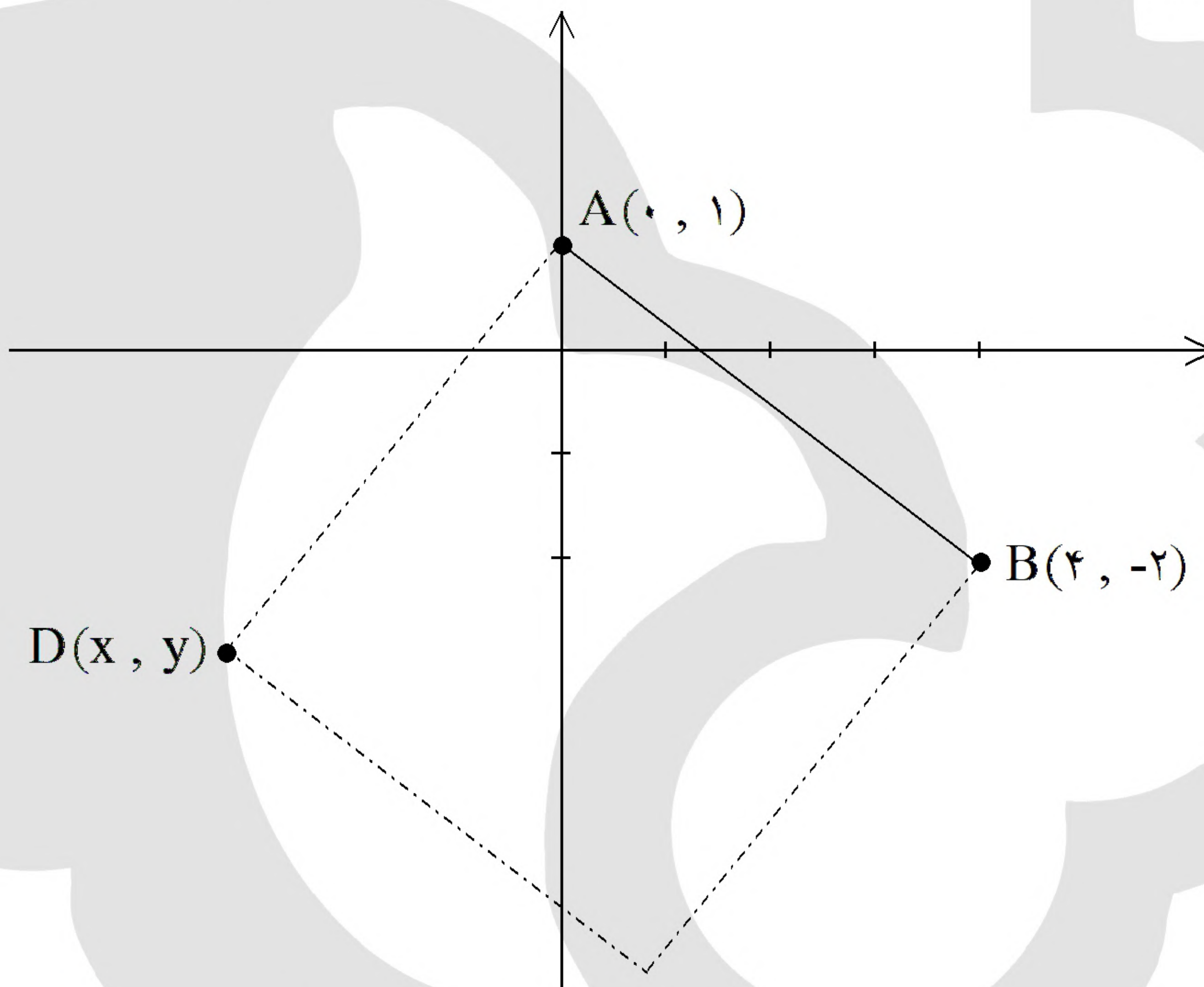
۱۷- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. $x^3 + 8$ را مخرج مشترک می‌گیریم:

$$\frac{x^3 + 8 = (x + 2)(x^2 - 2x + 4)}{x^3 + 8} = \frac{6x(x + 2)}{x^3 + 8} \Rightarrow 7x + 6 = 6x^2 + 12x \Rightarrow 6x^2 + 5x - 6 = 0$$

$$\Rightarrow (2x + 3)(3x - 2) = 0 \Rightarrow x_1 = -\frac{3}{2}, x_2 = \frac{2}{3}$$

هر دو جواب قابل قبول‌اند که فقط x_2 مثبت است.

۱۸- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.



$$m_{AB} = \frac{1 - (-2)}{0 - 4} = \frac{-3}{4} \Rightarrow m_{AD} = \frac{4}{3} \Rightarrow AD: y = \frac{4}{3}x + 1 \Rightarrow y - 1 = \frac{4}{3}x$$

$$AB = AD \Rightarrow \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{x^2 + (y - 1)^2} \Rightarrow 25 = x^2 + \left(\frac{4}{3}x\right)^2 \Rightarrow 25 = \frac{25x^2}{9}$$

$$\Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = -3$$



۱۹- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ابتدا ریشه مشترک را می‌یابیم:

$$x^2 + 6x + m = x^2 + 2x - 3m \Rightarrow 4x = -4m \Rightarrow x = -m$$

در یکی از معادله‌ها جای گذاری می‌کنیم:

$$m^2 - 6m + m = m^2 - 5m = 0 \xrightarrow{m \neq 0} m = 5$$

به ازای $m = 5$ معادلات به صورت زیر هستند:

$$\begin{cases} x^2 + 6x + 5 = 0 \Rightarrow x_1 = -1, x_2 = -5 \\ x^2 + 2x - 15 = 0 \Rightarrow x_1 = 3, x_2 = -5 \end{cases}$$

پس اختلاف ریشه‌های غیرمشترک $4 = (-1) - 3$ است.

$$B \begin{vmatrix} 3 \\ 3 \end{vmatrix} \quad C \begin{vmatrix} 7 \\ 11 \end{vmatrix} \Rightarrow m_{BC} = \frac{11-3}{7-3} = 2$$

۲۰- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$BC: y - 3 = 2(x - 3) \Rightarrow BC: 2x - y - 3 = 0, A \begin{vmatrix} 1 \\ 9 \end{vmatrix}$$

$$AH = \frac{|2(1) - 9 - 3|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{10}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5}$$

۲۱- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\sqrt{2-x} = a \Rightarrow \frac{1}{a+2} - \frac{1}{2-a} = \frac{a^2}{5a} \Rightarrow \frac{-2a}{4-a^2} = \frac{a}{5} \xrightarrow{a \neq 0} 4 - a^2 = -10 \Rightarrow a^2 = 14$$

$$\Rightarrow 2 - x = 14 \Rightarrow x = -12$$

این معادله فقط یک ریشه‌ی منفی دارد پس ریشه‌ی مثبت ندارد.

۲۲- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\left. \begin{aligned} S = a + b = a^2 + b^2 - 12 \Rightarrow S = S^2 - 2P - 12 \\ P = ab = a + b - 1 \Rightarrow P = S - 1 \end{aligned} \right\} S = S^2 - 2S + 2 - 12$$

$$S^2 - 3S - 10 = 0 \Rightarrow \begin{cases} S = 5 \\ S = -2 \end{cases}$$

چون a, b اعداد طبیعی هستند فقط $S = 5$ قابل قبول است.



۲۳- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

راه اول: $\alpha + \beta = 1$ و $\alpha\beta = -2$ پس $\beta = 2$ و $\alpha = -1$ یعنی ۲ و -۱ ریشه‌های معادله هستند، پس $\alpha = -1$ در معادله صدق می‌کند:

$$-4 + k + 9 - 2 = 0 \Rightarrow k + 3 = 0 \Rightarrow k = -3$$

راه دوم: معادله درجه سوم، دو ریشه حقیقی دارد، پس ریشه سوم هم دارد، این ریشه را γ می‌نامیم. قرینه حاصل ضرب این جواب‌ها برابر $-\frac{1}{4} = -\frac{2}{4}$ است.

$$\Rightarrow -\alpha\beta\gamma = -(-2)\gamma = -\frac{1}{2} \Rightarrow \gamma = -\frac{1}{4}$$

مجموع جواب‌ها نیز برابر $-\frac{k}{4}$ است.

$$\Rightarrow \alpha + \beta + \gamma = 1 - \frac{1}{4} = -\frac{k}{4} \Rightarrow k = -3$$

$$\alpha + \beta + \gamma = -\frac{b}{a}$$

$$\alpha\beta + \beta\gamma + \alpha\gamma = \frac{c}{a}$$

$$\alpha\beta\gamma = -\frac{d}{a}$$

نکته: در معادله‌ی درجه سوم $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ داریم:

۲۴- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. a باید واسطه هندسی α و β باشد.

$$\Rightarrow a^2 = \alpha\beta \Rightarrow a^2 = 2a - 1 \Rightarrow a^2 - 2a + 1 = 0 \Rightarrow a = 1$$

به ازای $a = 1$ معادله $x^2 + 4x + 1 = 0$ دو جواب حقیقی معکوس دارد.

۲۵- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\begin{cases} 2y - 7x = -19 \\ y + 2x = 7 \end{cases} \Rightarrow B(3, 1) \text{ و } AC: 4y - 3x - 17 = 0$$

$$BH = \frac{|4 - 9 - 17|}{5} = \frac{22}{5} = 4\frac{2}{5}$$



۲۶- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\sqrt{x+1} \left(\frac{1}{3+\sqrt{x-1}} - \frac{1}{3-\sqrt{x-1}} \right) = \sqrt{x-1}$$

$$\xrightarrow{x \neq 1} \sqrt{x+1} \left(\frac{3-\sqrt{x-1}-3-\sqrt{x-1}}{9-(x-1)} \right) = \sqrt{x-1} \Rightarrow \sqrt{x+1} \left(\frac{-2\sqrt{x-1}}{10-x} \right) = \sqrt{x-1}$$

$$\Rightarrow \frac{-2\sqrt{x+1}}{10-x} = 1 \Rightarrow -2\sqrt{x+1} = 10-x \xrightarrow{10-x \leq 0 \Rightarrow x \geq 10} x^2 - 20x + 100 = 4x + 4$$

$$\Rightarrow x^2 - 24x + 96 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 12 + \sqrt{48} & \text{ق ق} \\ x = 12 - \sqrt{48} & \text{غ ق ق} \end{cases}$$

پس این معادله فقط یک ریشه دارد.

۲۷- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\begin{cases} \beta = 3\alpha \\ \alpha + \beta = \frac{a}{3} \Rightarrow a = 3\alpha + 3\beta \\ \alpha\beta = \frac{4}{3} \Rightarrow \alpha(3\alpha) = \frac{4}{3} \Rightarrow 3\alpha^2 = \frac{4}{3} \Rightarrow \alpha^2 = \frac{4}{9} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{2}{3} \Rightarrow \beta = 2 \Rightarrow a = 8 \\ \alpha = -\frac{2}{3} \Rightarrow \beta = -2 \Rightarrow a = -8 \end{cases} \end{cases}$$

در نتیجه: ۱۶ = اختلاف

۲۸- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

نقطاتی که از $B(-3, 2)$ به فاصله $\sqrt{29}$ هستند، به صورت $(x+3)^2 + (y-2)^2 = 29$ می‌باشد و نقاطی که از نقطه $(-1, 4)$ به فاصله ۵ می‌باشد، به صورت $(x+1)^2 + (y-4)^2 = 25$ است.

نقطه‌ی موردنظر روی هر دوی این‌ها قرار دارد. حال اگر این دو رابطه را از هم کم کنیم، داریم:

$$\begin{aligned} x^2 + 6x + 9 + y^2 - 4y + 4 &= 29 \\ - \\ x^2 + 2x + 1 + y^2 - 8y + 16 &= 25 \\ \hline 4x + 8 + 4y - 12 &= 4 \\ 4x + 4y &= 8 \Rightarrow x + y = 2 \Rightarrow a = 2 \end{aligned}$$



۲۹- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. چون $0 < \beta < \alpha$ پس: $\alpha - \beta = -\sqrt{\Delta}$ و از روی معادله داریم:

$$S = -6, P = a$$

$$3\alpha^2 + 2\beta^2 = \frac{5}{2}(\alpha^2 + \beta^2) + \frac{1}{2}(\alpha^2 - \beta^2) = \frac{5}{2}(36 - 2a) + \frac{1}{2}(\alpha - \beta)(\alpha + \beta)$$

$$\left. \begin{aligned} &= \frac{90 - 5a + 6\sqrt{9-a}}{2} \\ &= 12\sqrt{2} + \frac{85}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow a = 1$$

راه دوم:

$$x^2 + 6x + a = 0 \Rightarrow x = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 4a}}{2} = -3 \pm \sqrt{9 - a}$$

$$\left. \begin{aligned} \beta &= -3 + \sqrt{9 - a} \\ \alpha &= -3 - \sqrt{9 - a} \end{aligned} \right\} 3\alpha^2 + 2\beta^2 = 3(-3 - \sqrt{9 - a})^2 + 2(-3 + \sqrt{9 - a})^2$$

$$= 3(18 - a + 6\sqrt{9 - a}) + 2(18 - a - 6\sqrt{9 - a}) = 5(18 - a) + 6\sqrt{9 - a} = 85 + 12\sqrt{2}$$

$$= 5(18 - a) + 6\sqrt{9 - a} = 5(17) + 6\sqrt{8}$$

$$\Rightarrow 9 - a = 8 \Rightarrow a = 1$$

۳۰- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. چون تابع دارای کمترین مقدار است پس:

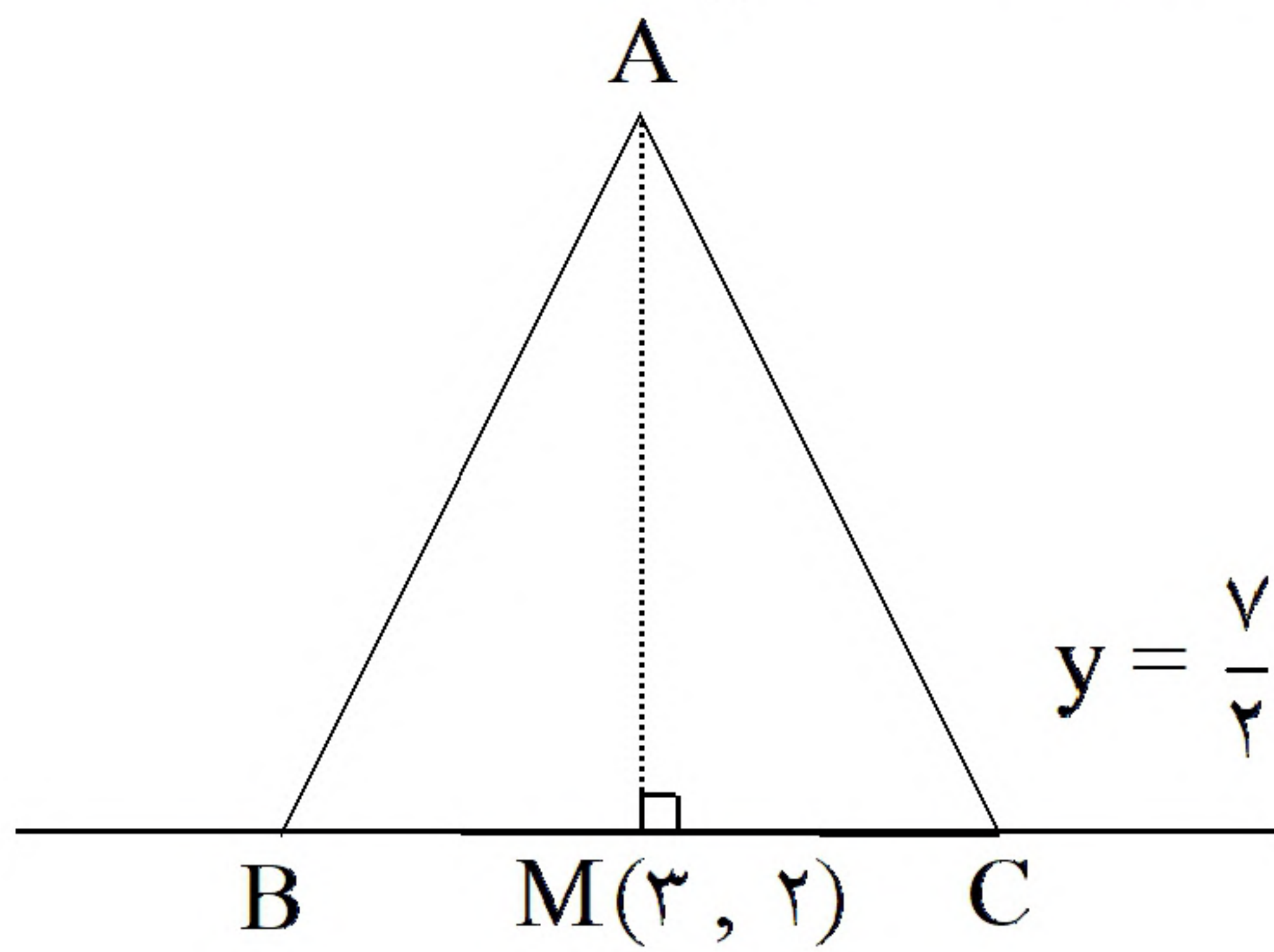
$$\min = 2 \Rightarrow -\frac{\Delta}{4a} = 2 \Rightarrow -\frac{144 - 4m(5m - 1)}{4m} = 2 \Rightarrow \frac{36 - m(5m - 1)}{m} = -2$$

$$36 - 5m^2 + m = -2m \Rightarrow 5m^2 - 3m - 36 = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = -2/4 \text{ غ ق} \\ m = 3 \text{ ق ق} \end{cases}$$

$$\text{محور تقارن: } x = -\frac{(-12)}{2m} = \frac{12}{6} = 2$$



۳۱- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. در مثلث متساوی الساقین میانه بر قاعده عمود است. (میانه = ارتفاع)



$$m_{AM} = \frac{-1}{m_{BC}} \Rightarrow m_{AM} = 2$$

$$AM: y - 2 = 2(x - 3)$$

$$AM: y = 2x - 4$$

$$y = \frac{7}{2} - \frac{x}{2}$$

$$\Rightarrow A(x_1, 2x_1 - 4) \Rightarrow AM = 5\sqrt{5} \Rightarrow (x_1 - 3)^2 + (2x_1 - 4 - 2)^2 = 125$$

$$\Rightarrow (x_1 - 3)^2 + 4(x_1 - 3)^2 = 125$$

$$5(x_1 - 3)^2 = 125 \Rightarrow (x_1 - 3)^2 = 25 \Rightarrow \begin{cases} x_1 - 3 = 5 \Rightarrow x_1 = 8 \\ x_1 - 3 = -5 \Rightarrow x_1 = -2 \end{cases}$$

۳۲- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$y = -x^2 + 2x + 1 \Rightarrow S\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right) \Rightarrow S(1, 2)$$

$$(1, 0), (0, -1) \Rightarrow y - 0 = \frac{0 - (-1)}{1 - 0}(x - 1) \Rightarrow y = x - 1$$

$$-x^2 + 2x + 1 = x - 1 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow (x - 2)(x + 1) = 0$$

$$\Rightarrow A(2, 1) \quad B(-1, -2) \Rightarrow M\left(\frac{1}{2}, \frac{-1}{2}\right)$$

$$SM = \sqrt{\left(1 - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(2 + \frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{25}{4}} = \frac{1}{2} \times \sqrt{26}$$



$$a, b, c \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

۳۳- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$ax^2 + bx - c = 0$$

$$S = \frac{-b}{a} \quad P = \frac{c}{a}$$

$$|S - P| = 2 \Rightarrow \left| -\frac{b}{a} - \frac{c}{a} \right| = 2 \Rightarrow \left| \frac{b+c}{a} \right| = 2 \xrightarrow{\text{چون } a, b, c > 0} \frac{b+c}{a} = 2$$

$$\Rightarrow b+c = 2a$$

عدد وسط a اعداد اول و سوم b یا $c \Rightarrow \{1, 2, 3\} \{2, 3, 4\} \{3, 4, 5\} \{4, 5, 6\} \{5, 6, 7\} \{7, 8, 9\}$

$$\Rightarrow 7 \times 2 = 14$$

$$\{1, 3, 5\} \{2, 4, 6\} \{3, 5, 7\} \{4, 6, 8\} \{5, 7, 9\} \Rightarrow 5 \times 2 = 10$$

$$\{1, 4, 7\} \{2, 5, 8\} \{3, 6, 9\} \Rightarrow 3 \times 2 = 6$$

$$\{1, 5, 9\} \Rightarrow 1 \times 2 = 2$$

$$\Rightarrow 14 + 10 + 6 + 2 = 32$$

$$x^2 - x - 4 = 0, \quad S = 1, \quad P = -4$$

۳۴- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$x_1^3 + \frac{1}{x_2}, \quad x_2^3 + \frac{1}{x_1}$$

$$S_{\text{جدید}} = x_1^3 + x_2^3 + \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = (S^3 - 3PS) + \frac{\overbrace{x_1 + x_2}^S}{\underbrace{x_1 \times x_2}_P}$$

$$\Rightarrow S_{\text{جدید}} = (1 - 3 \times 1 \times -4) + \frac{1}{-4} = 13 - \frac{1}{4} = \frac{51}{4}$$

$$P_{\text{جدید}} = \left(x_1^3 + \frac{1}{x_2}\right) \left(x_2^3 + \frac{1}{x_1}\right) = \underbrace{x_1^3 x_2^3}_{P^3} + \underbrace{\frac{1}{x_1 x_2}}_{\frac{1}{P}} + \underbrace{x_1^2 + x_2^2}_{S^2 - 2P} = -64 - \frac{1}{4} + 9$$

$$\Rightarrow -55 - \frac{1}{4} = \frac{-221}{4}$$

$$S_{\text{جدید}} = \frac{51}{4}, \quad P_{\text{جدید}} = \frac{-221}{4}$$

$$x^2 - Sx + P = 0 \Rightarrow x^2 - \frac{51}{4}x - \frac{221}{4} = 0 \xrightarrow{\text{همگی } \times 4} 4x^2 - 51x - 221 = 0$$



۳۵- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. معادله را با تجزیه و استفاده از اتحادها به صورت زیر می‌نویسیم:

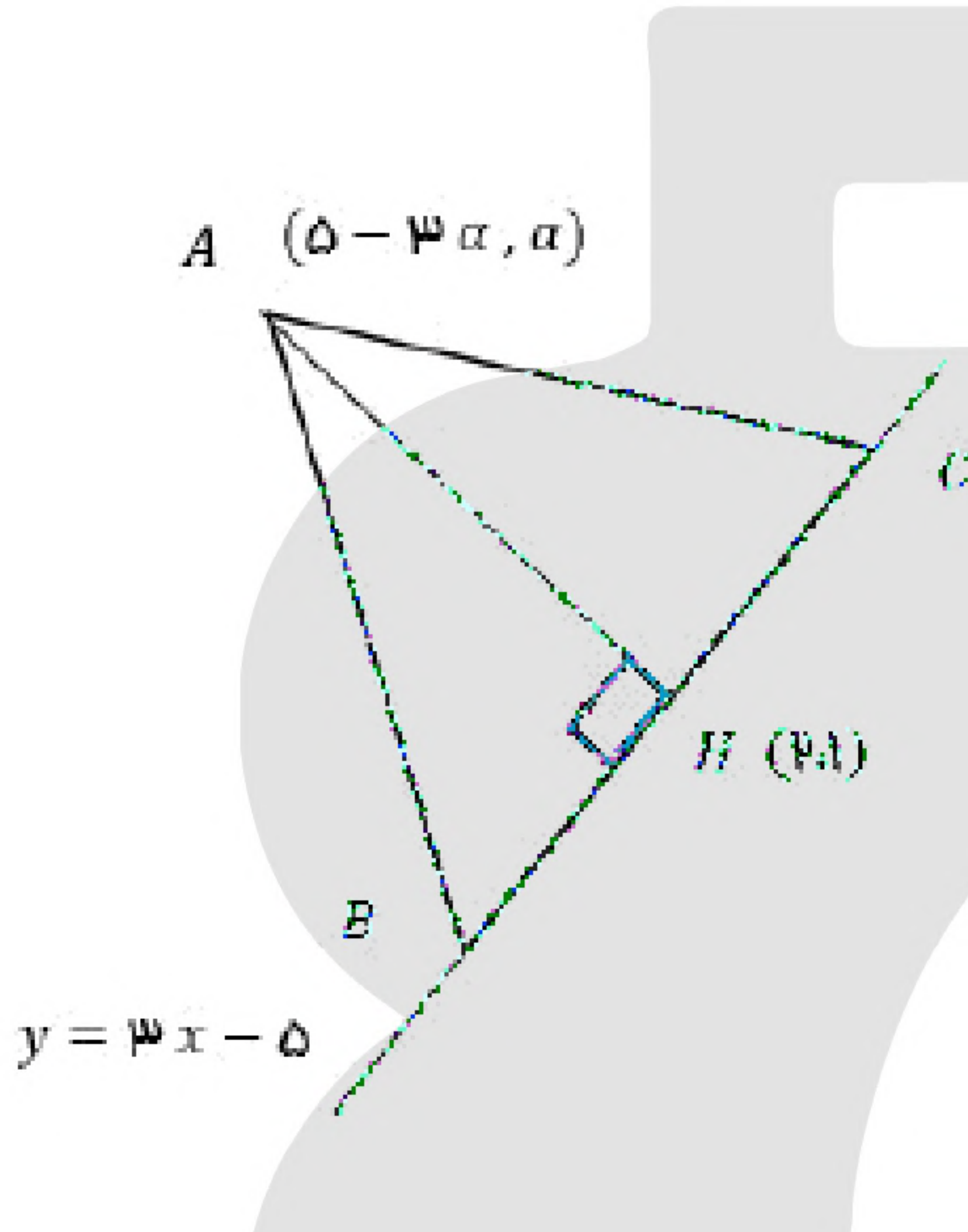
$$\sqrt{x + \sqrt{-(x^2 - 25)(x - 4)}} + \sqrt{x^2 + \sqrt{-(x - 2)(x - 4)}} = x + 2$$

حال دامنه‌ی متغیر x را به دست می‌آوریم:

$$\left. \begin{aligned} -(x - 2)(x - 4) &\geq 0 \Rightarrow 2 \leq x \leq 4 \\ + \\ -(x^2 - 25)(x - 4) &\geq 0 \Rightarrow -(x - 5)(x + 5)(x - 4) \geq 0 \Rightarrow -(x - 5)(x - 4) \geq 0 \Rightarrow 4 \leq x \leq 5 \end{aligned} \right\}$$

پس تنها عددی که در دامنه‌ها مشترک است، $x = 4$ است و با بررسی دیده می‌شود که در آن صدق می‌کند.

۳۶- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.



$$\begin{aligned} AH: 3y + x - 5 &= 0, AB = \frac{\sqrt{270}}{3} = \sqrt{30} \\ AH &= \frac{3\sqrt{10}}{2} \\ \frac{|\alpha - 15 + 9\alpha + 5|}{\sqrt{10}} &= \frac{3}{2}\sqrt{10} \Rightarrow |\alpha - 1| = \frac{3}{2} \\ \Rightarrow \alpha &= \frac{5}{2}, \alpha = -\frac{1}{2} \\ \alpha &= -\frac{1}{2} \rightarrow A\left(\frac{13}{2}, -\frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

۳۷- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

با توجه به شکل رسم شده، فاصله نقطه C تا نیم‌خط برابر عرض مستطیل و فاصله A تا C برابر قطر مستطیل است.

$$\begin{aligned} A \Rightarrow y - 4 &= 3(x - 2) \Rightarrow y = 3x - 2 \\ \text{فاصله نقطه } C(-3, -1) \text{ تا خط } y - 3x + 2 &= 0 \text{ برابر است با:} \end{aligned}$$

$$d = \frac{|-1 + 9 + 2|}{\sqrt{1 + 9}} = \frac{10}{\sqrt{10}} = \sqrt{10} \Rightarrow CB = \sqrt{10}$$

از طرفی AC برابر قطر مستطیل است.

$$AC = \sqrt{(2 + 3)^2 + (4 + 1)^2} = \sqrt{25 + 25} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

با استفاده از رابطه فیثاغورث، طول مستطیل را حساب می‌کنیم:

$$AB^2 = AC^2 - CB^2 \Rightarrow AB^2 = 50 - 10 = 40 \Rightarrow AB = 2\sqrt{10}$$

$$P = 2(AB + CB) = 2(2\sqrt{10} + \sqrt{10}) = 6\sqrt{10}$$



۳۸- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. روش اول:

$$c - b = 2a$$

$$c = 9 \begin{cases} b = 1 \\ b = 3 \\ b = 5 \\ b = 7 \end{cases} \quad c = 8 \begin{cases} b = 2 \\ b = 4 \\ b = 6 \end{cases} \quad c = 7 \begin{cases} b = 1 \\ b = 3 \\ b = 5 \end{cases} \quad c = 6 \begin{cases} b = 2 \\ b = 4 \end{cases}$$

$$c = 5 \begin{cases} b = 1 \\ b = 3 \end{cases} \quad c = 4 \begin{cases} b = 2 \end{cases} \quad c = 3 \begin{cases} b = 1 \end{cases}$$

روش دوم:

$$s = p + 2 \Rightarrow \frac{-b}{a} = -\frac{c}{a} + 2 \xrightarrow{\times a} -b = -c + 2a \Rightarrow 2a = c - b$$

زوج زوج

$$c - b \Rightarrow \begin{cases} c, b \text{ هر دو زوج} \\ \text{یا} \\ c, b \text{ هر دو فرد} \end{cases}$$

$$\binom{5}{2} + \binom{4}{2} = 10 + 6 = 16$$

با توجه به اینکه c و a هم‌علامت نیستند، بنابراین Δ همواره مثبت است.

۳۹- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. در منحنی $2y = x^2$ به جای x باید $\sqrt{y+3} - \sqrt{y-3}$ را جاگذاری کنیم.

$$2y = x^2 \Rightarrow 2y = (\sqrt{y+3} - \sqrt{y-3})^2 \Rightarrow 2y = y + 3 + y - 3 - 2\sqrt{y^2 - 9}$$

$$\Rightarrow -2\sqrt{y^2 - 9} = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = 3 & \text{ق ق} \\ y = -3 & \text{غ ق ق} \end{cases}$$

چون $2y = x^2$ است بنابراین y باید نامنفی باشد.

$$2y = x^2 \xrightarrow{y=3} x = \pm\sqrt{6} \xrightarrow[\text{مقداری مثبت است}]{\sqrt{y+3} > \sqrt{y-3}} x = \sqrt{6} \text{ ق ق}$$

$$OA = \sqrt{(\sqrt{6})^2 + 3^2} = \sqrt{15}$$

بنابراین فاصله نقطه $A(\sqrt{6}, 3)$ تا مبدأ برابر است با:



۴۰- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$x^2 + x - 5 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = -1 \\ x_1 x_2 = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + 1 = -x_2 \\ x_2 + 1 = -x_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{(x_2 + 1)^3} = \frac{-1}{x_1^3} \\ \frac{1}{(x_2 + 1)^3} = \frac{-1}{x_1^3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} S' = \frac{-(S^3 - 3SP)}{(P)^3} = \frac{-(-1 - 15)}{-125} \\ P' = \frac{1}{(P)^3} = \frac{-1}{125} \end{cases}$$

$$x^2 - S'x + P' = 0 \Rightarrow x^2 + \frac{16}{125}x - \frac{1}{125} = 0 \xrightarrow{\times 125} 125x^2 + 16x - 1 = 0$$

$$\frac{(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x^2 + 1})}{\sqrt[3]{x^2}} (\sqrt[3]{x^2} - 1) = 2\sqrt[3]{x}$$

$$\begin{aligned} x^2 - 1 &= 2x \Rightarrow x^2 - 2x - 1 = 0 \\ x_1 + x_2 &= 2 \end{aligned}$$

۴۱- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

«بانک سوال موسسه یاوران دانش»

۴۲- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

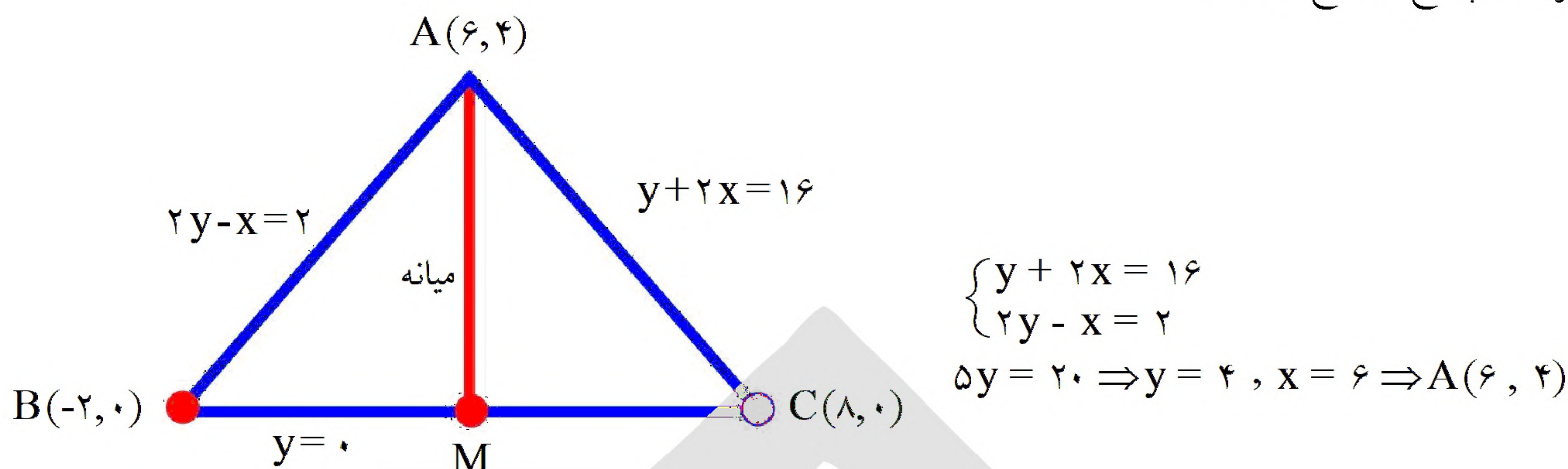
$$x^4 - 7x^2 - 5 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{7 \pm \sqrt{69}}{2} \xrightarrow{x^2 > 0} x^2 = \frac{7 + \sqrt{69}}{2} \Rightarrow x_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{7 + \sqrt{69}}{2}}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} S = x_1 + x_2 = 0 \\ P = x_1 x_2 = -\frac{7 + \sqrt{69}}{2} \end{cases}$$

$$2P^2 - 3SP + 2S = 2\left(\frac{7 + \sqrt{69}}{2}\right)^2 - 0 + 0 = 59 + 7\sqrt{69}$$



۴۳- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.



$$M\left(\frac{8+(-2)}{2}, 0\right) \Rightarrow M(3, 0)$$

$$\Rightarrow AM = \sqrt{(6-3)^2 + (4-0)^2} = \sqrt{9+16} = 5$$

۴۴- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

روش اول: معادله $2x^2 + mx + m + 6 = 0$ دارای دو ریشه مثبت است بنابراین باید $\Delta > 0$ و $S > 0$ و $P > 0$ باشد:

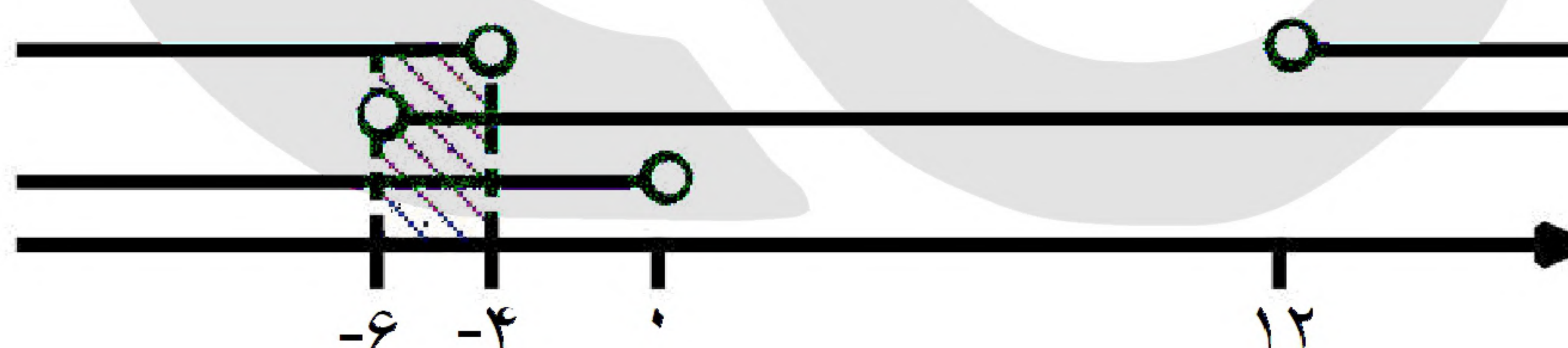
$$S = \frac{-b}{a} = -\frac{m}{2} > 0 \Rightarrow m < 0 \quad (1)$$

$$P = \frac{c}{a} = \frac{m+6}{2} > 0 \Rightarrow m > -6 \quad (2)$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = m^2 - 4(2)(m+6) = m^2 - 8m - 48 > 0$$

$$\Rightarrow (m-12)(m+4) > 0 \Rightarrow m < -4 \text{ یا } m > 12 \quad (3)$$

$$(1) \cap (2) \cap (3) \rightarrow (-6, -4)$$



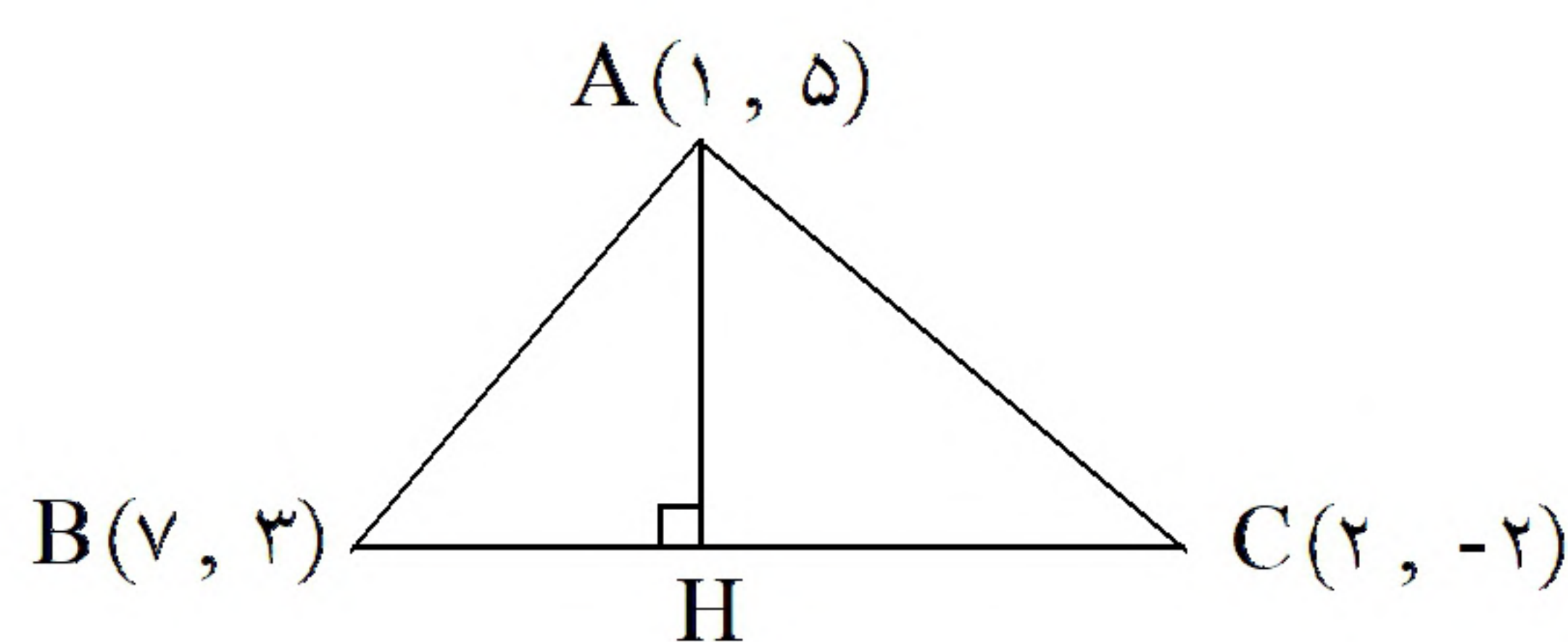
روش دوم:

$\underbrace{m = -2}_{\text{بد}}: 2x^2 - 2x + 4 = 0 \Rightarrow x^2 - x + 2 = 0 \Rightarrow \Delta < 0$ گزینه های ۱ و ۳ غلط

$\underbrace{m = -3}_{\text{بد}}: 2x^2 - 3x + 3 = 0 \Rightarrow \Delta < 0$ گزینه ۲ غلط



۴۵- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.



$$BC \text{ شیب خط} = m = \frac{5}{5} = 1$$

$$BC \text{ معادله خط} \Rightarrow y + 2 = 1(x - 2) \Rightarrow y = x - 4 \Rightarrow y - x + 4 = 0$$

$$AH = \frac{|y - x + 4|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{5 - 1 + 4}{\sqrt{2}} = \frac{8}{\sqrt{2}} = \frac{8\sqrt{2}}{2} = 4\sqrt{2}$$

$$3x^2 + (2m - 1)x + 2 - m = 0$$

$$\Delta > 0 \Rightarrow (2m - 1)^2 - 12(2 - m) > 0$$

$$S = \frac{1}{P} \Rightarrow SP = 1 \Rightarrow \frac{1 - 2m}{3} \times \frac{2 - m}{3} = 1$$

$$\frac{2m^2 - 5m + 2}{9} = 1 \Rightarrow 2m^2 - 5m - 7 = 0 \quad \begin{cases} m = \frac{7}{2} \checkmark \\ m = -1 \times \end{cases}$$

$$b = a + c$$

$$m = -1$$

$$(2m - 1)^2 - 12(2 - m) > 0 \xrightarrow{m = -1} 9 - 36 < 0 \quad \text{صحیح نیست}$$

۴۶- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

m باید در این نامعادله صدق کند.

پس $\frac{7}{2}$ صحیح است.

۴۷- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$2a + \sqrt{3a + 16} = 1 \Rightarrow \sqrt{3a + 16} = 1 - 2a \xrightarrow{1 - 2a \geq 0} 3a + 16 = 4a^2 - 4a + 1$$

$$\Rightarrow 4a^2 - 7a - 15 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 3 \text{ غ ق ق} \\ a = -\frac{5}{4} \Rightarrow 4a + 9 = -5 + 9 = 4 \end{cases}$$



۴۸- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\begin{array}{c} \text{زمان} \nearrow \\ \text{سرعت} \uparrow \\ \text{مسافت} \nwarrow \end{array} \quad x = vt \Rightarrow t = \frac{x}{v}$$

اگر سرعت پرنده را v فرض کنیم، سرعت در جهت باد $v + 5$ و در خلاف جهت باد $v - 5$ خواهد بود و زمان رفت و برگشت را یکی t و دیگری t' نام گذاری می‌کنیم. بنابراین داریم:

$$t + t' = \frac{9}{60}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{v+5} + \frac{1}{v-5} = \frac{9}{60} \Rightarrow \frac{2v}{v^2 - 25} = \frac{3}{20} \Rightarrow 40v = 3v^2 - 75 \Rightarrow 3v^2 - 40v = 75$$

$$\Rightarrow v(3v - 40) = 75$$

با توجه به گزینه‌ها $v = 15$

۴۹- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$3a + \sqrt{2a^2 + 4a} = 2 \Rightarrow \sqrt{2a^2 + 4a} = 2 - 3a \xrightarrow{2-3a \geq 0} 2a^2 + 4a = 9a^2 - 12a + 4$$

$$\Rightarrow 7a^2 - 16a + 4 = 0 \xrightarrow{\div 2} \frac{7}{2}a^2 - 8a + \frac{4}{2} = 0$$

$$a = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 28}}{7} = \frac{8 \pm 6}{7} \begin{cases} a = 2 \text{ ق ق غ} \\ a = \frac{2}{7} \text{ ق ق غ} \Rightarrow \frac{a+1}{a} = 1 + \frac{1}{a} = 1 + \frac{7}{2} = \frac{4}{5} \end{cases}$$

۵۰- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. اگر سرعت آب رودخانه را v فرض کنیم سرعت قایق در جهت رودخانه $100 + v$ و در خلاف آن $100 - v$ است، پس:

$$\begin{array}{c} \text{مسافت} \uparrow \\ \text{سرعت} \nearrow \\ \text{زمان} \searrow \end{array} \quad x = vt \Rightarrow t = \frac{x}{v} \xrightarrow{x=1200} t = \frac{1200}{v}$$

$$t - t' = 5$$

$$\Rightarrow \frac{1200}{100-v} - \frac{1200}{100+v} = 5 \Rightarrow 1200 \left(\frac{100+v - 100+v}{(100)^2 - v^2} \right) = 5 \Rightarrow 2400v = 5(100)^2 - 5v^2$$

$$\Rightarrow 480v = (100)^2 - v^2 \Rightarrow v^2 + 480v = (100)^2 \Rightarrow v(v+480) = (100)^2 \Rightarrow v = 20$$



۵۱- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\begin{aligned} \text{یک ساعت} & \xrightarrow{\quad} \frac{1}{x} \\ \text{زمان بهروز} = x & \xrightarrow{\quad} \frac{1}{x} \\ \text{یک ساعت} & \xrightarrow{\quad} \frac{1}{x+9} \\ \text{زمان فرهاد} = x+9 & \xrightarrow{\quad} \frac{1}{x+9} \end{aligned} \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{x+9} = \frac{1}{20}$$

$$\Rightarrow \frac{x + x + 9}{x(x+9)} = \frac{1}{20} \Rightarrow \frac{2x+9}{x^2+9x} = \frac{1}{20} \Rightarrow 40x + 180 = x^2 + 9x \Rightarrow x^2 - 31x = 180$$

$$\Rightarrow x(x-31) = 180 \xrightarrow{\text{با توجه به گزینه ها}} x = 36$$