

گنجینه سوال رایگان

+ پاسخ تشریحی

یاوران دانش



راه های ارتباطی با ما:

www.Dyavari.com

۰۲۱-۷۶۷۰۳۸۵۸

۰۹۱۲-۳۴ ۹۴ ۱۳۴



	۱	۲	۳	۴
۱ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۴ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۵ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۶ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۷ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۸ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۹ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۱۰ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۱ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۲ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۳ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۴ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۱۵ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۱۶ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۷ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۱۸ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۹ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۲۰ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۱ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۲ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۳ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۲۴ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۲۵ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۶ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۷ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۸ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۲۹ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۳۰ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۱ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۲ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۳۳ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۴ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۵ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۶ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۳۷ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۸ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۹ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۴۰ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>





۱- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

با توجه به این که نقطه تقارن یافته روی خط $y = x$ است، آن را (α, α) در نظر می گیریم و می دانیم:

$$\frac{\alpha + 1}{2} = 5 \Rightarrow \alpha = 9$$

$$\frac{9 + K + 2}{2} = K \Rightarrow K = 11$$

پس:

۲- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$x^2 - kx + 5 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = k \\ \alpha\beta = 5 \end{cases}$$

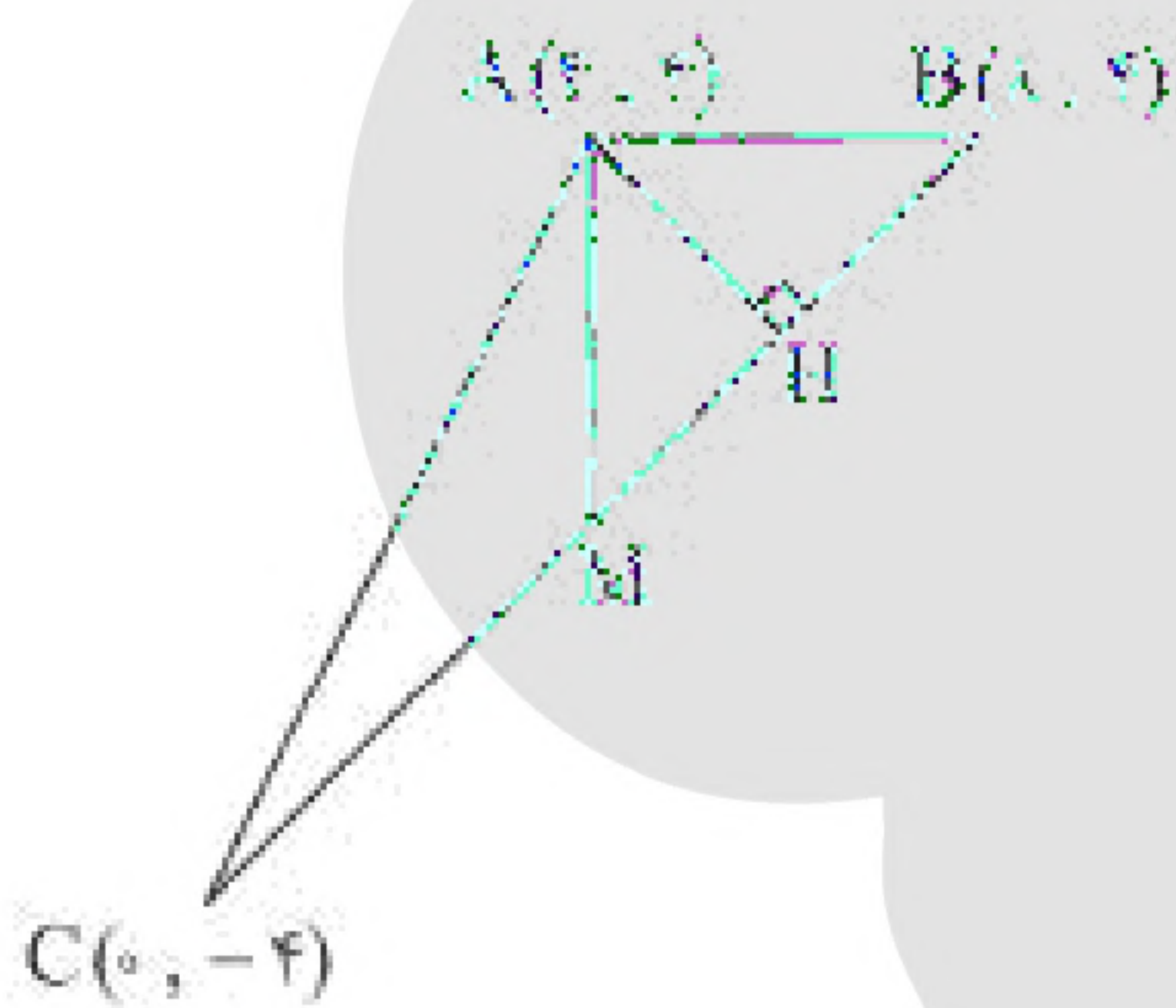
$$\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} = 3 \Rightarrow \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha\beta} = 3 \Rightarrow \frac{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta}{\alpha\beta} = 3$$

$$\Rightarrow \frac{k^2 - 10}{5} = 3 \Rightarrow k^2 - 10 = 15 \Rightarrow k^2 = 25 \Rightarrow \begin{cases} k_1 = 5 \\ k_2 = -5 \end{cases}$$

$$k_1 + k_2 = 0$$

۳- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

ابتدا طول میانه AM را به دست می آوریم:



$$BC \text{ وسط } M\left(\frac{8+0}{2}, \frac{4-4}{2}\right) = (4, 0)$$

$$AM = \sqrt{(4-4)^2 + (4-0)^2} = 4 \quad (1)$$

سپس طول ارتفاع AH را به کمک فاصله رأس A از ضلع BC به دست می آوریم:

$$m_{BC} = \frac{-4-4}{0-8} = 1 \Rightarrow y - (-4) = 1(x - 0) \Rightarrow BC: x - y - 4 = 0$$

$$AH = \frac{|4 - 4 - 4|}{\sqrt{1+1}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2} \quad (2)$$

اینک به کمک قضیه فیثاغورس در مثلث AHM و روابط (۱) و (۲) خواهیم داشت:

$$MH = \sqrt{AM^2 - AH^2} = \sqrt{16 - 8} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$



۴- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$f(x) = a(x + 1)(x - 3)$$

$$f(0) = -2 \Rightarrow -3a = -2 \Rightarrow a = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{2}{3}(x + 1)(x - 3) \Rightarrow f(-3) = \frac{2}{3}(-2)(-6) = 8$$

۵- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

ابتدا عمودمنصف AB را به دست می آوریم:

$$A(3, 2), B(1, 4) \Rightarrow m_{AB} = \frac{2}{-2} = -1 \Rightarrow m_{\text{عمودمنصف}} = 1$$

$$M(2, 3) \Rightarrow y = x + 1$$

حال عمودمنصف AB را با خط $y = 2x - 1$ قطع می دهیم:

$$2x - 1 = x + 1 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow M(2, 3)$$

۶- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$m_{BC} = \frac{4}{-1} = -4 \Rightarrow m_{\text{ارتفاع}} = \frac{1}{4}$$

$$y = \frac{1}{4}x + \frac{1}{4} \Rightarrow 4y = x + 1 \Rightarrow 4y - x = 1$$



۷- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

اولاً مجموع و حاصل ضرب ریشه‌های معادله $x^2 - x - 4 = 0$ برابر است با:

$$\left. \begin{aligned} S &= \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = 1 \Rightarrow \frac{\alpha + \beta}{2} = 1 \Rightarrow \alpha + \beta = 2 \\ P &= \frac{\alpha}{2} \times \frac{\beta}{2} = -4 \Rightarrow \frac{\alpha\beta}{4} = -4 \Rightarrow \alpha\beta = -16 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

ثانیاً واضح است که $\frac{\alpha}{2}$ و $\frac{\beta}{2}$ در معادله $x^2 - x - 4 = 0$ صدق می‌کند، پس:

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 - \frac{\alpha}{2} - 4 &= 0 \Rightarrow \frac{\alpha^2}{4} - \frac{\alpha}{2} - 4 = 0 \xrightarrow{\times 4} \alpha^2 - 2\alpha - 16 = 0 \\ \Rightarrow \alpha^2 - 2\alpha &= 16 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

$\beta^2 - 2\beta = 16$ و به طریق مشابه

اینک مشخص است که با جایگذاری روابط (۲) در ریشه‌های معادله جدید داریم:

$$\frac{\alpha^2 - 2\alpha}{\beta} = \frac{16}{\beta}, \quad \frac{\beta^2 - 2\beta}{\alpha} = \frac{16}{\alpha} \Rightarrow \text{ریشه‌ها: } \frac{16}{\alpha}, \frac{16}{\beta}$$

پس با محاسبه S و P معادله جدید، معادله آن را می‌نویسیم:

$$\left. \begin{aligned} S &= \frac{16}{\alpha} + \frac{16}{\beta} = 16 \left(\frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} \right) = 16 \left(\frac{2}{-16} \right) = -2 \\ P &= \frac{16}{\alpha} \times \frac{16}{\beta} = \frac{16 \times 16}{\alpha\beta} = \frac{16 \times 16}{-16} = -16 \end{aligned} \right\} \Rightarrow x^2 + 2x - 16 = 0$$

۸- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

چون مختصات رأس سهمی به صورت $S(4, -1)$ است، پس معادله کلی سهمی به صورت $y = a(x - x_0)^2 + y_0$ خواهد بود یعنی داریم:

$$y = 2(x - 4)^2 - 1 \Rightarrow y = 2(x^2 - 8x + 16) - 1 \Rightarrow y = 2x^2 - 16x + 31$$

$$y = 0 \Rightarrow 2(x - 4)^2 - 1 = 0 \Rightarrow (x - 4)^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow x - 4 = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\left\{ \begin{aligned} x_1 &= 4 + \frac{\sqrt{2}}{2} \\ x_2 &= 4 - \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned} \right. \Rightarrow |x_1 - x_2| = \sqrt{2}$$



۹- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

دو ضلع AB و BC بر هم عمودند، پس شیب BC، قرینه و معکوس شیب AB است.

$$m_{BC} = \frac{-1}{m_{AB}} = \frac{-1}{1} = -1 \Rightarrow BC: y = -x + b$$

فاصله رأس D را از دو ضلع AB و BC حساب می‌کنیم:

$$\left. \begin{array}{l} BC: y + x - b = 0 \\ D = (2, 6) \end{array} \right\} \Rightarrow \text{فاصله D تا BC: } \frac{|6 + 2 - b|}{\sqrt{2}} = \frac{|8 - b|}{\sqrt{2}}$$

$$\left. \begin{array}{l} AB: y - x = 0 \\ D = (2, 6) \end{array} \right\} \Rightarrow \text{فاصله D تا AB: } \frac{|6 - 2|}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$$

مساحت مستطیل ۱۲ است پس:

$$طول \times عرض = ۱۲ \Rightarrow 2\sqrt{2} \times \frac{|8 - b|}{\sqrt{2}} = ۱۲ \Rightarrow |8 - b| = ۶$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 8 - b = ۶ \Rightarrow b = ۲ \\ 8 - b = -۶ \Rightarrow b = ۱۴ \end{cases}$$

۱۰- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\left. \begin{array}{l} x^2 - 6x + 8 \geq 0 \Rightarrow x \leq ۲ \text{ یا } x \geq ۴ \\ -x^2 + 7x - ۱۲ \geq 0 \Rightarrow ۳ \leq x \leq ۴ \end{array} \right\} \xrightarrow{\cap} x = ۴$$

حال تنها مقدار ممکن را در معادله قرار می‌دهیم:

$$\sqrt{8 + ۰} - \sqrt{۱۶ + ۰} = ۲ - ۴ = -۲$$

پس این معادله فقط یک جواب دارد.

۱۱- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

محور تقارن سهمی $y = ax^2 + bx + c$ خط $x = -\frac{b}{2a}$ می‌باشد. پس داریم:

$$x = -\frac{2}{3} = \frac{-(3 - 2m)}{4} \Rightarrow ۸ = ۹ - ۶m \Rightarrow ۶m = ۱ \Rightarrow m = \frac{1}{6}$$

$$\Rightarrow f(x) = 2x^2 + \left(3 - \frac{1}{3}\right)x + \frac{9}{36} - ۱$$

$$\Rightarrow f(x) = 2x^2 + \frac{8}{3}x - \frac{3}{4}$$

از طرفی کمترین مقدار سهمی در حالتی که دهانه‌ی آن رو به بالاست، عرض رأس سهمی می‌باشد.

$$y_s = \frac{-\Delta}{4a} \Rightarrow \Delta = \frac{۶۴}{۹} - ۴(۲)\left(-\frac{۳}{۴}\right) = \frac{۶۴}{۹} + ۶ = \frac{۱۱۸}{۹}$$

$$\Rightarrow y_s = \frac{-\frac{۱۱۸}{۹}}{۸} = -\frac{۵۹}{۳۶}$$



۱۲- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

طبق تعریف دایره، فاصله هر نقطه روی دایره از مرکز دایره برابر با شعاع دایره است. شعاع دایره را R می‌نامیم. با محاسبه فاصله نقطه $(a, 2a)$ از هر یک از نقاط $(1, 1)$ و $(4, -2)$ ، ابتدا مقدار a و سپس مقدار R را به دست می‌آوریم.

$$\left. \begin{aligned} R &= \sqrt{(a-4)^2 + (2a+2)^2} \\ R &= \sqrt{(a-1)^2 + (2a-1)^2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \sqrt{(a-4)^2 + (2a+2)^2} = \sqrt{(a-1)^2 + (2a-1)^2}$$

$$\Rightarrow a^2 - 8a + 16 + 4a^2 + 8a + 4 = a^2 - 2a + 1 + 4a^2 - 4a + 1$$

$$\Rightarrow 20 = -6a + 2 \Rightarrow -6a = 18 \Rightarrow a = -3$$

$$R = \sqrt{(-3-4)^2 + (-6+2)^2} = \sqrt{49 + 16} = \sqrt{65}$$

«بانک سوال موسسه یاوران دانش»

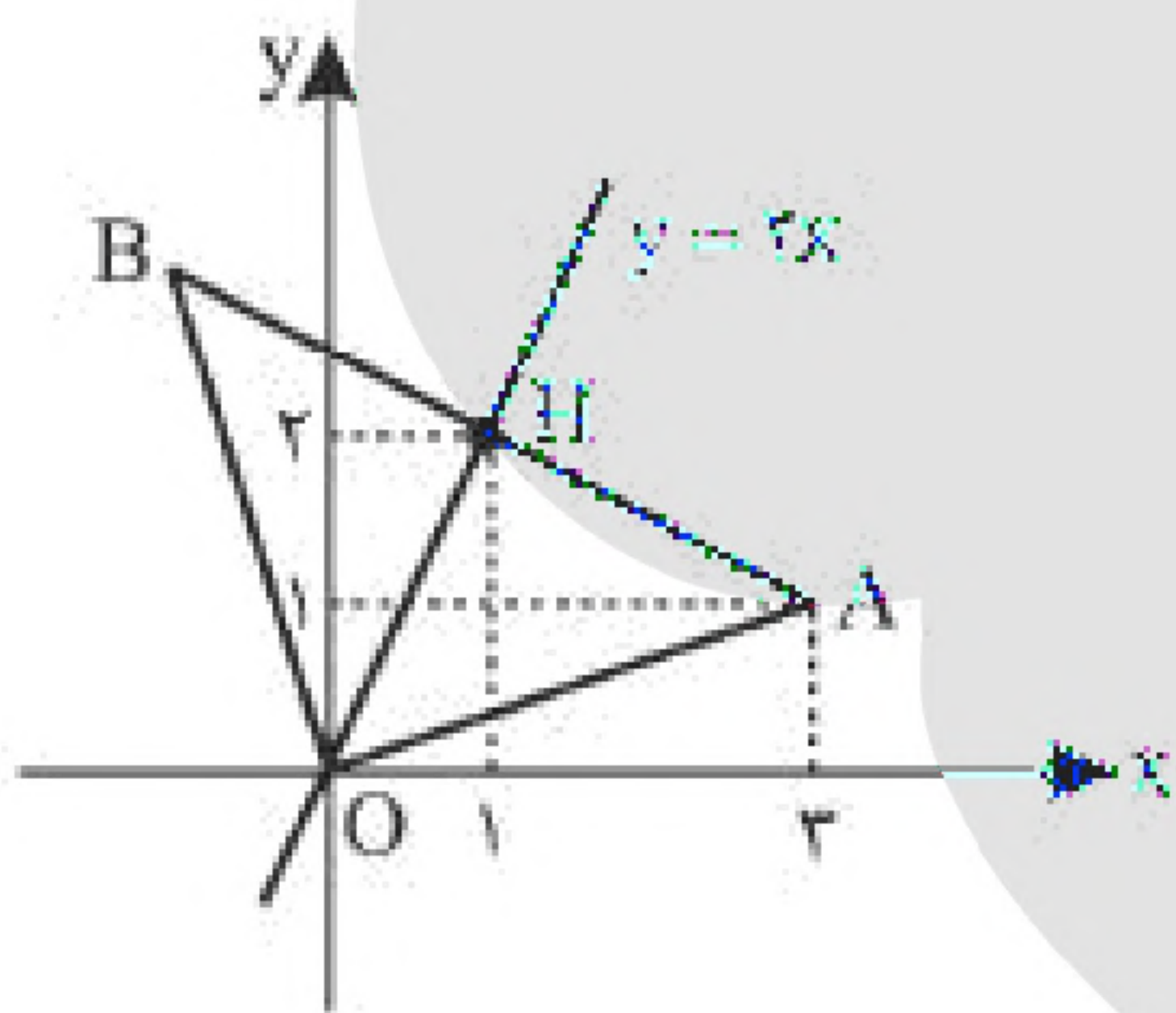
۱۳- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\frac{2 - \sqrt{x} - 2 - \sqrt{x}}{4 - x} = \frac{x}{5\sqrt{x}}$$

$$\Rightarrow 4x - x^2 = -10x \Rightarrow x^2 - 14x = 0 \xrightarrow{x > 0} x = 14$$

۱۴- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

اگر B قرینه نقطه A نسبت به خط $y = 2x$ باشد، خط $y = 2x$ عمود منصف پاره خط AB است، بنابراین با توجه به شکل $AB = 2AH$ خواهد بود. AH نیز فاصله نقطه A از خط $y = 2x$ است.



$$AH = \frac{|1 - 6|}{\sqrt{4 + 1}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5} \Rightarrow AB = 2\sqrt{5} \quad (1)$$

شیب خط شامل پاره خط AB برابر $-\frac{1}{2}$ است. حالا با استفاده از نقطه A می‌توانیم معادله آن را بنویسیم:

$$y - 1 = -\frac{1}{2}(x - 3) \Rightarrow 2y + x = 5$$

OH ارتفاع مثلث و برابر فاصله مبدأ مختصات از خط شامل AB است.

$$\Rightarrow OH = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5} \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2} AB \cdot OH = 5$$



۱۵- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\alpha = 3 + \sqrt{7} \\ \beta = 3 - \sqrt{7} \Rightarrow \begin{cases} S = \alpha + \beta = 6 \\ P = \alpha\beta = 9 - 7 = 2 \end{cases} \Rightarrow x^2 - 6x + 2 = 0$$

۱۶- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$x = 2 \Rightarrow 3(2)^3 - 4k + 2k - 2 = 0 \Rightarrow 24 - 2k - 2 = 0 \Rightarrow 2k = 22 \Rightarrow k = 11$$

$$3x^3 - 11x^2 + 11x - 2 = 0 \Rightarrow (x - 2)(3x^2 + bx + 1) = 0$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{x^2 \text{ ضریب} = -11} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{x^2 \text{ ضریب} = b - 6}$

$$b - 6 = -11 \Rightarrow b = -5$$

$$3x^2 - 5x + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{13}}{6} \Rightarrow m = 13$$

راه دوم:

نکته: اگر x_1 و x_2 و x_3 ریشه‌های معادله درجه سوم $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ باشند آن‌گاه:

$$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a}$$

$$x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 = \frac{c}{a}$$

$$x_1 x_2 x_3 = -\frac{d}{a}$$

پس در معادله $3x^3 - kx^2 + kx - 2 = 0$ داریم:

$$(2) \left(\frac{5 + \sqrt{m}}{6} \right) \left(\frac{5 - \sqrt{m}}{6} \right) = \frac{-(-2)}{3} \Rightarrow \frac{2(25 - m)}{36} = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow 25 - m = 12 \Rightarrow m = 13$$



۱۷- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\begin{aligned} \sqrt{2x - \frac{3}{x}} + \sqrt{2x + \frac{3}{x}} &= \sqrt{2x - 7} + \sqrt{2x + 7} \\ \xrightarrow{\text{طرفین به توان ۲}} 2x - \frac{3}{x} + 2x + \frac{3}{x} + 2\sqrt{4x^2 - \frac{9}{x^2}} &= 2x - 7 + 2x + 7 + 2\sqrt{4x^2 - 49} \\ \Rightarrow 4x^2 - \frac{9}{x^2} &= 4x^2 - 49 \\ \Rightarrow \frac{9}{x^2} &= 49 \\ \Rightarrow x^2 &= \frac{9}{49} \Rightarrow x = \pm \frac{3}{7} \end{aligned}$$

هر دو جواب به دست آمده غیرقابل قبول هستند زیرا به ازای هر یک از آنها، عبارت زیر بعضی رادیکال‌ها منفی می‌شود.

۱۸- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\begin{aligned} \sqrt{10 - x^2} &\geq 0 \Rightarrow 2x \geq 0 \Rightarrow x \geq 0 \\ \sqrt{10 - x^2} = 2x &\Rightarrow 10 - x^2 = 4x^2 \Rightarrow 5x^2 = 10 \\ \Rightarrow x^2 = 2 &\Rightarrow \begin{cases} x = \sqrt{2} \text{ ق ق} \\ \text{یا} \\ x = -\sqrt{2} \text{ ق ق غ} \end{cases} \end{aligned}$$

۱۹- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\begin{aligned} \begin{cases} AB: 2y + x = 6 \\ AC: y + 3x = -2 \end{cases} &\Rightarrow A(-2, 4) \\ \begin{cases} AB: 2y + x = 6 \\ BC: y - 2x = -2 \end{cases} &\Rightarrow B(2, 2) \\ \begin{cases} AC: y + 3x = -2 \\ BC: y - 2x = -2 \end{cases} &\Rightarrow C(0, -2) \\ \Rightarrow x_A + x_B + x_C &= 0 \end{aligned}$$



۲۰- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

معادله خط را $y = ax + b$ در نظر می‌گیریم و چون فاصله نقطه $(0, 0)$ از آن ۲ است، می‌نویسیم:

$$2 = \frac{|-b|}{\sqrt{a^2 + 1}} \quad (1)$$

و نقطه $(2, 3)$ روی این خط قرار دارد پس:

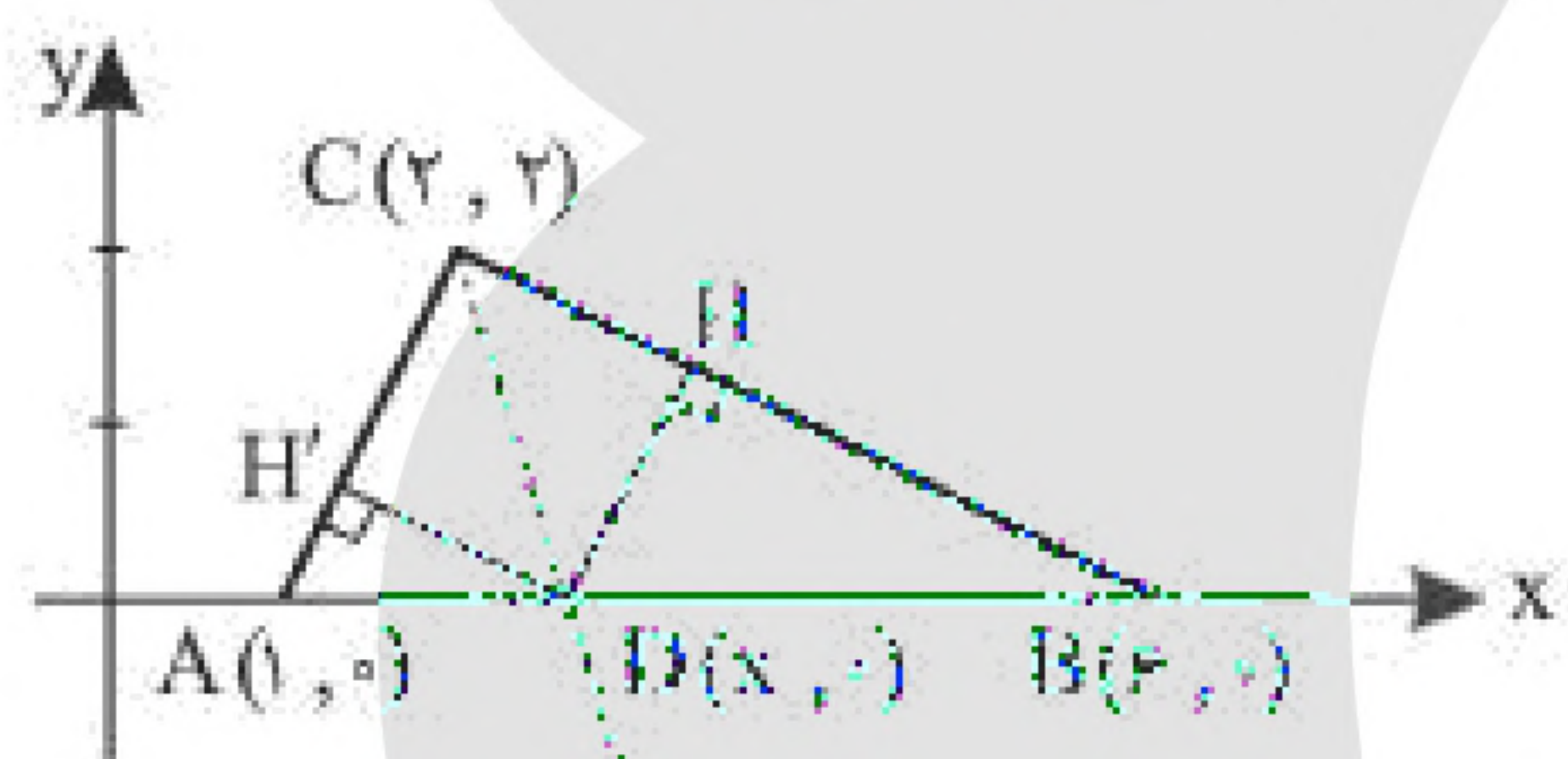
$$3 = 2a + b \Rightarrow b = 3 - 2a \quad (2)$$

$$(1), (2): 2 = \frac{|3 - 2a|}{\sqrt{a^2 + 1}} \xrightarrow{\text{توان ۲}} 4(a^2 + 1) = (3 - 2a)^2$$

$$\Rightarrow 4a^2 + 4 = 4a^2 - 12a + 9 \Rightarrow a = \frac{5}{12} \xrightarrow{(2)} b = \frac{13}{6}$$

۲۱- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

طبق اطلاعات سؤال، نقاط A ، B و C را مشخص می‌کنیم و نیمساز داخلی زاویه C را رسم می‌کنیم. می‌دانیم که هر نقطه‌ای روی نیمساز یک زاویه قرار بگیرد (D) ، از دو ضلع آن به یک اندازه است. لذا $DH = DH'$.



با نوشتن معادله خط BC و AC می‌توان فاصله نقطه از خط را نوشت:

$$BC \text{ خط معادله: } y = -\frac{1}{2}x + 3 \Rightarrow 2y + x - 6 = 0$$

$$AC \text{ خط معادله: } y = 2x - 2 \Rightarrow y - 2x + 2 = 0$$

$$DH = DH' \Rightarrow \frac{|x - 6|}{\sqrt{5}} = \frac{|-2x + 2|}{\sqrt{5}} \Rightarrow |x - 6| = |2x - 2|$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - 6 = 2x - 2 \Rightarrow x = -4 \text{ غ ق} \\ x - 6 = -2x + 2 \Rightarrow 3x = 8 \Rightarrow x = \frac{8}{3} \text{ ق} \end{cases}$$

لذا مختصات نقطه D به صورت $(\frac{8}{3}, 0)$ خواهد بود.



۲۲- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

ضرایب a و b گویا هستند بنابراین S و P نیز گویا هستند، پس ریشه دیگر این معادله با توجه به این فرض $4 + \sqrt{2}$ می باشد پس:

$$S = (4 + \sqrt{2}) + (4 - \sqrt{2}) = 8$$

$$P = (4 + \sqrt{2})(4 - \sqrt{2}) = 16 - 2 = 14$$

$$x^2 - 8x + 14 = 0 \xrightarrow{\times 3} 3x^2 - 24x + 42 = 0 \Rightarrow a = -24, b = 42$$

$$a + b = 18$$

۲۳- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

فرض کنید علیرضا، صادق و احسان به ترتیب در x ، $\frac{x}{3}$ و $3x$ روز کار را تمام کنند.

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{3x} = \frac{1}{21} \Rightarrow \frac{4}{3x} = \frac{1}{21} \Rightarrow x = 28$$

پس صادق و احسان در یک روز، $\frac{2}{x} + \frac{1}{3x} = \frac{7}{3x} = \frac{1}{12}$ کار را انجام می دهند و در نتیجه در ۱۲ روز کار را انجام می دهند.

۲۴- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$(m+3)x^2 - 8mx - 2m + 7 = 0$$

$$\begin{cases} x_1 < 3 \Rightarrow x_1 - 3 < 0 \\ x_2 > 3 \Rightarrow x_2 - 3 > 0 \end{cases} \Rightarrow (x_1 - 3)(x_2 - 3) < 0$$

$$\Rightarrow x_1 x_2 - 3(x_1 + x_2) + 9 < 0 \Rightarrow \frac{-2m+7}{m+3} - 3\left(\frac{8m}{m+3}\right) + 9 < 0$$

$$\Rightarrow \frac{-2m+7-24m+9m+27}{m+3} < 0 \Rightarrow \frac{-17m+34}{m+3} < 0$$

تعیین علامت

$$\longrightarrow m < -3 \text{ یا } m > 2$$



۲۵- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.
اولاً: قطرهای لوزی بر هم عمودند، بنابراین:

$$y = (2k + 1)x + 1 \xrightarrow[\text{ضرب } x]{\text{شیب را بخوان}} m = 2k + 1$$

$$(k + 1)y = x + 2 \xrightarrow{\text{y را تنها کن}} y = \frac{1}{k + 1}x + \frac{2}{k + 1}$$

$$\xrightarrow[\text{شیب را بخوان}]{\text{شرط عمود بودن}} m' = \frac{1}{k + 1} \rightarrow m = \frac{-1}{m'}$$

$$2k + 1 = -(k + 1) \Rightarrow 2k + 1 = -k - 1 \Rightarrow 3k = -2 \Rightarrow k = -\frac{2}{3}$$

$$\xrightarrow[\text{قرار بده}]{\text{در هر دو خط}} \begin{cases} y = -\frac{1}{3}x + 1 \\ y = 3x + 6 \end{cases} \xrightarrow{\text{تلاقی دو خط}} -\frac{1}{3}x + 1 = 3x + 6$$

$$\xrightarrow[\text{مرتب کن}]{\text{در اولی قرار بده}} -5 = \frac{10}{3}x \Rightarrow x = -\frac{3}{2} \xrightarrow{\text{در اولی قرار بده}} y = -\frac{1}{3}\left(-\frac{3}{2}\right) + 1$$

$$= \frac{1}{2} + 1 \xrightarrow[\text{نقطه تلاقی دو خط}]{\text{نقطه تلاقی دو خط}} O\left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$$

لوزی محل تلاقی دو قطر همان مرکز تقارن لوزی است، پس نقطه $\left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$ مرکز تقارن لوزی است.

۲۶- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.
طرفین معادله را به توان ۲ رسانده و داریم:

$$\sqrt{x-1} = x-3 \xrightarrow{\text{توان ۲}} x-1 = (x-3)^2 = x^2 - 6x + 9$$

$$\Rightarrow x^2 - 7x + 10 = 0 \Rightarrow (x-2)(x-5) = 0 \Rightarrow x=2, x=5$$

$$x=2 \xrightarrow[\text{در معادله قرار می دهیم}]{\text{نادرست}} \sqrt{2-1} = 2-3 \Rightarrow \sqrt{1} = -1$$

$$x=5 \xrightarrow[\text{در معادله قرار می دهیم}]{\text{درست}} \sqrt{5-1} = 5-3 \Rightarrow \sqrt{4} = 2$$

پس $x=5$ جواب معادله است و داریم:

$$a=5 \Rightarrow \frac{a+1}{a} = \frac{5+1}{5} = \frac{6}{5} = 1\frac{1}{5}$$



۲۷- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

مجموع مربعات ریشه‌ها همان $S^2 - 2P$ است:

$$y = mx^2 + x - 3 \Rightarrow S = -\frac{1}{m}, P = -\frac{3}{m}$$

$$S^2 - 2P = 7 \Rightarrow \frac{1}{m^2} + \frac{6}{m} = 7 \xrightarrow{\times m^2} 1 + 6m = 7m^2$$

$$\Rightarrow 7m^2 - 6m - 1 = 0 \Rightarrow m = 1, -\frac{1}{7}$$

با $m = -\frac{1}{7}$ معادله دارای دلتای منفی است پس فقط $m = 1$ صحیح است:

$$m = -\frac{1}{7} \Rightarrow -\frac{1}{7}x^2 + x - 3 = 0$$

$$\Rightarrow \Delta = 1 - 4\left(-\frac{1}{7}\right)(-3) = 1 - \frac{12}{7} = -\frac{5}{7} < 0$$

محور تقارن سهمی همان $x = -\frac{b}{2a}$ است.

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{1}{2m} = -\frac{1}{2}$$



۲۸- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$2x^4 - 5x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = t \Rightarrow 2t^2 - 5t - 1 = 0$$

$$\Rightarrow t = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 8}}{4} = \frac{5 \pm \sqrt{33}}{4}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t_1 = \frac{5 - \sqrt{33}}{4} \Rightarrow x^2 = \frac{5 - \sqrt{33}}{4} < 0 \text{ غ ق ق} \\ t_2 = \frac{5 + \sqrt{33}}{4} \Rightarrow x^2 = \frac{5 + \sqrt{33}}{4} \Rightarrow \pm \sqrt{\frac{5 + \sqrt{33}}{4}} \end{cases}$$

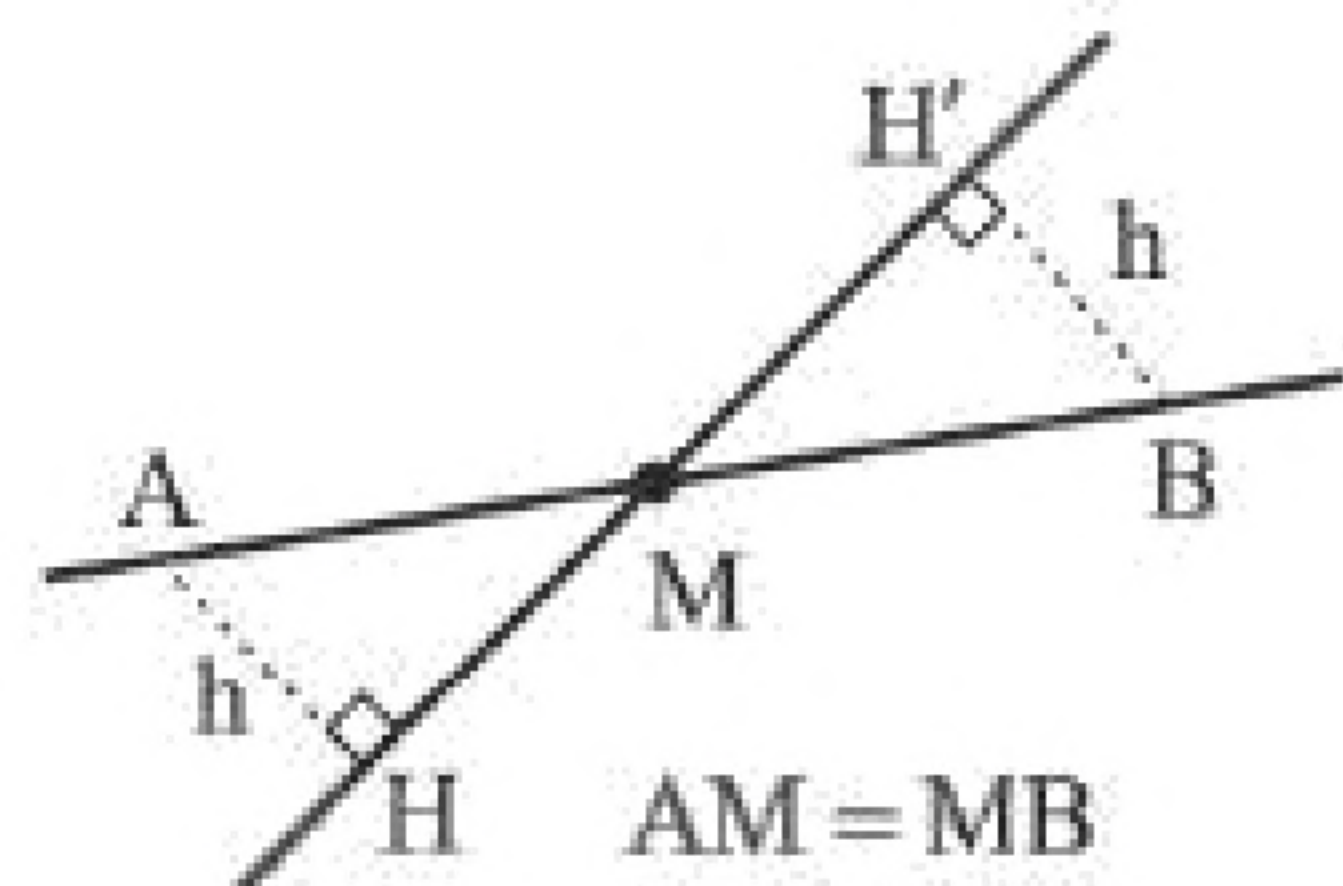
$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = \sqrt{\frac{5 + \sqrt{33}}{4}} \\ x_2 = -\sqrt{\frac{5 + \sqrt{33}}{4}} \end{cases} \Rightarrow x_1 + x_2 = 0, x_1 x_2 = -\left(\frac{5 + \sqrt{33}}{4}\right)$$

$$\Rightarrow S = 0, P = -\left(\frac{5 + \sqrt{33}}{4}\right)$$

$$\Rightarrow SP - 4P = 0 + 4\left(\frac{5 + \sqrt{33}}{4}\right) = 5 + \sqrt{33}$$

۲۹- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

چون دو خط همذکور متقاطع اند، پس طبق شکل زیر M نقطه تقاطع دو خط است، پس کافی است دستگاه زیر را حل کنیم:



$$\begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ -x + 2y + 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow y + 4 = 0 \Rightarrow y = -4 \Rightarrow x = -5 \Rightarrow M(-5, -4)$$



۳۰- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$2x^2 - 4x - 1 = 0 \Rightarrow S = 2, P = -\frac{1}{2}$$

اگر ریشه‌های معادله‌ی مطلوب $\frac{\alpha}{\beta}$ و $\frac{\beta}{\alpha}$ باشند، در این صورت حاصل جمع و حاصل ضرب این ریشه‌ها را به دست می‌آوریم:

$$S_{\text{جدید}} = \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha\beta}$$

$$= \frac{S^2 - 2PS}{P}$$

$$= \frac{2^2 - 2(-\frac{1}{2})(2)}{-\frac{1}{2}} = \frac{4 + 2}{-\frac{1}{2}} = \frac{6}{-\frac{1}{2}} = -12$$

$$P_{\text{جدید}} = \frac{\alpha}{\beta} \times \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\alpha\beta}{\alpha\beta} = \frac{1}{P}$$

$$= \frac{1}{-\frac{1}{2}} = -2$$

$$x^2 - Sx + P = 0 \Rightarrow x^2 - 44x - 2 = 0$$

۳۱- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

غلظت رنگ دوم را k درصد در نظر می‌گیریم پس:

$$\frac{\frac{40}{100} \times 11 + \frac{k}{100} \times 4}{11 + 4 - \frac{0.6}{100}} = \frac{50}{100}$$

$\frac{0.6}{100}$ = میزان تبخیر به کیلوگرم

$$\frac{4/4 + 0.04k}{14/4} = \frac{1}{2} \Rightarrow 1/8 + 0.08k = 14/4 \Rightarrow \frac{1}{100}k = 5/6 \Rightarrow k = \frac{560}{8} = 70$$



۳۲- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$x = -2 \Rightarrow \frac{1}{-2+1} + \frac{a}{4} = \frac{1}{-1+4} \Rightarrow -1 + \frac{a}{4} = -\frac{1}{4}$$

$$\frac{a}{4} = \frac{3}{4} \Rightarrow a = 3$$

$$\frac{1}{x+1} + \frac{3}{x^2} = \frac{1}{x^3+x^2} \Rightarrow \frac{x^2+3x+3}{x^2(x+1)} = \frac{1}{x^3+x^2}$$

$$x^2+3x+3=1 \Rightarrow x^2+3x+2=0 \Rightarrow \begin{cases} x=-2 \text{ درست} \\ x=-1 \text{ نادرست} \end{cases}$$

$x = -1$ غیر قابل قبول است چون ریشه‌ی مخرج است.

۳۳- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$x_2 = 2x_1 + 2 \Rightarrow x_1 + x_2 = \frac{2a-1}{2} \Rightarrow x_1 + 2x_1 + 2 = \frac{2a-1}{2}$$

$$\Rightarrow 3x_1 = \frac{2a-1}{2} - 2 \Rightarrow 3x_1 = \frac{2a-5}{2} \Rightarrow x_1 = \frac{2a-5}{6}$$

$$x_2 = 2\left(\frac{2a-5}{6}\right) + 2 = \frac{2a-5}{3} + 2 = \frac{2a+1}{3}$$

$$x_1 x_2 = \frac{a-1}{2} \Rightarrow \frac{2a-5}{6} \times \frac{2a+1}{3} = \frac{a-1}{2} \Rightarrow \frac{4a^2-8a-5}{18} = \frac{a-1}{2}$$

$$\Rightarrow 4a - 9 = 4a^2 - 8a - 5 \Rightarrow 4a^2 - 12a + 4 = 0$$

$$\Rightarrow a = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 64}}{8} = \frac{12 \pm 10}{8} = 4 \text{ یا } \frac{1}{4}$$

$$a \text{ اختلاف مقادیر} = 4 - \frac{1}{4} = \frac{15}{4}$$



۳۴- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.
طرفین معادله را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$\frac{3+x+3-x+2\sqrt{(3+x)(3-x)}}{3+x+3-x-2\sqrt{(3+x)(3-x)}} = 4 \Rightarrow \frac{6+2\sqrt{9-x^2}}{6-2\sqrt{9-x^2}} = 4$$

$$\Rightarrow 6+2\sqrt{9-x^2} = 24-8\sqrt{9-x^2} \Rightarrow 10\sqrt{9-x^2} = 18$$

$$\Rightarrow \sqrt{9-x^2} = 1/8 \Rightarrow 9-x^2 = (1/8)^2 \Rightarrow x^2 = 3^2 - (1/8)^2$$

$$\Rightarrow x^2 = (3 - 1/8)(3 + 1/8) = 1/2 \times 4/8 = (1/2)^2 \times 4$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 1/2 \times 2 = 2/4 \\ x = -2/4 \text{ غ ق} \end{cases}$$

«بانک سوال موسسه یاوران دانش»

۳۵- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\left(\sqrt[3]{8+\sqrt{x}} + \sqrt[3]{8-\sqrt{x}}\right)^3 = 4^3$$

$$\xrightarrow{x \geq 0} 8 + \sqrt[3]{x} + 8 - \sqrt[3]{x} + 3\sqrt[3]{8+\sqrt{x}}\sqrt[3]{8-\sqrt{x}}\underbrace{\left(\sqrt[3]{8+\sqrt{x}} + \sqrt[3]{8-\sqrt{x}}\right)}_4 = 64$$

$$\Rightarrow 16 + 3\sqrt[3]{64-x} = 64 \Rightarrow 12\sqrt[3]{64-x} = 48$$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{64-x} = 4 \Rightarrow 64-x = 64 \Rightarrow x = 0 \geq 0 \text{ ق. ق.}$$

معادله یک جواب دارد.

۳۶- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

با تغییر متغیر $x^2 + 6x + 6 = t$ ، معادله به فرم زیر درمی‌آید:

$$\sqrt{t+2} = t \xrightarrow{\text{توان ۲}} t+2 = t^2; t \geq 0 \Rightarrow t^2 - t - 2 = 0$$

$$\Rightarrow (t+1)(t-2) = 0 \Rightarrow t = -1, 2 \xrightarrow{t \geq 0} t = 2$$

بنابراین:

$$x^2 + 6x + 6 = 2 \Rightarrow x^2 + 6x + 4 = 0 \xrightarrow{\Delta > 0} x_1 + x_2 = -6$$



۳۷- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\begin{cases} 2x^2 - 11x + 4m = 0 \Rightarrow x_1 + x_2 = \frac{11}{2} \\ 2x^2 + 3x - 3m = 0 \Rightarrow x_1 + x_2 = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow x_2 - x_1 = \frac{11}{2} - \left(-\frac{3}{2}\right) = 7$$

۳۸- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

چون تابع $f(x)$ در $x = 2$ بر محور x ها مماس است پس:

$$f(x) = a(x - 2)^2$$

$$\Rightarrow y = f(x + 1) - f(x + 3) = a(x - 1)^2 - a(x + 1)^2$$

$$\Rightarrow = a(x^2 + 1 - 2x - x^2 - 1 - 2x) \Rightarrow y = -4ax$$

برای آن که تابع y همانی باشد باید $a = -\frac{1}{4}$. پس داریم:

$$f(x) = -\frac{1}{4}(x - 2)^2 \Rightarrow f(1) = -\frac{1}{4}(1 - 2)^2 = -\frac{1}{4}$$

۳۹- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$D(\alpha, 0) \Rightarrow a(\alpha, 3\alpha) \Rightarrow \text{ضلع مربع} = 3\alpha$$

$$C(4\alpha, 0), B(4\alpha, 3\alpha)$$

$$\Rightarrow OB = \sqrt{16\alpha^2 + 9\alpha^2} = 5\alpha \Rightarrow 5\alpha = 10 \Rightarrow \alpha = 2$$

بدین ترتیب مساحت مربع:

$$S = (3\alpha)^2 = 9\alpha^2 = 36$$

۴۰- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

شکل فرضی مقابل را در نظر بگیرید.

$$S_{ABC} = BH' \cdot AC = BC \cdot AH$$

$$2 \times 5 = \sqrt{20} \times AH \Rightarrow AH = \sqrt{5}$$

$$\begin{cases} M = (1, -2) \\ AM = \sqrt{1 + 49} = 5\sqrt{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow MH = \sqrt{AM^2 - AH^2}$$

$$= \sqrt{50 - 5} = 3\sqrt{5}$$

