

گنجینه سوال رایگان

+ پاسخ تشریحی

یاوران دانش



راه های ارتباطی با ما:

www.Dyavari.com

۰۲۱-۷۶۷۰۳۸۵۸

۰۹۱۲-۳۴ ۹۴ ۱۳۴



	۱	۲	۳	۴
۱ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۳ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۴ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۵ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۶ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۷ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۸ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۹ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۰ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۱ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۱۲ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۱۳ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۴ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۵ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۱۶ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۷ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۱۸ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۹ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۲۰ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۲۱ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۲۲ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۳ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۴ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۵ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۲۶ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۲۷ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۸ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۹ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۳۰ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۱ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۲ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۳۳ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۴ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۵ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۶ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۷ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۸ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۳۹ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۴۰ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



۱- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. اندازه قاعده مثلث X و ارتفاع وارد بر آن را h فرض می‌کنیم:

$$S = \frac{1}{2}x \cdot h \xrightarrow{x+h=24} S = \frac{1}{2}x(24-x) = -\frac{1}{2}x^2 + 12x$$

رابطه نهایی برای مساحت مثلث‌ها، یک تابع درجه دوم است که ماکزیمم دارد. (ضریب x^2 منفی است):

$$x_{\max} = \frac{-b}{2a} = \frac{-12}{2\left(-\frac{1}{2}\right)} = 12 \Rightarrow h = 24 - x = 12$$

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2}x \cdot h = \frac{1}{2} \times 12 \times 12 = 72$$

۲- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -2, \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a} = -4$$

مطابق ضرایب معادله $x^2 + 2x - 4 = 0$:

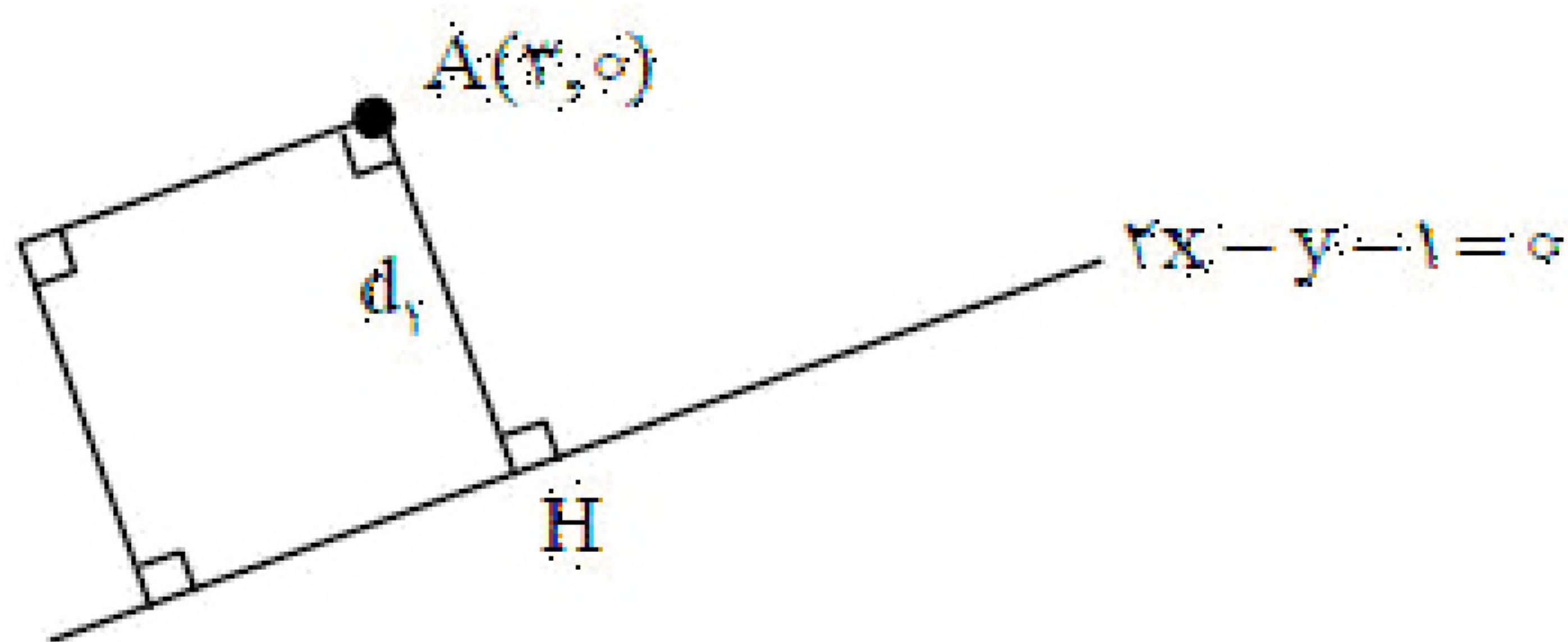
$$x_1^2 + 2x_1 - 4 = 0 \xrightarrow{\times x_1} x_1^3 + 2x_1^2 - 4x_1 = 0$$

$$\Rightarrow x_1^3 = -2x_1^2 + 4x_1 \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \text{طبق ۱} \quad & x_1^3 - 2x_1^2 + 4x_2 = (-2x_1^2 + 4x_1) - 2x_1^2 + 4x_2 \\ & = -2(x_1^2 + x_2^2) + 4(x_1 + x_2) = -2[(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2] + 4(x_1 + x_2) \\ & = -2[(-2)^2 - 2(-4)] + 4(-2) = -32 \end{aligned}$$



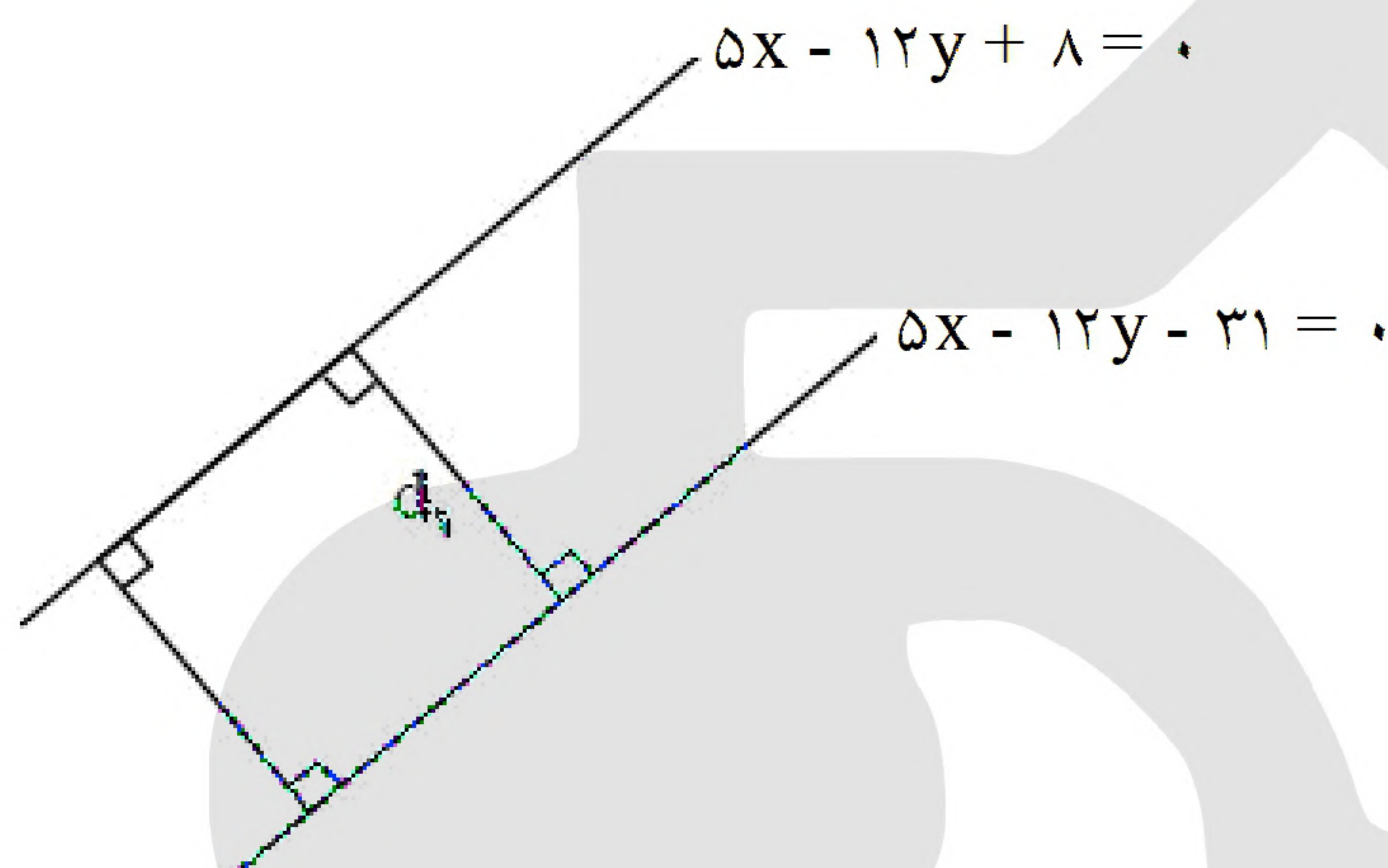
۳- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.



$$\Rightarrow d_1 = \frac{|2(3) - 9 - 1|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$

$$\Rightarrow S_1 = d_1^2 = 5$$

برای محاسبه S_2 معادله خط دوم را بر (۲-) تقسیم می‌کنیم تا از فرمول فاصله دو خط موازی به صورت زیر استفاده کنیم:



$$\Rightarrow d_2 = \frac{|C - C'|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|8 - (-31)|}{\sqrt{5^2 + (-12)^2}}$$

$$= \frac{39}{13} = 3 \Rightarrow S_2 = d_2^2 = 9$$

$$S_1 + S_2 = 5 + 9 = 14$$

$$x = \frac{-b}{2a} = 2 \Rightarrow b = -4a \quad (1)$$

صدق در ضابطه

$$(2, 0) \xrightarrow{\text{صدق در ضابطه}} 0 = 4a + 2b + c \quad (2)$$

$$\text{محور } y \text{ ها } (0, 4) = 0 + 0 + c \Rightarrow c = 4 \quad (3)$$

$$1, 2, 3 \Rightarrow 0 = 4a + 2(-4a) + 4 \Rightarrow a = 1, b = -4$$

$$f(x) = x^2 - 4x + 4$$

$$f(a + b + c - 4) = f(1 - 4 + 4 - 4) = f(-3) = (-3)^2 - 4(-3) + 4 = 25$$

۴- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

۵- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\frac{x+y}{x} = \frac{x}{y} \xrightarrow{\text{شرط مستطیل طلایی}} \frac{x+1}{x} = \frac{x}{1} \Rightarrow x^2 - x - 1 = 0$$

$$\Delta = 5, x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \xrightarrow{x > 0} x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \Rightarrow x + 2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} + 2 = \frac{5 + \sqrt{5}}{2}$$

$$\Rightarrow (5 - \sqrt{5})(x + 2) = \frac{(5 - \sqrt{5})(5 + \sqrt{5})}{2} = \frac{25 - 5}{2} = 10$$



۶- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$2\sqrt{2t-1} = t+1 \Rightarrow 4(2t-1) = (t+1)^2 \Rightarrow t^2 - 6t + 5 = 0$$

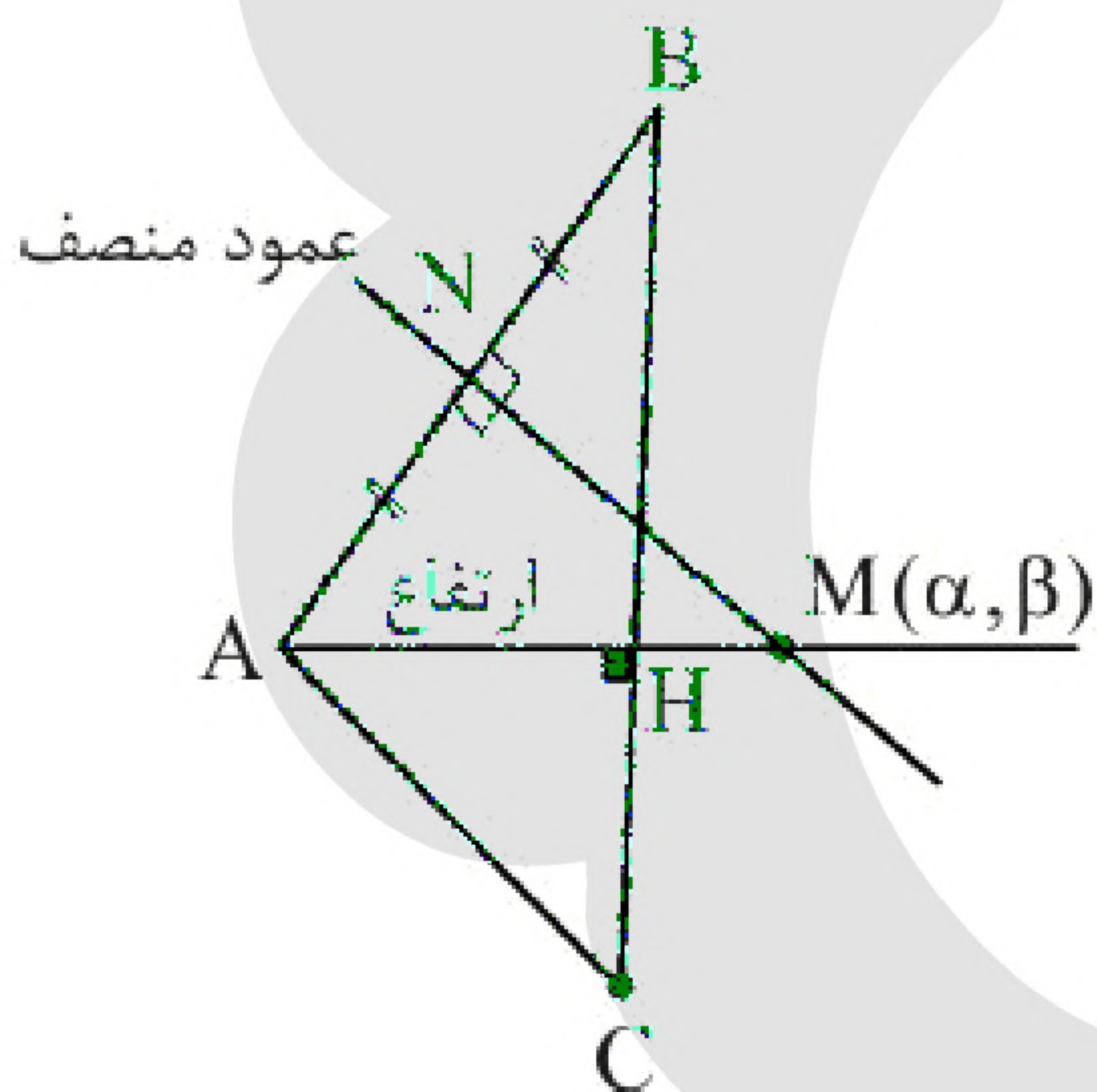
$$(t-1)(t-5) = 0 \Rightarrow \left. \begin{array}{l} t=1 \Rightarrow x_1 = 5 \\ t=5 \Rightarrow x_2 = 13 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \rightarrow S = 18 \\ \rightarrow P = 65 \end{array} \Rightarrow x^2 - Sx + P = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 18x + 65 = 0$$

$$-3a = -18 \Rightarrow a = 6, b = 65$$

$$a \times b = 390$$

۷- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. معادله خطوط عمودمنصف و ارتفاع موردنظر را نوشته و با هم قطع می‌دهیم تا M به دست آید:



$$AB_{\text{وسط}} N\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right) \Rightarrow m = \frac{-1}{m_{AB}} = \frac{-1}{\frac{4-1}{3+2}} = \frac{-5}{3}$$

$$y - \frac{5}{2} = \frac{-5}{3}\left(x - \frac{1}{2}\right)$$

$$\Rightarrow 5x + 3y - 10 = 0 \quad (1) \quad \text{معادله عمودمنصف AB}$$

$$AH \text{ ارتفاع : } m = \frac{-1}{m_{BC}} = \frac{-1}{\frac{-3-4}{2-3}} = \frac{-1}{7}$$

$$y - 1 = \frac{-1}{7}(x + 2) \Rightarrow x + 7y - 5 = 0 \quad (2)$$

$$2, 1 \Rightarrow \begin{cases} 5x + 3y - 10 = 0 \\ x + 7y - 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{55}{32} \Rightarrow \alpha \\ y = \frac{15}{32} \Rightarrow \beta \end{cases} \Rightarrow 32(\alpha + \beta) = 70$$



۸- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$f(x) = 0 \Rightarrow 2^{3-2x} + 2^{3+2x} - 20 = 0 \xrightarrow{\text{با فرض } 2^{2x} = t} \frac{8}{t} + 8t - 20 = 0$$

$$\xrightarrow{\times t} 8t^2 - 20t + 8 = 0 \xrightarrow{\Delta = 144} t = \frac{20 \pm 12}{16} \begin{cases} t = 2 \Rightarrow 2^{2x} = 2 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \\ t = \frac{1}{2} \Rightarrow 2^{2x} = \frac{1}{2} \Rightarrow x = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\alpha^3 + \beta^3 + \frac{2}{\alpha^2} + \frac{3}{\beta^2} = \underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(-\frac{1}{2}\right)^3}_{= 0} + \frac{2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} + \frac{3}{\left(-\frac{1}{2}\right)^2}$$

$$= 0 + 8 + 12 = 20$$

یادآوری: با توجه به عبارات خواسته شده، تفاوتی ندارد که α و β کدامیک از ریشه‌های $\frac{1}{2}$ و $-\frac{1}{2}$ باشند.

«بانک سوال موسسه یاوران دانش»

۹- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

V = سرعت پرنده در هوای راکد

$$V' = \text{سرعت ثابت باد} = \frac{50 \text{ km}}{h} \times \frac{1 h}{3600 S} \times \frac{1000 m}{1 \text{ km}} = \frac{125 m}{9 s}$$

ارتباط بین مسافت پیموده شده (x) و سرعت ثابت (V) و زمان (t)
 $x = V \cdot t \Rightarrow t = \frac{x}{V}$

$$\underbrace{\frac{1000}{V - V'}}_{\text{سرعت در جهت مخالف باد}} - \underbrace{\frac{1000}{V + V'}}_{\text{سرعت در جهت موافق باد}} = 25 \Rightarrow \frac{1000}{V - \frac{125}{9}} - \frac{1000}{V + \frac{125}{9}} = 25$$

$$\Rightarrow \left(\frac{9000}{9V - 125} - \frac{9000}{9V + 125} = 25 \right) \times (9V - 125)(9V + 125) \quad \text{ک.م.م. مخرج‌ها}$$

$$9000(9V + 125) - 9000(9V - 125) = 25(9V - 125)(9V + 125)$$

$$\Rightarrow 2 \times 9000 \times 125 = 25(81V^2 - 15625) \Rightarrow 81V^2 = 105625$$

$$\Rightarrow V = \frac{325 m}{9 s}$$

$$\downarrow$$

$$x = V \cdot t$$

$$x = \frac{325}{9} \times 72 = 2600 \text{ متر} \quad \text{مسافت طی شده در ۷۲ ثانیه}$$



۱۰- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\text{متر } y_{\max} = 8016 \Rightarrow x_{\max} = \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{2\left(-\frac{1}{4}\right)} = 8 \Rightarrow x_{\max} = \frac{-b}{2a} \Rightarrow y_{\max} = 8016$$

موشک اول: $x_{\max} = \frac{-b}{2a} \Rightarrow y_{\max} = 8016$

$$\text{متر } y'_{\max} = 1600 \Rightarrow x'_{\max} = \frac{-b}{2a} = \frac{-80}{2(-2)} = 20 \Rightarrow y'_{\max} = 1600$$

موشک دوم: $x'_{\max} = \frac{-b}{2a} \Rightarrow y'_{\max} = 1600$

$$y_{\max} - y'_{\max} = 8016 - 1600 = 6416 \text{ متر}$$

b	c	a
۱	۱	۱
۱	۳	۲
۲	۲	۲
۲	۴	۳
۳	۱	۲
۳	۳	۳
۴	۲	۳
۴	۴	۴

۱۱- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. در حالت کلی چون برای هریک از پارامترهای a , b , c ، چهار مقدار وجود دارد، $4 \times 4 \times 4 = 64$ معادله درجه دوم مختلف می توان نوشت. حالا پیشامد مطلوب را به زبان ریاضی می نویسیم:

$$s = p - 2 \Rightarrow \frac{-b}{a} = \frac{c}{a} - 2 \xrightarrow{\times a} -b = c - 2a \Rightarrow b + c = 2a$$

با چک کردن مقادیر صحیح از ۱ تا ۴ به جای a , b , c به حالات قابل قبول زیر می رسیم:
برای آن که اساساً در معادله فوق، جمع و ضرب ریشه ها معنادار باشد، لازم است که شرط $\Delta > 0$ هم بررسی شود:

$$b^2 - 4ac > 0 \Rightarrow b^2 > 4ac$$

اگر مقادیر قابل قبول a , b , c در هریک از ۸ سطر جدول فوق را در نامساوی بالا چک کنید، فقط حالت $b = 3$, $c = 1$ و $a = 2$ صدق می کند و لذا فقط یک حالت از ۶۴ حالت قابل قبول

$$P = \frac{1}{64}$$

است:

۱۲- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. معادله را به صورت ساده تری می نویسیم:

$$\sqrt{2(x^2 - 3x + 4)} = -(x^2 - 3x)$$

$$\sqrt{2(t+4)} = -t$$

حالا با تغییر متغیر $x^2 - 3x = t$ داریم:

$$2(t+4) = t^2 \Rightarrow t^2 - 2t - 8 = 0 \Rightarrow t = 4, -2$$

طرفین این معادله گنگ را به توان دو می رسانیم:

اگر ریشه های به دست آمده را در معادله گنگ اولیه (برحسب t) چک کنیم، $t = -2$ قابل قبول و $t = 4$ غیرقابل قبول

$$t = -2 \Rightarrow x^2 - 3x = -2 \Rightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow x = 1, 2$$

است. حالا داریم:

$$k^2 = 1 \times 2 \Rightarrow k = \pm\sqrt{2}$$

اگر واسطه هندسی بین این دو ریشه را k بنامیم داریم:

پس واسطه هندسی منفی برابر با $-\sqrt{2}$ است.



۱۳- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. وقتی ریشه‌های معادله، دو عدد فرد متوالی هستند، حتماً اختلاف ریشه‌ها برابر با ۲ است.

$$\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = 2 \xrightarrow{a=2} \frac{\sqrt{\Delta}}{2} = 2 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 4 \Rightarrow \Delta = 16$$

پس:

$$(-2m)^2 - 4(2)(7m - 26) = 16 \Rightarrow 4m^2 - 56m + 208 = 16 \Rightarrow 4m^2 - 56m + 192 = 0$$

$$\xrightarrow{\div 4} m^2 - 14m + 48 = 0 \Rightarrow m = 6, 8$$

اما دقت کنید که دو عدد با اختلاف ۲ لزوماً دو عدد فرد متوالی نیستند، شاید دو عدد زوج متوالی باشند! پس مقادیر به دست آمده برای m را چک می‌کنیم:

$$m = 6 \Rightarrow \text{معادله: } 2x^2 - 12x + 16 = 0 \Rightarrow x^2 - 6x + 8 = 0 \Rightarrow x = 2, 4 \quad (\text{دو عدد زوج متوالی})$$

$$m = 8 \Rightarrow \text{معادله: } 2x^2 - 16x + 30 = 0 \Rightarrow x^2 - 8x + 15 = 0 \Rightarrow x = 3, 5 \quad (\text{دو عدد فرد متوالی})$$

پس فقط $m = 8$ قابل قبول است، یعنی مجموع دو تاس ریخته شده باید برابر با ۸ باشد:

تاس‌ها $\Rightarrow (2, 6)(6, 2)(3, 5)(5, 3)(4, 4)$: حالت ۵

پس احتمال موردنظر برابر با $\frac{5}{36}$ است.

۱۴- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

بیشترین نوردهی موقعی ممکن است که پنجره بیشترین مساحت را داشته باشد:

$$S = 2S_{\text{نیم دایره}} + S_{\text{مستطیل}} = S_{\text{دایره}} + S_{\text{مستطیل}} \Rightarrow S = \pi r^2 + x(2r) \quad (1)$$

تابع مربوط به محیط پنجره را هم می‌نویسیم:

$$p = 2p_{\text{نیم دایره}} + 2x = p_{\text{دایره}} + 2x = 2\pi r + 2x$$

پس:

$$2\pi r + 2x = 120 \Rightarrow \pi r + x = 60 \Rightarrow x = 60 - \pi r \quad (2)$$

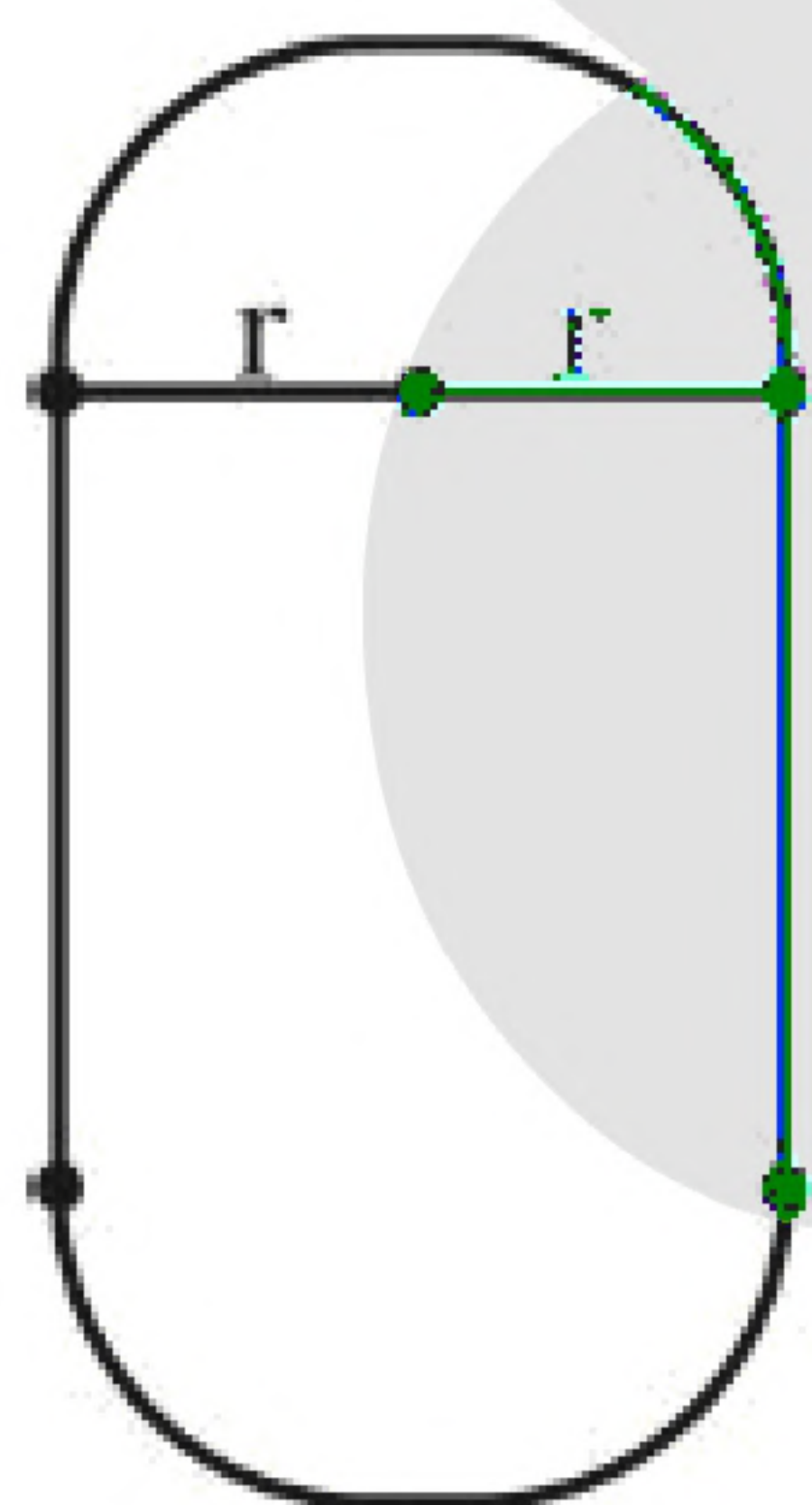
حالا از رابطه ۲ در رابطه ۱ جایگذاری می‌کنیم:

$$S = \pi r^2 + x(2r) \xrightarrow{x = 60 - \pi r} \pi r^2 + (60 - \pi r)(2r) = \pi r^2 + 120r - 2\pi r^2 \Rightarrow S = -\pi r^2 + 120r$$

بیشترین مقدار این تابع درجه دو در رأس سهمی اتفاق می‌افتد، پس:

$$r = \frac{-b}{2a} = \frac{-120}{2(-\pi)} = \frac{60}{\pi}$$

$$\text{محیط نیم دایره} = \pi r = \pi \left(\frac{60}{\pi} \right) = 60$$





۱۵- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. در معادله درجه سوم $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ در صورت داشتن سه ریشه داریم:

$$S = \frac{-b}{a} \quad P = \frac{-d}{a}$$

$$S = \frac{-b}{a} = 3 \Rightarrow \alpha + \beta + \gamma = 3$$

در اینجا:

از طرفی چون α و β و γ تشکیل دنباله عددی (حسابی) می دهند، β واسطه حسابی میان α و γ است، یعنی:

$$2\beta = \alpha + \gamma$$

$$3\beta = 3 \Rightarrow \beta = 1$$

با جایگذاری در $\frac{\alpha + \beta + \gamma}{2\beta} = 3$ داریم:

با جایگذاری $\beta = 1$ در معادله، مقدار پارامتر m به دست می آید:

$$x^3 - 3x^2 + (m-4)x + m = 0 \xrightarrow{x=1} 1 - 3 + m - 4 + m = 0 \Rightarrow m = 3$$

صدق می کند

پس معادله به صورت $x^3 - 3x^2 - x + 3 = 0$ بوده و داریم:

$$P = \frac{-d}{a} = -3 \Rightarrow \alpha\beta\gamma = -3 \xrightarrow{\beta=1} \alpha\gamma = -3$$



۱۶- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. β به عنوان ریشه در معادله صدق می کند. پس:

$$2\beta^2 - 9\beta + 6 = 0 \Rightarrow 2\beta^2 + 6 = 9\beta \xrightarrow{\text{تقسیم بر } 2} \beta^2 + 3 = \frac{9}{2}\beta$$

$$P = \frac{c}{a} = \frac{6}{2} = 3 \Rightarrow \alpha\beta = 3 \Rightarrow \alpha = \frac{3}{\beta}$$

از طرفی در معادله موردنظر داریم:

پس ریشه های $(\beta^2 + 3)$ و $(\alpha + \frac{3}{\beta})$ به صورت $(\frac{9}{2}\beta)$ و (2α) درمی آیند و در واقع دنبال معادله درجه دومی

هستیم که ریشه هایش $(\frac{9}{2}\beta)$ و (2α) هستند:

$$S = (2\alpha) + \left(\frac{9}{2}\beta\right)$$

تلاش می کنیم که ضرایب α و β یکی شوند، برای این منظور از طریق میانگین ضرایب یعنی $\frac{2 + \frac{9}{2}}{2} = \frac{13}{4}$ می نویسیم:

$$(2\alpha) + \left(\frac{9}{2}\beta\right) = \left(\frac{13}{4}\alpha - \frac{5}{4}\alpha\right) + \left(\frac{13}{4}\beta + \frac{5}{4}\beta\right) = \left(\frac{13}{4}\alpha + \frac{13}{4}\beta\right) + \left(\frac{5}{4}\beta - \frac{5}{4}\alpha\right)$$

$$= \frac{13}{4}(\alpha + \beta) + \frac{5}{4}(\beta - \alpha) = \frac{13}{4}S + \frac{5}{4}\frac{\sqrt{\Delta}}{a}$$

تفاضل ریشه ها جمع ریشه ها

$$S = \frac{9}{2} \xrightarrow{\Delta = 33} \frac{13}{4}\left(\frac{9}{2}\right) + \frac{5}{4}\left(\frac{\sqrt{33}}{2}\right) = \frac{117}{8} + \frac{5\sqrt{33}}{8} = \frac{117 + 5\sqrt{33}}{8}$$

$$P = (2\alpha)\left(\frac{9}{2}\beta\right) = 9(\alpha\beta) = 9(3) = 27$$

ضرب ریشه ها

با توجه به اینکه در معادله جدید، $S = \frac{117 + 5\sqrt{33}}{8}$ و $P = 27$ است، پس این معادله به صورت زیر می شود:

$$x^2 - \left(\frac{117 + 5\sqrt{33}}{8}\right)x + 27 = 0 \Rightarrow 8x^2 - (117 + 5\sqrt{33})x + 216 = 0$$

از مقایسه این معادله با معادله داده شده در صورت سؤال داریم:

$$\begin{cases} a = 117 \\ b = 5 \\ c = 216 \end{cases} \Rightarrow \frac{c}{a+b} = \frac{216}{122} = \frac{108}{61} = 1/7$$



۱۷- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. قبل از شروع به حل دقت کنید که در کسر $\frac{3-x}{x^2-x-6}$ می‌توان برای راحتی، عبارت

$x-3$ را از صورت منخرج ساده کرد:

$$\frac{-(x-3)}{(x-3)(x+2)} = \frac{-1}{x+2}$$

$$\frac{3x+1}{x-2} - \frac{20x-9}{x+2} = \frac{-1}{x+2}$$

پس داریم:

حالا طرفین تساوی را در عبارت $(x-2)(x+2)$ ضرب می‌کنیم تا منخرج کسرها از بین برود:

$$(3x+1)(x+2) - (20x-9)(x-2) = -1(x-2) \Rightarrow (3x^2 + 7x + 2) - (20x^2 - 49x + 18) = -1(x-2)$$

$$= -x + 2 \Rightarrow -17x^2 + 56x - 16 = -x + 2 \Rightarrow 17x^2 - 57x + 18 = 0 \Rightarrow x = \left\{ \frac{6}{17}, 3 \right\}$$

اما دقت کنید، $x=3$ به عنوان ریشه منخرج غیرقابل قبول بوده و این معادله فقط یک ریشه دارد، لذا واسطه هندسی بین ریشه‌های این معادله اساساً بی‌معنی است.

۱۸- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. در گردنبند موردنظر، سهم پلاتین یک درصد و طبیعتاً سهم طلا ۹۹ درصد است. حالا قرار است، سهم طلا به ۹۰ درصد و سهم پلاتین به ۱۰ درصد برسد. پس باید مقداری پلاتین به گردنبند اضافه شود. ببینید:

$$\frac{\text{وزن فعلی پلاتین}}{\text{وزن گردنبند}} = \frac{1}{100} \Rightarrow \text{وزن پلاتین} = 0.1 \text{ گرم}$$

حالا فرض کنید x گرم پلاتین اضافه می‌شود. بنابراین وزن پلاتین $x + 0.1$ و وزن کل $x + 10$ می‌شود. پس:

$$\frac{0.1+x}{10+x} = \frac{10}{100} \Rightarrow 10 + 100x = 100 + 10x \Rightarrow 90x = 90 \Rightarrow x = 1$$

یعنی باید یک گرم پلاتین اضافه شود.

۱۹- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. نمودار تابع یک سهمی رو به پایین است، بنابراین $x=-4$ و $x=1$ صفرهای تابع هستند:

$$f(x) = -3(x-1)(x+4) = -3x^2 - 9x + 12$$

$$\begin{array}{ccc} & \downarrow & \downarrow \\ & a = -9 & b = 12 \end{array}$$

$$b - a = 12 - (-9) = 21$$

۲۰- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$a < 0 \Rightarrow$ سهمی دارای ماکزیمم است (دهانه سهمی رو به پایین است)

$c < 0 \Rightarrow$ نمودار سهمی محور y ها را در قسمت منفی قطع کرده است.

$b < 0 \Rightarrow x_* = \frac{-b}{2a} < 0 \Rightarrow$ رأس سهمی در ناحیه دوم قرار دارد.



$$\frac{1}{a} - \frac{1}{a+2} = \frac{1}{a+2} - \frac{7}{99} \Rightarrow \frac{1}{a} - \frac{2}{a+2} = -\frac{7}{99}$$

۲۱- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\frac{a+2-2a}{a(a+2)} = \frac{-7}{99} \Rightarrow -7a^2 - 14a = -99a + 198$$

$$7a^2 - 85a + 198 = 0 \Rightarrow a = \frac{85 \pm \sqrt{7225 - 5544}}{14} = \frac{85 \pm 41}{14} = \begin{cases} 9 & \text{ق ق} \\ \frac{22}{7} & \text{غ ق ق} \end{cases}$$

$$a = 9 \Rightarrow a+2 = 11 \Rightarrow 9 \times 11 = 99 \Rightarrow 9 + 9 = 18$$

۲۲- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. با فرض $\sqrt{x^2 + 5x + 11} = Z$:

$$Z^2 - 2Z - 15 = 0 \Rightarrow \boxed{Z = 5} \text{ و } Z = -3 \text{ (چون } Z \geq 0 \text{ غ ق ق)}$$

$$Z = 5 \Rightarrow \sqrt{x^2 + 5x + 11} = 5 \Rightarrow x^2 + 5x - 14 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -7 \end{cases}$$

$$a_4 = a_1 \times r^3 \Rightarrow -7 = a_1 (2)^3 \Rightarrow a_1 = \frac{-7}{8}$$

$$S_n = a_1 \times \frac{1 - q^n}{1 - q} \Rightarrow S_{10} = \frac{-7}{8} \times \frac{1 - 2^{10}}{1 - 2} = -895/125$$

$$\downarrow$$

$$[S_n] = -896 = \text{جزء صحیح مجموع}$$

۲۳- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

مرکز دایره محل برخورد قطرهایست. بنابراین دو قطر دلخواه انتخاب و محل تلاقی آن دو را به دست می آوریم:

$$\begin{cases} m = 0 \Rightarrow y = -1 \\ m = 1 \Rightarrow x = 1 \end{cases} \Rightarrow O(1, -1)$$

فاصله نقطه O (مرکز دایره) تا خط مماس $3x + 4y = 9$ همان شعاع دایره است:

$$R = \frac{|3(1) + 4(-1) - 9|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{10}{5} = 2$$

$$S = \pi R^2 = \pi (2)^2 = 4\pi \xrightarrow{\text{با فرض } \pi = 3} S = 12$$



۲۴- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$x_0 = -\frac{-2b}{2a} = \frac{1}{2} \Rightarrow a = 2b \Rightarrow \begin{cases} a = 2b \\ 4a - 4b = -4 \end{cases} \Rightarrow b = -1 \Rightarrow a = -2$$

$$(2, -1) \in g \Rightarrow -1 = 4a - 4b + 3$$

$$g(x) = -2x^2 + 2x + 3$$

$$f(x) = 2x^2 - x + c$$

$$(2, -1) \in f \Rightarrow -1 = 2(2)^2 - 2 + c \Rightarrow c = -7$$

$$f(x) = 2x^2 - x - 7$$

یادآوری: $P = \frac{c}{a}$ (حاصل ضرب ریشه‌های معادله‌ی درجه دوم)

$$g \text{ حاصل ضرب ریشه‌های } = -\frac{3}{2}$$

$$f \text{ حاصل ضرب ریشه‌های } = -\frac{7}{2}$$

$$\text{اختلاف} = \left| -\frac{3}{2} - \left(-\frac{7}{2} \right) \right| = 2$$

۲۵- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. برای پیدا کردن محل برخورد میانه‌ها کافی است معادله دو میانه را نوشته و قطع دهیم:

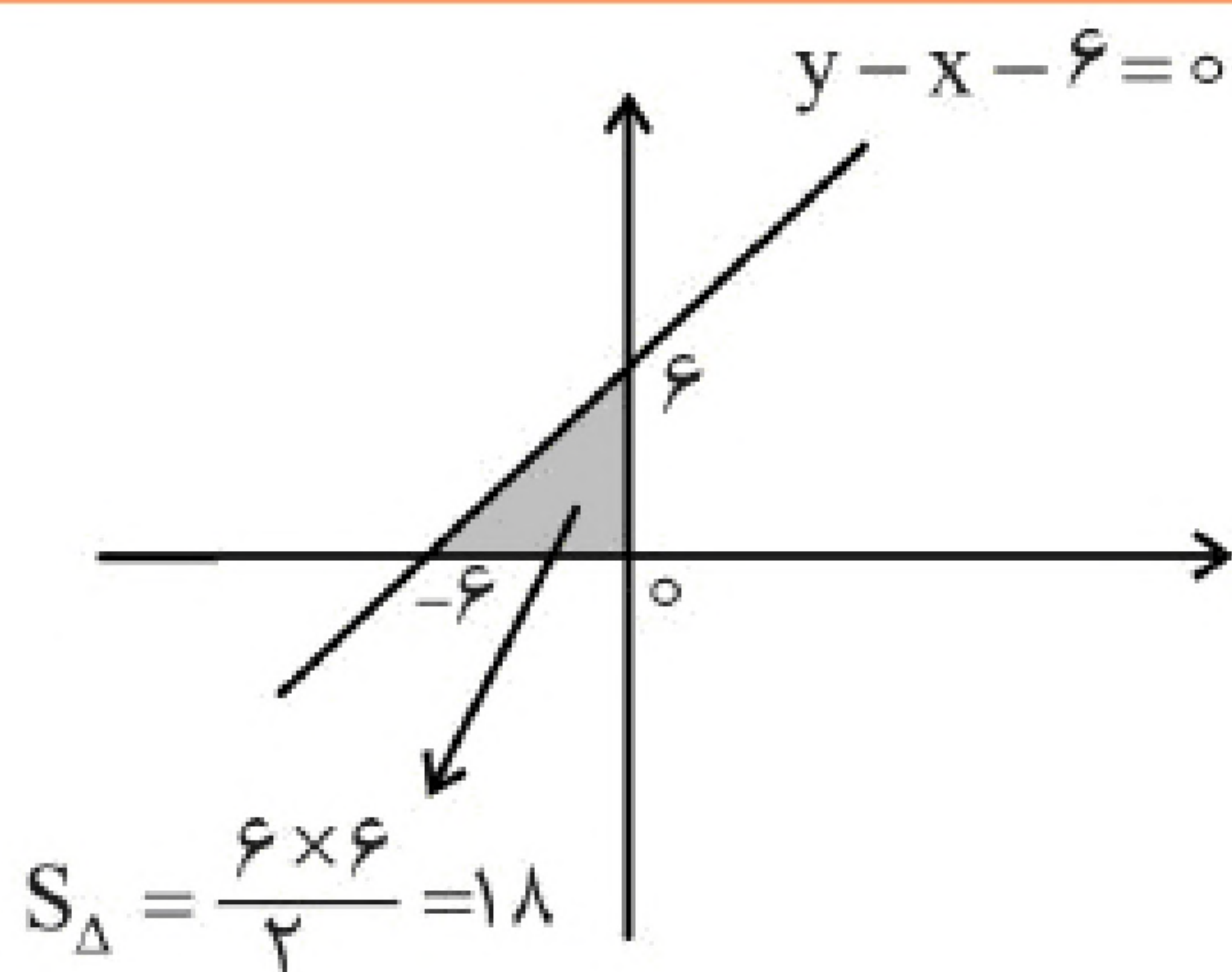
$$\begin{aligned} AB \text{ وسط } M(3, 3) &\Rightarrow y - 3 = \frac{-2-3}{-2-3}(x-3) \Rightarrow \begin{cases} y = x \\ y = 4x - 4 \end{cases} \Rightarrow O\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right) \\ AC \text{ وسط } N(1, 0) &\Rightarrow y - 0 = \frac{4-0}{2-1}(x-1) \Rightarrow \end{aligned}$$

برای یافتن محل برخورد عمودمنصف‌های اضلاع AB و AC کافی است معادله دو عمودمنصف را نوشته و قطع دهیم:

$$\begin{aligned} AB \text{ وسط } M(3, 3), m_{AB} = \frac{4-2}{2-4} = -1 &\xrightarrow{\text{عکس و قرینه}} m_{\Delta \text{ عمودمنصف}} = 1 \Rightarrow \\ AC \text{ وسط } N(1, 0), m_{AC} = \frac{-2-2}{-2-4} = \frac{2}{3} &\Rightarrow m_{\Delta'} = \frac{-3}{2} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{cases} y = x \\ y = \frac{-3}{2}x + \frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow I\left(\frac{3}{5}, \frac{3}{5}\right) \text{ محل برخورد عمودمنصف‌ها}$$

$$IO = \sqrt{\left(\frac{4}{3} - \frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{3} - \frac{3}{5}\right)^2} = \frac{11\sqrt{2}}{15}$$



۲۶- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. عمودمنصف یک پاره‌خط شامل همه‌ی نقاطی است که فاصله‌ی آن‌ها از دو سر پاره‌خط به یک اندازه است. اگر این نقاط را به صورت $P(x, y)$ در نظر بگیریم آن‌گاه $PM = PN$:

$$\sqrt{(x-2)^2 + (y-5)^2} = \sqrt{(x+1)^2 + (y-8)^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{y - x - 6 = 0} \quad \text{معادله‌ی خط عمودمنصف MN}$$

$$\text{محل برخورد با محورها} \quad \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = 6 \\ y = 0 \Rightarrow x = -6 \end{cases}$$

۲۷- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. با استاندارد کردن معادله‌ی درجه ۲:

$$x^2 + (2m-2)x + m^2 - n = 0$$

$$\text{ریشه مضاعف } x = 3 = \frac{-b}{2a} \Rightarrow 3 = \frac{-2m+2}{2} \Rightarrow \boxed{m = -2}$$

$$\text{صدق کردن ریشه در معادله: } 3^2 + (2(-2)-2)(3) + (-2)^2 - n = 0 \Rightarrow \boxed{n = -5}$$

$$\text{ریشه‌های معادله جدید } m, n: \left. \begin{array}{l} S = m + n = -7 \\ P = m \cdot n = 10 \end{array} \right\} \Rightarrow x^2 - sx + p = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{x^2 + 7x + 10 = 0}$$

$$\Delta = (a-2)^2 - 4\left(\frac{a}{4}\right)(1) > 0 \Rightarrow a^2 - 5a + 4 > 0$$

$$(a-4)(a-1) > 0 \Rightarrow a < 1 \quad \text{یا} \quad a > 4$$

$$p = \frac{1}{a} < 0 \Rightarrow a < 0$$

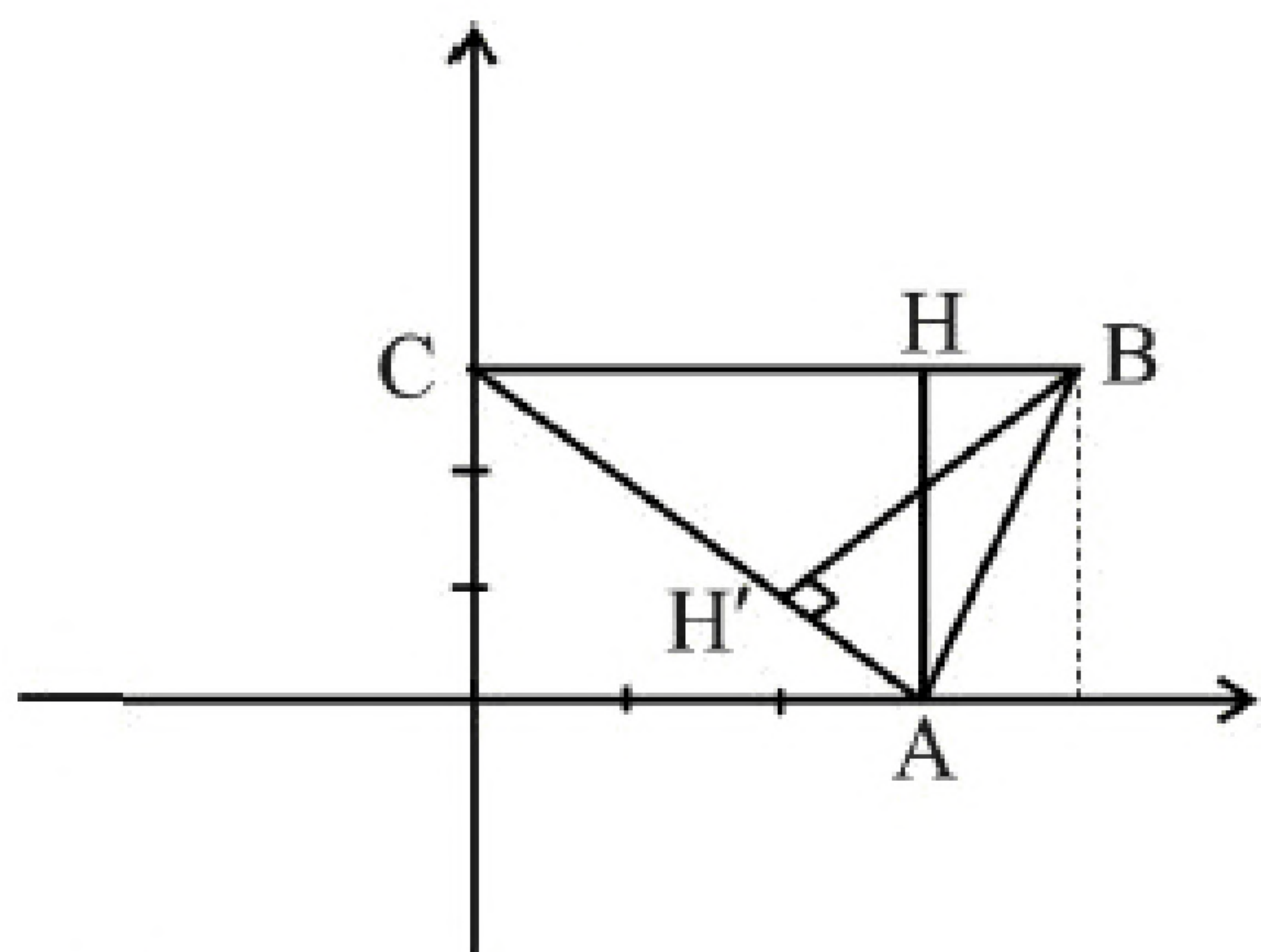
$$s = \frac{-(a-2)}{\frac{a}{4}} < 0 \Rightarrow \frac{4(a-2)}{a} > 0 \Rightarrow a < 0 \quad \text{یا} \quad a > 2$$

$$\Rightarrow a < 0 \quad \text{اشتراک جواب‌ها}$$

۲۸- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.



۲۹- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.



$x = 3$: معادله ارتفاع AH

$$M_{AC} = \frac{3-0}{0-3} = -1 \Rightarrow m_{BH'} = 1$$

$y - 3 = 1(x - 4) \Rightarrow y = x - 1$: معادله ارتفاع BH'

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = x - 1 \Rightarrow y = 3 - 1 = 2 \end{cases} \Rightarrow (3, 2) \quad \text{مختصات نقطه برخورد سه ارتفاع مثلث}$$

$$\frac{a}{3} = -\frac{1}{4} \Rightarrow a = -\frac{3}{4}$$

۳۰- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. چون دو خط موازی هستند پس:

بنابراین معادله خط دوم به صورت $6x - 8y = 6$ و یا ساده شده‌اش $3x + 4y = -3$ است. فاصله این دو خط

$$\pi r^2 = \pi$$

موازی همان قطر دایره است بنابراین:

$$r = 1 \Rightarrow d = 2r = 2$$

$$d = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \Rightarrow 2 = \frac{|b + 3|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} \Rightarrow |b + 3| = 10 \Rightarrow b = 7 \text{ یا } -13$$

$$\Rightarrow b = -91 = \text{حاصل ضرب مقادیر}$$

$$S = 3, P = 1$$

۳۱- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$A = x_1^2 \sqrt{x_1} + x_2^2 \sqrt{x_2}$$

$$A^2 = x_1^4 \cdot x_1 + x_2^4 \cdot x_2 + 2x_1^2 x_2^2 \sqrt{x_1 x_2} \Rightarrow A^2 = x_1 x_2 (x_1^3 + x_2^3) + 2x_1^2 x_2^2 \sqrt{x_1 x_2}$$

$$A^2 = x_1 x_2 [(x_1 + x_2)^3 - 3x_1 x_2 (x_1 + x_2)] + 2(x_1 x_2)^2 \sqrt{x_1 x_2}$$

$$A^2 = P[S^3 - 3PS] + 2P^2 \sqrt{P} = 1[27 - 9] + 2 = 20$$

$$A = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$



۳۲- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$S = x' + x'' = -\frac{b}{2} = 3 + 2\sqrt{2} + 3 - 2\sqrt{2} = 6 \Rightarrow b = -12$$

$$P = x' \cdot x'' = \frac{c}{2} = (\sqrt{2} + 1)^2 \cdot (\sqrt{2} - 1)^2 = (2 - 1)^2 = 1 \Rightarrow c = 2$$

$$y_1 = \frac{-b^2 + 4ac}{4a} = \frac{-(-12)^2 + 4(2)(2)}{4(2)} = \frac{-144 + 16}{8} = \frac{-128}{8} = -16$$

۳۳- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. فرض: $x_1 > x_2$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = \frac{-4}{2} = -2 \\ x_1 - x_2 = 6 \end{cases}$$

$$2x_1 = 4 \Rightarrow x_1 = 2 \Rightarrow x_2 = -4$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = \frac{-m + 1}{2} = 2(-4) = -8$$

$$\Rightarrow -m + 1 = -16 \Rightarrow -m = -17 \Rightarrow m = 17$$

$$\Rightarrow m + x_1 - x_2^2 = 17 + 2 - (-4)^2 = 19 - 16 = 3$$

«بانک سوال موسسه یاوران دانش»

$$1 - 2x \geq 0 \Rightarrow x \leq \frac{1}{2}$$

۳۴- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. شرط جواب معادله:

$$\sqrt{1 - 2x} + |2x - 1| = 1 \Rightarrow \sqrt{1 - 2x} + 1 - 2x = 1 \Rightarrow \sqrt{1 - 2x} = 2x \xrightarrow[\text{با شرط } x \geq 0]{\text{دو طرف به توان ۲}}$$

$$4x^2 + 2x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{-2 \pm 2\sqrt{5}}{8} \xrightarrow[\alpha = \frac{2\sqrt{5} - 2}{8}]{\text{با توجه به } 0 \leq x \leq \frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow (8\alpha + 2)^2 = (2\sqrt{5})^2 = 20$$



۳۵- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$AB = \sqrt{(4-1)^2 + (5-1)^2} = 5$$

$$BC = \sqrt{(4-0)^2 + (y-5)^2} = 5$$

$$16 + y^2 - 10y + 25 = 25$$

$$y^2 - 10y + 16 = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = 8 \text{ قابل قبول} \\ y = 2 \text{ غیر قابل قبول} \end{cases}$$

c مختصات رأس c: $c(0, 8)$

$$m_{AB} = \frac{5-1}{4-1} = \frac{4}{3} \Rightarrow m_{BC} = -\frac{3}{4} \Rightarrow \begin{cases} AB \text{ معادله: } 4x - 3y - 1 = 0 \\ BC \text{ معادله: } 3x + 4y - 32 = 0 \\ AD \text{ معادله: } 3x + 4y - 7 = 0 \\ CD \text{ معادله: } 4x - 3y + 24 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x + 4y = 7 \\ 4x - 3y = -24 \end{cases} \Rightarrow 25x = -75$$

$$x = -3 \Rightarrow y = 4 \Rightarrow D(-3, 4) \Rightarrow y_c + y_D = 8 + 4 = 12$$

۳۶- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = 16 \\ 3x_1 + x_2 = 3 \end{cases} \Rightarrow x_1 = 5, x_2 = -2$$

$$x_1^3 + x_2^3 = 5^3 + (-2)^3 = 117$$

۳۷- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. اگر حاصل جمع دو مقدار مثبت برابر عددی ثابت باشد، حاصل ضرب آنها وقتی ماکزیمم است که آن دو مقدار با هم برابر باشند.

$$2a + 3b = 120 \Rightarrow 2a = 3b = \frac{120}{2} = 60 \Rightarrow \begin{cases} a = 30 \\ b = 20 \end{cases} \Rightarrow a + b = 50$$

$$2a + 3b = 120 \Rightarrow b = \frac{120 - 2a}{3}$$

راه حل دوم:

$$M = 6ab = 6a \left(\frac{120 - 2a}{3} \right) = -4a^2 + 240a \quad \text{تابع درجه دوم (سهمی)}$$

$$a_0 = \frac{-240}{2(-4)} = 30 \Rightarrow b = \frac{120 - 60}{3} = 20 \Rightarrow a + b = 50$$



۳۸- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$2\sqrt{2t-1} = t+1 \xrightarrow{\text{دو طرف به توان ۲}} 4(2t-1) = (t+1)^2 \Rightarrow t^2 - 6t + 5 = 0$$

$$t=1, t=5 \Rightarrow \text{ریشه‌های جدید} \begin{cases} x_1 = 3(1) - 8 = -5 \\ x_2 = 3(5) - 8 = 7 \end{cases} \begin{cases} S = 2 \text{ ریشه ها} \\ P = -35 \text{ ضرب ریشه ها} \end{cases}$$

$$x^2 - Sx + P = 0 \\ \Rightarrow x^2 - 2x - 35 = 0$$

۳۹- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\frac{x}{x+1} - \frac{x^2}{x^2-1} = \frac{-x}{2x-1} \quad x \neq 0$$

$$\frac{\cancel{x} - x - \cancel{x}}{x^2-1} = \frac{-x}{2x-1}$$

$$x^2 = 2x \Rightarrow x(x-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 & \text{غ ق ق} \\ x=2 & \text{ق ق} \end{cases}$$

$$2^2 + 6(2) - a = 0 \Rightarrow a = 16 \\ 1 + 6 = 7$$

$$2^3 \times \frac{1}{2^{2x}} + 2^3 \times 2^{2x} = 20$$

۴۰- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$2^{2x} = t \text{ و } 4 \text{ بر ۲ تقسیم طرفین معادله بر ۲} \Rightarrow \frac{2}{t} + 2t = 5 \xrightarrow{\times t} 2t^2 - 5t + 2 = 0$$

$$\Delta = 9, \quad t_1 = 2, \quad t_2 = \frac{1}{2}$$

$$2^{2x} = 2 \Rightarrow x_1 = \frac{1}{2} = \alpha$$

$$2^{2x} = \frac{1}{2} \Rightarrow x_2 = -\frac{1}{2} = \beta$$

$$\frac{2}{\alpha^2} + \frac{3}{\beta^2} = 2(4) + 3(4) = 20$$