

# گنجینه سوال رایگان

+ پاسخ تشریحی

## یاوران دانش



راه های ارتباطی با ما:

[www.Dyavari.com](http://www.Dyavari.com)

۰۲۱-۷۶۷۰۳۸۵۸

۰۹۱۲-۳۴ ۹۴ ۱۳۴





	۱	۲	۳	۴
۱ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۳ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۴ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۵ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۶ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۷ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۸ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۹ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۰ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۱ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۲ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۳ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۴ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۵ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۶ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۷ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۸ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۹ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۰ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۲۱ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۲ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۳ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۲۴ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۲۵ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۶ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۷ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۲۸ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۹ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۰ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۱ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۳۲ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۳ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۴ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۵ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۳۶ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۳۷ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۳۸ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۹ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۴۰ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>







۱- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. دو حالت وجود دارد، در دو پارک ۲ درخت و در ۲ پارک یک درخت یا آنکه در یک پارک ۳ درخت و در ۳ پارک یک درخت:

$$\binom{4}{2}\binom{6}{2}\binom{4}{2}\binom{2}{1} + \binom{4}{1}\binom{6}{3} \times 3! = 1560$$

۲- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

(یک زوج) یا (هیچ زوج)  $\equiv$  حداکثر یک زوج انتخاب شود

انتخاب یک زوج (خانواده)  
( $\equiv$  انتخاب ۲ نفر)

$$\text{تعداد کل حالات انتخابی} = \binom{7}{4} \times \underbrace{\binom{2}{1}\binom{2}{1}\binom{2}{1}\binom{2}{1}}_{\text{انتخاب یک نفر از هر زوج}} + \binom{7}{1} \times \binom{6}{2} \times \underbrace{\binom{2}{1}\binom{2}{1}}_{\text{انتخاب یک نفر از هر زوج}}$$

$\downarrow$  انتخاب ۴ خانواده (زوج) از ۷ خانواده (زوج)       $\downarrow$  انتخاب ۲ خانواده (زوج) از باقی مانده خانواده ها

$$\text{تعداد کل حالات انتخاب} = (35 \times 16) + (7 \times 15 \times 4) = 980$$

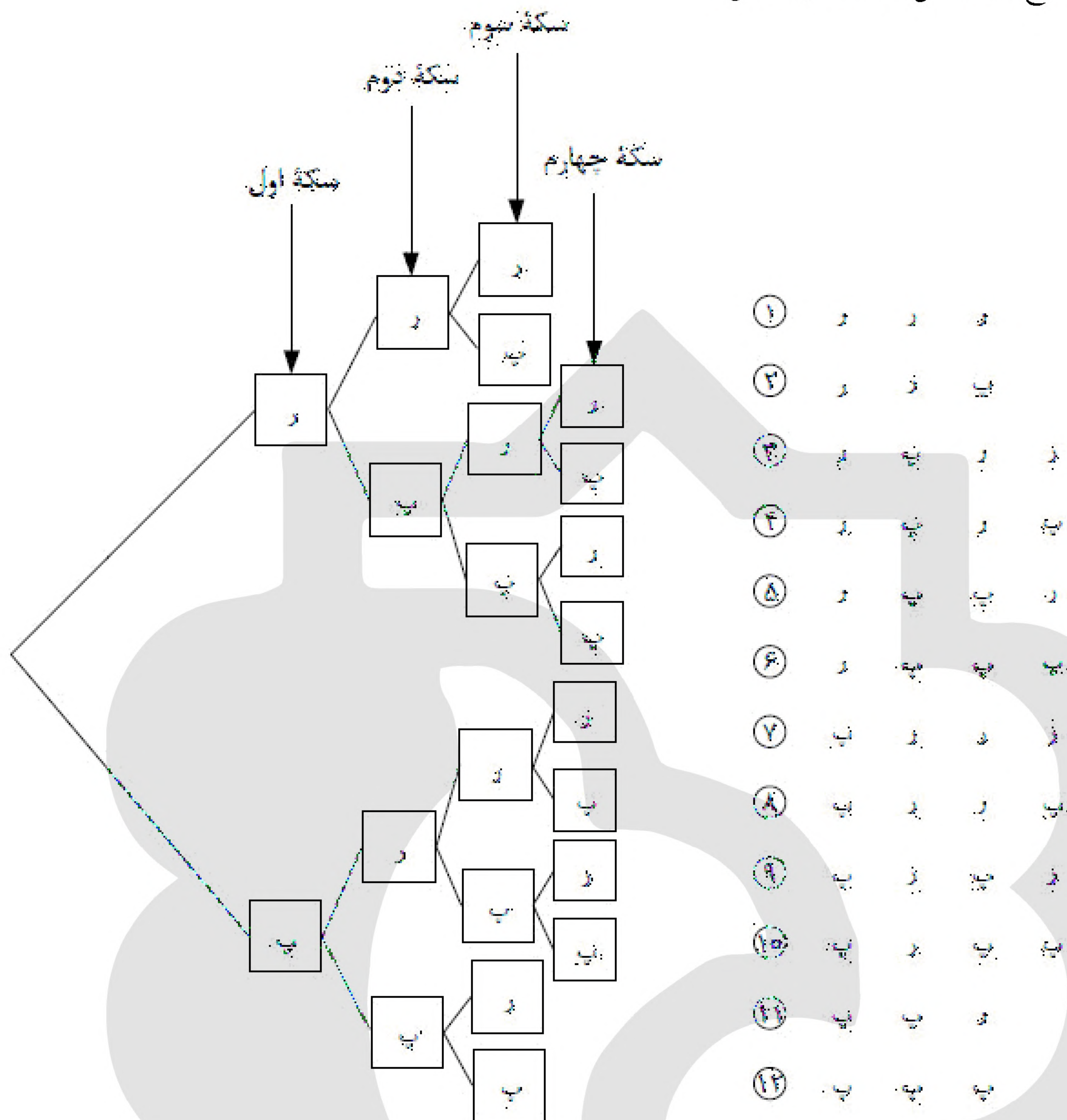
$$\binom{3}{1} \times 4! = 3 \times 24 = 72$$

۳- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.





۴- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. کل حالت‌های ممکن:







۵- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. در کلمه «پاستوریزه» ۹ حرف غیرتکراری داریم. در کلمه ۶ حرفی موردنظر پ و ت حضور دارند. بنابراین کافی است از ۷ حرف باقی مانده فقط ۴ حرف را انتخاب کنیم:  $\binom{7}{4}$

$$\text{تعداد کل حالات} = \binom{7}{4} \times 6!$$

جایگشت ۵ شی

جایگشت درون بسته

تعداد حالاتی که پ و ت کنار هم باشند =  $\binom{7}{4} \times 5! \times 2!$

$$\begin{aligned} \text{تعداد حالات موردنظر سؤال} &= \binom{7}{4} 6! - \binom{7}{4} \times 5! \times 2! \\ &= 35 \times 720 - 35 \times 120 \times 2 = 16800 \end{aligned}$$

۶- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

حالت‌های مختلف مسئله

کره (۵)	ژاپن (۴)	ایران (۳)
۰	۱	۱
۱	۰	۱
۱	۱	۰

جمع کل حالت‌ها = ۴۷

۷- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

تعداد ضلعی‌ها ۳

تعداد ضلعی‌ها ۴

تعداد ضلعی‌ها ۹

$$\begin{aligned} \text{تعداد } n \text{ ضلعی‌های محدب } (n \geq 3) &= \binom{9}{3} + \binom{9}{4} + \dots + \binom{9}{9} \\ &= 2^9 - \binom{9}{2} - \binom{9}{1} - \binom{9}{0} = 512 - 36 - 9 - 1 = 466 \end{aligned}$$

تذکره: مطابق تعریف، تعداد کل زیرمجموعه‌های یک مجموعه n عضوی

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n$$





- ۸- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. در بین حروف کلمه «DELAVARAN» سه حرف A تکراری هستند، بنابراین ۴ حالت زیر را در نظر می‌گیریم:  
حالت ۱: انتخاب ۳ حرف به جز A از بین ۶ حرف باقیمانده:

$$D, E, L, V, R, N \Rightarrow \binom{6}{3} \times 3! = 120$$

$$\binom{6}{2} \times 3! = 90 \quad \text{حالت ۲: انتخاب ۲ حرف غیر A و یک حرف A:}$$

$$\binom{6}{1} \times \frac{3!}{2!} = 18 \quad \text{حالت ۳: انتخاب ۲ حرف A و یک حرف غیر A:}$$

$$\text{حالت ۴: انتخاب ۳ حرف A که فقط یک کلمه ۳ حرفی AAA ایجاد می‌کند و جایگشتی ندارد.} \\ 229 = 120 + 90 + 18 + 1 = \text{تعداد کل کلمات ۳ حرفی}$$

- ۹- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. در وضعیت اول رقم ۴ بین ۳ و ۵ نیست. سه رقم ۳ و ۴ و ۵ دارای ۶ جایگشت هستند. از این تعداد، در دو حالت ۳۴۵ و ۵۴۳ رقم ۴ بین دو رقم ۳ و ۵ است و در چهار حالت دیگر بین آن دو نیست. پس تعداد حالات مطلوب  $\frac{4}{6}$  تعداد کل جایگشت‌های ۷ رقم است:

$$m = \frac{4}{6} \times 7! = \frac{2}{3} \times 7! = 3360$$

در وضعیت دوم از روش متمم استفاده می‌کنیم. یعنی حالتی را نظر می‌گیریم که هر سه رقم زوج کنار هم باشند و آن را از تعداد کل حالات ممکن جایگشت تفریق می‌کنیم:

$$n = 7! - 3! \times 5! = 5!(7 \times 6 - 6) = 5! \times 6 \times 6 = 6! \times 6 = 4320$$

$$n - m = 4320 - 3360 = 960$$

- ۱۰- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.  
حالت I: رئوس A و C هم‌رنگ باشند، (۳ حالت) در این صورت برای هریک از رئوس B و D دو حالت داریم:

$$3 \times 1 \times 2 \times 2 = 12$$

$$\begin{array}{cccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ A & C & B & D \end{array}$$

حالت II: رئوس A و C هم‌رنگ نباشند (۳×۲ حالت) در این صورت خودبه‌خود رنگ رئوس B و D که حتماً

$$3 \times 2 \times 1 \times 1 = 6$$

$$\begin{array}{cccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ A & C & B & D \end{array}$$

هم‌رنگ هستند، مشخص می‌شود:

بنابراین طبق اصل جمع:  $12 + 6 = 18$  حالت داریم.

- ۱۱- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. مجموع فوق برابر با مجموع تعداد تمام زیرمجموعه‌های زوج عضوی از یک مجموعه ۲۱ عضوی است، به جز زیرمجموعه‌های صفر عضوی، دو عضوی و بیست عضوی. یعنی:

$$\frac{2^{21}}{2} - \left[ \binom{21}{0} + \binom{21}{2} + \binom{21}{4} \right] = 2^{20} - 232$$

$$\begin{cases} \alpha = 20 \\ \beta = 232 \end{cases} \Rightarrow \frac{\beta}{\alpha} - \alpha = 29 - 20 = 9$$

از مقایسه این عدد با عبارت  $2^\alpha - \beta$  داریم:





۱۲- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. با توجه به اینکه زیرمجموعه‌های چهارعضوی موردنظر باید دارای کمترین عضو ۲۳ و بزرگ‌ترین عضو ۲۸ باشند، نتیجه می‌گیریم:  
اولاً ۲۳ و ۲۸ حتماً در زیرمجموعه موردنظر حضور دارند.

ثانیاً اعداد کوچک‌تر از ۲۳ و اعداد بزرگ‌تر از ۲۸ حتماً در زیرمجموعه موردنظر حضور ندارند.  
پس در واقع قرار است تعداد زیرمجموعه‌های ۴ عضوی از مجموعه  $\{23, 24, 25, 26, 27, 28\}$  را حساب کنیم که حتماً شامل عضوهای ۲۳ و ۲۸ هستند. بنابراین باید دو عضو دیگر از ۴ عضو باقی مانده (به جز ۲۳ و ۲۸) را انتخاب کنیم:

$$\binom{4}{2} = \frac{4 \times 3}{2} = 6$$

پس تعداد مسیرهای ممکن برای رسیدن از شهر A به شهر D باید برابر با  $4 \times 6 = 24$  شود. به شکل صورت سؤال دقت کنید، اگر تعداد مسیرهای بین شهرهای C و D را x در نظر بگیریم، تعداد مسیرهای موردنظر برابر است با:  
 $ABD + AD + ACD = (3 \times 4) + (2) + (2 \times x) = 14 + 2x$   
 $14 + 2x = 24 \Rightarrow 2x = 10 \Rightarrow x = 5$   
بنابراین داریم:

$$\left. \begin{array}{l} C(4, 3) = 4 \\ C(5, 3) = 10 \\ C(6, 3) = 20 \end{array} \right\} \Rightarrow 4 \times 10 \times 20 = 800$$

۱۳- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

۱۴- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

جایگشت ۴ شی (۳)  
بازیکن به همراه یک  
بسته شامل مربی و  
سرپرست و ۲ بازیکن  
↑  
 $(5) \times 2! \times 2! \times 4! = 10 \times 2 \times 2 \times 24 = 960$   
↑  
جایگشت ۲ بازیکن  
انتخاب شده با هم  
↓  
انتخاب ۲ بازیکن از ۵  
بازیکن تیم  
↓  
جایگشت مربی و  
سرپرست

۱۵- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\frac{(2n)!}{(2n-r)!} = \frac{24(2n)!}{(2n-r)!r!} \Rightarrow r! = 24 = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 4!$$

$$r = 4$$

$$P(6, 4) = \frac{6!}{(6-4)!} = 3 \times 4 \times 5 \times 6 = 360$$

$$C(6, 4) = \frac{6!}{(6-4)!4!} = \frac{5 \times 6}{2} = 15$$

$$\frac{P(6, 4)}{C(6, 4)} = \frac{360}{15} = 24$$





۱۶- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\text{دو مهره سفید} \begin{cases} \binom{3}{2} \binom{4}{1} \binom{2}{0} = 3 \times 4 \times 1 = 12 & (\text{صفر مهره سیاه}) \text{ و } (\text{یک مهره زرد}) \\ \binom{3}{2} \binom{4}{0} \binom{2}{1} = 3 \times 1 \times 2 = 6 & (\text{یک مهره سیاه}) \text{ و } (\text{صفر مهره زرد}) \end{cases}$$

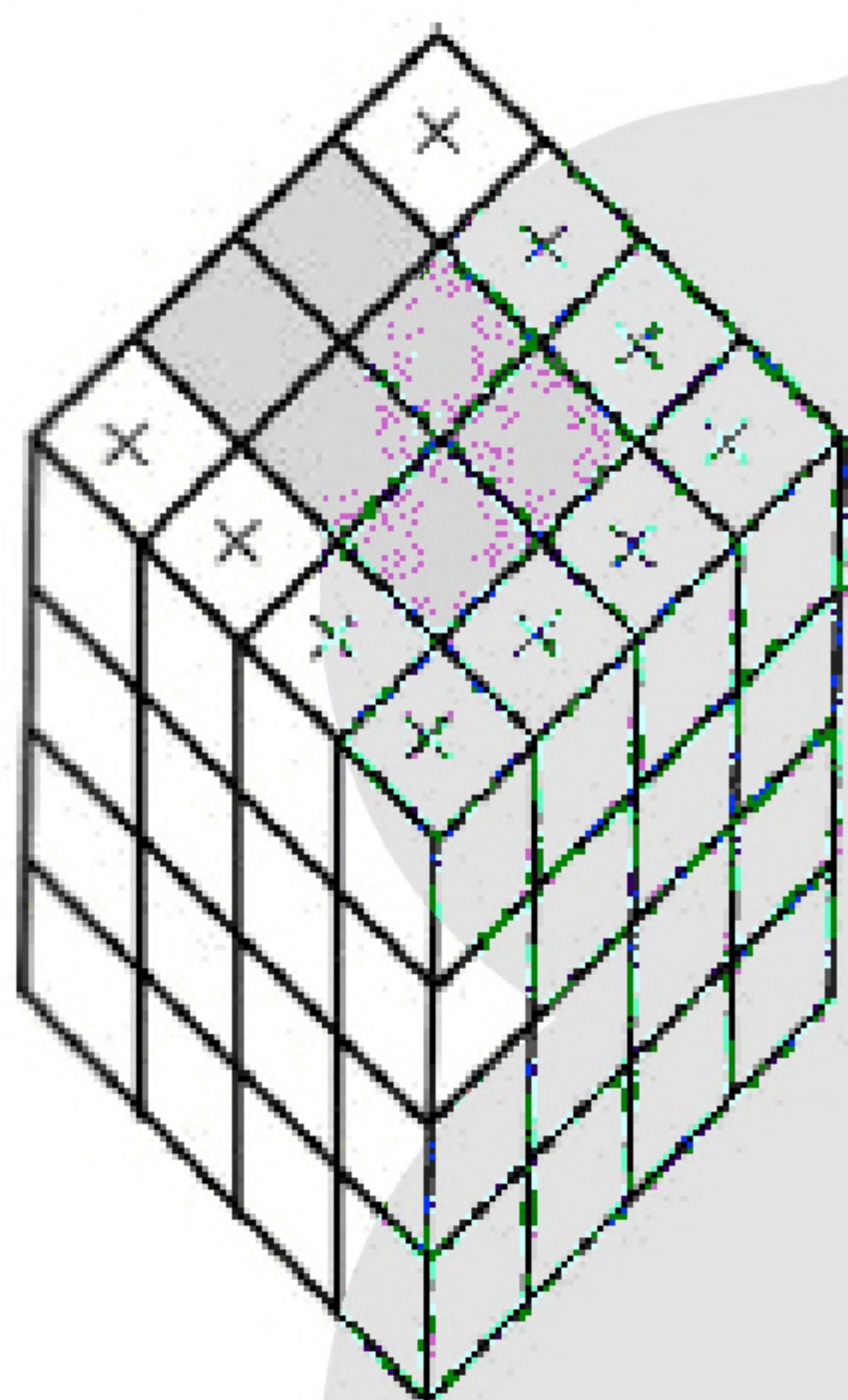
$$\text{سه مهره سفید} \begin{cases} \binom{3}{2} \binom{4}{0} \binom{2}{0} = 1 & (\text{صفر مهره سیاه}) \text{ و } (\text{صفر مهره زرد}) \end{cases}$$

$$12 + 6 + 1 = 19$$

۱۷- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

= حداقل تعداد مکعب‌های واحد حذفی (شامل حذف مکعب‌های رنگی و تمام مکعب‌های زیر آن)

$$6 \times 4 = 24 = m$$



حداکثر تعداد مکعب‌های حذفی (فقط مکعب‌های مشخص شده با

= را نگه می‌داریم و بقیه را حذف می‌کنیم)

$$(4 \times 4 \times 4) - 10 = 54 = n$$

$$m + n = 24 + 54 = 78$$

«بانک سوال موسسه یاوران دانش»

۱۸- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. طبق قضیه جایگشت با تکرار:

$$\frac{9!}{2! \times 3! \times 2!} = 15120 = m$$

تعداد یک‌ها      تعداد دوها      تعداد چهارها

حروف را یک شیء و ارقام را نیز با هم یک شیء فرض کنید که روی هم دو شیء شده و ۲! جایگشت دارند. از طرف دیگر ۳! حروف و ۴! نیز ارقام در کنار هم به صورت درون شیء، جایگشت دارند:

$$n = 2! \times 3! \times 4! = 288$$

$$m - n = 15120 - 288 = 14832$$





۱۹- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

بقیه مدارس دانش آموز مدرسه

$$\begin{matrix} \uparrow & \uparrow \\ \binom{5}{1} & \binom{3}{2} \end{matrix} \times \overbrace{\binom{4}{3} \binom{3}{1} \binom{3}{1} \binom{3}{1}}^{\text{بقیه مدارس}} = 5 \times 3 \times 4 \times 3^3 = 1620 = m$$

فقط دو نفر هم مدرسه ای

از یکی از ۵ مدرسه

$$\begin{matrix} \downarrow \\ \binom{5}{3} \end{matrix} \times \binom{3}{1} \binom{3}{1} \binom{3}{1} = 10 \times 3^3 = 270 = n$$

انتخاب ۳ مدرسه از ۵ مدرسه

$$m + n = 1620 + 270 = 1890$$

$$\binom{n}{3} = 120 \Rightarrow \frac{n!}{(n-3)!3!} = 120$$

حاصل ضرب ۳ عدد متوالی

$$\frac{n(n-1)(n-2)(\cancel{n-3})!}{(\cancel{n-3})!3!} = 120 \Rightarrow n(n-1)(n-2) = 720 \Rightarrow \boxed{n=10}$$

$$\text{تعداد ۴ ضلعی} = \binom{10}{4} = \frac{10!}{(10-4)!4!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times \cancel{6!}}{\cancel{6!} \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 210$$

۲۰- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\left. \begin{array}{l} A \rightarrow B \rightarrow E : 3 \times 3 = 9 \\ A \rightarrow C \rightarrow E : 4 \times 3 = 12 \\ A \rightarrow D \rightarrow E : 2 \times 2 = 4 \end{array} \right\} \Rightarrow 9 + 12 + 4 = 25$$

۲۱- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. مسیرهای رفت:

در مسیر برگشت از تعداد راههای بین هر دو شهر مفروض یک واحد کم می شود:

$$\left. \begin{array}{l} E \rightarrow B \rightarrow A : 2 \times 2 = 4 \\ E \rightarrow C \rightarrow A : 2 \times 3 = 6 \\ E \rightarrow D \rightarrow A : 1 \times 1 = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow 4 + 6 + 1 = 11$$

$$25 \times 11 = 275$$

طبق اصل ضرب: تعداد کل مسیرهای رفت و برگشت با شرط مسئله:

۲۲- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

حالت های ۳ بسته دور والیبال

↑

یک میز ↑

$$4! \times 3! \times 2! \times (3-1)! = 24 \times 6 \times 2 \times 2 = 576$$

↓

فوتبال

↓

شنا





۲۳- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$3 \times \frac{(n-1)!}{(n-4)!3!} = \frac{(n-2)!}{(n-5)!}$$

$$\frac{(n-4)! \cancel{(n-3)} \cancel{(n-2)} (n-1)}{2 \cancel{(n-4)}!} = \frac{\cancel{(n-5)}! (n-4) \cancel{(n-3)} n}{\cancel{(n-5)}!} \Rightarrow n-1 = 2(n-4) \Rightarrow n=7$$

$$C(5, 2) + P(6, 2) = \frac{5!}{3!2!} + \frac{6!}{4!} = 10 + 30 = 40$$

۲۴- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$C(4, 2) = \frac{4!}{(4-2)!2!} = \frac{4 \times 3}{2} = 6$$

تعداد زیرمجموعه‌های دو عضوی

$$C(4, 2) = \frac{4!}{(4-2)!2!} = \frac{3 \times 4}{2} = 6$$

تعداد زیرمجموعه‌های ۲ عضوی که شامل حرف e نیستند

$$\Rightarrow \frac{6}{6} = 1$$

زوج فرد زوج فرد زوج فرد زوج

$$1 \times 2 \times 3 \times 4 = 4!$$

$$1 \times 2 \times 3 = 3!$$

$$4! \times 3! = 24 \times 6 = 144$$

۲۵- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

۴ عدد زوج ۲, ۴, ۶, ۸:

۳ عدد فرد ۳, ۵, ۷:

در نتیجه:

۲۶- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

بازیکن ۵ شیء (۴) بازیکن ۴ شیء (۳) بازیکن ۳ شیء (۲) سرپرست-بازیکن ۲-بازیکن ۱-مربی شیء (۱)

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\times 2!$$

$$\times 2!$$

$$\times 4!$$

انتخاب ۲ بازیکن از پنج بازیکن

جایگشت مربی و سرپرست

جایگشت ۲ بازیکن انتخابی

جایگشت همه افراد (۴ شیء)

$$= 10 \times 2 \times 2 \times 24 = 10 \times 96 = 960$$

۲۷- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ابتدا باید ۳ استان از ۴ استان انتخاب کرد و سپس از هر کدام ۱ نفر انتخاب کرد.

$$\binom{4}{3} \binom{1}{1} \binom{1}{1} \binom{1}{1} = 4000$$

۲۸- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. عدد ۱ انتخاب شده است. برای دو عضو دیگر کافی است، از ۴ عضو ۲, ۳, ۷ و ۸ دو عضو را انتخاب کنیم:

$$\binom{4}{2} = \frac{4!}{2!2!} = 6$$





۲۹- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. می‌دانیم به  $\binom{n}{m}$  حالت می‌توان یک نمونه‌ی  $m$  تایی از یک جامعه‌ی آماری  $n$  تایی انتخاب کرد، بنابراین:

$$\binom{n}{m} = 45 \Rightarrow \frac{n!}{(n-2)! 2!} = 45 \Rightarrow \frac{n(n-1)(n-2)!}{(n-2)! \times 2} = 45$$

$$\Rightarrow n(n-1) = 90 \Rightarrow n^2 - n - 90 = 0 \Rightarrow (n-10)(n+9) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} n-10=0 \Rightarrow n=10 \\ n+9=0 \Rightarrow n=-9 \text{ غ ق ق} \end{cases}$$

بنابراین تعداد اعضای جامعه ۱۰ نفر است و تعداد نمونه‌هایی ۳ تایی آن برابر است با:

$$\binom{10}{3} = \frac{10!}{3! 7!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7!}{3 \times 2 \times 1 \times 7!} = 120$$

۳۰- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۲ حالت کلی زیر را در نظر می‌گیریم:

یکی این‌که عدد با رقم ۳ شروع شود، دیگری این‌که عدد با ارقام دیگری شروع شود:

$$3 \square 3 \square 3 \square 3 \square$$

اگر عدد با رقم ۳ شروع شود:

در جاهای خالی، هر یک از ارقام ۲، ۴، ۵ و ۹ می‌تواند قرار بگیرد که  $4! = 24$  جایگشت دارند.

$$\square 3 \square 3 \square 3 \square 3$$

اگر عدد با ۳ هم شروع نشود، ۲۴ عدد داریم:

طبق اصل جمع، در کل  $24 + 24 = 48$  عدد مختلف داریم.

۳۱- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. رقم یکان می‌تواند صفر یا ۲ باشد:

$$\begin{cases} \begin{array}{l} 3 \times \frac{2}{2} \times \frac{1}{1} = 6 \\ \text{یکان صفر} \end{array} \\ \begin{array}{l} 2 \times \frac{2}{2} \times \frac{1}{1} = 4 \\ \text{یکان ۲} \end{array} \end{cases} \xrightarrow{\text{اصل جمع}} 6 + 4 = 10$$

۳۲- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ابتدا سه زن را می‌نشانیم، سپس سه کودک را در ۴ جای ایجادشده بین آن‌ها (مطابق شکل) می‌نشانیم:

\_ زن \_ زن \_ زن \_

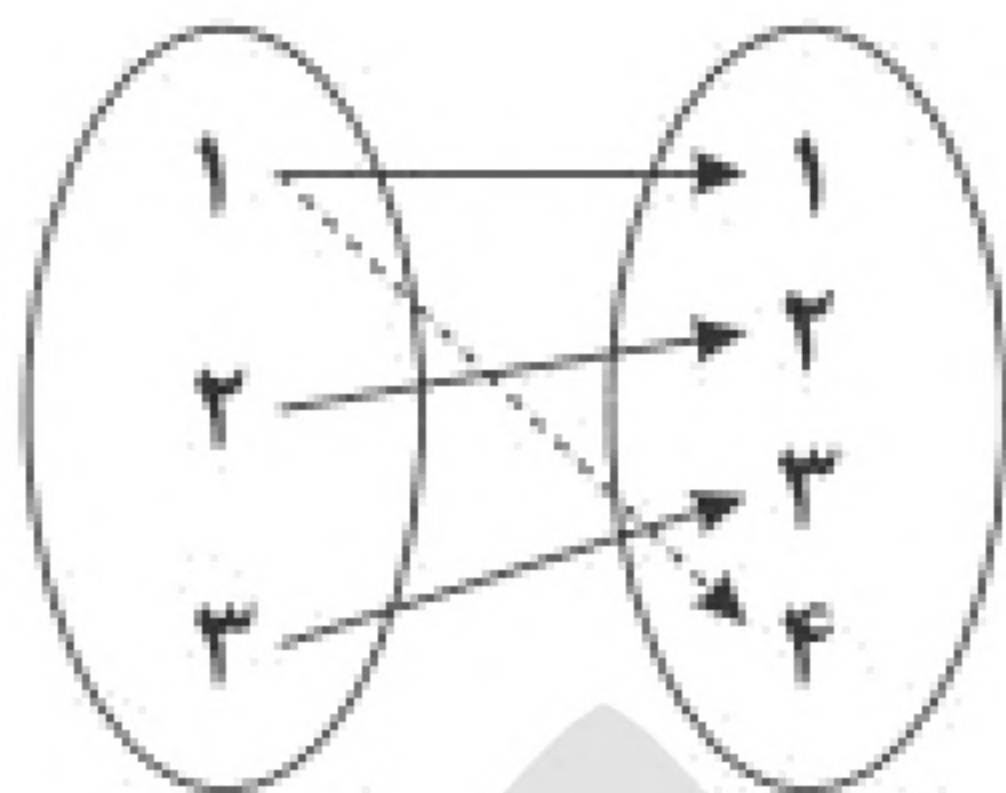
پس تعداد کل حالات برابر است با:

$$\binom{4}{3} \times 3! \times 3! = 4 \times 6 \times 6 = 144$$





۳۳- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. در بدترین حالت هر یک از این  $n$  عضو را به یک عضو مجزا از مجموعه‌ی دوم نظیر می‌کنیم. بنابراین یک عضو از مجموعه‌ی دوم باقی می‌ماند که مجبوریم یک عضو از مجموعه‌ی اول را دوباره با آن نظیر کنیم. در این صورت عضوی از مجموعه‌ی اول به دو عضو از مجموعه‌ی دوم نظیر می‌شود و این تابع بودن را به هم می‌زند. پس با این شرط تابعی نمی‌توان نوشت.



«بانک سوال موسسه یاوران دانش»

۳۴- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.  $120 = 5! =$  تعداد کل جایگشت‌ها

**P, E** D A R

تعداد جایگشت‌هایی که دو حرف P و E کنار هم هستند::

$$= 4! \times 2! = 24 \times 2 = 48$$

$$72 = 120 - 48 = \text{تعداد جایگشت‌هایی که دو حرف P و E کنار هم نیستند}$$

۳۵- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. حالت‌های زیر امکان‌پذیر است:

DMDMD, DMDDM, MDDMD

جایگشت‌های دانش‌آموزان در جای خود ۳! و معلمان ۲! است، پس داریم:

$$3 \times 3! \times 2! = 36$$

۳۶- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$A \rightarrow C \rightarrow B \Rightarrow 2 \times 4 = 8$$

$$A \rightarrow E \rightarrow B \Rightarrow 4 \times 3 = 12$$

$$A \rightarrow D \rightarrow E \rightarrow B \Rightarrow 3 \times 3 \times 3 = 27$$

$$A \rightarrow D \rightarrow B \Rightarrow 3 \times 1 = 3$$

$$A \rightarrow E \rightarrow D \rightarrow B \Rightarrow 4 \times 3 \times 1 = 12$$

$$8 + 12 + 27 + 3 + 12 = 62$$

و در نهایت تعداد کل راه‌ها برابر است با:

۳۷- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\frac{5}{-} \times \frac{4}{-} \times \frac{3}{-} = 60$$

۳۸- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. چون صفر در ابتدای عدد نمی‌تواند قرار گیرد، پس عدد موردنظر تنها به شکل زیر است:  
 $a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot e \cdot$

که در آن a, b, c, d و e ارقام غیر صفر متمایز است، پس:

$$\frac{9}{a} \times \frac{8}{b} \times \frac{7}{c} \times \frac{6}{d} \times \frac{5}{e} = 15120$$





۳۹- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\begin{aligned} \binom{n}{26} &= \frac{1}{2} \binom{n}{25} \Rightarrow \frac{n!}{26! (n-26)!} = \frac{1}{2} \times \frac{n!}{25! (n-25)!} \Rightarrow \frac{25! (n-25)!}{26! (n-26)!} = \frac{1}{2} \\ \Rightarrow \frac{25! (n-26)! (n-25)}{26 \times 25! (n-26)!} &= \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{n-25}{26} = \frac{1}{2} \Rightarrow n-25 = 13 \Rightarrow n = 38 \\ \Rightarrow \frac{n^2 + n}{n^2 - 1} &= \frac{n(n+1)}{(n-1)(n+1)} = \frac{n}{n-1} = \frac{38}{37} \end{aligned}$$

۴۰- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

همه ارقام به جز صفر

$$\boxed{9} \times \boxed{10} \times \boxed{5} = 450$$

ارقام ۰، ۲، ۴، ۶ یا ۸ همه ارقام