

گنجینه سوال رایگان

+ پاسخ تشریحی

یاوران دانش



راه های ارتباطی با ما:

www.Dyavari.com

۰۲۱-۷۶۷۰۳۸۵۸

۰۹۱۲-۳۴ ۹۴ ۱۳۴



	۱	۲	۳	۴
۱ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۳ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۴ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۵ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۶ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۷ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۸ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۹ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۱۰ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۱ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۲ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۳ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۴ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۱۵ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۶ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۷ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۸ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۹ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۰ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۱ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۲ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۳ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۴ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۲۵ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۲۶ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۷ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۸ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۲۹ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۰ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۱ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۳۲ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۳ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۳۴ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۵ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۶ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۷ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۳۸ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۹ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۴۰ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



$$x = \frac{-b}{2a} = 2 \Rightarrow b = -4a \quad (1)$$

۱- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

صدق در ضابطه
 $(2, 0) \xrightarrow{\text{صدق در ضابطه}} 0 = 4a + 2b + c \quad (2)$

$$(0, 4) = 0 + 0 + c \Rightarrow c = 4 \quad (3)$$

$$1, 2, 3 \Rightarrow 0 = 4a + 2(-4a) + 4 \Rightarrow a = 1, b = -4$$

$$f(x) = x^2 - 4x + 4$$

$$f(a + b + c - 4) = f(1 - 4 + 4 - 4) = f(-3) = (-3)^2 - 4(-3) + 4 = 25$$

۲- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\begin{aligned} x+1 \leq 5-x < 2x+3 \\ \downarrow \qquad \qquad \downarrow \\ 2x \leq 4 \qquad \qquad 5-3 < 2x+x \\ \downarrow \qquad \qquad \downarrow \\ x \leq 2 \quad (1) \qquad \qquad 2 < 3x \\ \qquad \qquad \downarrow \\ \qquad \qquad x > \frac{2}{3} \quad (2) \end{aligned}$$

اشتراک
 $1, 2 \xrightarrow{\text{اشتراک}} \text{مجموعه جواب} = \left(\frac{2}{3}, 2\right]$

$$y = \underbrace{|3x-2|}_{+} + \underbrace{|x-3|}_{-} + \underbrace{|4-2x|}_{+}$$

$$y = 3x - 2 - x + 3 + 4 - 2x \Rightarrow y = 5$$

با تعیین علامت هریک از عبارات داخل قدرمطلق در بازه بالا:

۳- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. برای آنکه نمودار سهمی بر نیمساز ناحیه سوم (خط $y = x$ با شرط $x < 0$ و $y < 0$) مماس باشد، باید معادله برخوردشان ریشه مضاعف ($\Delta = 0$) داشته باشد:

$$2x^2 + (m+1)x + m + 6 = x \Rightarrow 2x^2 + mx + m + 6 = 0 \xrightarrow{\Delta = 0}$$

$$m^2 - 4(2)(m+6) = 0 \Rightarrow m^2 - 8m - 48 = 0$$

$$(m-12)(m+4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 12 \Rightarrow 2x^2 + 12x + 18 = 0 \Rightarrow x = -3 \\ m = -4 \Rightarrow 2x^2 - 4x + 2 = 0 \Rightarrow x = 1 \end{cases}$$

بنابراین با شرایط مسئله فقط $m = 12$ است.



۴- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.
دو شرط برای همواره نامثبت بودن عبارت درجه ۲

$$-3x^2 + 2x \leq mx + 3 \Rightarrow -3x^2 + (2-m)x - 3 \leq 0$$

$$\begin{cases} a < 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3 < 0 \\ (2-m)^2 - 4(-3)(-3) \leq 0 \Rightarrow (2-m)^2 \leq 36 \end{cases}$$

$$-6 \leq 2-m \leq 6$$

$$\downarrow (-2)$$

$$-8 \leq -m \leq 4$$

$$\downarrow \times (-1)$$

$$-4 \leq m \leq 8$$

$$\downarrow m \in \mathbb{Z}$$

مقادیر m شامل ۱۳ عدد صحیح است $\Rightarrow m = \{-4, -3, \dots, 7, 8\}$

۵- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$g(x) \Rightarrow \begin{cases} 3-a=0 \Rightarrow a=3 \\ g(x)=K \end{cases} \text{ تابع ثابت}$$

$$f(x) = mx + n \Rightarrow \begin{cases} 6 = -2m + n \\ -3 = 4m + n \end{cases} \Rightarrow m = \frac{-3}{2}, n = 3 \Rightarrow f(x) = -\frac{3}{2}x + 3$$

$$\frac{f(14) \times g(-7)}{a^2} = \frac{(-18) \times (-9)}{9} = 18$$

۶- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$f(x) = 2(x^2 - 4x + 4) + 4x - 3 = 2x^2 - 8x + 8 + 4x - 3$$

$$f(x) = 2x^2 - 4x + 5 = 2(x^2 - 2x + 1) + 3 = 2(x-1)^2 + 3 \geq 3$$

$$R_f = [3, +\infty)$$

۷- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. با فرض $S(h, k)$ به عنوان رأس سهمی، معادله آن به صورت $f(x) = a(x-h)^2 + k$ است:

$$f(x) = a(x+1)^2 + 5 \xrightarrow{f(1)=13} 13 = a(2)^2 + 5 \Rightarrow a = 2$$

$$f(x) = 2(x+1)^2 + 5 = 2x^2 + 4x + 7 \Rightarrow b = 4, c = 7$$

$$f(a+b+c) = f(2+4-7) = f(-1) = 5$$



۸- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. f تابع همانی است پس $f(x) = x$:

$$b = 1, 2a + 3 = -1 \Rightarrow a = -2$$

$$b + 1 = c \Rightarrow c = 2$$

از طرف دیگر $g(x) = (1 + e)x^2 + (c - 2)x + b + 1$ یک تابع ثابت است، پس:

$$1 + e = 0, c - 2 = 0$$

$$\boxed{e = -1} \quad \boxed{c = 2} \xrightarrow{b = 1} \boxed{g(x) = 2}$$

بیشترین مقدار تابع قدرمطلق $h(x)$ مطابق برد داده شده و با شرط $n > 0$ در $x = 2$ اتفاق می افتد که برابر ۴ است:

$$h(2) = 4 \Rightarrow m = 4$$

$$h(x) = 4 - 5|2 - x| \Rightarrow h(x) = 4 - 5|2 - x|$$

$$g(mc + n) - h(a - b + e) = g(13) - h(-4) = 2 - (-26) = 28$$

۹- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. نمودار تابع یک سهمی رو به پایین است، بنابراین $x = -4$ و $x = 1$ صفرهای تابع هستند:

$$f(x) = -3(x - 1)(x + 4) = -3x^2 - 9x + 12$$

$$\downarrow \quad \downarrow$$

$$a = -9 \quad b = 12$$

$$b - a = 12 - (-9) = 21$$

$$2|2x - 1|^2 - 5|2x - 1| + 2 = 0 \Rightarrow |2x - 1| = A$$

$$2A^2 - 5A + 2 = 0 \Rightarrow A = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{4} = \frac{5 \pm 3}{4} = \begin{cases} 2 \\ \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$|2x - 1| = 2 \Rightarrow \begin{cases} 2x - 1 = 2 \Rightarrow x_1 = \frac{3}{2} \\ 2x - 1 = -2 \Rightarrow x_2 = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

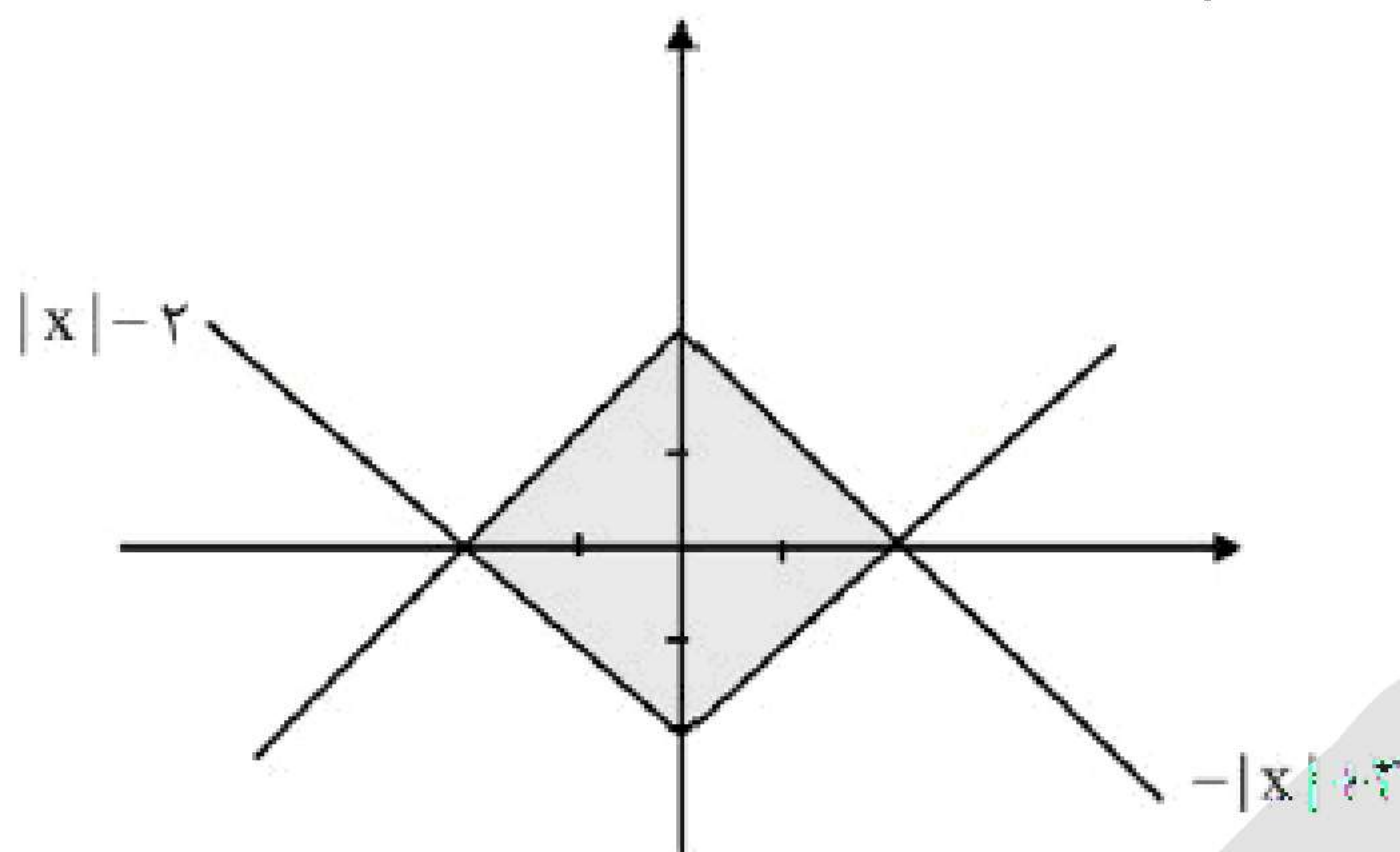
$$|2x - 1| = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} 2x - 1 = \frac{1}{2} \Rightarrow x_3 = \frac{3}{4} \\ 2x - 1 = -\frac{1}{2} \Rightarrow x_4 = \frac{1}{4} \end{cases}$$

$$\text{حاصل جمع ریشه‌ها} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 2$$

۱۰- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.



۱۱- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ناحیه بین دو نمودار یک لوزی به قطرهای ۴ و ۴ است.



$$\text{مساحت لوزی} = \frac{4 \times 4}{2} = 8$$

۱۲- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\begin{cases} f(x) = ax \\ f(x_0) = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ax = 6 \\ ax + a = 8 \end{cases} \Rightarrow a = 8 - 6 = 2$$

$$f(x_0 + 1) = a(x_0 + 1) = 8$$

$$f(x) = 2x$$

$$f(-1/5) = 2(-1/5) = -3/5$$

$$f(2/5) = 2(2/5) = 4/5$$

$$f(-1/5) + f(2/5) = -3/5 + 4/5 = 1/5$$

۱۳- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\left. \begin{array}{l} f \text{ تابع همانی} \\ f(x) = x \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{2x^2 + ax + b}{cx + 3} = x \Rightarrow 2x^2 + ax + b = cx^2 + 3x$$

با مقایسه نظیر به نظیر: $b = 0, a = 3, c = 2$ در نتیجه:

$$M \begin{vmatrix} 3 \\ 0 \end{vmatrix}, N \begin{vmatrix} 2 \\ 3 \end{vmatrix} \xrightarrow{g \text{ تابع خطی}} g(x) = a'x + b' \Rightarrow \begin{cases} 0 = 3a' + b' \\ 3 = 2a' + b' \end{cases} \Rightarrow a' = -3, b' = 9$$

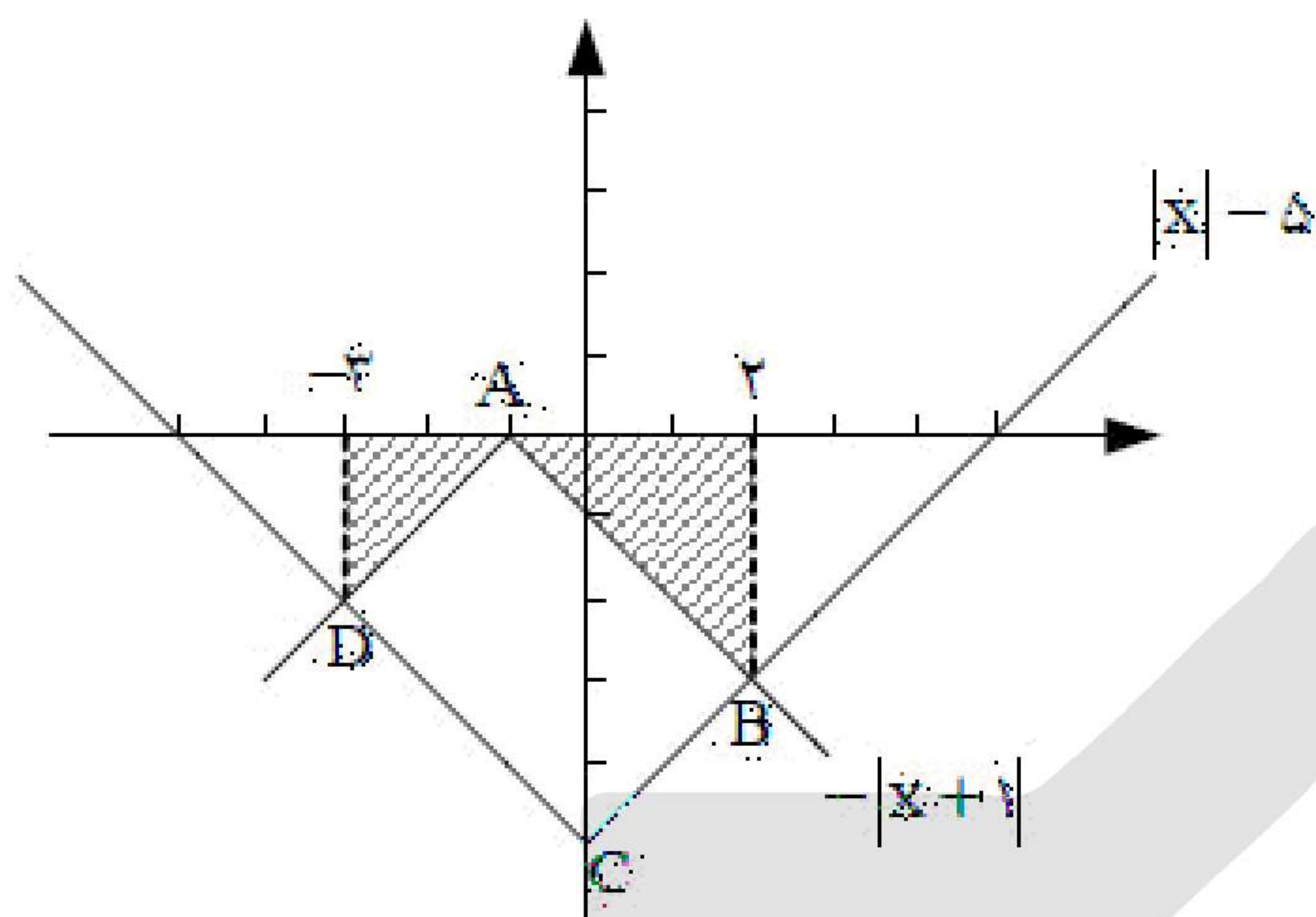
$$\Rightarrow g(x) = -3x + 9$$

$$g(2) \times g(-2) = (-3(2) + 9) \times (-3(-2) + 9) = 3 \times 15 = 45$$



«بانک سوال موسسه یاوران دانش»

۱۴- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.



$$g(x) = |x| = 5 = \begin{cases} x - 5 & x \geq 0 \\ -x - 5 & x < 0 \end{cases}$$

$$f(x) = -|x+1| = \begin{cases} -x-1 & x \geq -1 \\ x+1 & x < -1 \end{cases}$$

$$-x-1 = x-5 \Rightarrow 2x = 4 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow AB^2 = 3^2 + 3^2 = 18 \Rightarrow AB = 3\sqrt{2}$$

$$x+1 = -x-5 \Rightarrow 2x = -6 \Rightarrow x = -3 \Rightarrow AD^2 = 2^2 + 2^2 = 8 \Rightarrow AD = 2\sqrt{2}$$

$$\text{مساحت مستطیل} = 3\sqrt{2} \times 2\sqrt{2} = 12$$

$$2x-3 = 5 \Rightarrow x = 4 \Rightarrow 2(4)^2 - 4 \times 4 + 5 = 21$$

$$2x-3 = -1 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow 2(1)^2 - 4(1) + 5 = 3$$

$$f(5) = 21, f(-1) = 3$$

$$f(5) - f(-1) = 21 - 3 = 18$$

$$(0, -2) \in f \Rightarrow -2 = 0 + 0 + c \Rightarrow c = -2$$

$$x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{-2b}{2} = -b = 0 \Rightarrow b = 0$$

$$f(x) = x^2 - 2 \Rightarrow x^2 - 2 = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$$

$$\text{اختلاف ۲ ریشه} = \sqrt{2} - (-\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}$$

$$n = 5 \Rightarrow f(5) = 5 + x(n-5) = 5 + 0 = 5$$

$$n = 6 \Rightarrow f(6) = 5 + x(6-5) = 25 \Rightarrow 5 + x = 25 \Rightarrow x = 20$$

$$x = 20 \Rightarrow 2 + 0 = 2$$

۱۵- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

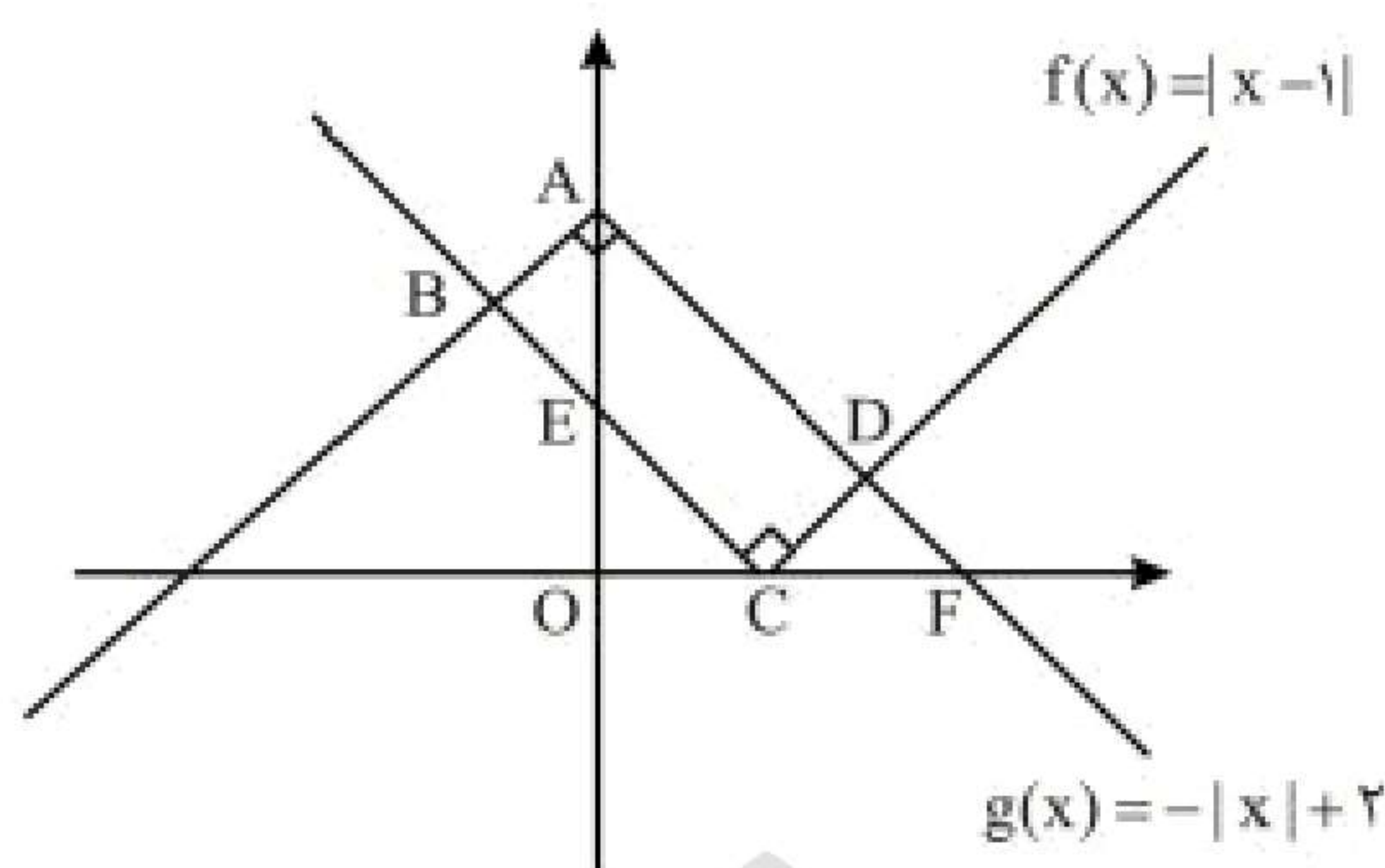
۱۶- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

۱۷- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

۱۸- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. فقط دامنه‌ی تعداد درختان کاشته شده در کشور، مجموعه‌ی اعداد طبیعی است که با نظیر کردن درختان با مجموعه‌ی اعداد طبیعی، تعدادشان به دست می‌آید.



۱۹- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.



با توجه به شکل و برابری مساحت مثلث‌های $\triangle ABE$ ، $\triangle OEC$ و $\triangle CDF$:

$$\text{مساحت مستطیل } ABCD = S_{\triangle OAF} - S_{\triangle OCE} = \frac{2 \times 2}{2} - \frac{1 \times 1}{2} = \frac{3}{2}$$

۲۰- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$1 < x < 2$$

$$|x - 2| = \begin{cases} x - 2 & x \geq 2 \\ -(x - 2) & x < 2 \end{cases}$$

$$|x - 1| = \begin{cases} x - 1 & x \geq 1 \\ -(x - 1) & x < 1 \end{cases}$$

$$|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

$$|x + 3| = \begin{cases} x + 3 & x \geq -3 \\ -(x + 3) & x < -3 \end{cases}$$

$$|x - 2| + |x - 1| + |x| - |x + 3| \stackrel{1 < x < 2}{=} -x + 2 + x - 1 + x - x - 3 = -2$$

$$f(n) = \frac{1}{2} \left[\frac{-n}{2} \right]$$

n	۱	۲	۳	۴	...
f(n)	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	-۱	-۱	...

۲۱- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

ثانیه اول

ثانیه دوم

.

.

.

ثانیه nام

$$D : \{1, 2, 3, \dots, n\} \subset \mathbb{N}$$

۲۲- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.



۲۳- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. چون سهمی دارای مینیمم مطلق است پس دهانه سهمی رو به بالا و به صورت \cup می باشد یعنی:
از طرفی مختصات رأس سهمی:

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{2(k-1)} < 0, \quad (\Delta = b^2 - 4ac > 0 \leftarrow ac < 0)$$

$$y = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-\Delta}{4(k-1)} < 0$$

بنابراین رأس سهمی در ناحیه سوم محورهای مختصات است.

۲۴- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.
 $a < 0 \Rightarrow$ سهمی دارای ماکزیمم است (دهانه سهمی رو به پایین است)
 $c < 0 \Rightarrow$ نمودار سهمی محور y ها را در قسمت منفی قطع کرده است.
 $b < 0 \Rightarrow x_1 = \frac{-b}{2a} < 0 \Rightarrow$ رأس سهمی در ناحیه دوم قرار دارد.

۲۵- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.
 $B = \{x \in \mathbb{Z} : |x| < 5\} = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$
حداکثر تعداد اعضای دامنه وقتی رخ می دهد که بُرد بیشترین تعداد از اعضای B را اختیار کند یعنی تا جایی که می شود اعضای B عضوی از برد باشند.
اما داریم:

$$x - 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1$$

$$\sqrt{x-1} \geq 0 \Rightarrow 1 + \sqrt{x-1} \geq 1$$

پس اعضای دامنه و برد حتماً باید بزرگ تر یا مساوی ۱ باشند.

$$f(x) = 1 \Rightarrow 1 + \sqrt{x-1} = 1 \Rightarrow \sqrt{x-1} = 0 \Rightarrow x = 1$$

$$f(x) = 2 \Rightarrow 1 + \sqrt{x-1} = 2 \Rightarrow \sqrt{x-1} = 1 \Rightarrow x-1 = 1 \Rightarrow x = 2$$

$$f(x) = 3 \Rightarrow 1 + \sqrt{x-1} = 3 \Rightarrow \sqrt{x-1} = 2 \Rightarrow x-1 = 4 \Rightarrow x = 5$$

$$f(x) = 4 \Rightarrow 1 + \sqrt{x-1} = 4 \Rightarrow \sqrt{x-1} = 3 \Rightarrow x-1 = 9 \Rightarrow x = 10$$

اما مثلاً $f(x) = 0$ جواب ندارد زیرا:

$$1 + \sqrt{x-1} = 0 \Rightarrow \underbrace{\sqrt{x-1}}_{\text{منفی}} = \underbrace{-1}_{\text{نامنفی}} \quad \times$$

پس B و در نتیجه A (دامنه) حداکثر دارای ۴ عضو است.



۲۶- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. چون محل تلاقی دو نمودار روی محور x ها قرار دارد، پس عرض نقطه‌ای محل تقاطع برابر صفر است. پس محل تقاطع را می‌توان به صورت $(x_0, 0)$ در نظر گرفت. داریم:

$$x = x_0, y = 0$$

$$y = 2x + a \longrightarrow 0 = 2x_0 + a \Rightarrow a = -2x_0$$

$$y = 2x^2 - 2x + a \xrightarrow{x = x_0, y = 0} 0 = 2x_0^2 - 2x_0 + a$$

$$\xrightarrow{a = -2x_0} 2x_0^2 - 2x_0 - 2x_0 = 0 \Rightarrow 2x_0^2 - 4x_0 = 0 \Rightarrow 2x_0(x_0 - 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \Rightarrow a = 0 \\ x_0 = 2 \Rightarrow a = -4 \end{cases}$$

$a = -4$ در گزینه‌ها وجود دارد، بنابراین گزینه‌ی (۲) صحیح است.

۲۷- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. نمایش مختصاتی یک رابطه، وقتی تابع است که هیچ دو نقطه‌ای روی خطی که موازی محور y ها باشد، قرار نگیرند.

۲۸- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. رابطه داده‌شده، خطی با شیب $(-1/5)$ است. برای درک بهتر داریم:

$$A(0, 10) \xrightarrow[\substack{\text{۱ ثانیه بعد} \\ \text{۱/۵ متر پایین می آید}}]{\text{۱ ثانیه بعد}} B(1, 10 - 1/5) = (1, 9/5)$$

معادله‌ی خط گذرا از A و B را می‌نویسیم:

$$h = at + b \Rightarrow \begin{cases} \xrightarrow{(0, 10)} b = 10 \\ \xrightarrow{(1, 9/5)} 9/5 = a + b \Rightarrow a = 9/5 - 10 = -1/5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow h = -1/5t + 10$$

$$\xrightarrow{h = 0} \text{معادله خط} \quad -1/5t + 10 = 0 \Rightarrow 1/5t = 10 \Rightarrow t = \frac{10}{1/5} = \frac{10}{1} \cdot \frac{5}{1} = \frac{50}{1} = 50 \text{ ثانیه}$$

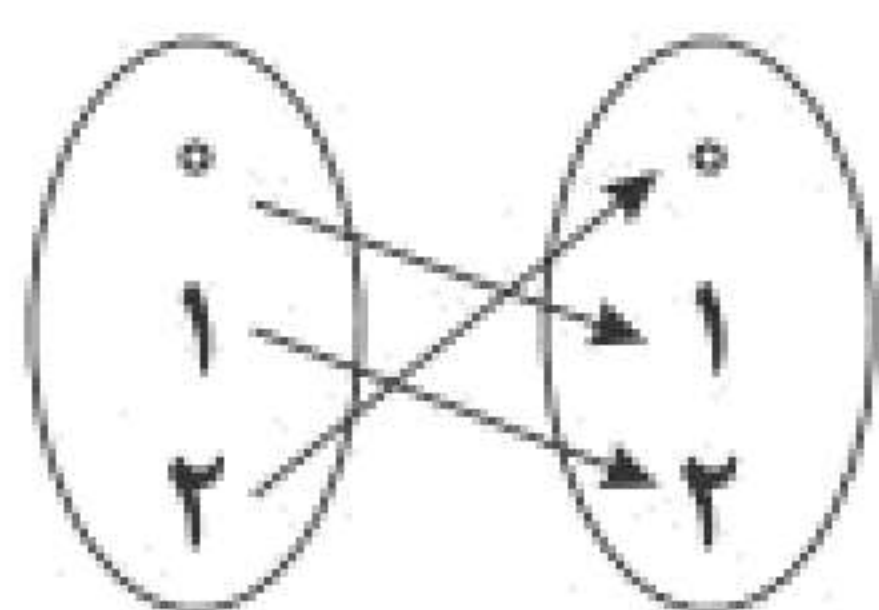
۲۹- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. بررسی گزینه‌ها:

(۱) درست است. طبق تعریف صفحه‌ی ۳۰ کتاب درسی

(۲) درست است. طبق تعریف صفحه‌ی ۲۶ کتاب درسی

(۳) نادرست است. در تابع همانی، دامنه و برد برابر هستند. اما عکس این گزاره، همواره برقرار نیست.

در مثال زیر یک تابع پیکانی نمایش داده شده است که دامنه و برد آن برابر هستند اما تابع همانی نیست.



(۴) درست است. هر تابع زوج مرتبی که فقط از یک زوج مرتب با مؤلفه‌های اول و دوم مساوی تشکیل شده باشد، هم تابع همانی و هم تابع ثابت است، مثلاً:

$$f = \{(5, 5)\} \quad D = R = \{5\}$$



۳۰- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. تنها دو تابع خطی می‌توان با دامنه‌ی $[۰, ۱]$ و برد $[۱, ۲]$ نوشت به این صورت که یکی از دو نقطه‌ی $A(۰, -۱)$ و $B(۱, ۲)$ و دیگری از دو نقطه‌ی $A'(۰, ۲)$ و $B'(۱, ۱)$ بگذرد.

۳۱- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. چون برد f تک‌عضوی است، داریم:

$$\text{برد تابع} = \{f(-۱) = f(۰) = f(۱)\} \Rightarrow \underline{a = b - a = ۲ - b}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = b - a \Rightarrow b = ۲a \\ b - a = ۲ - b \Rightarrow ۲b = ۲ + a \end{cases}$$

$$\Rightarrow ۲(۲a) = ۲ + a \Rightarrow ۴a = ۲ + a \Rightarrow ۳a = ۲ \Rightarrow a = \frac{۲}{۳} \xrightarrow{b = ۲a} b = \frac{۴}{۳}$$

$$a^۲ + b^۲ = \frac{۴}{۹} + \frac{۱۶}{۹} = \frac{۲۰}{۹}$$

و بنابراین:

۳۲- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. تابع $\begin{cases} f: A \rightarrow B \\ f(x) = c \end{cases}$ را که در آن مجموعه $R = \{c\}$ برد تابع است، تابع ثابت می‌نامند. با این تعریف گزینه‌ی (۳) تابع ثابت نمی‌باشد.

«بانک سوال موسسه یاوران دانش»

۳۳- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$f\left(\frac{۱}{۲}\right) = \sqrt{۴\left(\frac{۱}{۲}\right) + ۷} = \sqrt{۲ + ۷} = \sqrt{۹} = ۳$$

$$f(۰) = ۲\sqrt{۲}$$

$$f(۱ - \sqrt{۲}) = (۱ - \sqrt{۲})^۲ - ۱ = ۱ - ۲\sqrt{۲} + ۲ - ۱ = ۲ - ۲\sqrt{۲}$$

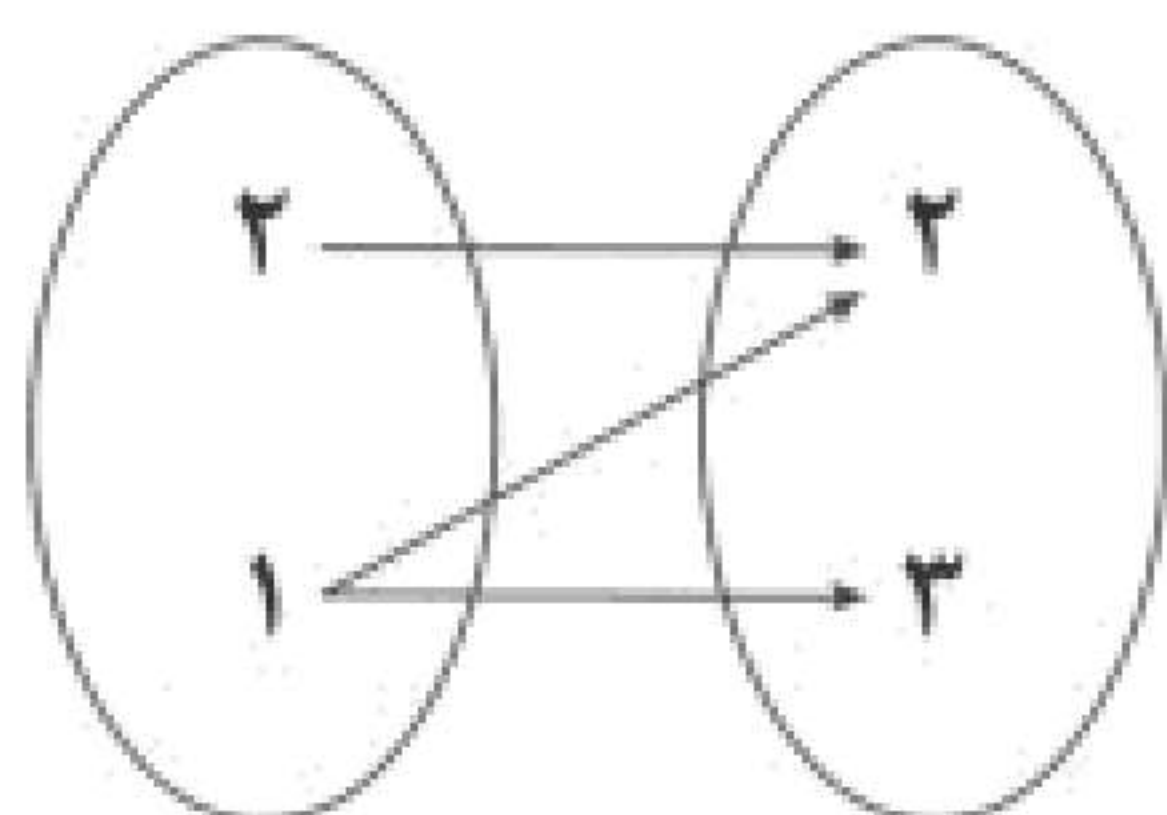
$$\text{جواب نهایی} = ۲ - ۲\sqrt{۲} - ۳ + ۲\sqrt{۲} = -۱$$



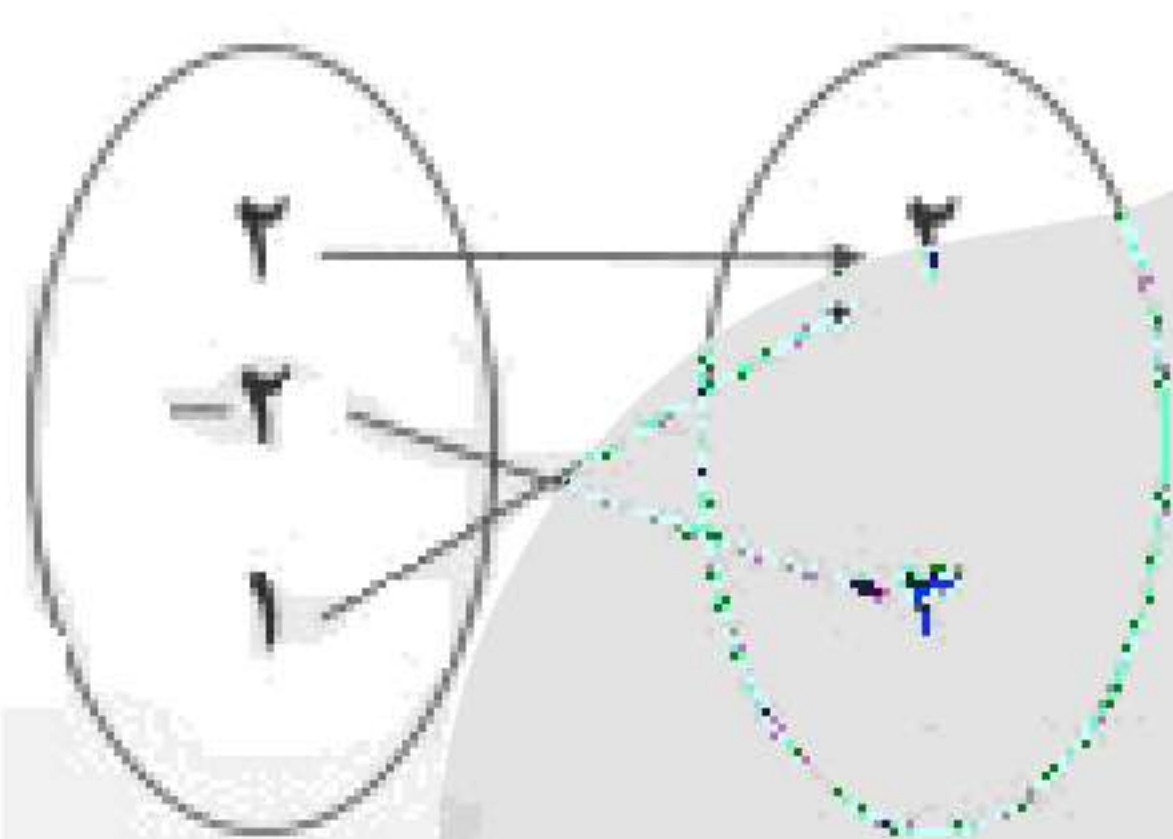
۳۴- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. اگر یک رابطه از مجموعه‌ی A به مجموعه‌ی B را با نمودار پیکانی نشان دهیم، در صورتی این رابطه تابع است که از هر عضو A فقط یک پیکان خارج شود. در نمودار پیکانی داده‌شده، از عدد ۲، دو پیکان خارج شده است، بنابراین باید $x^2 + x$ همان ۲ باشد.

$$x^2 + x = 2 \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \xrightarrow{\text{اتحاد جمله مشترک}} (x-1)(x+2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-2 \end{cases}$$

اگر مقدار $x=1$ را در سؤال قرار دهیم آنگاه داریم:



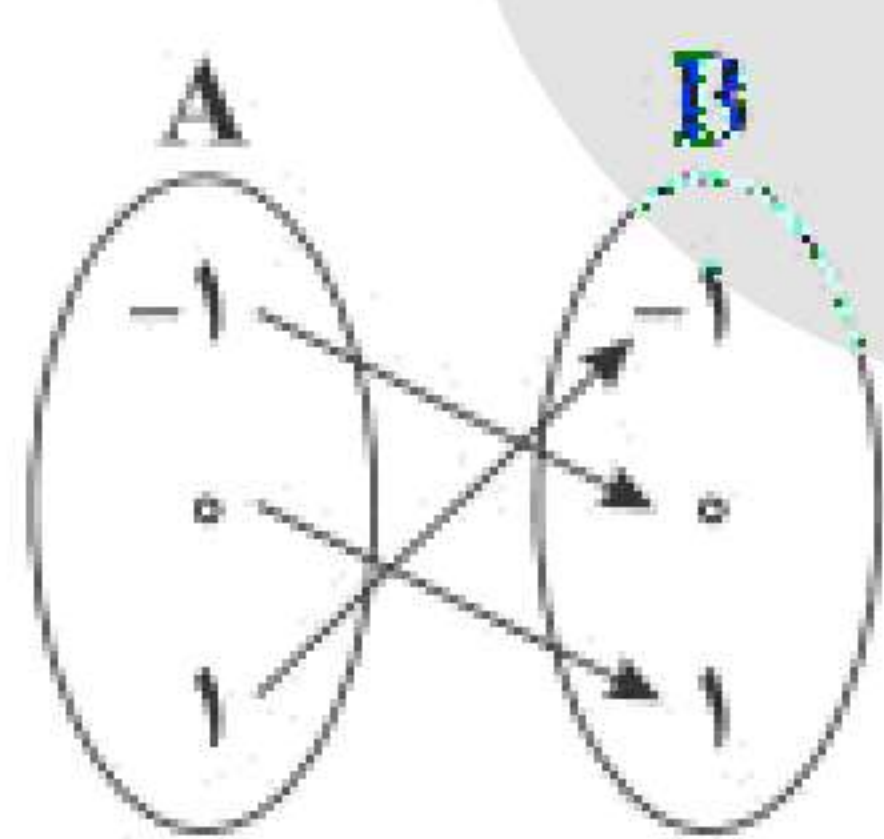
در این صورت از عدد ۱، دو پیکان خارج شده، پس تابع نیست.
با جای گذاری $x=-2$ داریم:



بنابراین فقط مقدار $x=-2$ قابل قبول است.
نمایش تابع به کمک زوج‌مرتبه‌ها به صورت $\{(2, 2), (-2, 3), (1, 2)\}$ می‌باشد.

۳۵- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. بررسی گزینه‌ها:

(۱) نادرست است. در تابع همانی، دامنه و برد برابر هستند. اما عکس این گزاره‌ی شرطی همواره برقرار نیست. ممکن است دامنه و برد یک تابع برابر باشد، اما تابع همانی نباشد، مثلاً دامنه و برد تابع پیکانی زیر با یکدیگر برابر است، اما تابع همانی نیست.



$$D=R=\{-1, 0, 1\}$$

(۲) نادرست است. از لحاظ هندسی نمودار تابع ثابت، خطی افقی موازی محور x ها یا منطبق بر محور x ها می‌باشد. نیمساز ناحیه‌ی اول و سوم، نمودار تابع همانی می‌باشد.
(۳) درست است. در تابع همانی، مقدار تابع با x برابر است.

$$\underbrace{f(x)}_x + \underbrace{f(-x)}_{-x} = x + (-x) = 0$$

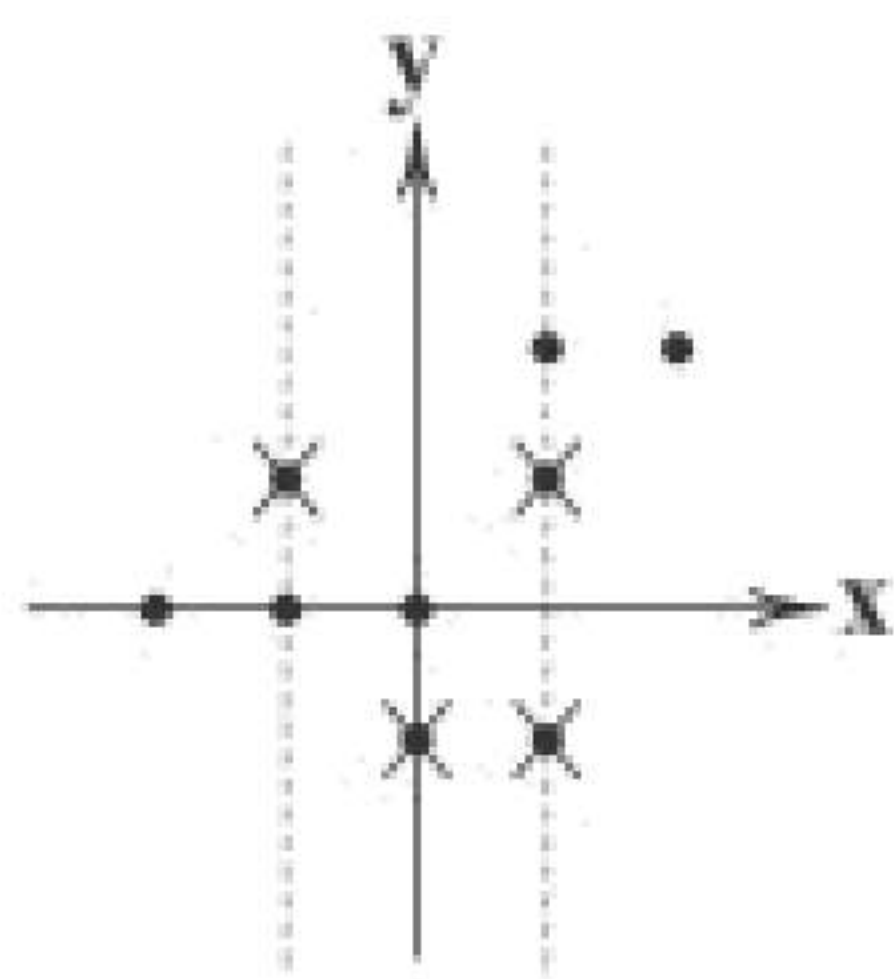
(۴) نادرست است. در تابع ثابت به ازای همه‌ی x ها یک مقدار ثابت برای y به دست می‌آید.

$$\underbrace{f(x)}_c + \underbrace{f(-x)}_c = c + c = 2c$$

رابطه‌ی داده‌شده فقط به ازای $c=0$ برقرار است.

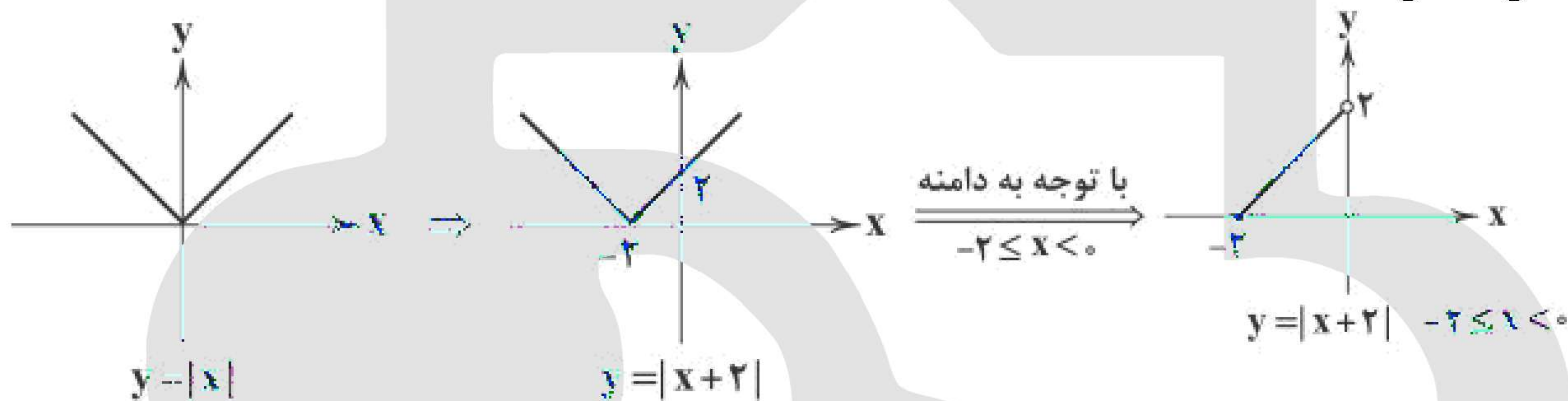


۳۶- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. باید به ازای هر x ، حداکثر یک y داشته باشیم، پس y های اضافی را حذف می‌کنیم.



بنابراین حداقل ۴ نقطه باید حذف گردد.

۳۷- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.



برای رسم نمودار تابع $y = x^2 - 2x$ داریم:

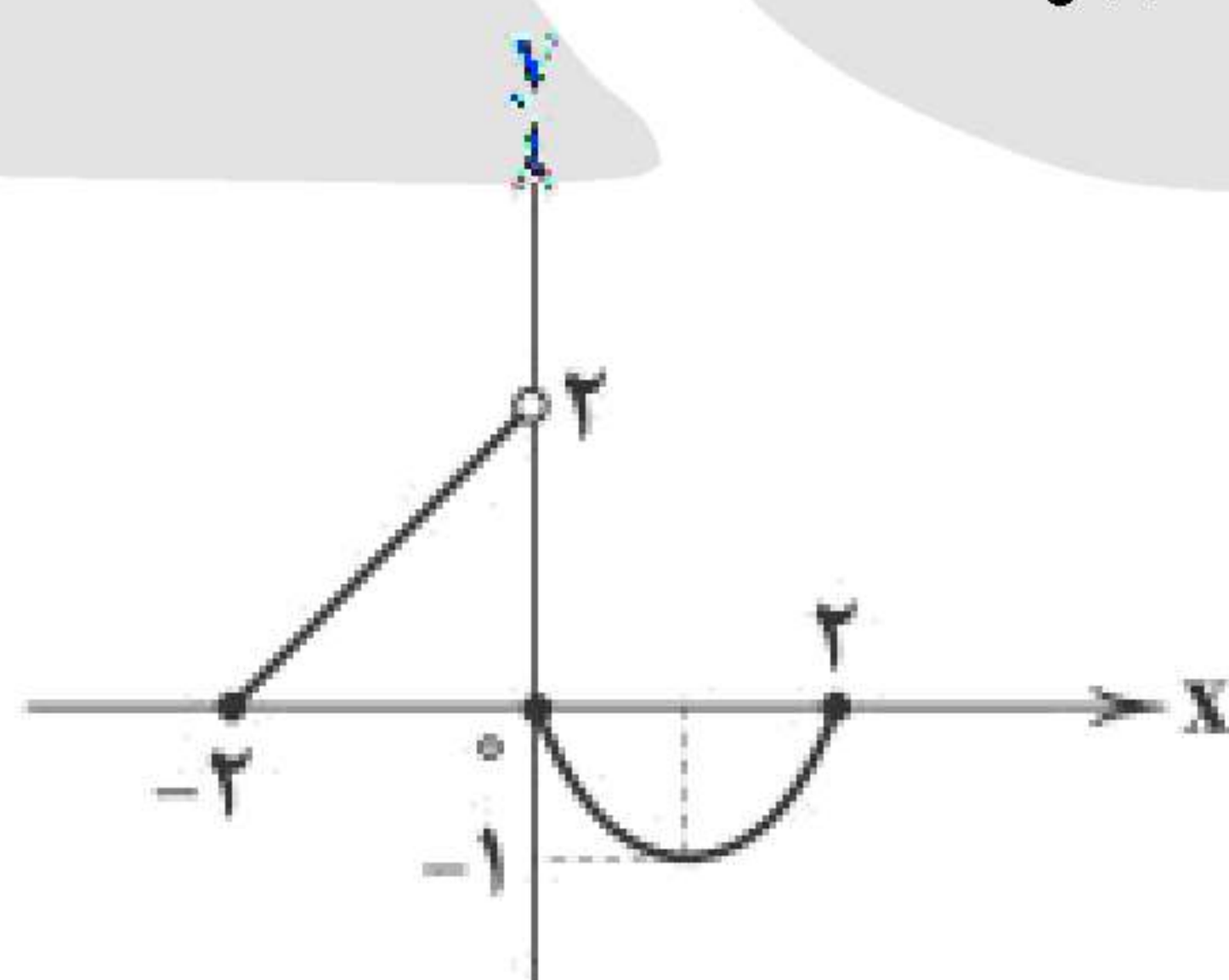
$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-2)}{2(1)} = \frac{2}{2} = 1$$

$$y = (1)^2 - 2(1) = 1 - 2 = -1$$

$$\Rightarrow S \begin{vmatrix} 1 \\ -1 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} x & 1 & 2 \\ y & -1 & 0 \end{matrix}$$



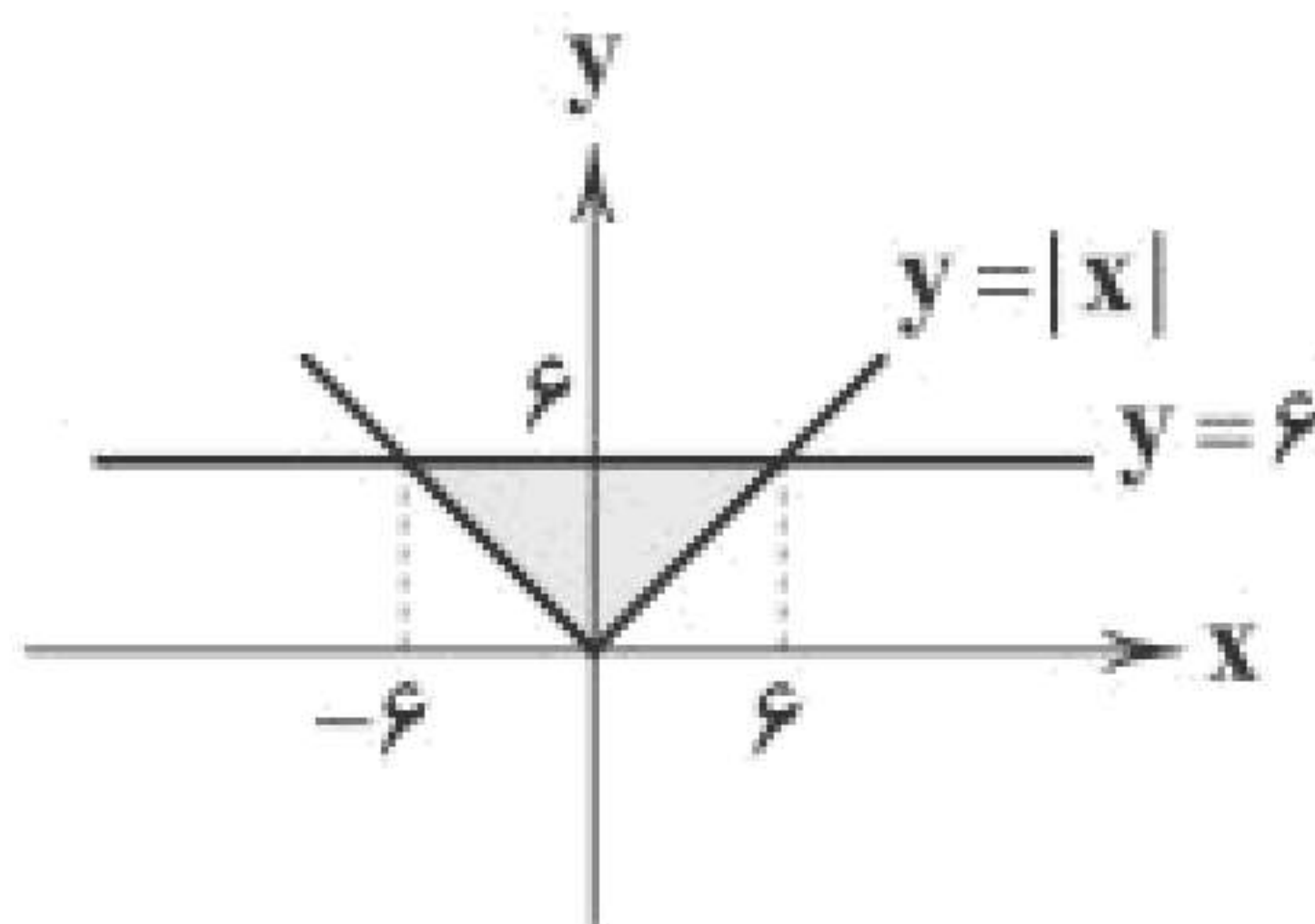
و شکل تابع $g(x)$ در حالت کلی به صورت زیر است:



و مشاهده می‌شود که برد تابع به صورت $-1 \leq y < 2$ است.



۳۸- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.



$$\text{مساحت مثلث} = \frac{\text{ارتفاع} \times \text{قاعده}}{2} = \frac{12 \times 6}{2} = 36$$

۳۹- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ضابطه‌ی تابع همانی به صورت $f(x) = x$ است. در نتیجه باید ضریب x برابر یک و بقیه‌ی ضرایب، صفر باشند:

$$\begin{cases} a - 3 = 0 \Rightarrow a = 3 \\ b + 2 = 1 \Rightarrow b = -1 \\ c = 0 \end{cases} \Rightarrow a - b + c = 3 + 1 + 0 = 4$$

۴۰- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ضابطه‌ی تابع همانی به صورت $h(x) = x$ است، در نتیجه:

$$h(\pi) = \pi$$

$$-\sqrt{3} < 0 \Rightarrow \text{sign}(-\sqrt{3}) = -1$$

$$-4 < -\pi < -3 \Rightarrow g(-\pi) = [-\pi] = -4$$

$$\Rightarrow \frac{\pi h(\pi) + 16 f(-\sqrt{3})}{h(\pi) + g(-\pi)} = \frac{\pi(\pi) + 16(-1)}{\pi - 4} = \frac{\pi^2 - 16}{\pi - 4} = \frac{(\pi - 4)(\pi + 4)}{(\pi - 4)} = \pi + 4$$