

گنجینه سوال رایگان

+ پاسخ تشریحی

یاوران دانش



راه های ارتباطی با ما:

www.Dyavari.com

۰۲۱-۷۶۷۰۳۸۵۸

۰۹۱۲-۳۴ ۹۴ ۱۳۴



	۱	۲	۳	۴
۱ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۴ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۵ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۶ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۷ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۸ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۹ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۰ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۱۱ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۱۲ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۳ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۱۴ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۱۵ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۶ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۱۷ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۱۸ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۹ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۰ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۱ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۲ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۳ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۴ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۲۵ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۶ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۷ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۲۸ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۹ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۰ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۳۱ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۲ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۳ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۴ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۵ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۶ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۷ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۳۸ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۹ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۴۰ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



۱- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\begin{aligned} \sqrt{\underbrace{(x-1)(x-4)}_{\text{دسته بندی جدید}} \underbrace{(x-2)(x-3)}_{\text{دسته بندی جدید}}} &= \sqrt{\underbrace{(x^2 - 5x + 4)}_{\text{فرض سوال}} \underbrace{(x^2 - 5x + 6)}_{\text{فرض سوال}}} \\ &= \sqrt{(5\sqrt{2} - 5 + 4)(5\sqrt{2} - 5 + 6)} = \sqrt{(5\sqrt{2} - 1)(5\sqrt{2} + 1)} \\ &\xrightarrow{\text{اتحاد مزدوج}} \sqrt{50 - 1} = \sqrt{49} = 7 \end{aligned}$$

۲- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\begin{aligned} \sqrt{-x} + x > 0 &\Rightarrow x < 0, (B \text{ یا } A) \Rightarrow \sqrt{-x} > -x \Rightarrow -x > x^2 \Rightarrow x^2 + x < 0 \\ &\Rightarrow -1 < x < 0 \Rightarrow B \text{ جواب} \\ x - \sqrt{x} > 0 &\Rightarrow x > 0, (D \text{ یا } C) \Rightarrow x > \sqrt{x} \Rightarrow x^2 > x \Rightarrow x^2 - x > 0 \\ &\Rightarrow x < 0 \text{ یا } x > 1 \Rightarrow D \text{ جواب} \end{aligned}$$

۳- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\begin{aligned} (A^2 + B^2 - AB)(A^2 + B^2 + AB) &= (A^2 + B^2)^2 - A^2 B^2 \\ &= A^4 + B^4 + 2A^2 B^2 - A^2 B^2 = A^4 + B^4 + A^2 B^2 \\ &= (2\sqrt{3} + 3) + (2\sqrt{3} - 3) + \sqrt{2\sqrt{3} + 3} \times \sqrt{2\sqrt{3} - 3} = 4\sqrt{3} + \sqrt{12 - 9} \\ &= 4\sqrt{3} + \sqrt{3} = 5\sqrt{3} \end{aligned}$$

۴- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. حاصل کل عبارت زیر رادیکال باید 1401^{40} باشد تا جذر آن 1401^{20} شود. بنابراین اگر 1401^2 به تعداد 1401^{38} بار تکرار شود، حاصل کل عبارت زیر رادیکال برابر 1401^{40} می شود.

$$\sqrt{\underbrace{1401^2 + 1401^2 + \dots + 1401^2}_{1401^{38} \text{ مرتبه}}} = \sqrt{1401^{38} (1401)^2} = \sqrt{1401^{40}} = 1401^{20}$$

$$-2 < \sqrt[7]{x} < 2 \Rightarrow (-2)^7 < x < 2^7$$

۵- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\Rightarrow -128 < x < 128 \xrightarrow{x \in \mathbb{Z}} -127, -126, \dots, -1, 0, 1, 2, \dots, 127$$

۲۵۵ عدد صحیح



۶- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

اتحاد چاق و لاغر

$$\frac{x^6 - 1}{x^4 - x^2} = \frac{(x^2 - 1)(x^4 + x^2 + 1)}{x^2(x^2 - 1)} = \frac{x^4 + x^2 + 1}{x^2} \xrightarrow{\text{تفکیک}} x^2 + 1 + \frac{1}{x^2}$$

تبدیل به مربع کامل

$$= \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2x \times \frac{1}{x} + 1 = 17^2 - 2 + 1 = 288$$

۷- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. چون $a^4 \geq 0$ بنابراین از فرض $\sqrt[5]{a} \geq 0$ نتیجه می‌شود که a الزاماً عددی نامنفی است.

بنابراین $(-a^3)$ کمترین مقدار ممکن است. با توجه به نامنفی بودن a دو طرف فرض سؤال را به توان ۵ می‌رسانیم. و داریم:

$$a^4 < \sqrt[5]{a} \xrightarrow[\text{و } a \geq 0]{\text{دو طرف به توان ۵}} a^{20} < a \Rightarrow a^{20} - a < 0 \Rightarrow a(a^{19} - 1) < 0$$

نامنفی ($a \geq 0$)

$$a^{19} - 1 < 0$$

$$a^{19} < 1 \Rightarrow \boxed{0 \leq a < 1}$$

$$\frac{1}{a} > \sqrt[3]{a} > \sqrt{a} > -a^3$$

توجه: این تست را می‌توان با فرض $a = \frac{1}{64}$ بررسی کرد، زیرا:

$$\frac{1}{a} = 64, \sqrt[3]{\frac{1}{64}} = \frac{1}{4}, \sqrt{\frac{1}{64}} = \frac{1}{8}, -a^3 = -\left(\frac{1}{64}\right)^3$$

۸- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. با استفاده از اتحادهای مربع کامل و مکعب کامل داریم:

$$\frac{x^3 - 6x^2 + 12x - 5}{x^2 - 4x + 4} = \frac{(x-2)^3 + 3}{(x-2)^2}$$

حالا با جایگذاری $x = \sqrt[3]{9} + 2 = \sqrt[3]{3} + 2$ داریم:

$$\frac{((\sqrt[3]{3} + 2) - 2)^3 + 3}{((\sqrt[3]{3} + 2) - 2)^2} = \frac{(\sqrt[3]{3})^3 + 3}{(\sqrt[3]{3})^2} = \frac{6}{\sqrt[3]{9}} \xrightarrow[\sqrt[3]{3}]{\text{ضرب و تقسیم در}} \frac{6\sqrt[3]{3}}{3} = 2\sqrt[3]{3}$$



۹- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\frac{x\sqrt{x+\sqrt{x}}}{\sqrt{x-\sqrt{x}}} \times \frac{\sqrt{x-\sqrt{x}}}{\sqrt{x-\sqrt{x}}} = \frac{x\sqrt{x(x-1)}}{x-\sqrt{x}} \times \frac{x+\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}} = \frac{x(x+\sqrt{x}) \cdot \sqrt{x(x-1)}}{x(x-1)}$$

$$= \frac{\cancel{x}(x+\sqrt{x}) \cdot \sqrt{x(x-1)}}{\cancel{x}(x-1)} \times \frac{\cancel{x-1}}{x+\sqrt{x}} = \sqrt{x^2 - x}$$

۱۰- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ابتدا برای A هم فرجه سازی انجام می دهیم:

$$A = \sqrt[2 \times 3]{(\sqrt{5} - \sqrt{2})^2 \times \sqrt{7+2\sqrt{10}}} = \sqrt[6]{7-2\sqrt{10}} \times \sqrt[6]{7+2\sqrt{10}}$$

$$A = \sqrt[6]{49-40} = \sqrt[6]{9} = \sqrt[3]{3} \Rightarrow \sqrt[3]{9}A = \sqrt[3]{9} \times \sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{27} = 3 \quad (1)$$

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} = 5 \xrightarrow{\text{دو طرف به توان ۲}} a + b + 2\sqrt{ab} = 25 \xrightarrow{\sqrt{ab} = 3} a + b + 6 = 25 \Rightarrow a + b = 19$$

$$a + b = 19 \xrightarrow{\text{دو طرف به توان ۲}} a^2 + b^2 + 2ab = 361 \xrightarrow{ab = 9} a^2 + b^2 = 343 \quad (2)$$

۱، ۲ \Rightarrow حاصل جمع موردنظر $= 3 + 343 = 346$

۱۱- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\frac{(\sqrt{4+\sqrt{7}} - \sqrt{4-\sqrt{7}})(\sqrt{4+\sqrt{7}} + \sqrt{4-\sqrt{7}})}{\sqrt{4+\sqrt{7}} + \sqrt{4-\sqrt{7}}} = \frac{2\sqrt{7}}{\sqrt{4+\sqrt{7}} + \sqrt{4-\sqrt{7}}} = A$$

$$A^2 = \frac{28}{4 + \cancel{\sqrt{7}} + 4 - \cancel{\sqrt{7}} + 2\sqrt{(4+\sqrt{7})(4-\sqrt{7})}} = \frac{28}{8+6} = 2 \Rightarrow A = \sqrt{2}$$



۱۲- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{5} + \sqrt{2} - \sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{5} + \sqrt{2} + \sqrt{3}}{\sqrt{5} + \sqrt{2} + \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{5} + \sqrt{2} + \sqrt{3}}{5 + 2 + 2\sqrt{10} - 3} \times \frac{4 - 2\sqrt{10}}{4 - 2\sqrt{10}} \\ & = \frac{2(\sqrt{5} + \sqrt{2} + \sqrt{3})(2 - \sqrt{10})}{16 - 40} = \frac{(\sqrt{5} + \sqrt{2} + \sqrt{3})(2 - \sqrt{10})}{-12} \\ & = \frac{2\sqrt{5} + 2\sqrt{2} + 2\sqrt{3} - 5\sqrt{2} - 2\sqrt{5} - \sqrt{30}}{-12} = \frac{2\sqrt{3} - 3\sqrt{2} - \sqrt{30}}{-12} \\ & \frac{2\sqrt{3} - 3\sqrt{2} - \sqrt{30}}{-12} \times \frac{1}{2\sqrt{3} - 3\sqrt{2} - \sqrt{30}} = -\frac{1}{12} \end{aligned}$$

۱۳- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\begin{aligned} x &= (2 - \sqrt{3})^{14} (2 + \sqrt{3})^{14} (2 + \sqrt{3}) = (4 - 3)^{14} (2 + \sqrt{3}) = 2 + \sqrt{3} \\ & \quad \text{اتحاد مزدوج} \\ (x + x^{-1})^{\frac{1}{2}} &= \left(2 + \sqrt{3} + \frac{1}{2 + \sqrt{3}}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(2 + \sqrt{3} + 2 - \sqrt{3}\right)^{\frac{1}{2}} = 4^{\frac{1}{2}} = (2^2)^{\frac{1}{2}} = 2 \\ & \quad \text{با گویا کردن مخرج} \end{aligned}$$

۱۴- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\begin{aligned} \sqrt{x} + \sqrt{y} &= M \xrightarrow{\text{دو طرف به توان ۲}} x + y + 2\sqrt{xy} = M^2 \Rightarrow 19 + 2\sqrt{9} = M^2 \\ \Rightarrow M &= 5 \Rightarrow \sqrt{x} + \sqrt{y} = 5 \xrightarrow{\text{دو طرف به توان ۳}} x\sqrt{x} + y\sqrt{y} + 3\sqrt{xy}(\sqrt{x} + \sqrt{y}) = 125 \\ \Rightarrow x\sqrt{x} + y\sqrt{y} + 3\sqrt{9}(5) &= 125 \Rightarrow x\sqrt{x} + y\sqrt{y} = 80 \end{aligned}$$

۱۵- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\begin{aligned} \sqrt[9]{\frac{x-3}{x} + \frac{3x-1}{x^3}} &= \sqrt[9]{\frac{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}{x^3}} = \sqrt[9]{\frac{(x-1)^3}{x^3}} = \sqrt[3]{\frac{x-1}{x}} = \sqrt[3]{1 - \frac{1}{x}} \\ &= \sqrt[3]{1 - \frac{1}{\sqrt{2}-1}} \quad \text{گویا کردن مخرج} = \sqrt[3]{-\sqrt{2}} = -\sqrt[6]{2} \end{aligned}$$



«بانک سوال موسسه یاوران دانش»

۱۶- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$(a^3 b^2) \left(a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{3}} \right) \left(a^{-\frac{1}{2}} b^{-\frac{1}{3}} \right) = (a^3 b^2) (a^1 b^1) = a^3 b^2$$

۱۷- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\frac{x}{\sqrt{x+\sqrt{x}}} \cdot \frac{x+1}{\sqrt{x+\sqrt{x}}} \cdot \frac{(x-1)(x+\sqrt{x})}{(x-\sqrt{x})(x+\sqrt{x})} = \frac{\cancel{x} \cdot (x+1) \cdot \cancel{(x-1)} (x+\sqrt{x})}{(x+\sqrt{x}) \cdot \cancel{x} \cdot \cancel{(x-1)}} = x+1$$

۱۸- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\begin{aligned} \sqrt{x+5+4\sqrt{x+1}} \cdot \sqrt{x+5-4\sqrt{x+1}} &= \sqrt{(2+\sqrt{x+1})^2} \cdot \sqrt{(2-\sqrt{x+1})^2} \\ &= (2+\sqrt{x+1})(2-\sqrt{x+1}) = 4 - (x+1) = 3-x \Rightarrow \frac{3-x}{\sqrt{3}-\sqrt{x}} = \sqrt{3}+\sqrt{x} \end{aligned}$$

$$k(k^{4x} - k^{2x} - 6) = k(k^{2x} - 3)(k^{2x} + 2)$$

۱۹- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$0 < a < b < 1 \Rightarrow 0 < \sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b} < 1$$

۲۰- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

گزینه‌های دیگر با مثال نقض رد می‌شوند.

۲۱- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\begin{aligned} a &= \sqrt[3]{0.215} \approx \sqrt[3]{0.216} = \sqrt[3]{(0.6)^3} = 0.6 \\ \sqrt{2a} &= \sqrt{2(0.6)} = \sqrt{1.2} \approx \sqrt{1.21} = 1.1 \end{aligned}$$

۲۲- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$A = \sqrt[6]{2\sqrt[3]{65-2+1}} = \sqrt[6]{2\sqrt[3]{64}} = \sqrt[6]{2 \times 2} = \sqrt[6]{4} = \sqrt[3]{2}$$

$$B = \frac{\sqrt[3]{4\sqrt{7+2}}}{\sqrt[3]{1+2}} = \frac{\sqrt[3]{4 \times 3}}{\sqrt[3]{3}} = \sqrt[3]{4}$$

$$AB = \sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{8} = 2$$



۲۳- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. فرض می‌کنیم که $a = \sqrt[3]{14 + \sqrt{x}}$ و $b = \sqrt[3]{14 - \sqrt{x}}$ باشد:

$$a + b = 4, a^3 + b^3 = 28$$

$$(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b) \Rightarrow 64 = 28 + 3ab(4)$$

$$ab = \frac{64 - 28}{12} = 3 \Rightarrow \sqrt[3]{(14 + \sqrt{x})(14 - \sqrt{x})} = 3$$

$$\Rightarrow 196 - x = 27 \Rightarrow x = 169 \Rightarrow \left(\frac{x}{169} + 2\right)^2 = 9$$

۲۴- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\begin{aligned} & 3 \times \frac{(x+2)^2 - 2x}{x^3 - 8} + \frac{x^6 - 1}{x^4 + x - x^3 - 1} \\ &= \frac{3(x^2 + 4x + 4 - 2x)}{(x-2)(x^2 + 2x + 4)} + \frac{(x^3 - 1)(x^3 + 1)}{x(x^3 + 1) - (x^3 + 1)} \\ &= \frac{3(x^2 + 2x + 4)}{(x-2)(x^2 + 2x + 4)} + \frac{(x-1)(x^2 + x + 1)(x^3 + 1)}{(x-1)(x^3 + 1)} = \frac{3 + (x-2)(x^2 + x + 1)}{x-2} \\ &= \frac{3 + x^3 + x^2 + x - 2x^2 - 2x - 2}{x-2} = \frac{x^3 - x^2 - x + 1}{x-2} \\ &= \frac{x^2(x-1) - (x-1)}{x-2} = \frac{(x-1)(x^2 - 1)}{x-2} = \frac{(x-1)^2(x+1)}{x-2} \end{aligned}$$



۲۵- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\begin{aligned} \sqrt[4]{4-2\sqrt{3}} &= \sqrt[4]{(1-\sqrt{3})^2} = \sqrt{|1-\sqrt{3}|} = \sqrt{\sqrt{3}-1} \\ \Rightarrow \text{حاصل کسر} &= \frac{\sqrt{\sqrt{3}+1} \times \sqrt{\sqrt{3}-1}}{\sqrt[5]{2^3 \times 2\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}}{\sqrt[5]{2^4 \times \sqrt{2}}} \\ &= \frac{\sqrt{3-1}}{\sqrt[5]{2^4 \times 2^{\frac{1}{2}}}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt[5]{2^{\frac{9}{2}}}} = \frac{\sqrt{2}}{2^{\frac{9}{2} \times \frac{1}{5}}} = \frac{\sqrt{2}}{2^{\frac{9}{10}}} = \frac{2^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{9}{10}}} \\ &= 2^{\frac{1}{2} - \frac{9}{10}} = 2^{\frac{5-9}{10}} = 2^{-\frac{4}{10}} = 2^{-\frac{2}{5}} = \frac{1}{\sqrt[5]{2}} \end{aligned}$$

۲۶- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\begin{aligned} a+b &= \frac{5}{3} \Rightarrow (a+b)^2 = \frac{25}{9} \Rightarrow a^2 + b^2 + 2ab = \frac{25}{9} \\ a^2 + b^2 &= \frac{13}{9} \\ \xrightarrow{\quad} \frac{13}{9} + 2ab &= \frac{25}{9} \xrightarrow{\times 9} 13 + 18ab = 25 \Rightarrow 18ab = 12 \Rightarrow ab = \frac{2}{3} \\ a^3 + b^3 &= (a+b)^3 - 3ab(a+b) = \left(\frac{5}{3}\right)^3 - 3 \times \frac{2}{3} \times \frac{5}{3} = \frac{125}{27} - \frac{90}{27} = \frac{35}{27} \end{aligned}$$

۲۷- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{\sqrt[3]{\sqrt{3}}} &= \sqrt[3]{\sqrt[3]{3^{\frac{1}{2}}}} = \sqrt[3]{\sqrt[3]{(3^3)^{\frac{1}{2}} \times 3}} = \sqrt[3]{\sqrt[3]{3^{\frac{13}{2}}}} = 3^{\frac{13}{12}} \\ \sqrt[3]{\sqrt[5]{3\sqrt{3}}} &= \sqrt[3]{\sqrt[5]{3^2 \times 3}} = \sqrt[3]{\sqrt[5]{27}} = \sqrt[3]{3^{\frac{3}{5}}} = \sqrt[3]{3^{\frac{1}{5}}} = 3^{\frac{1}{15}} \\ \text{حاصل} &= 3^{\frac{13}{12}} \div 3^{\frac{1}{15}} = 3^{\frac{13}{12} - \frac{1}{15}} = 3^{\frac{35-4}{60}} = 3^{\frac{31}{60}} = \left(3^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{31}{30}} = (\sqrt{3})^{\frac{31}{30}} \Rightarrow \text{توان مورد نظر} = \frac{31}{30} \end{aligned}$$



۲۸- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+2} + \dots + \frac{1}{3+\sqrt{10}}$$

$$= \frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+4} + \dots + \frac{1}{9+\sqrt{10}}$$

هر کسری را در مزدوج مخرجش ضرب می‌کنیم:

$$\Rightarrow \text{حاصل} = \frac{\sqrt{1}-\sqrt{2}}{\underbrace{1-2}_{-1}} + \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\underbrace{2-3}_{-1}} + \frac{\sqrt{3}-\sqrt{4}}{\underbrace{3-4}_{-1}} + \dots + \frac{\sqrt{9}-\sqrt{10}}{\underbrace{9-10}_{-1}}$$

$$= (\sqrt{1}-\sqrt{2}) + (\sqrt{2}-\sqrt{3}) + (\sqrt{3}-\sqrt{4}) + \dots$$

$$+ (\sqrt{9}-\sqrt{10}) + (\sqrt{10}-\sqrt{9}) = -\sqrt{1} + \sqrt{10} = \sqrt{10} - 1$$

«بانک سوال موسسه یاوران دانش»

۲۹- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\frac{8^{\frac{3}{5}} \times 6^{\frac{1}{6}}}{\sqrt[3]{2} \times 12^{\frac{2}{3}}} = \frac{(2^3)^{\frac{3}{5}} \times (2 \times 3)^{\frac{1}{6}}}{2^{\frac{1}{3}} \times (2^2 \times 3)^{\frac{2}{3}}} = \frac{2^{\frac{9}{5}} \times 2^{\frac{1}{6}} \times 3^{\frac{1}{6}}}{2^{\frac{1}{3}} \times 2^{\frac{4}{3}} \times 3^{\frac{2}{3}}}$$

$$= \frac{2^{\frac{54+5}{30}} \times 3^{\frac{1}{6}}}{2^{\frac{5}{3}} \times 3^{\frac{2}{3}}} = 2^{\left(\frac{59}{30} - \frac{5}{3}\right)} \times 3^{\left(\frac{1}{6} - \frac{2}{3}\right)} = 2^{\left(\frac{59-50}{30}\right)} \times 3^{\left(\frac{1-4}{6}\right)}$$

$$= 2^{\frac{9}{30}} \times 3^{-\frac{3}{6}} = 2^{\frac{3}{10}} \times 3^{-\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt[10]{2^3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt[10]{8}}{\sqrt[10]{3^5}} = \sqrt[10]{\frac{8}{243}}$$

۳۰- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\sqrt{9 \times 2} + \sqrt{144 \times 2} - 2\sqrt{25 \times 2} + 3\sqrt{100 \times 2}$$

$$= \sqrt{3^2 \times 2} + \sqrt{12^2 \times 2} - 2\sqrt{5^2 \times 2} + 3\sqrt{10^2 \times 2}$$

$$= 3\sqrt{2} + 12\sqrt{2} - 2 \times 5\sqrt{2} + 3 \times 10\sqrt{2} = \sqrt{2} (3 + 12 - 10 + 30) = 35\sqrt{2}$$



۳۱- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. از اتحاد مکعب دوجمله‌ای استفاده می‌کنیم.

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$\frac{x^3 - 6x^2 + 12x - 13}{2 - 12x + 6x^2 - x^3} = \frac{x^3 - 6x^2 + 12x - 8 - 5}{2 - x^3 - 6x^2 + 12x - 8 + 8} = \frac{(x-2)^3 - 5}{2 - (x-2)^3 - 8} = \frac{(x-2)^3 - 5}{-(x-2)^3 - 6}$$

$$\xrightarrow{x=2-\sqrt[3]{7}} \frac{(2-\sqrt[3]{7}-2)^3 - 5}{-(2-\sqrt[3]{7}-2)^3 - 6} = \frac{(-\sqrt[3]{7})^3 - 5}{-(-\sqrt[3]{7})^3 - 6} = \frac{-7-5}{7-6} = \frac{-12}{1} = -12$$

۳۲- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

۱) $a(x-a)^2 = 0 \Rightarrow x=a$: ریشه ی مضاعف

۲) $x(x-a) = a(x-a) \Rightarrow x(x-a) - a(x-a) = 0$

$\Rightarrow (x-a)(x-a) = 0 \Rightarrow (x-a)^2 = 0 \Rightarrow x=a$: ریشه ی مضاعف

۳) $x^2 - a^2 = 0 \Rightarrow x^2 = a^2 \Rightarrow x = \pm a$: دو ریشه ی متمایز

۴) $x^2 + a^2 = 2ax \Rightarrow x^2 + a^2 - 2ax = 0 \Rightarrow (x-a)^2 = 0 \Rightarrow x=a$: ریشه ی مضاعف

۳۳- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\sqrt[3]{a} > a^2 \geq 0 \Rightarrow a > 0$$

حال اگر $a > 1$ باشد، آن‌گاه $\sqrt[3]{a} > a > a^2$ خواهد بود، پس حتماً $0 < a < 1$ در نتیجه داریم:

بررسی گزینه‌ها:

۱) $0 < a < 1 \Rightarrow \frac{1}{a} > 1$

۲) $\sqrt{a^2} = |a| = a < 1$

۳) $0 < a^3 < 1 \Rightarrow -1 < -a^3 < 0$

۴) $0 < a < 1 \Rightarrow 1 > \sqrt[5]{a} > a > 0$

$\frac{1}{a} > 1 > \sqrt[5]{a} > \sqrt[3]{a} > a > 0 > -a^3 \Rightarrow \frac{1}{a}$ از همه بزرگ‌تر است.

بنابراین:



۳۴- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\begin{aligned} x^4 - 8xy^3 &= x(x^3 - 8y^3) = x \overbrace{(x^3 - (2y)^3)}^{\text{اتحاد جاق و لاغر}} \\ &= x(x - 2y)(x^2 + 2xy + 4y^2) \end{aligned}$$

تنها گزینه‌ی (۲) وجود ندارد.

۳۵- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\begin{aligned} (0.5)^{-\frac{2}{3}} &= \left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{2}{3}} = 2^{\frac{2}{3}} \\ \sqrt[4]{4} \sqrt[3]{4} &= \sqrt[4]{4^3 \times 4} = \sqrt[12]{(2^2)^3 \times 2^2} = \sqrt[12]{2^6 \times 2^2} = \sqrt[12]{2^8} = 2^{\frac{2}{3}} \\ \Rightarrow \text{حاصل} &= 2^{\frac{2}{3}} - 3\left(2^{\frac{2}{3}}\right) = 2^{\frac{2}{3}}(1 - 3) = -2^1 \times 2^{\frac{2}{3}} = -2^{\frac{5}{3}} \\ \Rightarrow -2^{\frac{5}{3}} &= (-1) \times 2^{\frac{5}{3}} + 0 \Rightarrow \begin{cases} m = -1 \\ x = 2 \\ a = 5 \\ b = 3 \\ n = 0 \end{cases} \\ \Rightarrow \frac{a+b+x}{m+n} &= \frac{5+3+2}{-1+0} = \frac{10}{-1} = -10 \end{aligned}$$

۳۶- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

(الف) نادرست است، چون پایه یک عدد توان‌دار با توان کسری نمی‌تواند منفی باشد:

$$\begin{aligned} \left(-\frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{3}} &\times \\ \text{(ب) نادرست است. کافی است } n &\text{ زوج و } a \text{ و } b \text{ هر دو منفی باشد. برای مثال } \sqrt[4]{-2} \text{ و } \sqrt[4]{-8} \text{ تعریف نشده است اما:} \\ \sqrt[4]{(-2)(-8)} &= \sqrt[4]{16} = 2 \end{aligned}$$

(پ) نادرست است. زیرا به‌طور مثال:

$$\sqrt[3]{1+7} \neq \sqrt[3]{1} + \sqrt[3]{7}$$

(ت) درست است، اگر n فرد باشد که همواره صحیح است و اگر n زوج باشد حتماً زیر رادیکال مثبت است:

$$x > 0 \Rightarrow \left(\sqrt[n]{x}\right)^n = \sqrt[n]{x^n} = |x| \stackrel{x > 0}{=} x$$



۳۷- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. هر عدد حقیقی حداکثر ۲ ریشه‌ی دوم دارد (اگر مثبت باشد ۲ تا، اگر صفر باشد یکی و اگر منفی باشد هیچی) و هر عدد حقیقی دقیقاً یک ریشه‌ی سوم دارد.

۳۸- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.
روش اول:

$$a + b = 6 \xrightarrow{\text{توان } 2} a^2 + b^2 + 2ab = 36 \xrightarrow{ab=7} a^2 + b^2 = 36 - 14 = 22$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 + b^2 - ab) = 6(22 - 7) = 6 \times 15 = 90$$

روش دوم:

$$\begin{cases} a + b = 6 \Rightarrow b = 6 - a \\ ab = 7 \end{cases} \Rightarrow a(6 - a) = 7 \Rightarrow 6a - a^2 = 7 \Rightarrow a^2 - 6a + 7 = 0$$

$$\Rightarrow \Delta = 36 - 4 \times 7 = 8 \Rightarrow a = \frac{6 \pm \sqrt{8}}{2} \Rightarrow \begin{cases} a = 3 + \sqrt{2} \Rightarrow b = 3 - \sqrt{2} \\ a = 3 - \sqrt{2} \Rightarrow b = 3 + \sqrt{2} \end{cases}$$

بنابراین دو عدد مطلوب $3 + \sqrt{2}$ و $3 - \sqrt{2}$ اند و داریم:

$$\begin{cases} (3 - \sqrt{2})^3 = 27 - 3 \times 9\sqrt{2} + 3 \times 2 \times 3 - 2\sqrt{2} = 45 - 29\sqrt{2} \\ (3 + \sqrt{2})^3 = 27 + 3 \times 9\sqrt{2} + 3 \times 2 \times 3 + 2\sqrt{2} = 45 + 29\sqrt{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow (3 - \sqrt{2})^3 + (3 + \sqrt{2})^3 = 90$$

روش سوم:

$$a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b) = 6^3 - 3(7)(6) = 216 - 126 = 90$$

۳۹- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$A = \sqrt{7 + 4\sqrt{(4 + 5 + 4\sqrt{5} - 4\sqrt{5} - 6)}} = \sqrt{7 + 4\sqrt{3}}$$

$$= \sqrt{(2 + \sqrt{3})^2} = 2 + \sqrt{3} \Rightarrow A - \sqrt{3} = 2$$



۴۰- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. با اتحاد یک جمله‌ی مشترک $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$ عبارت را تجزیه می‌کنیم. در عبارت صورت سؤال، عامل مشترک x^2 است، جمع غیرمشترک‌ها -۶ و ضرب آن‌ها $+۸$ است. بنابراین غیرمشترک‌ها -۴ و -۲ هستند.

$$x^4 - 6x^2 + 8 = (x^2)^2 + (-4 - 2)x^2 + (-2)(-4) \\ (x^2 - 2)(x^2 - 4)$$

هر دو پرانتز را با اتحاد مزدوج $(x^2 - a^2 = (x - a)(x + a))$ ساده‌تر می‌کنیم:

$$x^2 - 2 = (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$$

$$x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$$

$$\Rightarrow x^4 - 6x^2 + 8 = (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})(x - 2)(x + 2)$$

بنابراین گزینه‌ی (۳) در عامل‌های تجزیه وجود دارد.