

گنجینه سوال رایگان
+ پاسخ تشریحی

یاوران دانش



راه های ارتباطی با ما:

www.Dyavari.com

۰۲۱-۷۶۷۰۳۸۵۸

۰۹۱۲-۳۴ ۹۴ ۱۳۴



	۱	۲	۳	۴
۱ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۴ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۵ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۶ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۷ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۸ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۹ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۰ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۱ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۱۲ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۳ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۴ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۵ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۶ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۱۷ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۸ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۹ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۰ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۱ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۲۲ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۳ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۴ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۵ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۲۶ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۷ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۸ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۹ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۰ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۳۱ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۲ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۳ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۳۴ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۵ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۶ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۳۷ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۸ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۹ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۴۰ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>





۱- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.
نقاط بحرانی را می‌یابیم:

$$f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1} \Rightarrow f'(x) = \frac{2(x^2 + 1) - 2x(2x)}{(x^2 + 1)^2} = 0$$

$$\Rightarrow 2 - 2x^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \text{ درست} \\ x=-1 \text{ نادرست} \end{cases}$$

پس نقاط بحرانی عبارت‌اند از: $x = \pm 1$ و $x = \pm 2$

$$f(-2) = -\frac{4}{5}$$

$$f(2) = \frac{4}{5}$$

$$f(-1) = -1 \Rightarrow \text{min مطلق}$$

$$f(1) = 1 \Rightarrow \text{max مطلق}$$

۲- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

تابع $y = \frac{5x-1}{x+1}$ به ازای $x > -1$ یا $x < -1$ اکیداً صعودی است چرا که:

$$ad - bc = 5 + 1 = 6 > 0$$

ضابطه‌ی دوم تابع هم باید اکیداً صعودی باشد:

$$x < -1 \Rightarrow y = x + a\sqrt[3]{x} \Rightarrow y' = 1 + \frac{a}{3\sqrt[3]{x^2}} = \frac{3\sqrt[3]{x^2} + a}{3\sqrt[3]{x^2}} \geq 0$$

مخرج همواره مثبت است برای اینکه صورت هم مثبت باشد، کافی است $a \geq 0$ باشد. شرط اینکه تابع در نقطه‌ی مرزی یعنی $x = -1$ هم اکیداً صعودی باشد را باید بررسی کنیم:

$$f(1^+) \geq f(1^-) \Rightarrow \frac{5-1}{2} \geq 1+a \Rightarrow 2 \geq 1+a \Rightarrow 2 \geq 1+a \Rightarrow a \leq 1$$

$$a \leq 1 : \text{مجموعه مقادیر قابل قبول برای } a$$

۳- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$x = 0$ ریشه ساده قدرمطلق، مشتق‌ناپذیر و بحرانی است. حال قدرمطلق را حذف و مشتق می‌گیریم:

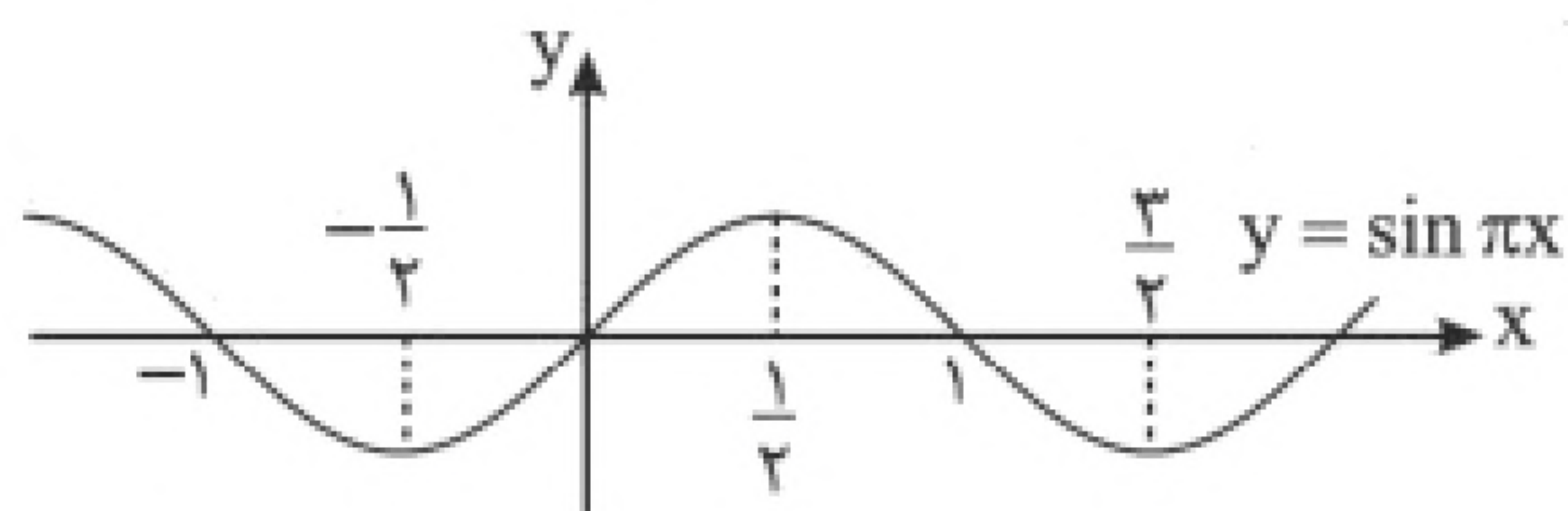
$$y = \frac{x}{x^2 - 1} \Rightarrow y' = \frac{x^2 - 1 - 2x^2}{x^2 - 1} = \frac{-x^2 - 1}{x^2 - 1}$$

تابع مشتق ریشه ندارد و در $x = \pm 1$ مشتق‌ناپذیر است که عضو دامنه نیستند تنها نقطه‌ی بحرانی تابع $x = 0$ است.

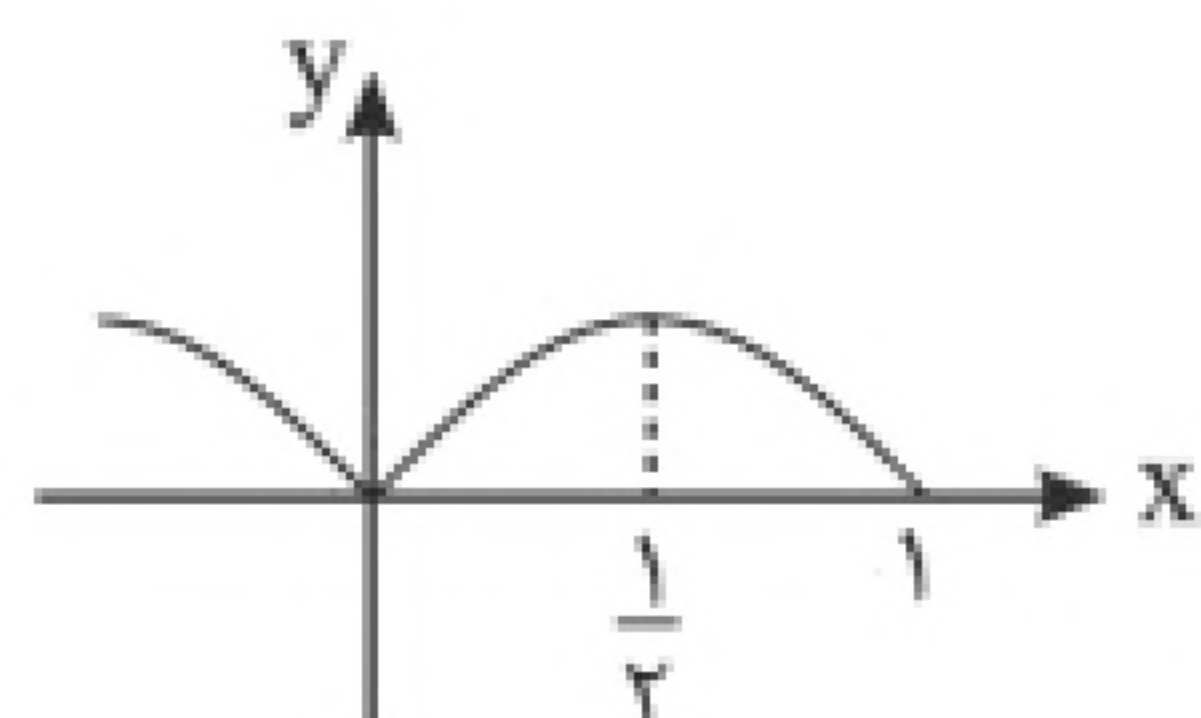


۴- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

نمودار تابع را رسم می‌کنیم.



نقاط ابتدا و انتهای بازه اکسترمم نسبی نیستند. پس تابع در $x=0$ مینیمم نسبی و در $x=\frac{1}{2}$ ماکسیمم نسبی دارد.



۵- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

تابع فقط یک مجانب قائم دارد پس مخرج یک ریشه دارد به طوری که باید مخرج ریشه مضاعف داشته باشد و یکی از ریشه‌های مخرج با صورت ساده شود.

$$\Delta = c^2 - 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} c = 2 \\ c = -2 \end{cases}$$

ریشه‌ی مخرج مثبت است.

$$f(x) = \frac{2x^2 + ax + b}{(x-1)^2} \quad f(0) = -1 \Rightarrow b = -1$$

$x=1$ ریشه‌ی صورت است. پس:

در کل داریم:

$$f(x) = \frac{(x-1)(2x+1)}{(x-1)^2} = \frac{2x+1}{x-1}$$

چون $x = -\frac{1}{2}$ طول نقطه‌ی تلاقی با محور طول‌هاست.

پس:

$$f'(x) = \frac{-3}{(x-1)^2} \Rightarrow f'\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{-3}{\left(\frac{9}{4}\right)} = -\frac{4}{3}$$



۶- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$f'(x) = 2\sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}(2x+6) = 2\sqrt{x} + \frac{x+3}{\sqrt{x}}$$

$$f'(x) = \frac{3x+3}{\sqrt{x}} \Rightarrow f''(x) = \frac{3\sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}}(3x+3)}{x}$$

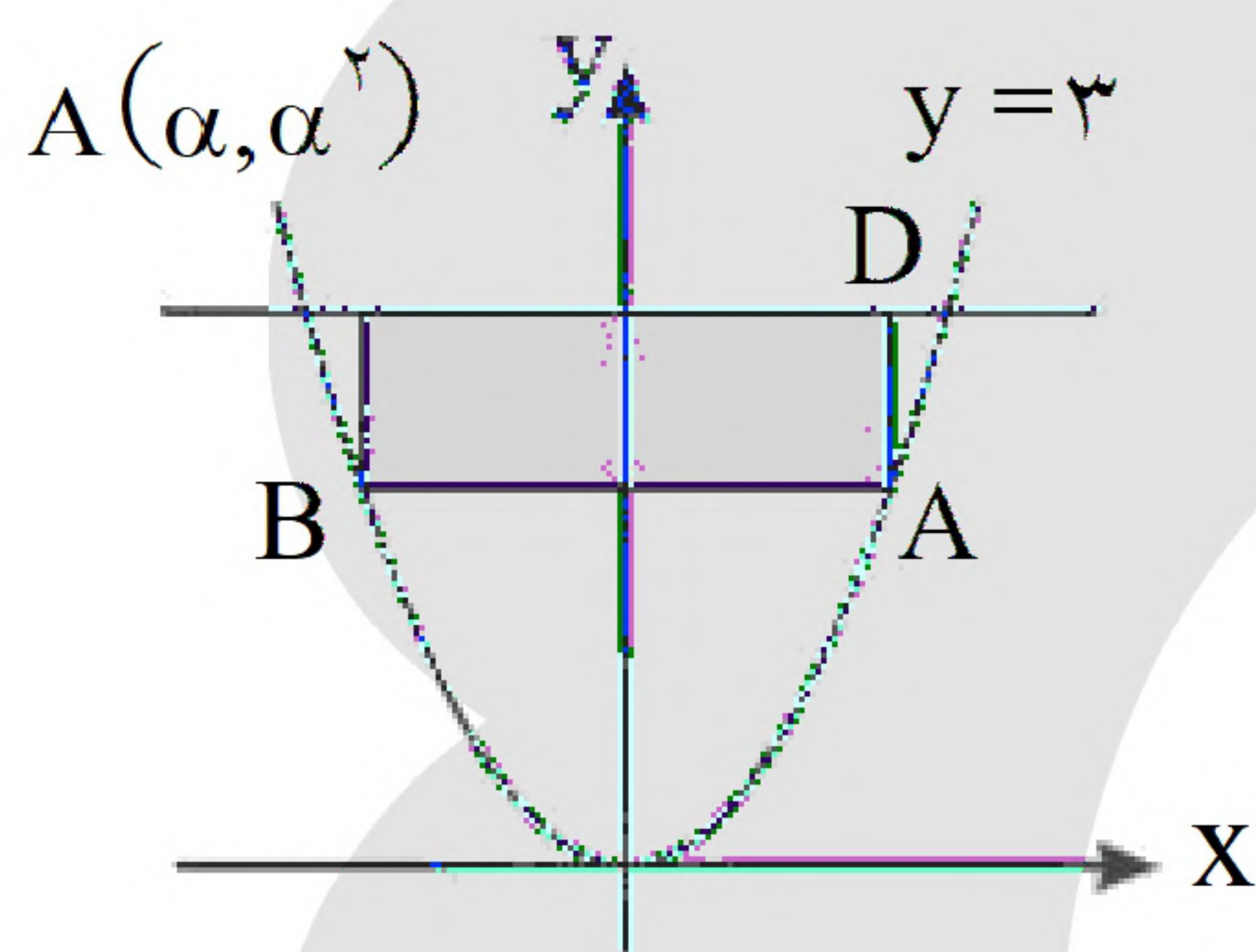
$$f''(x) = \frac{6x - 3x - 3}{2x\sqrt{x}} = \frac{3x-3}{2x\sqrt{x}}$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow A(1, 8) \text{ عطف}$$

$$m_{OA} = \frac{8}{1} = 8$$

۷- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

اگر رأس مستطیل که روی سهمی در ناحیه اول واقع شده است را A در نظر بگیریم:



$$\begin{cases} AB = 2x_A = 2\alpha = \text{طول مستطیل} \\ AD = 3 - y_A = 3 - \alpha^2 = \text{عرض مستطیل} \end{cases}$$

$$S = 2\alpha(3 - \alpha^2) = 6\alpha - 2\alpha^3$$

$$S' = 6 - 6\alpha^2 = 0 \Rightarrow \alpha = 1 \Rightarrow S_{\max} = 4$$

۸- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$D_f = [-1, 1] \Rightarrow \begin{cases} f(1) = 1 + 2k \\ f(-1) = 2k - 1 \end{cases}$$

$$f'(x) = 1 + \frac{-6x}{2\sqrt{3-3x^2}} = 1 + \frac{-3x}{\sqrt{3-3x^2}} = 0$$

$$\sqrt{3-3x^2} = 3x$$

$$x > 0 \Rightarrow 12x^2 = 3 \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ x = -\frac{1}{2} \text{ غ ق} \end{cases}$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{9}{4}} + 2k = 2k + 2$$

$$\text{max مطلق} = 2k + 2 \quad \text{min مطلق} = 2k - 1$$

$$2k + 2 = 8 \Rightarrow k = 3 \Rightarrow \text{min مطلق} = 6 - 1 = 5$$



۹- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$f'(x) = \frac{2x\sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}}(x^2 + 12)}{x} = \frac{3x^2 - 12}{2x\sqrt{x}}$$

f' را تعیین علامت می‌کنیم.

$$D_f = (0, +\infty)$$

x	0	2
f'		- +

تابع در بازه‌ی $[2, +\infty)$ و $(2, +\infty)$ صعودی اکید است پس حداقل مقدار α برابر ۲ است.

۱۰- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\begin{cases} f'(x) = 3x^2 + 2ax \\ f''(x) = 6x + 2a \end{cases}$$

$$\begin{cases} f''(x) = 0 \\ f(1) = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6 + 2a = 0 \\ 1 + a + b = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b = 5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow g(x) = x^3 - 3x + 5$$

$$g'(x) = 3x^2 - 3$$

$$g'(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \Rightarrow y = 3 \\ x = -1 \Rightarrow y = 7 \end{cases}$$

۱۱- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$f'(x) = \frac{a\sqrt{x} - \frac{ax+b}{2\sqrt{x}}}{x} = \frac{ax-b}{2x\sqrt{x}}$$

$$f'(1) = 0 \Rightarrow a - b = 0 \Rightarrow a = b$$

$$f(1) = 2 \Rightarrow \frac{a+b}{2} = 2 \Rightarrow a = b = 4$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x}} \Rightarrow f(4) = 2/5$$



۱۲- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$f' = 3x^2 + 2(m-3)x + 3$$

$$f' \geq 0 \Rightarrow \Delta \leq 0 \Rightarrow 4(m-3)^2 - 36 \leq 0$$

$$\Rightarrow (m-3)^2 \leq 9$$

$$\Rightarrow -3 \leq m-3 \leq 3$$

$$f''(x) = 6x + 2(m-3)$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow x = -\frac{m-3}{3}$$

$$-3 \leq m-3 \leq 3 \Rightarrow -1 \leq -\frac{m-3}{3} \leq 1$$

«بانک سوال موسسه یاوران دانش»

۱۳- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$y' = \frac{2ax^2 - 2ax(2x+1)}{(ax^2)^2} = \frac{2ax(x-2x-1)}{a^2x^4} = \frac{-2(x+1)}{ax^3}$$

$$y' = 0 \Rightarrow x = -1 \Rightarrow y = -\frac{1}{a}$$

نقطه‌ی $A\left(-1, -\frac{1}{a}\right)$ روی خط $y = -x$ قرار دارد پس $-\frac{1}{a} = 1$ و در نتیجه $a = -1$ است.

۱۴- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$y' = 3mx^2 + 6x - 3$$

$$\begin{cases} y' = 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases} \Rightarrow 36 + 36m \leq 0 \Rightarrow m \leq -1$$

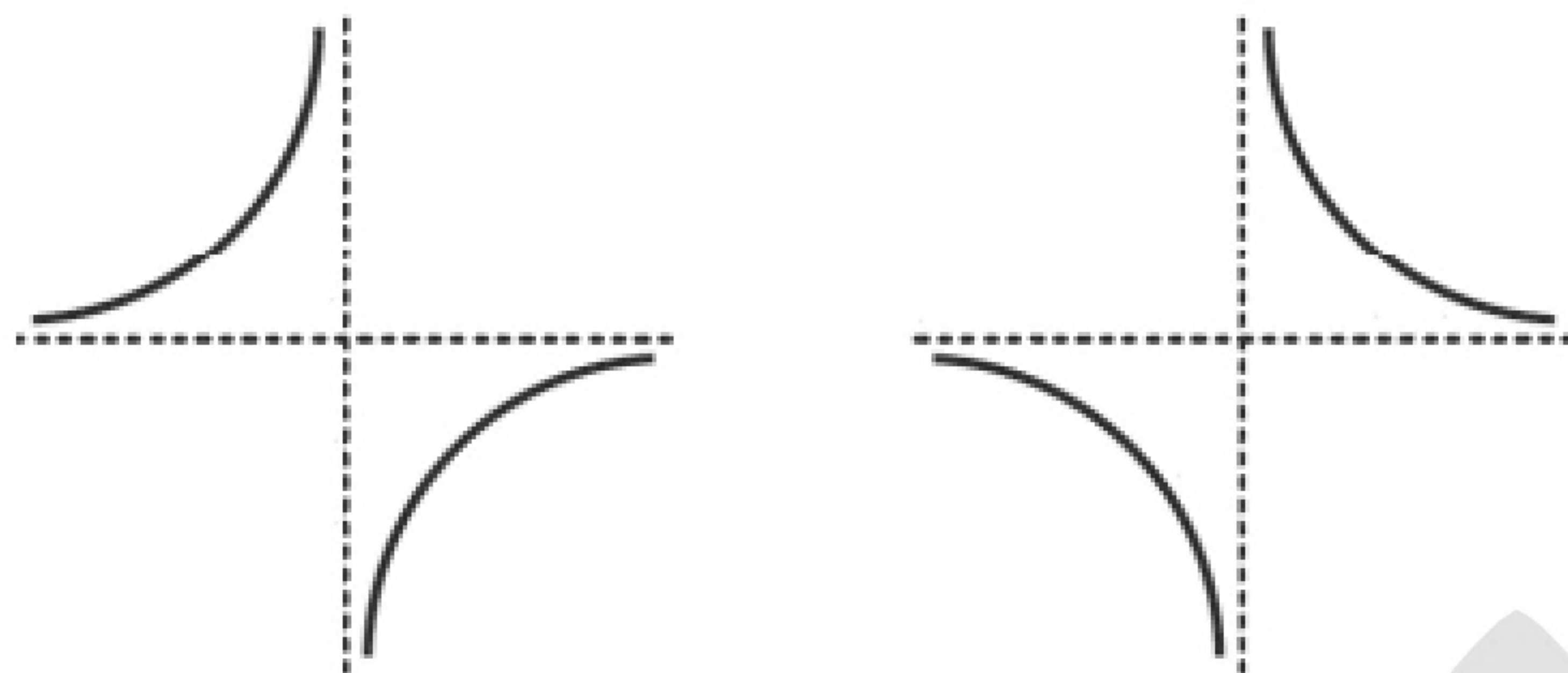
$$\begin{cases} y'' = 6mx + 6 \\ y'' = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{m} \end{cases} \xrightarrow{m \leq -1} -\frac{1}{m} \leq 1$$

پس حداکثر طول نقطه‌ی عطف برابر $x = 1$ است.



۱۵- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

نمودار تابع هموگرافیک f به یکی از دو صورت زیر است:



	a	
f'	+	+
f''	+	-

	a	
f'	-	-
f''	-	+

در هر دو حالت در سمت راست مجانب قائم f' و f'' مختلف‌العلامت‌اند.

۱۶- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

نقاط به طول ۱، ۵ و ۷ نقاط مینیمم نسبی و نقاط به طول ۲ و ۴ نقاط عطفی‌اند.

۱۷- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$y' = 3x^2 + 2ax + b$$

$$\begin{cases} y'(2) = 0 \\ y'(-4) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 12 + 4a + b = 0 \\ 48 - 8a + b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = -24 \end{cases}$$

$$\Rightarrow y = x^3 + 3x^2 - 24x - 2$$

$$\Rightarrow y'' = 6x + 6$$

$$\Rightarrow y'' = 0 \Rightarrow x = -1 \Rightarrow y = 24$$

نقطه‌ی $(-1, 24)$ در ناحیه‌ی دوم قرار دارد.



۱۸- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$y = \begin{cases} -x^2 + 9x & x \geq 0 \\ 3x^2 + 9x & x < 0 \end{cases}$$

$$y' = \begin{cases} -2x + 9 & x \geq 0 \\ 6x + 9 & x < 0 \end{cases} \xrightarrow{y'=0} x = \frac{9}{2}, -\frac{3}{2}$$

$$y'' = \begin{cases} -2 & x \geq 0 \\ 6 & x < 0 \end{cases}$$

x	$-\frac{3}{2}$	0	$\frac{9}{2}$
y'	-	+	+
y''	+	+	-
y		جواب	

بازه‌ی $\left(-\frac{3}{2}, 0\right)$ جواب است.

۱۹- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\begin{cases} cx + d = 0 \Rightarrow x = -\frac{d}{c} = 2 \Rightarrow d = -2c \\ y = \frac{a}{c} = -1 \Rightarrow a = -c \end{cases}$$

$$f(1) = 0 \Rightarrow \frac{a+b}{c+d} = 0 \Rightarrow a+b=0 \Rightarrow b=-a=c$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{-cx+c}{cx-2c} = \frac{-x+1}{x-2}$$

$$f'(x) = \frac{1}{(x-2)^2} \Rightarrow f'(1) = 1$$

۲۰- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\begin{cases} f'(x) = 3x^2 + 2ax + b \\ f''(x) = 6x + 2a \end{cases}$$

$$\begin{cases} f''(-1) = 0 \Rightarrow -6 + 2a = 0 \Rightarrow a = 3 \\ f(-1) = 9 \Rightarrow -1 + a - b - 2 = 9 \Rightarrow b = -9 \end{cases}$$

$$f'(x) = 3x^2 + 6x - 9 = 3(x-1)(x+3)$$

طول ماکزیمم $x = -3$



۲۱- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$۱) f\left(\frac{۳}{۲}\right) = ۰ \Rightarrow \frac{۹}{۴}\left(\frac{۳}{۲}a + b\right) = ۰ \Rightarrow ۳a + ۲b = ۰ \Rightarrow \frac{b}{a} = -\frac{۳}{۲}$$

$$۲) f'(x) = ۳ax^۲ + ۲bx$$

$$f' = ۰ \Rightarrow x = ۰, x = -\frac{۲b}{۳a}$$

$$x = -\frac{۲b}{۳a} \Rightarrow y = \frac{۴b^۲}{۹a^۲}\left(-\frac{۲b}{۳} + b\right) = \frac{۴b^۳}{۲۷a^۲}$$

نقطه‌ی اکسترمم در معادله‌ی خط صدق می‌کند.

$$\frac{۴b^۳}{۲۷a^۲} = \frac{-۴b}{۳a} - ۳ \Rightarrow \frac{۴}{۲۷} \times \frac{۹}{۴}b = -\frac{۴}{۳}\left(-\frac{۳}{۲}\right) - ۳$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{۳}b = -۱ \Rightarrow b = -۳$$

۲۲- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$f'(x) = ۳ax^۲ + ۲bx + c$$

$$\begin{cases} f'(۱) = ۰ \Rightarrow ۳a + ۲b + c = ۰ \\ f'(-۳) = ۰ \Rightarrow ۲۷a - ۶b + c = ۰ \end{cases}$$

در $x = ۱$ علامت f' از $+$ به $-$ تغییر کرده پس در این نقطه ماکزیمم نسبی دارد.

$$f(۱) = ۵ \Rightarrow a + b + c = ۵$$

$$\begin{cases} ۳a + ۲b + c = ۰ \\ ۲۷a - ۶b + c = ۰ \\ a + b + c = ۵ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -۱ \\ b = -۳ \\ c = ۹ \end{cases}$$

«بانک سوال موسسه یاوران دانش»

۲۳- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

در بازه‌ی موردنظر باید f' و f'' مثبت باشند.

$$f' = -x^۲ - ۴x + ۵ = -(x - ۱)(x + ۵)$$

$$f'' = -۲x - ۴$$

x	-۵	-۲	۱	
f'	-	+	+	-
f''	+	+	-	-

↔
جواب



۲۴- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$y = \frac{x^2}{x^2 + 1} \Rightarrow y' = \frac{2x(x^2 + 1) - x^2(2x)}{(x^2 + 1)^2} = \frac{2x}{(x^2 + 1)^2}$$

$$y' = \begin{cases} \frac{-2x}{(x^2 + 1)^2} & x < 0 \\ \frac{2x}{(x^2 + 1)^2} & x \geq 0 \end{cases}$$

x	0	
y'	+	+
y	↗	↗

تابع در دامنه‌ی خود اکیداً صعودی است.

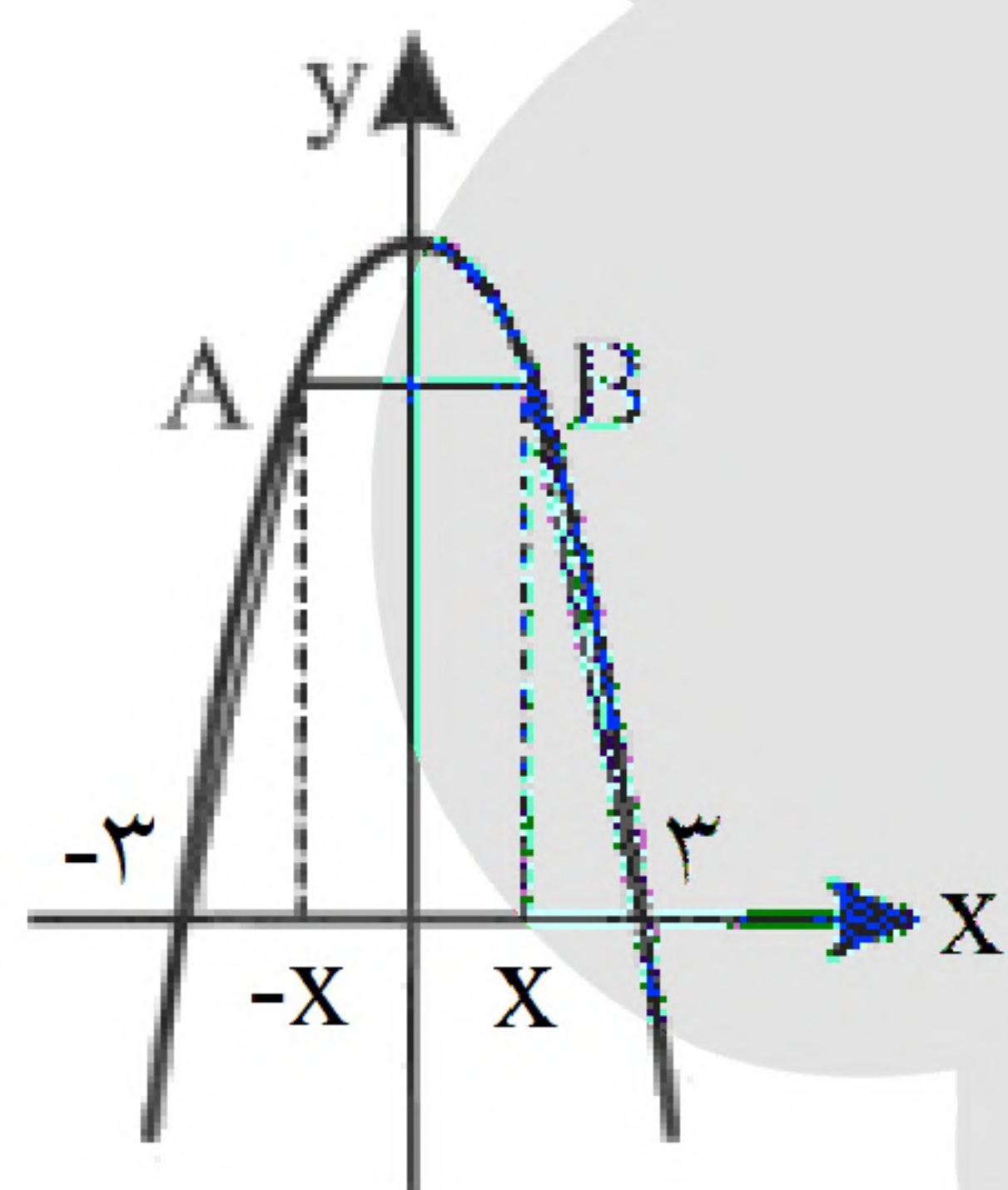
۲۵- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

ارتفاع مخروط را h و شعاع قاعده‌ی آن را r فرض کنید.

$$V = \frac{1}{3}h\pi r^2 = \frac{\pi}{3}h(36 - h^2) = \frac{\pi}{3}(36h - h^3)$$

$$V' = \frac{\pi}{3}(36 - 3h^2) = 0 \Rightarrow h = 2\sqrt{3}$$

۲۶- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.



$$\begin{aligned} S &= \frac{AB + 6}{2} \times y_B = \frac{2x + 6}{2} \times (9 - x^2) \\ &= (x + 3)^2(3 - x) \\ S' &= 2(x + 3)(3 - x) - (x + 3)^2 \\ &= (x + 3)(6 - 2x - x - 3) \\ &= (x + 3)(3 - 3x) \\ S' &= 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow S = 32 \end{aligned}$$

۲۷- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$D_f = [0, 3]$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{-1}{\sqrt{3-x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{3-x}}$$

f' همواره مثبت است.

$$\min = f(0) = -2\sqrt{3}$$

$$\max = f(3) = \sqrt{3} \Rightarrow \max \times \min = -6$$



۲۸- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.
نقاط بحرانی را محاسبه می‌کنیم:

$$f'(x) = 1 - \frac{2}{\sqrt{x+1}} \xrightarrow{f'=0} \sqrt{x+1} = 2 \Rightarrow x = 3$$

$$\begin{cases} x=3 \Rightarrow y=4 & \text{min} \\ x=-1 \Rightarrow y=8 & \text{max} \Rightarrow \frac{\max}{\min} = 2 \\ x=8 \Rightarrow y=5 \end{cases}$$

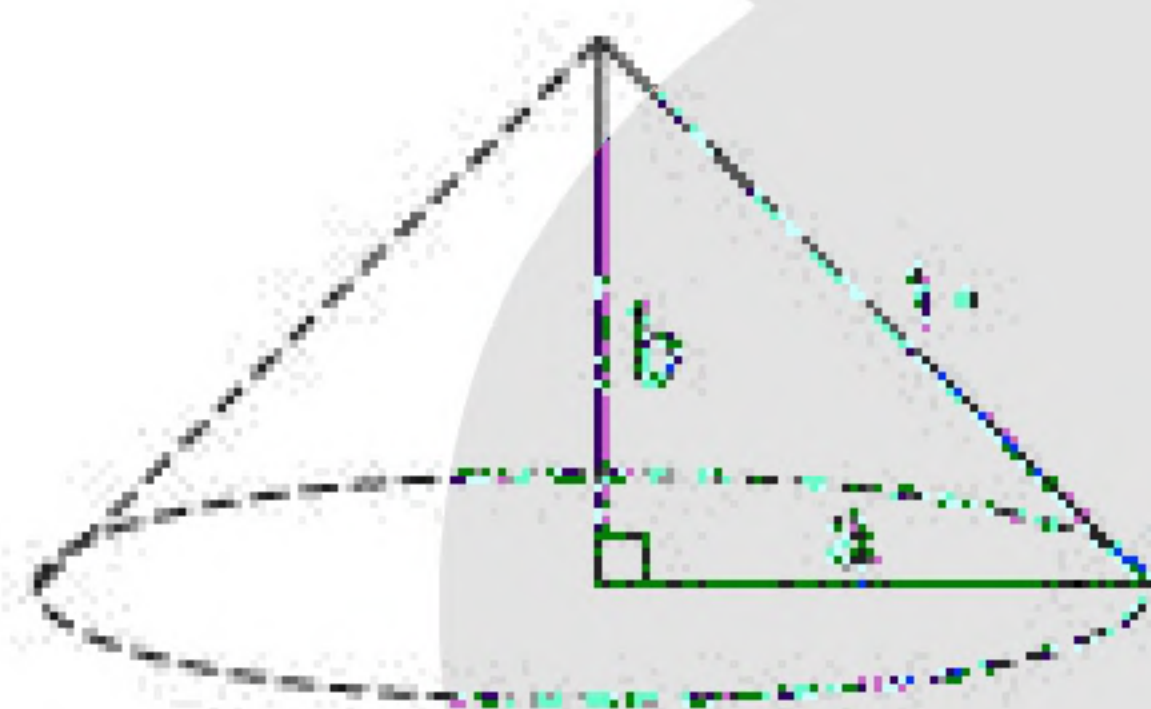
۲۹- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$x \geq 0 \Rightarrow y = x^3 - x^2 \Rightarrow y' = 3x^2 - 2x \xrightarrow{y'=0} x = 0, \frac{2}{3}$$

$$x < 0 \Rightarrow y = x^3 + x^2 \Rightarrow y' = 3x^2 + 2x \xrightarrow{y'=0} x = -\frac{2}{3}$$

سه نقطه‌ی بحرانی دارد.

۳۰- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.



$$V = \frac{\pi}{3} a^2 b$$

از طرفی داریم: $a^2 + b^2 = 100$ ، پس:

$$V = \frac{\pi}{3} (100 - b^2) b = \frac{\pi}{3} (100b - b^3) \Rightarrow V' = \frac{\pi}{3} (100 - 3b^2) = 0$$

$$\Rightarrow b^2 = \frac{100}{3} \Rightarrow b = \frac{10}{\sqrt{3}} \Rightarrow a = \frac{10\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \Rightarrow \frac{a}{b} = \sqrt{2}$$

۳۱- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. مجانب‌های قائم و افقی f^{-1} به صورت $x=2$ و $y=-1$ است پس مجانب‌های افقی و قائم f به صورت $y=2$ و $x=-1$ است پس $a=2$ و $b=1$ است.

$$\Rightarrow f(x) = \frac{2x-1}{x+1} \Rightarrow f(4) = \frac{7}{5} = 1\frac{1}{5}$$



۳۲- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. تابع را به صورت دو ضابطه‌ای می‌نویسیم:

$$y = \begin{cases} x^3 - 3x^2 & x \geq 0 \\ x^3 + 3x^2 & x < 0 \end{cases}$$

$$y' = \begin{cases} 3x^2 - 6x & x \geq 0 \\ 3x^2 + 6x & x < 0 \end{cases}$$

$$y'' = \begin{cases} 6x - 6 & x \geq 0 \\ 6x + 6 & x < 0 \end{cases}$$

x	-1	0	1	
y''	-	+	-	+
y	∧	∪	∧	∪

در بازه‌ی $(-1, 0)$ تقعر رو به بالاست.

۳۳- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. خط $y = 1$ مجانب افقی است.

$$y' = \frac{2x(x-2)^2 - 2(x-2)(x^2-1)}{(x-2)^4} = \frac{2x(x-2) - 2(x^2-1)}{(x-2)^3} = \frac{-2x+2}{(x-2)^3}$$

$$y' = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \Rightarrow y = \frac{\frac{1}{4} - 1}{\frac{27}{8}} = -\frac{1}{3}$$

فاصله $y = -\frac{1}{3}$ از $y = 1$ برابر $\frac{4}{3}$ است.

۳۴- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

دامنه تابع به صورت $[-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}]$ است.

$$y' = 1 - \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$$

$$y' = 0 \Rightarrow \sqrt{4-x^2} = x \xrightarrow{x \geq 0} 4-x^2 = x^2 \Rightarrow x = 2$$

$$\begin{cases} f(2) = 4 \\ f(-2\sqrt{2}) = -2\sqrt{2} \\ f(2\sqrt{2}) = 2\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{\max}{\min} = \frac{4}{-2\sqrt{2}} = -\sqrt{2}$$



۳۵- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$f'(x) = a\sqrt[3]{x^2} + \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}(ax + b)$$

$$۱) f'(۱) = ۰ \Rightarrow a + \frac{2(a+b)}{3} = ۰ \Rightarrow ۵a + ۲b = ۰$$

$$۲) f(۱) = -۳ \Rightarrow a + b = -۳$$

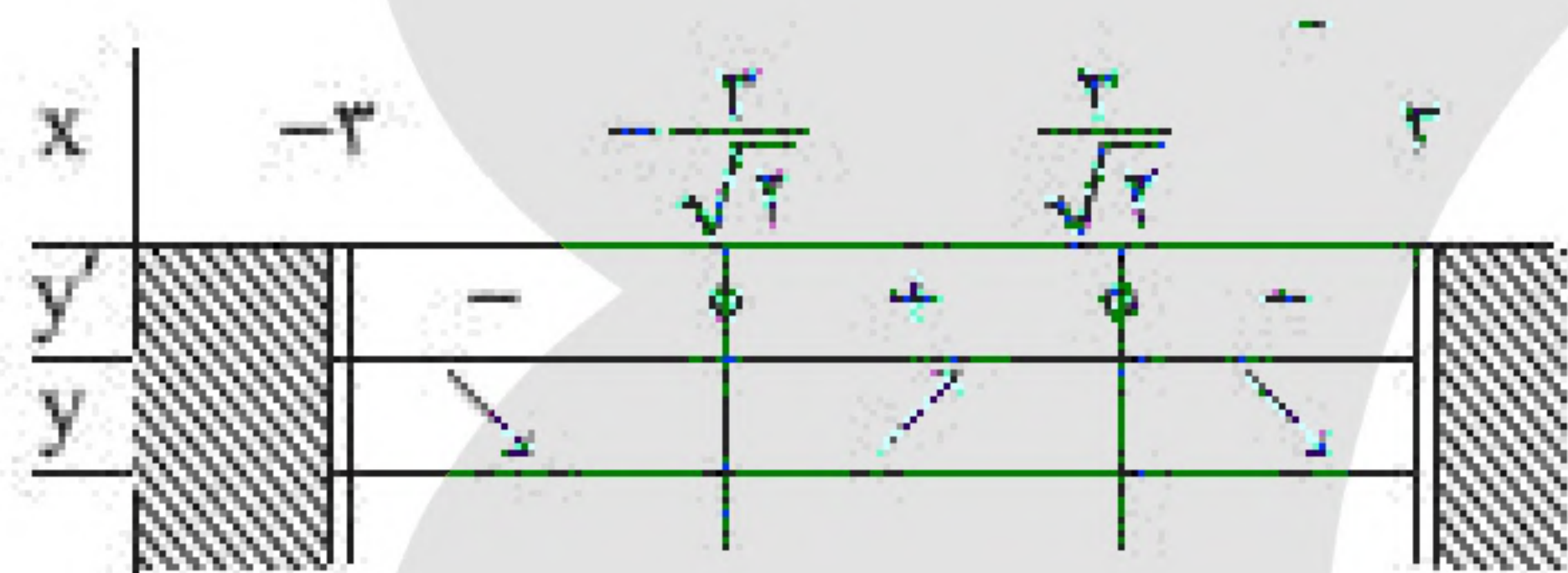
از حل دو معادله‌ی بالا، $b = -۵$ به دست می‌آید.

۳۶- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$f'(x) = (۱)\sqrt{۹-x^2} + x \cdot \frac{-2x}{2\sqrt{۹-x^2}} = \frac{۹-x^2-x^2}{\sqrt{۹-x^2}} = \frac{۹-2x^2}{\sqrt{۹-x^2}}$$

در نتیجه ریشه‌های صورت $x = \pm \frac{3}{\sqrt{2}}$ و ریشه‌های مخرج $x = \pm 3$ هستند.

تعیین علامت مشتق:



دقت کنید

۳۷- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. مقدار مشتق در نقطه عطف، شیب خط مماس را تعیین می‌کند.

$$f' = x^4 - \frac{4}{3}x^3$$

$$f'' = 4x^3 - 4x^2 = 4x^2(x-1)$$

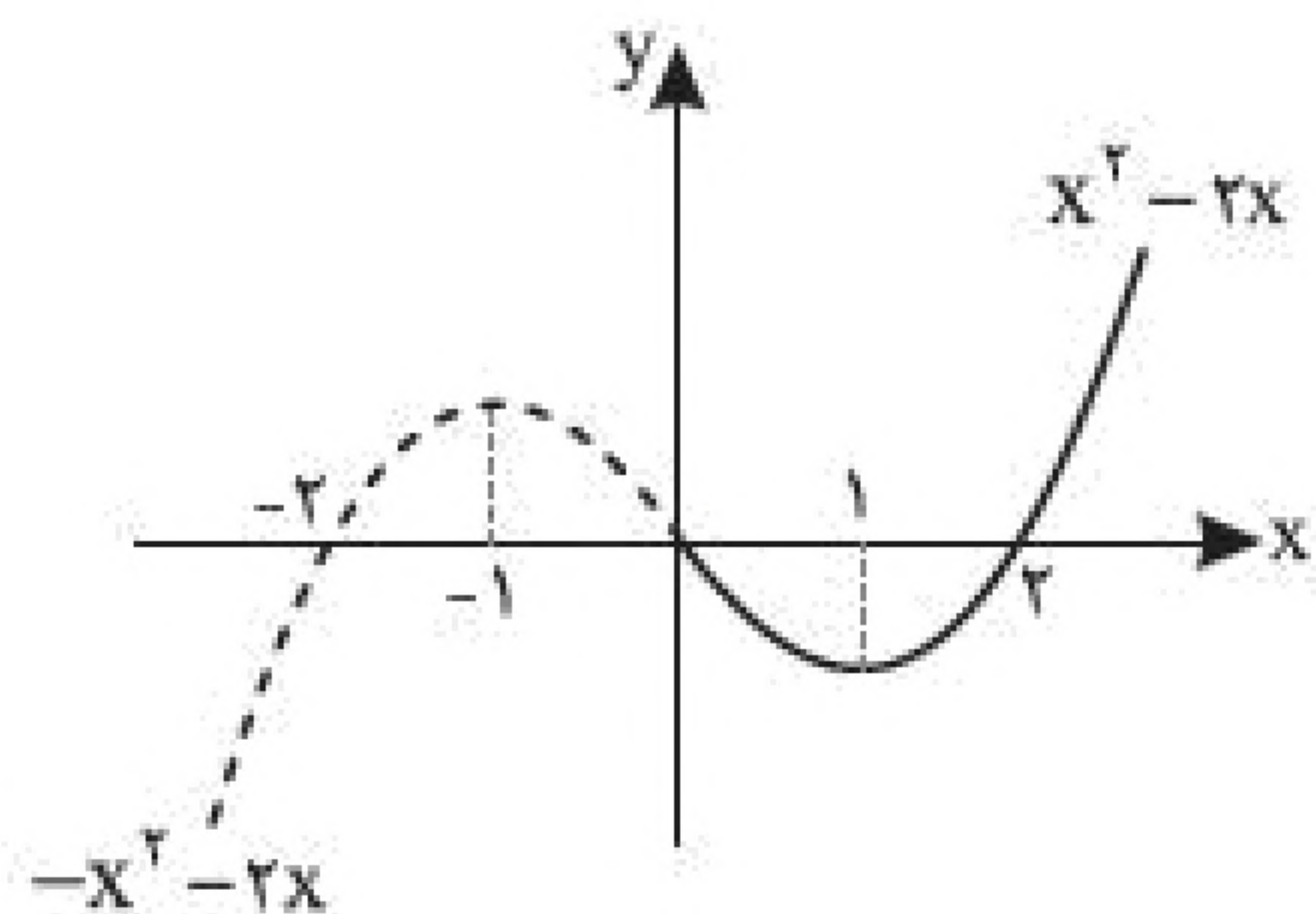
$$f'' = 0 \Rightarrow x = 0, x = 1$$

x	۰	۱
f''	-	+
f	∩	∪

در نقطه‌ی $x = ۱$ تقعر از چپ و راست ابتدا و پایین و سپس بالاست و چون $f'(۱) = -\frac{۱}{۳}$ پس f اطراف عطف نزولی است.



۳۸- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.



$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & x \geq 0 \\ -x^2 - 2x & x < 0 \end{cases}$$

با رسم تابع واضح است که قاط ماکسیمم و مینیمم نسبی دارای طولهای ۱- و ۱ هستند.

$$f(-1) = -1 + 2 = 1 \Rightarrow \max(-1, 1)$$

$$f(1) = 1 - 2 = -1 \Rightarrow \min(1, -1)$$

فاصله نقاط از هم $\rightarrow \sqrt{(-1 - 1)^2 + (1 - (-1))^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

۳۹- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$h + r = 6$$

$$V = h\pi r^2 = \pi r^2 (6 - r) = \pi (6r^2 - r^3)$$

$$V' = 0 \Rightarrow 12r - 3r^2 = 0 \Rightarrow r = 4 \Rightarrow V = \pi(96 - 64) = 32\pi$$

۴۰- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$f'(x) = 3 \times \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} - 1 = \frac{2 - \sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}}$$

نقاط $x = 0$ و $x = 8$ نقاط بحرانی اند.

x	0	8
y'	-	+
y	↘	↗

max

همان مقدار $f(8)$ است.

$$f(8) = 3\sqrt[3]{64} - 8 = 12 - 8 = 4$$