

گنجینه سوال رایگان

+ پاسخ تشریحی

یاوران دانش



راه های ارتباطی با ما:

www.Dyavari.com

۰۲۱-۷۶۷۰۳۸۵۸

۰۹۱۲-۳۴ ۹۴ ۱۳۴

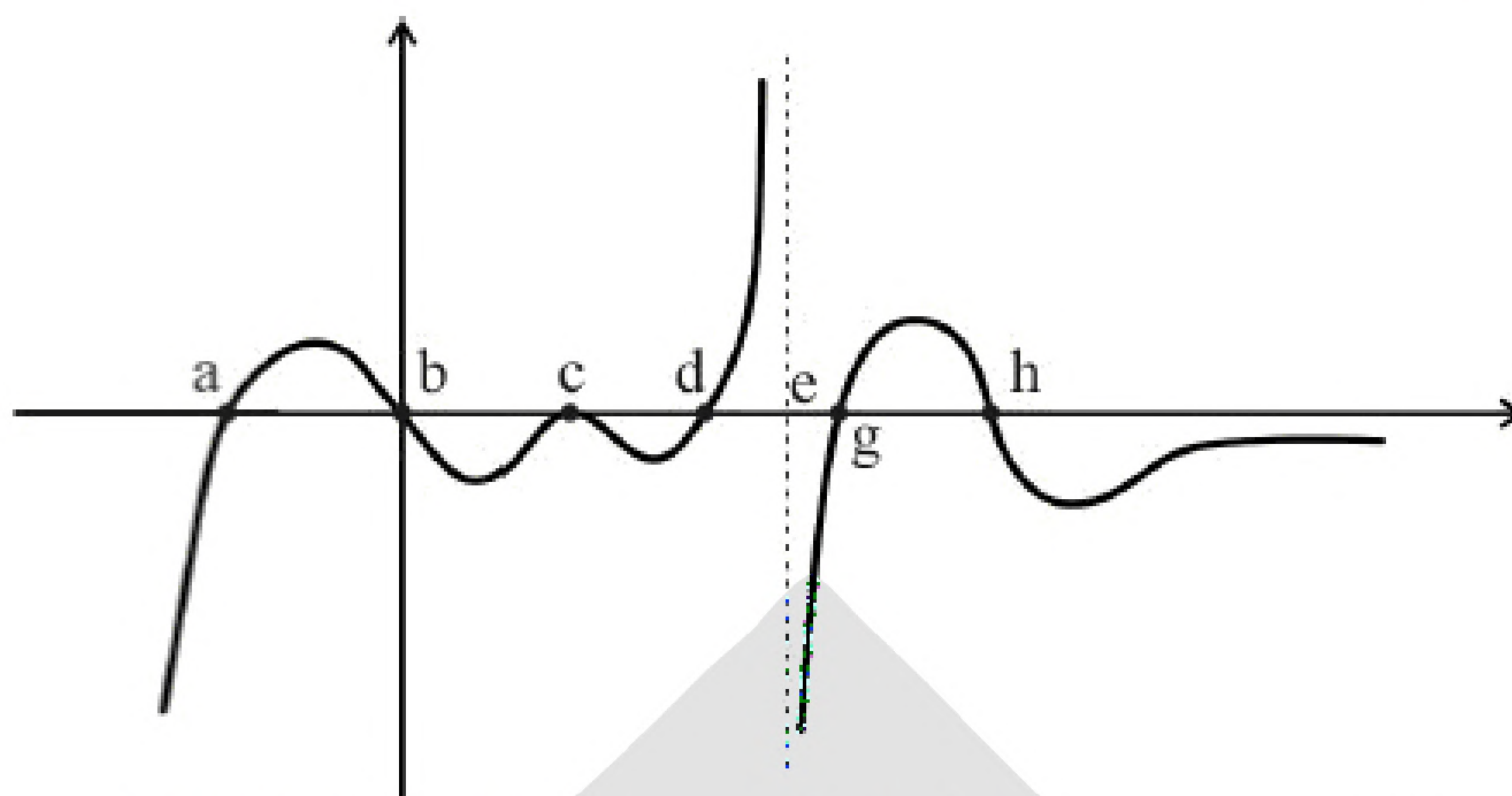


	۱	۲	۳	۴
۱ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۲ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۴ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۵ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۶ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۷ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۸ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۹ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۰ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۱ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۲ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۳ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۱۴ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۵ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۶ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۱۷ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۸ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۹ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۰ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۱ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۲۲ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۳ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۴ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۲۵ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۶ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۲۷ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۸ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۲۹ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۰ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۱ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۲ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۳ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۴ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۵ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۶ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۷ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۸ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۹ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۴۰ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>





۱- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.



(۱) در $x = a$ دارای Max نسبی است، زیرا $f'_-(a) < 0$ و $f'(a) = 0$ و $f'_+(a) > 0$

(۲) در $x = b$ دارای Min نسبی است، زیرا $f'_-(b) > 0$ و $f'(b) = 0$ و $f'_+(b) < 0$

(۳) در $x = c$ اکسترمم ندارد، زیرا علیرغم $f'(c) = 0$ تغییر علامت مشتق نداریم.

(۴) در $x = d$ دارای Max نسبی است، زیرا $f'_-(d) < 0$ و $f'(d) = 0$ و $f'_+(d) > 0$

(۵) در $x = e$ نقطه بحرانی گوشه‌ای به صورت  دارد که Max نسبی است، زیرا $f'_+(e) = -\infty$ و

$f'_-(e) = +\infty$ در این نقطه پیوسته است.

(۶) در $x = g$ دارای Max نسبی است، زیرا $f'_-(g) < 0$ و $f'(g) = 0$ و $f'_+(g) > 0$

(۷) در $x = h$ دارای Min نسبی است، زیرا $f'_-(h) > 0$ و $f'(h) = 0$ و $f'_+(h) < 0$

بنابراین تابع f در ۶ نقطه اکسترمم نسبی دارد.

۲- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. نقاط بحرانی تابع که f' در آن‌ها صفر می‌شود.

$$f'(x) = 6x^2 - 6x = 0 \Rightarrow x = 0, x = 1$$

$$\begin{cases} f(-1) = K - 5 \Rightarrow \text{min مطلق} \\ f(0) = K \\ f(1) = K - 1 \\ f(2) = K + 4 \Rightarrow \text{max مطلق} \end{cases}$$

$$P(K) = \text{حاصلضرب اکسترمم های مطلق} = (K - 5)(K + 4) = k^2 - K - 20$$

این حاصلضرب، یک تابع درجه ۲ برحسب K است که کمترین مقدار آن در $K = \frac{1}{2}$ اتفاق می‌افتد:

$$P'(K) = 0 \Rightarrow 2K - 1 = 0 \Rightarrow K = \frac{1}{2} \Rightarrow P\left(\frac{1}{2}\right) = -20/25$$



۳- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$A(2,1) \text{ مینیمم نسبی} \begin{cases} 1 = 2^3 + b(2)^2 + d \Rightarrow 4b + d = -7 \\ f'(x) = 0 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 2bx \Rightarrow 3(2)^2 + 2b(2) = 0 \end{cases}$$

$$b = -3$$

$$d = 5$$

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 5; [-4, 4]$$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x = 0 \Rightarrow 3x(x-2) = 0 \begin{cases} x = 0, f(0) = 5 \\ x = 2, f(2) = 1 \end{cases}$$

$$f(-4) = -107 \text{ مینیمم مطلق}$$

$$f(4) = 21 \text{ ماکزیمم مطلق}$$

x	-4	0	2	4
f'(x)	+	-	+	
f(x)	-107	5	1	21

$$\text{مجموع مقادیر ماکزیمم مطلق و نسبی} = 21 + 5 = 26$$

۴- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. مطابق قوانین فیزیک می‌دانیم که در حرکت با سرعت ثابت، زمان حرکت از رابطه $t = \frac{x}{V}$ به دست می‌آید که در آن x مسافت پیموده شده و V اندازه سرعت ثابت است.

$$AB \text{ مسافت} = t_1 = \frac{100 - x}{4}; 0 \leq x \leq 100$$

$$BC \text{ مسافت} = t_2 = \frac{\sqrt{x^2 + (25\sqrt{3})^2}}{2}$$

$$t = t_1 + t_2 = \frac{100 - x}{4} + \frac{\sqrt{x^2 + 1875}}{2}$$

$$t' = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \times \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1875}} = 0 \Rightarrow x = 25 \text{ متر}$$

$$t = \frac{75}{4} + \frac{50}{2} = \frac{175}{4} = 43.75 \text{ ثانیه}$$

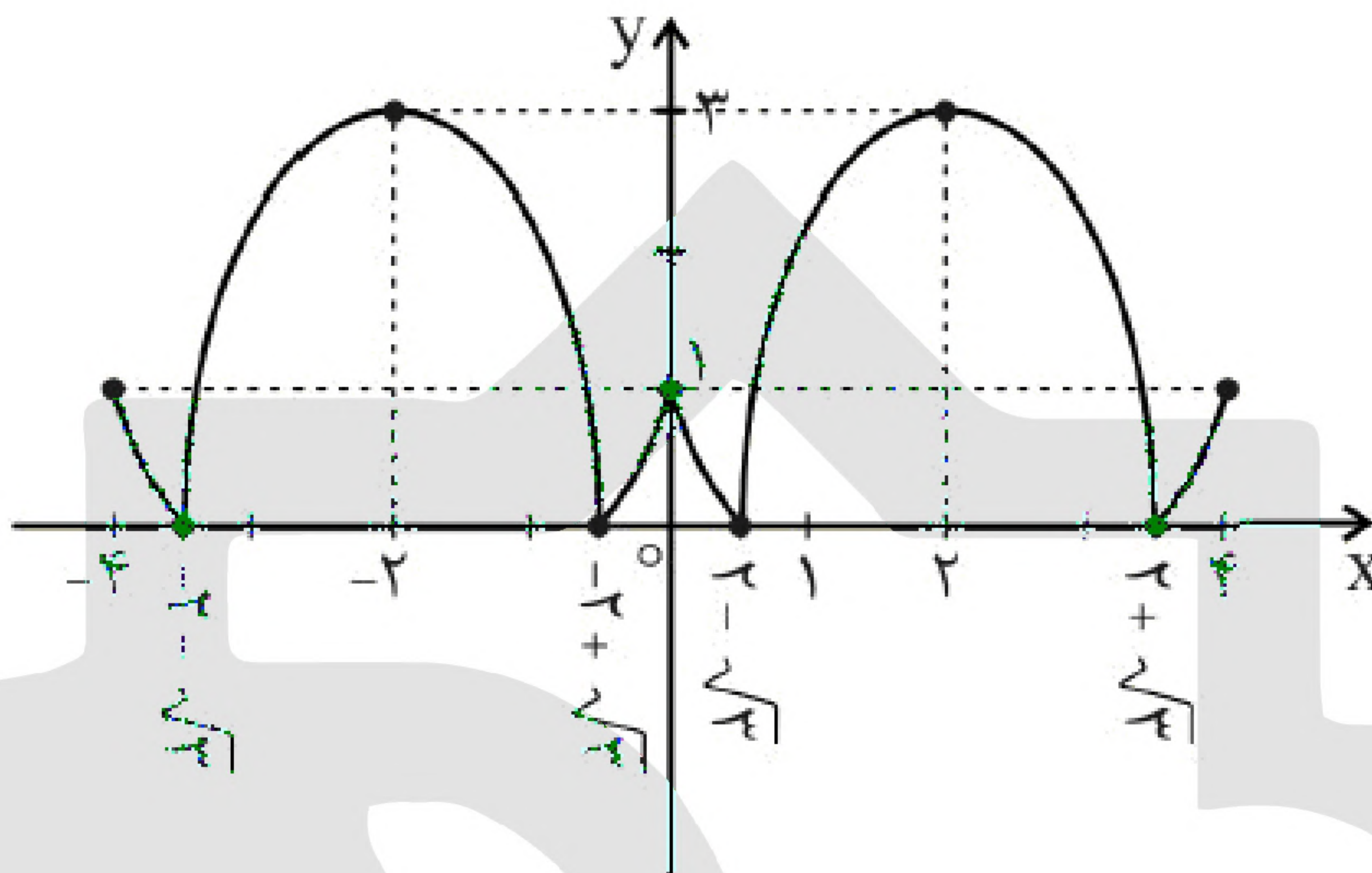


۵- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$x \geq 0 \Rightarrow f(x) = |x^2 - 4x + 1| \Rightarrow \text{مشتق عبارت درون قدرمطلق} = 0 \Rightarrow 2x - 4 = 0 \Rightarrow x = 2$$

$$x < 0 \Rightarrow f(x) = |x^2 + 4x + 1| \Rightarrow \text{مشتق عبارت درون قدرمطلق} = 0 \Rightarrow 2x + 4 = 0 \Rightarrow x = -2$$

با رسم نمودار سهمی درون قدرمطلق و سپس اعمال قدرمطلق، نمودار نهایی تابع $f(x)$ در بازه $[-4, 4]$ به صورت زیر است:



بحرانی $x = -4$

(نقطه گوشه ای) Min نسبی و مطلق، بحرانی $x = -2 - \sqrt{3}$

Max نسبی و مطلق، بحرانی $x = -2$

(نقطه گوشه ای) Min نسبی و مطلق، بحرانی $x = -2 + \sqrt{3}$

(نقطه گوشه ای) Max نسبی و بحرانی $x = 0$

(نقطه گوشه ای) Min نسبی و مطلق، بحرانی $x = 2 - \sqrt{3}$

Max نسبی و مطلق، بحرانی $x = 2$

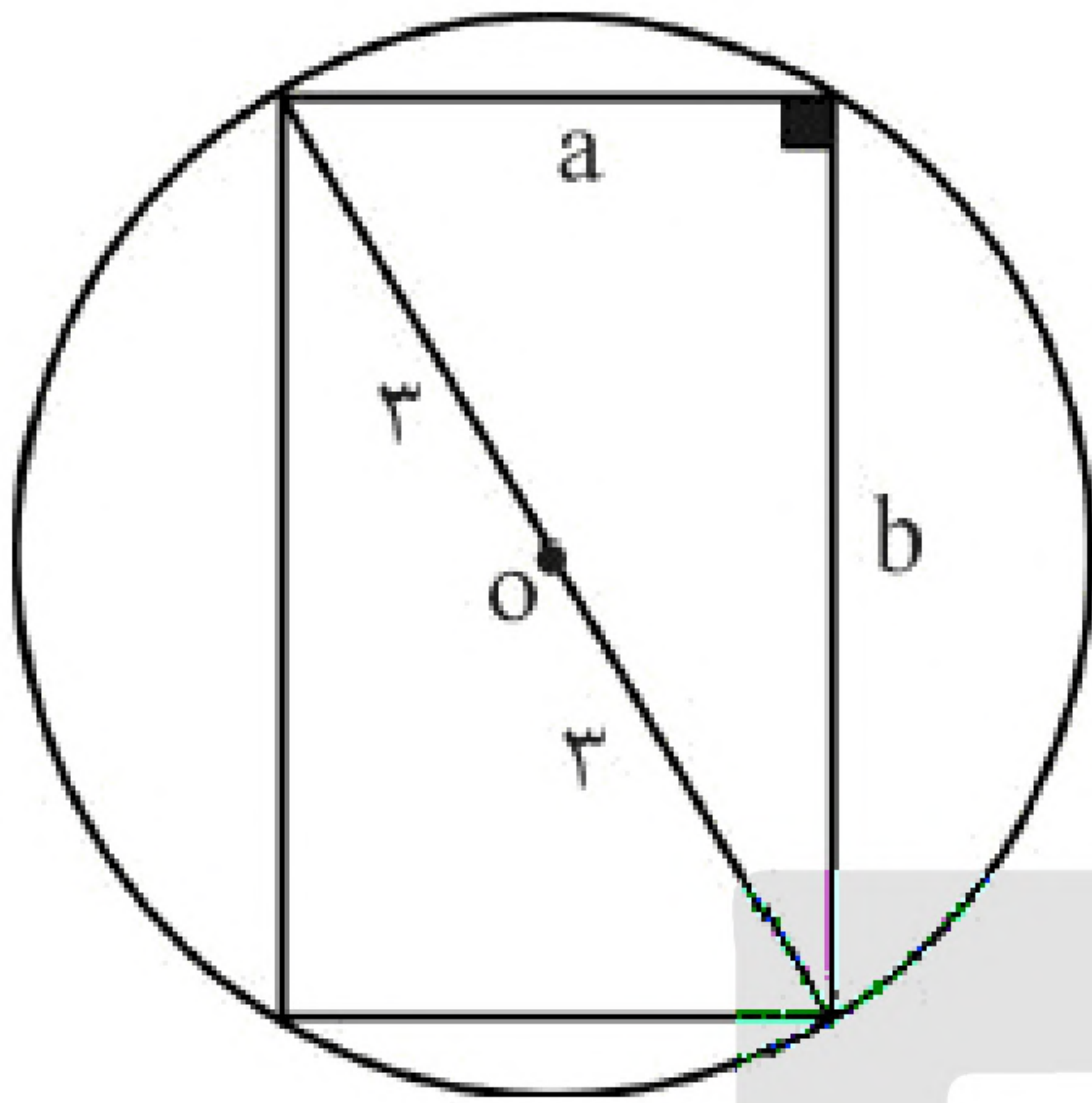
(نقطه گوشه ای) Min نسبی و مطلق و بحرانی $x = 2 + \sqrt{3}$

بحرانی $x = 4$

$$\Rightarrow \begin{cases} m = 9 \\ n = 2 \\ p = 3 \\ q = 4 \\ r = 4 \\ s = 5 \end{cases} \Rightarrow m^2 + n^2 + p^2 + q^2 + r^2 + s^2 = 151$$



۶- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. مطابق شکل، مستطیل محاط در دایره با عرض a و طول b را حول طول آن یعنی b دوران می‌دهیم تا استوانه‌ای با شعاع قاعده a و ارتفاع b حاصل شود. می‌خواهیم حجم استوانه یعنی $V = \pi a^2 b$ ماکزیمم شود. چون:



$$\left. \begin{aligned} \text{محیط دایره} &= 6\pi = 2\pi R \Rightarrow R = 3 \\ \text{قطر دایره} &= 2R = 6 \end{aligned} \right\} \Rightarrow a^2 + b^2 = 36$$

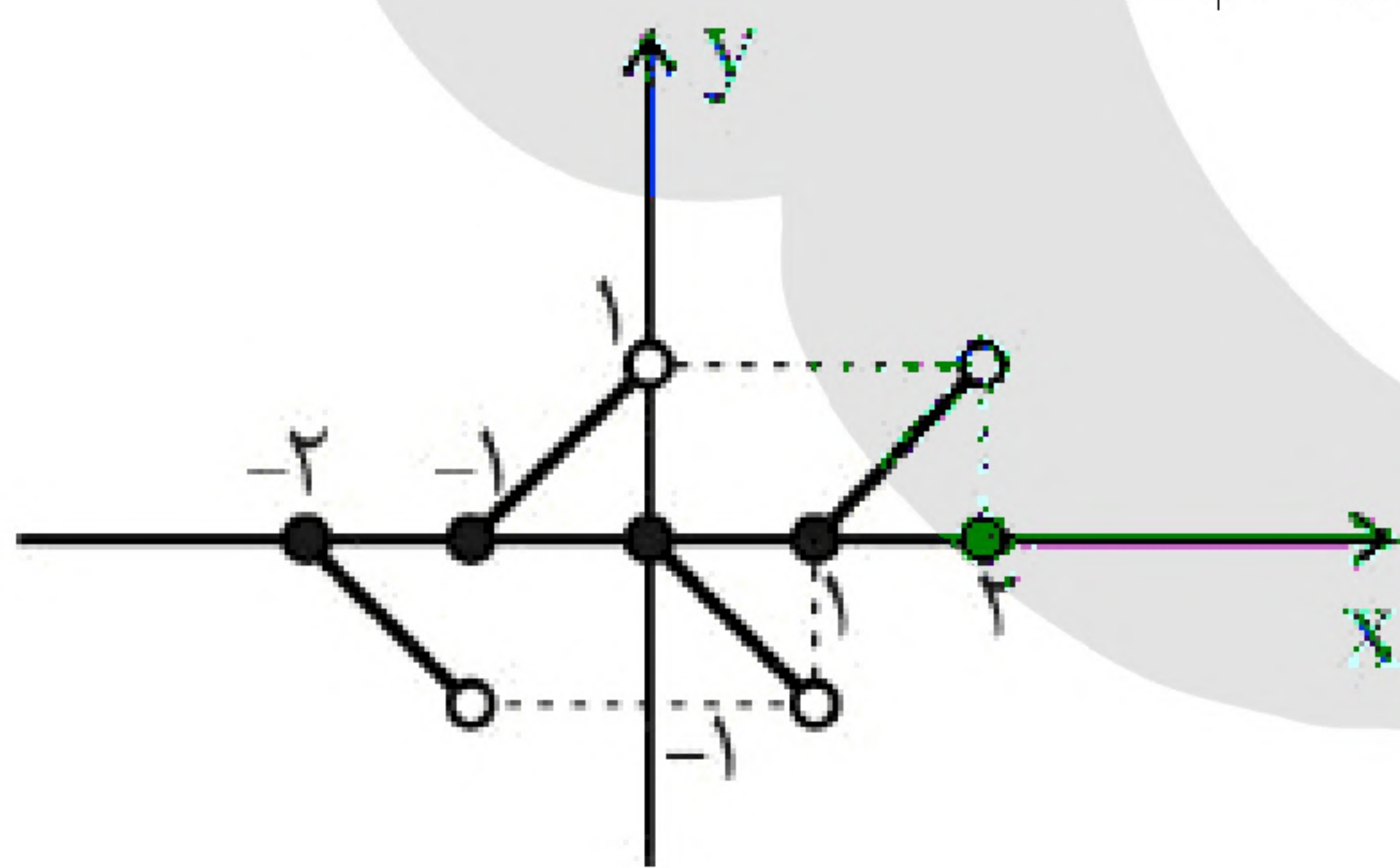
$$\Rightarrow a^2 = 36 - b^2$$

$$V = \pi a^2 b = \pi (36 - b^2) b \Rightarrow V = 36\pi b - \pi b^3$$

$$V'(b) = 36\pi - 3\pi b^2 = 0 \Rightarrow b^2 = 12 \quad \begin{cases} b = 2\sqrt{3} \\ a = 2\sqrt{6} \end{cases}$$

$$S_{\square} = a \times b = 12\sqrt{2} \quad \text{مساحت مستطیل اولیه با شرط ماکزیمم بودن حجم استوانه حاصل}$$

۷- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ابتدا نمودار تابع f را در بازه $[-2, 2]$ رسم می‌کنیم:



$$-2 \leq x < -1 \Rightarrow [x] = -2 \Rightarrow y = -2 - x$$

$$-1 \leq x < 0 \Rightarrow [x] = -1 \Rightarrow y = -1 - x$$

$$0 \leq x < 1 \Rightarrow [x] = 0 \Rightarrow y = -x$$

$$1 \leq x < 2 \Rightarrow [x] = 1 \Rightarrow y = -1 - x$$

$$x = 2 \Rightarrow y = 0$$

با توجه به نمودار، تابع f در این بازه، هیچ اکسترمم نسبی یا مطلق ندارد.



۸- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ابتدا دامنه تابع f را مشخص می‌کنیم:

$$36 - x^2 \geq 0 \Rightarrow -6 \leq x \leq 6$$

شرط اینکه تابع f در بازه موردنظر صعودی اکید باشد آن است که $f'(x) > 0$:

$$f'(x) = 2 + \frac{-x}{\sqrt{36 - x^2}} = \frac{2\sqrt{36 - x^2} - x}{\sqrt{36 - x^2}} > 0$$

مخرج کسر تابع مشتق همواره مثبت است، بنابراین:

$$2\sqrt{36 - x^2} - x > 0 \Rightarrow 2\sqrt{36 - x^2} > x$$

نامعادله فوق به ازای $-6 \leq x \leq 0$ برقرار است. به ازای $x \geq 0$:

$$4(36 - x^2) > x^2 \Rightarrow x^2 < \frac{144}{5} \Rightarrow 0 \leq x \leq \frac{12}{\sqrt{5}}$$

چون تابع در $x = 0$ پیوسته است و در نقطه $x = \frac{12}{\sqrt{5}}$ مقدار مشتق صفر می‌شود، بنابراین بازه $\left[-6, \frac{12}{\sqrt{5}}\right]$

$$a = -6, b = \frac{12}{\sqrt{5}}$$

بزرگترین بازه‌ای است که تابع f اکیداً صعودی است:

$$b\sqrt{5} - a = \frac{12}{\sqrt{5}} \times \sqrt{5} - (-6) = 12 + 6 = 18$$

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + 2a$$

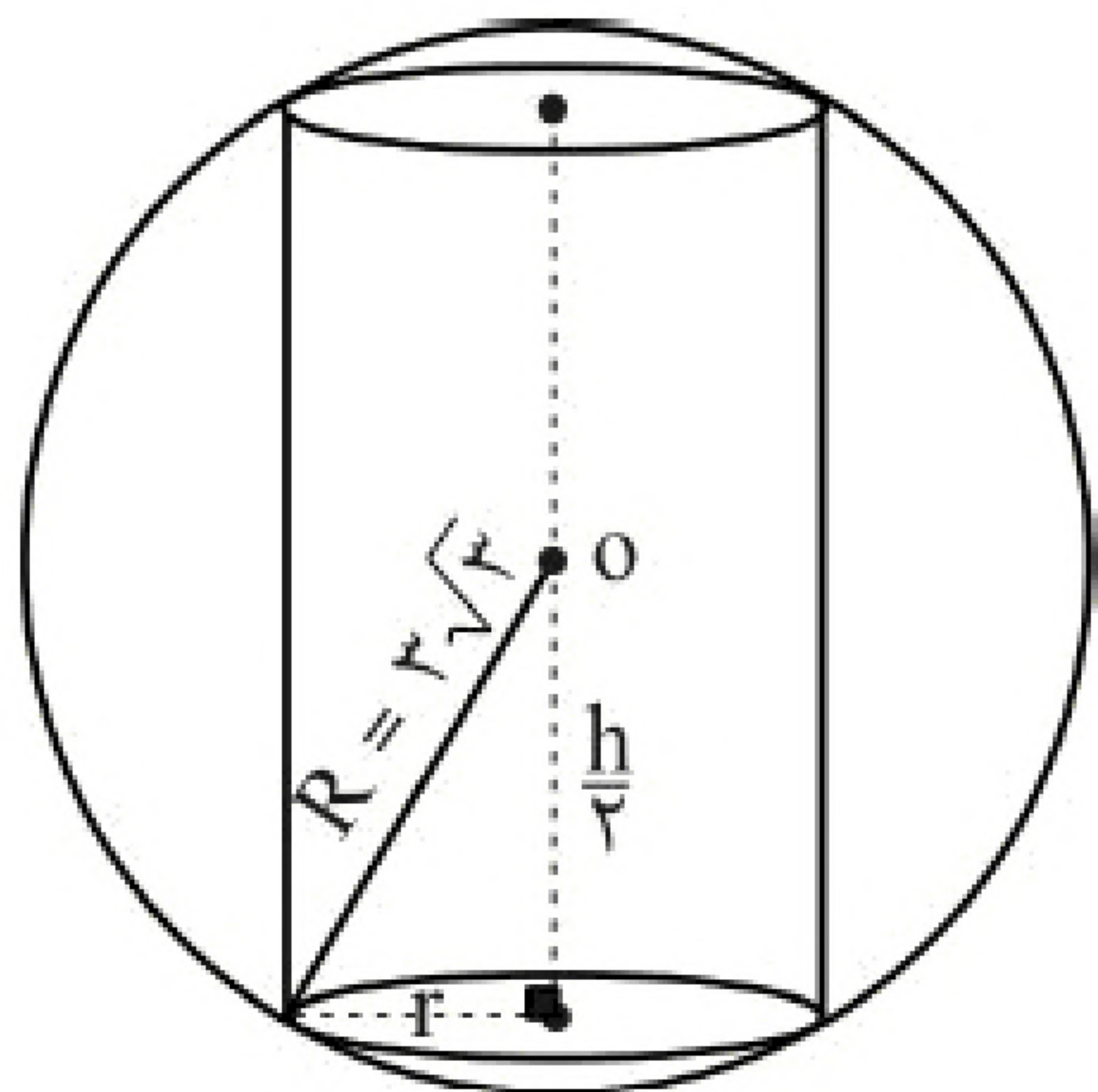
۹- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\begin{cases} f(2) = 16 \Rightarrow 16 = 8a + 4b + 2a^2 & (1) \\ f'(2) = 0 \Rightarrow 12a + 4b + 2a^2 = 0 & (2) \end{cases}$$

$$1, 2 \Rightarrow a^2 - 2a - 8 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = -2, b = 4 \Rightarrow a \times b = -8 \\ a = 4 \text{ غ ق ق غ (مینیم نسبی می شود)} \end{cases}$$



۱۰- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.



$$(6\sqrt{3})^2 = r^2 + \frac{h^2}{4} \Rightarrow r^2 = 27 - \frac{1}{4}h^2 \quad (1)$$

$$\text{استوانه } V = \pi r^2 \cdot h = \pi \left(27 - \frac{1}{4}h^2 \right) \cdot h$$

$$\text{استوانه } V_{(h)} = 27\pi h - \frac{\pi}{4}h^3 ; 0 \leq h \leq 6\sqrt{3}$$

برای یافتن نقاط بحرانی تابع حجم استوانه در بازه $[0, 6\sqrt{3}]$ ریشه‌های مشتق را به دست می‌آوریم:

$$V'(h) = 27\pi - \frac{3\pi}{4}h^2 = 0 \Rightarrow h = 6 \Rightarrow r^2 = 18$$

$$V_{\max} = \pi r^2 \cdot h = \pi \times 18 \times 6 = 108\pi$$



۱۱- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. نقاط $x = \pm 4$ نقاط انتهایی بازه هستند (۲ نقطه بحرانی) برای یافتن اکسترمم‌های مطلق و نسبی باید تابع مشتق را بررسی کنیم:

$$f(x) = |x^2 - x - 6| = \begin{cases} x^2 - x - 6; & x \leq -2 \text{ یا } x \geq 3 \\ -x + x + 6; & -2 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 2x - 1; & x < -2 \text{ یا } x > 3 \\ 1 - 2x; & -2 < x < 3 \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} f'_-(-2) = -5 \\ f'_+(-2) = 5 \end{array} \right\} \Rightarrow x = -2 \text{ در } f \text{ مشتق‌ناپذیر است (بحرانی)}$$

$$\left. \begin{array}{l} f'_-(3) = -5 \\ f'_+(3) = 5 \end{array} \right\} \Rightarrow x = 3 \text{ در } f \text{ مشتق‌ناپذیر است (بحرانی)}$$

$$f'\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \text{ بحرانی}$$

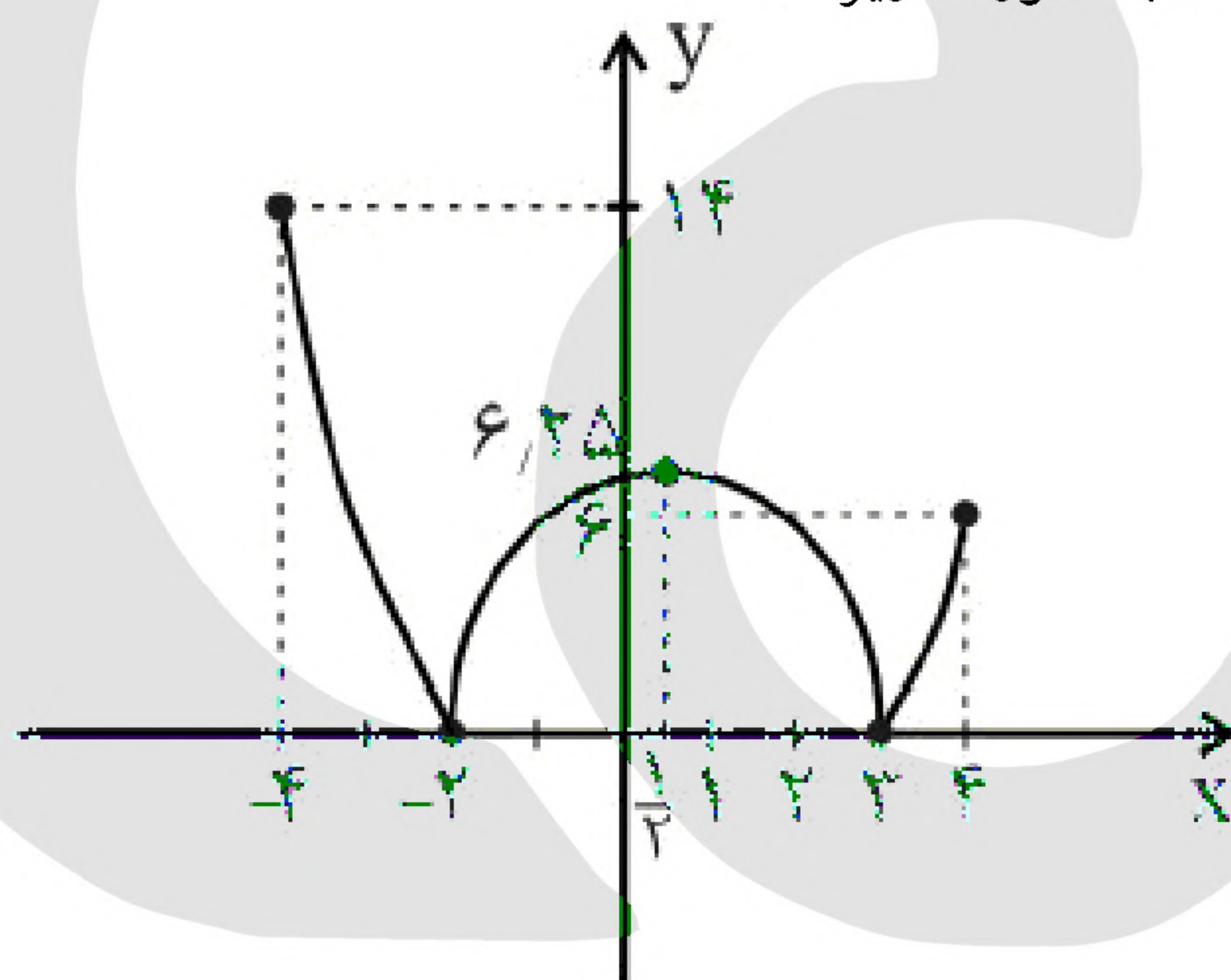
بنابراین: تابع f در ۵ نقطه $x = \pm 4$ و $x = -2$ و $x = \frac{1}{2}$ و $x = 3$ بحرانی است. لذا $a = 5$.

$f(-4) = 4$	$f(-2) = 0$	$f\left(\frac{1}{2}\right) = 6/25$	$f(3) = 0$	$f(4) = 6$
↓	↓	↓	↓	↓
max مطلق (بحرانی)	min مطلق و نسبی (بحرانی)	max نسبی	min مطلق و نسبی (بحرانی)	فقط بحرانی

$$a = 5, b = 1, c = 2, d = 1, e = 2 \quad (\text{بحرانی})$$

$$a + 2b + 3c + 4d + 5e = 5 + 2(1) + 3(2) + 4(1) + 5(2) = 27$$

نمودار نهایی تابع در بازه $[-4, 4]$ به صورت زیر است:





«بانک سوال مؤسسه یاوران دانش»

۱۲- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$f: \text{دامنه تابع } f: \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^4 \geq 0 \Rightarrow \frac{1}{4}x^2(2 - x^2) \geq 0$$

همواره نامنفی

$$2 - x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \leq 2 \Rightarrow -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2} \Rightarrow D_f = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$$

نقاط ابتدا و انتهای بازه بسته D_f خود بحرانی اند؛ زیرا در $x = \sqrt{2}$ مشتق راست و در $x = -\sqrt{2}$ مشتق چپ وجود ندارد.

$$f(x) = \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^4\right)^{\frac{1}{4}} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^4\right)^{-\frac{3}{4}}(x - x^3)$$

$$f'(x) = \frac{x - x^3}{4\sqrt[4]{\left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^4\right)^3}} \xrightarrow{\text{صورت} = 0} x = 0, x = 1, x = -1 \Rightarrow f' = 0$$

$$\xrightarrow{\text{مخرج} = 0} x = 0, x = \sqrt{2}, x = -\sqrt{2} \Rightarrow f' \text{ وجود ندارد}$$

با توجه به تعریف مشتق در $x = 0$ به صورت:

$$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[4]{\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^4} - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[4]{x^2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}x^2\right)}}{x}$$

حاصل این حد $f'_+(0) = +\infty$ و $f'_-(0) = -\infty$ و بنابراین نقطه بحرانی است. این تابع با این شرایط در پنج نقطه $\{-\sqrt{2}, -1, 0, 1, \sqrt{2}\}$ بحرانی است.

۱۳- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. تابع f در بازه $[-4, 3]$ پیوسته و مشتق پذیر است:

$$f'(x) = x^2 - 2x - 15 = 0 \quad \begin{cases} \text{در بازه نیست (غ ق ق)} \\ x = 5 \\ x = -3 \Rightarrow f(-3) = 34 \end{cases}$$

$$f(-4) = \frac{89}{3} \approx 29.67$$

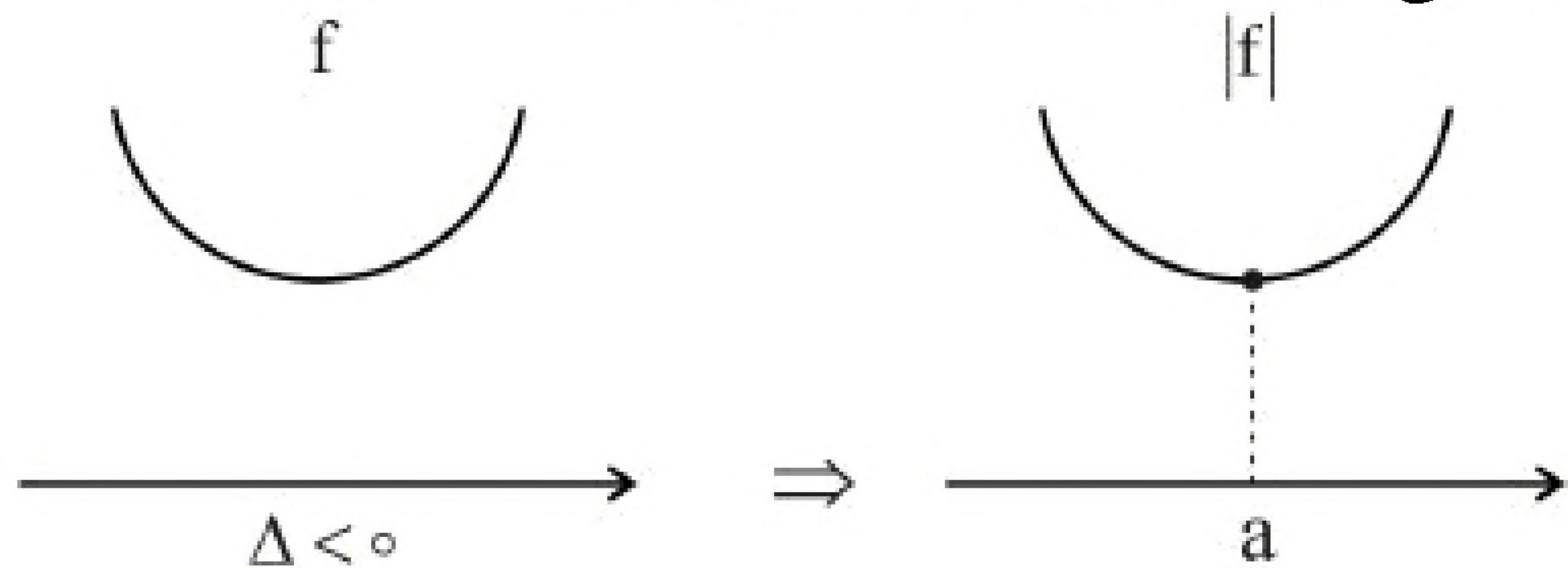
$$f(3) = -38 \Rightarrow \text{Min مطلق}$$

$$f(-3) = 34 \Rightarrow \text{Max مطلق}$$

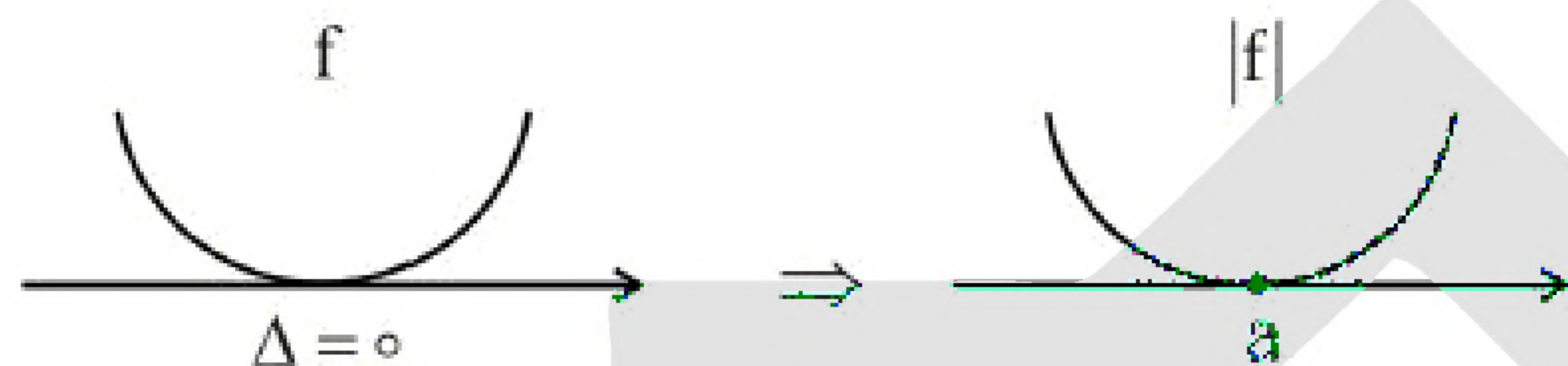
$$(72 = 34 - (-38) = \text{تفاوت مقادیر ماکزیمم و مینیمم})$$



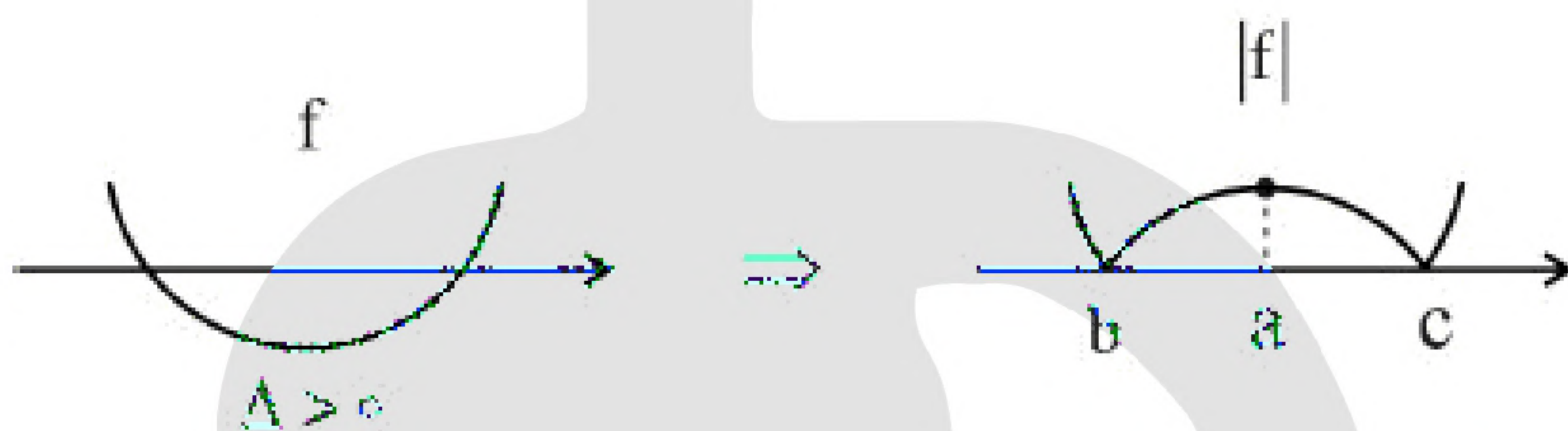
۱۴- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. برای نمودار قدرمطلق یک تابع درجه دو، سه حالت متصور است:



دارای یک نقطهٔ مینیمم نسبی در $x = a$ است.



دارای یک نقطهٔ مینیمم نسبی در $x = a$ است.



دارای دو نقطهٔ مینیمم نسبی در ریشه‌های f یعنی $x = b$ و $x = c$ است.

(واضح است در حالتی که در دهانهٔ نمودار درجه دو به سمت پایین باشد هم همین حالات تکرار می‌شود.)
چون می‌خواهیم که تابع یک نقطهٔ مینیمم نسبی داشته باشد، پس باید دو حالت اول اتفاق افتاده باشد، یعنی:

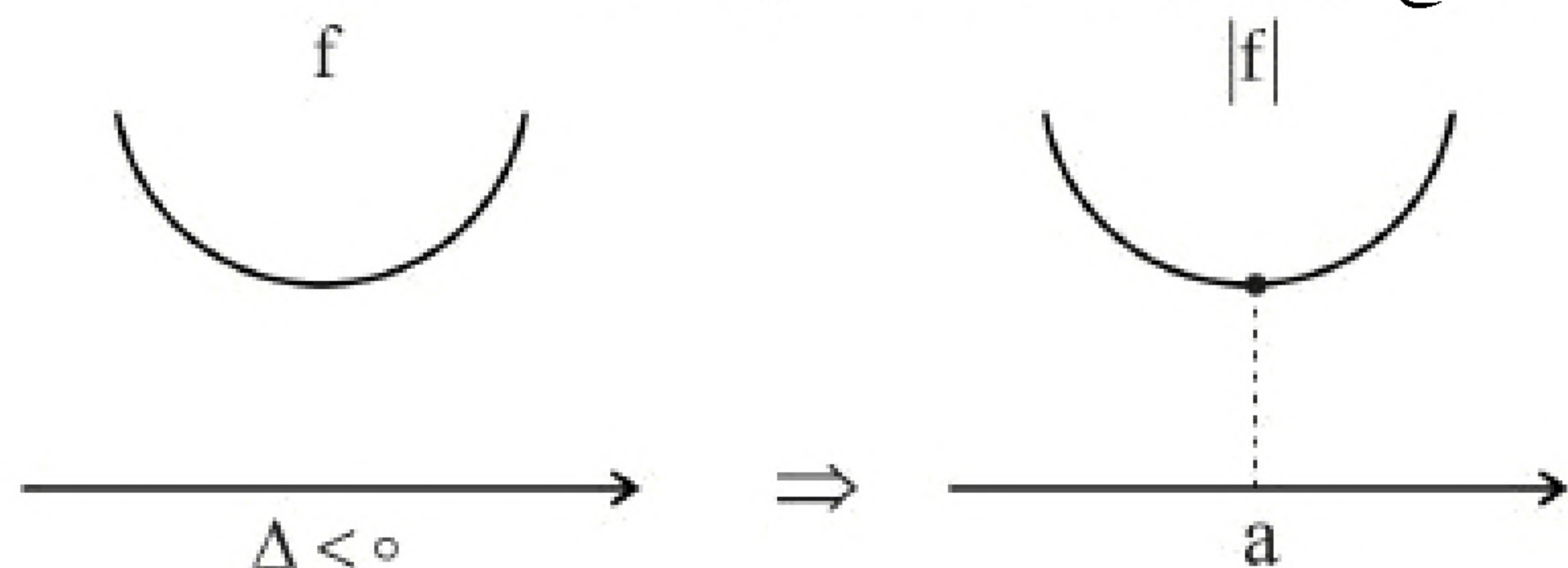
$$\Delta \leq 0 \Rightarrow (m-1)^2 - 4(m-1) \leq 0 \Rightarrow m^2 - 6m + 5 \leq 0 \Rightarrow 1 \leq m \leq 5$$

دقت کنید که به ازای $m = 1$ ، ضریب x^2 در تابع درجه دو، برابر با صفر شده و این تابع از فرم درجه دو خارج می‌شود و به صورت تابع ثابت $y = 1$ درمی‌آید که دارای بی‌شمار نقطه مینیمم نسبی است و حالت مطلوب این تست نیست.

پس $1 < m \leq 5$ ، قابل قبول است و چهار مقدار صحیح برای m وجود دارد.



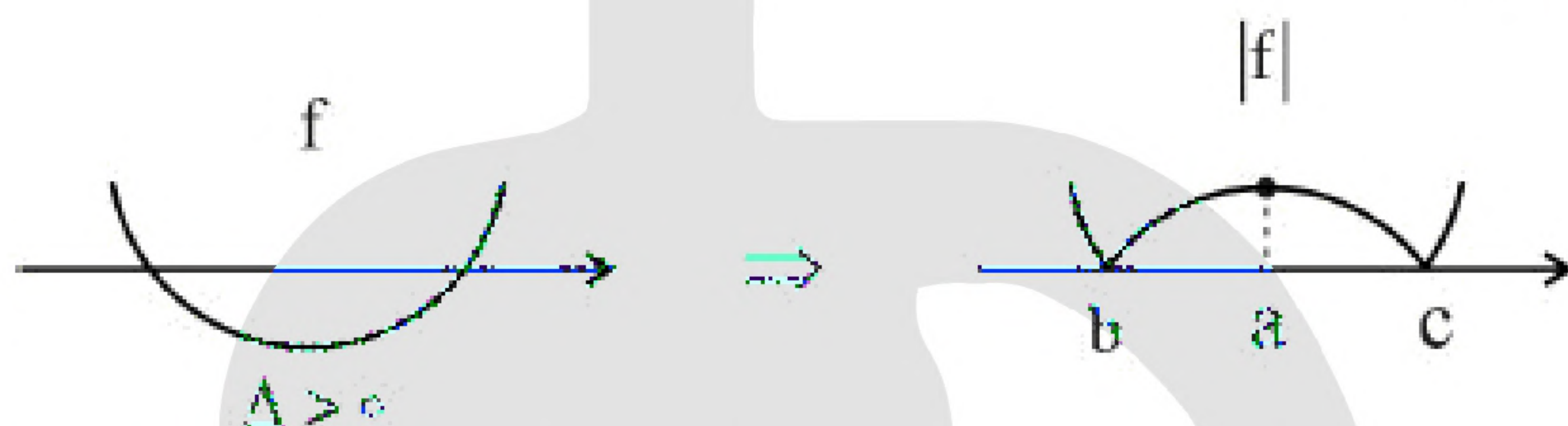
۱۵- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. برای نمودار قدرمطلق یک تابع درجه دو، سه حالت متصور است:



دارای یک نقطه بحرانی با مشتق صفر در $x = a$ است.



دارای یک نقطه بحرانی با مشتق صفر در $x = a$ است.



دارای یک نقطه بحرانی با مشتق صفر در $x = a$ و دو نقطه بحرانی گوشه و مشتقناپذیر در ریشه‌های f یعنی $x = b$ و $x = c$ است.

(واضح است در حالتی که در دهانه نمودار درجه دو به سمت پایین باشد هم همین حالات تکرار می‌شود.)

چون می‌خواهیم که تابع یک نقطه بحرانی داشته باشد، پس باید دو حالت اول اتفاق افتاده باشد، یعنی:

$$\Delta \leq 0 \Rightarrow (m+3)^2 - 4(m+3) \leq 0 \Rightarrow m^2 + 2m - 3 \leq 0 \Rightarrow -3 \leq m \leq 1$$

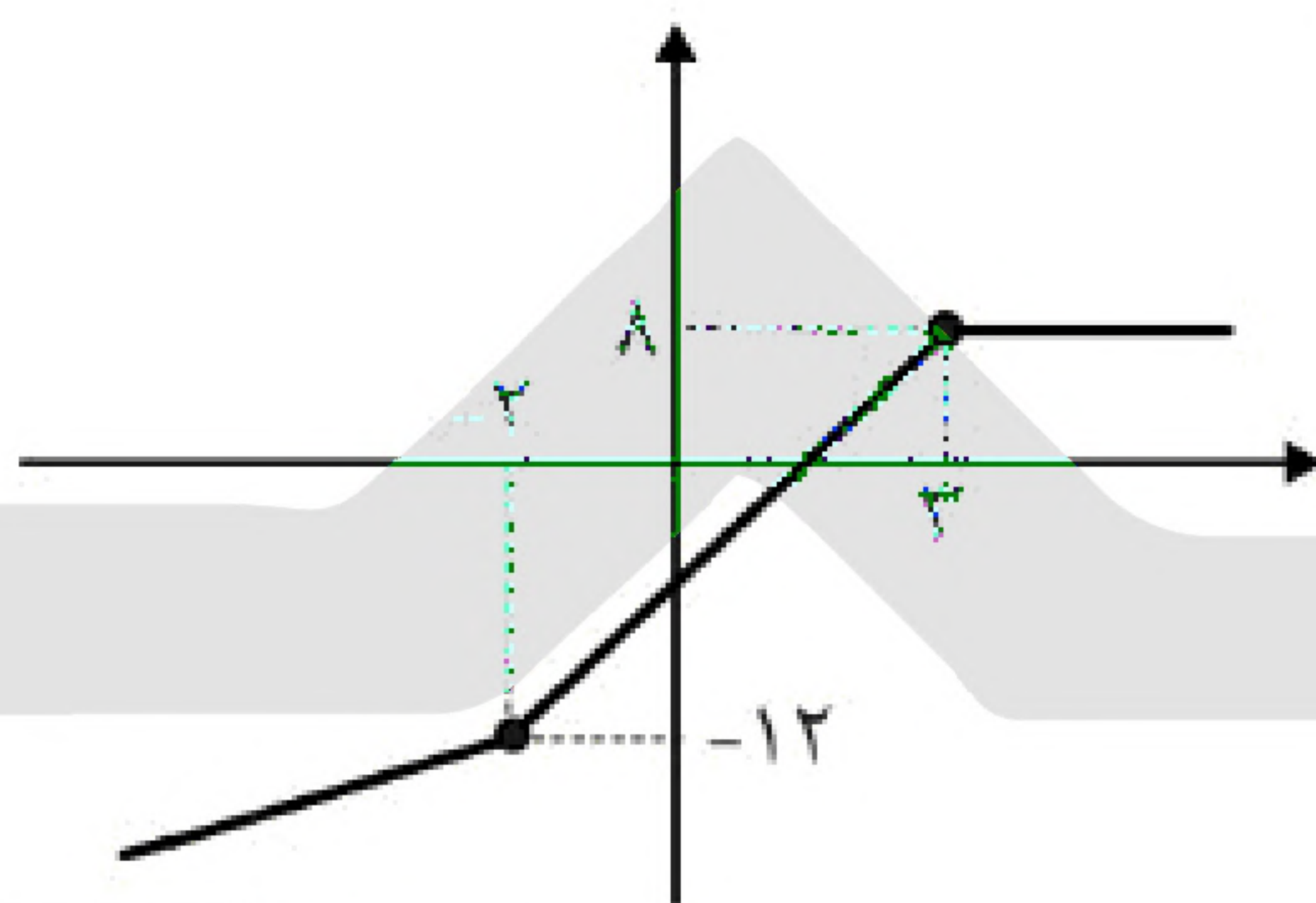
دقت کنید که به ازای $m = -3$ ، ضریب x^2 در تابع درجه دو، برابر با صفر شده و این تابع از فرم درجه دو خارج می‌شود و به صورت تابع ثابت $y = 1$ درمی‌آید که دارای بی‌شمار نقطه بحرانی است و حالت مطلوب این تست نیست. پس $-3 < m \leq 1$ ، قابل قبول است و چهار مقدار صحیح برای m وجود دارد.



۱۶- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. دقت کنید که بزرگترین بازه‌ای که تابع f در آن صعودی است را به دست آوریم.
تابع به صورت $f(x) = |x+2| - |2x-6| + x$ است. به کمک ریشه‌های داخل قدرمطلق $(x = 3, x = -2)$ محور اعداد را تقسیم‌بندی کرده و تکلیف قدرمطلق‌ها را روشن می‌کنیم:

$$\begin{aligned} x < -2 &\Rightarrow (-x-2) + (2x+6) + x = 2x-8 \\ -2 \leq x < 3 &\Rightarrow (x+2) + (2x-6) + x = 4x-4 \\ 3 \leq x &\Rightarrow (x+2) - (2x-6) + x = 8 \end{aligned}$$

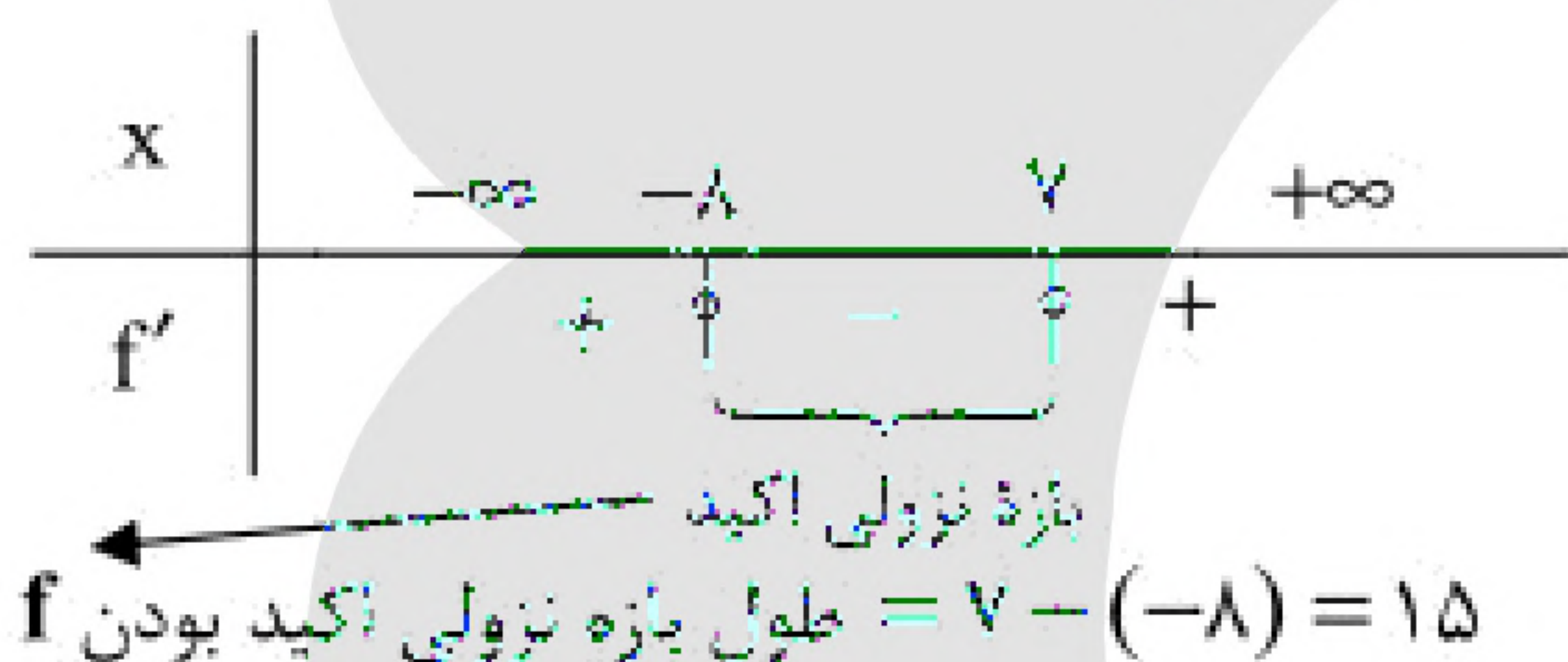
پس نمودار تابع به این صورت است:



واضح است که تابع در بازه $(-\infty, 3)$ اکیداً صعودی و در $(-\infty, +\infty)$ صعودی است.

۱۷- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$f'(x) = x^2 + x - 56 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -8 \\ x = 7 \end{cases}$$



۱۸- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

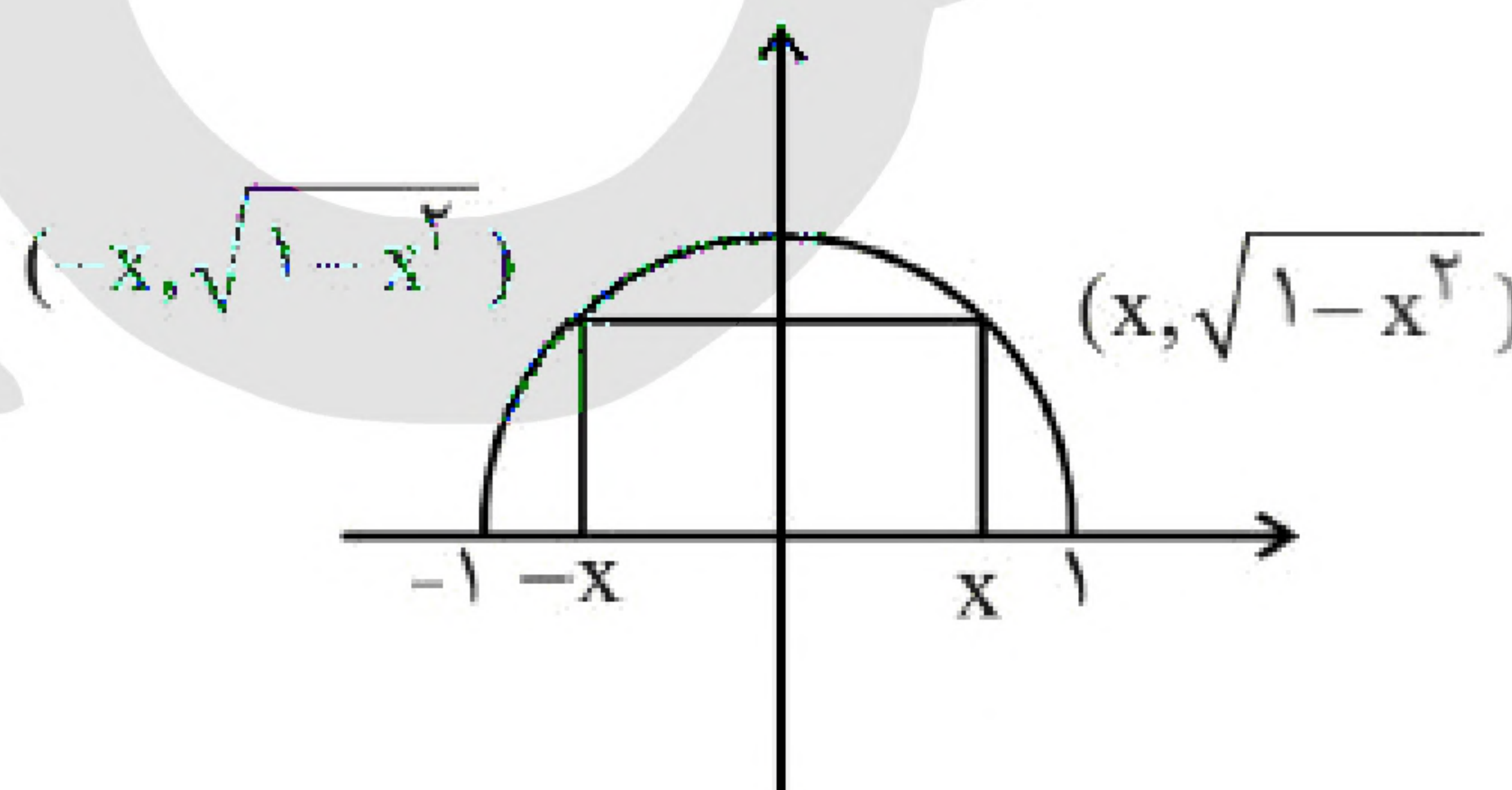
$$S_{ABCD} = 2x \cdot \sqrt{1-x^2}$$

$$S' = 2\sqrt{1-x^2} + \frac{(-2x)(2x)}{2\sqrt{1-x^2}} = 0$$

$$S' = \frac{2(1-x^2) - 2x^2}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{-2x^2 + 2}{\sqrt{1-x^2}} = 0$$

$$\Rightarrow x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$S = 2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{2}} = \sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 1$$





$$f(x) = x^3 - ax^2 - 9x$$

$$f'(x) = 3x^2 - 2ax - 9$$

$$x' + x'' = -\frac{2a}{3} = 2 \Rightarrow a = 3 \Rightarrow \begin{cases} f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x \\ f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 \end{cases}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 3 \end{cases} \quad \text{طول اکسترم‌های نسبی}$$

$$\begin{cases} f(-1) = 5 \\ f(3) = -27 \end{cases} \Rightarrow \text{عرض اکسترم‌های نسبی} \Rightarrow 5 + (-27) = -22$$

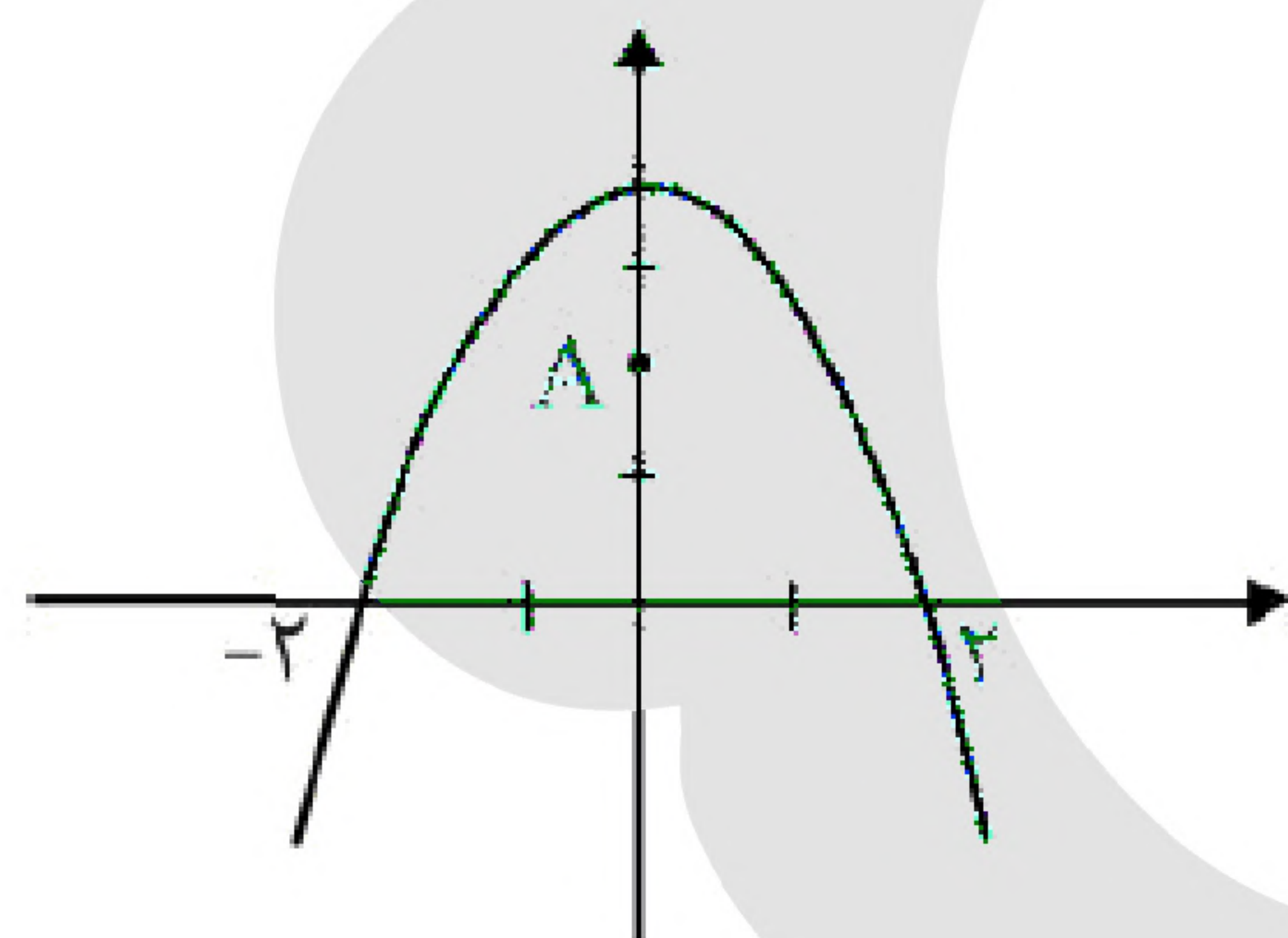
$$f'(x) = 3x^2 - 12 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \checkmark \\ x = -2 \times \text{در بازه نیست} \end{cases}$$

$$x = 1 \Rightarrow y = k - 11$$

$$\begin{cases} x = 2 \Rightarrow y = k - 16 \text{ min} \\ x = 3 \Rightarrow y = k - 9 \text{ max} \end{cases} \Rightarrow k - 9 = 2(k - 16) \Rightarrow k = 23$$

$$f(x) = x^3 - 12x + 23 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 12 \Rightarrow f'' = 6x = 0 \Rightarrow x = 0, y = 23$$

$$\Rightarrow \text{فاصله تا مبدا مختصات} \quad I(0, 23) \xrightarrow{\quad} OI = 23$$



$$y = -x^2 + 4, A(0, 2), B(x, y) \in f$$

$$d = \sqrt{(x - 0)^2 + (y - 2)^2} \quad \text{کم‌ترین مقدار باشد}$$

$$d = \sqrt{x^2 + (-x^2 + 4 - 2)^2} = \sqrt{x^2 + (2 - x^2)^2}$$

$$d = \sqrt{x^4 - 3x^2 + 4}$$

$$d' = \frac{4x^3 - 6x}{2\sqrt{x^4 - 3x^2 + 4}} = 0 \Rightarrow 4x^3 - 6x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = \frac{3}{2} \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{3}{2}} \end{cases}$$

$$x = 0 \Rightarrow y = 4 \Rightarrow d = 2$$

$$x = \pm\sqrt{\frac{3}{2}} \Rightarrow y = \frac{5}{2} \Rightarrow d = \frac{\sqrt{7}}{2} \quad \text{کم‌ترین مقدار}$$

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{5}{2}\right), \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{5}{2}\right)$$

$$\frac{5}{2} + \frac{5}{2} = 5$$

۱۹- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

۲۰- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

۲۱- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.



۲۲- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. اگر حاصل ضرب دو مقدار مثبت برابر عدد ثابتی باشد، حاصل جمع آن دو عدد وقتی می‌نیمم است که آن دو عدد با هم برابر باشند.

$$x \cdot y = 256 \Rightarrow y = \frac{256}{x}$$

$$z = x + y \Rightarrow z = x + \frac{256}{x} = \frac{x^2 + 256}{x}$$

می‌نیمم باشد

$$Z' = \frac{2x^2 - x^2 - 256}{x^2} = 0 \Rightarrow x^2 - 256 = 0 \Rightarrow x = 16 \Rightarrow y = 16$$

$$(d : \text{ قطر}) \Rightarrow d^2 = 16^2 + 16^2 = 256 + 256 = 512 \Rightarrow d = 16\sqrt{2}$$

$$y = \frac{x^2 - x - 1}{x^2 + x + 1}$$

$$y = \frac{x^2 + x + 1 - 2x - 2}{x^2 + x + 1} = 1 + \frac{-2x - 2}{x^2 + x + 1}$$

$$y' = \frac{-2(x^2 + x + 1) - (2x + 1)(-2x - 2)}{(x^2 + x + 1)^2} = 0$$

$$-2x^2 - \cancel{2x} - \cancel{2} + 4x^2 + 4x + \cancel{2x} + 2 = 0$$

$$2x^2 + 4x = 0 \Rightarrow 2x(x + 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \end{cases}$$

طول نقاط بحرانی

\nearrow

$$\frac{5}{3} - (-1) = \frac{8}{3}$$

۲۳- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.



۲۴- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(a-1)x^2 + bx}{x^2 + 4} = 0 \Rightarrow a-1 = 0 \Rightarrow a = 1$$

$$f(x) = \frac{bx}{x^2 + 4}$$

$$f'(x) = \frac{b(x^2 + 4) - 2bx^2}{(x^2 + 4)^2} = 0 \Rightarrow -bx^2 + 4b = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$$

طول نقاط اکسترمم نسبی تابع

$$f(2) = 1 \Rightarrow \frac{b(2)}{2^2 + 4} = 1 \Rightarrow b = 4 \quad a + b = 1 + 4 = 5$$

$$f(x) = (x-1)\sqrt[3]{x^2} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=0 \end{cases}$$

ریشه‌های تابع

$$f'(x) = \frac{5x-2}{3\sqrt[3]{x}} = 0 \Rightarrow x = \frac{2}{5} \Rightarrow x = 0, x = \frac{2}{5}$$

طول نقاط بحرانی تابع

x	$-\infty$	-1	0	$\frac{2}{5}$	1	$+\infty$		
y'			$+$	$-\infty$	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	-2	0	$-\frac{1}{5}$	0	$+\infty$		

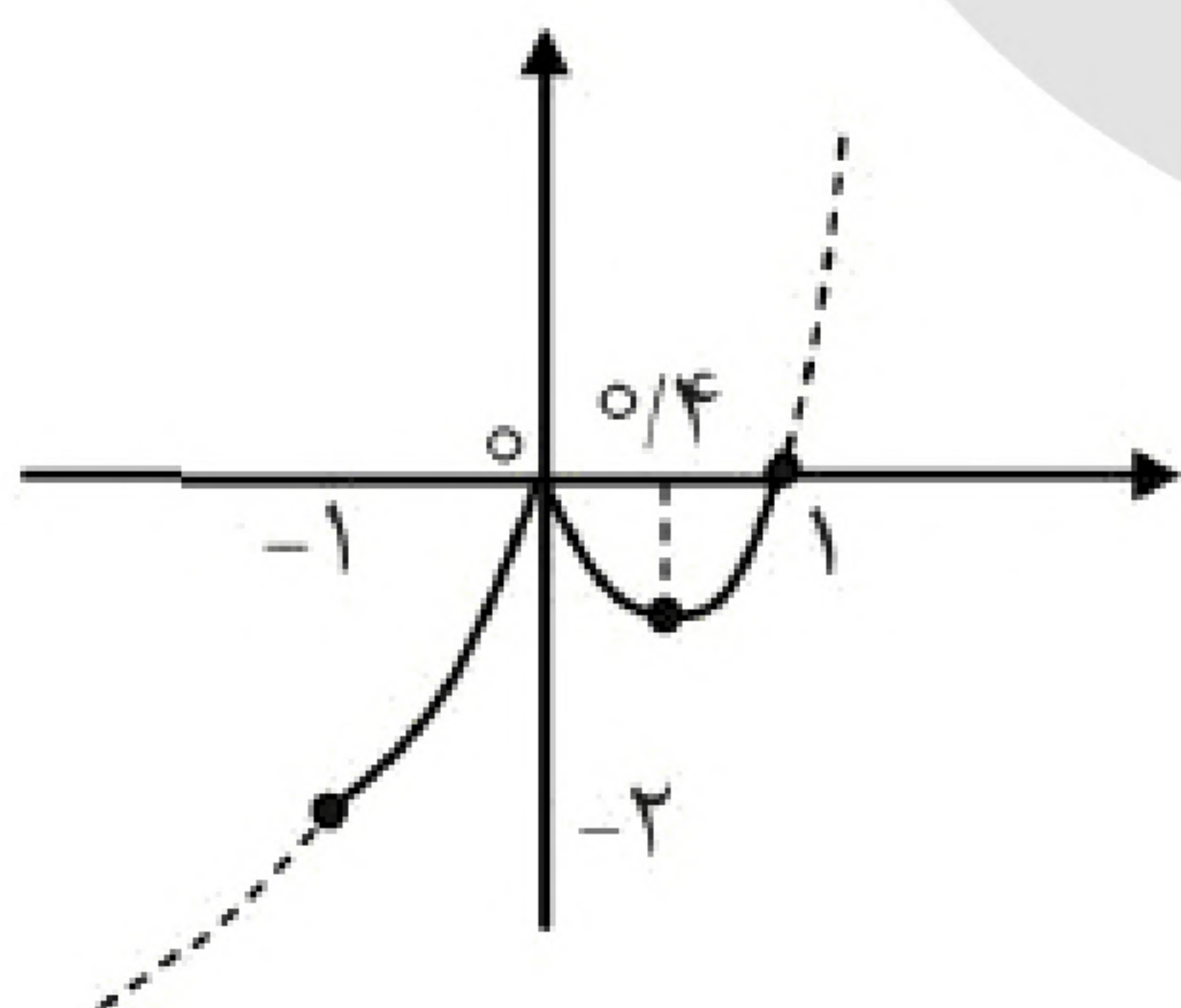
min
مطلق

max
نسبی

min
نسبی

max
مطلق

(در بازه $[-1, 1]$ max مطلق هستند)



$$f \text{ مجموع طول های ماکزیمم و مینیمم نسبی تابع } f = 0 + 0/4 = 0/4$$

$$f \text{ حاصل جمع max و min مطلق تابع } f = -2 + 0 = -2$$

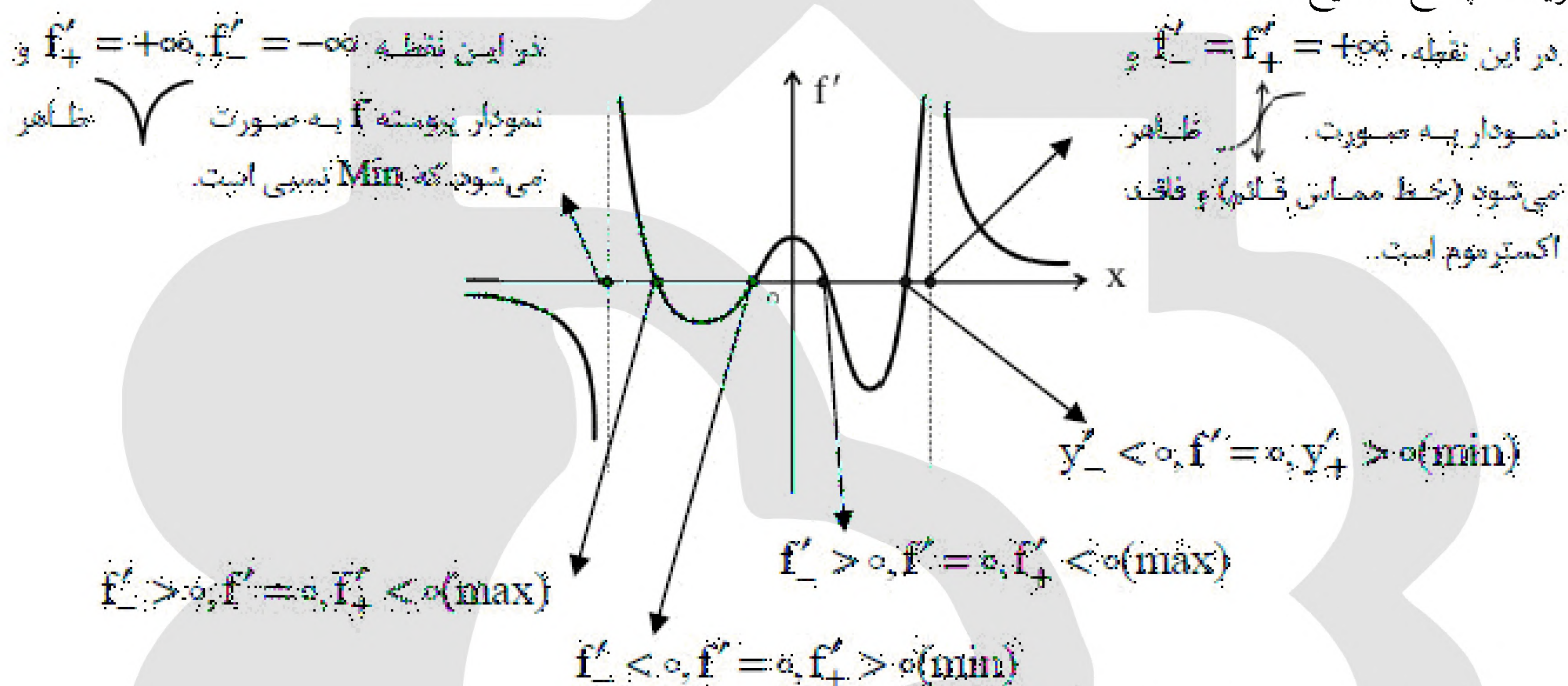
$$0/4 - (-2) = 2/4$$

۲۶- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. $f' > 0$ (نمودار f' بالای محور x ها) باشد f صعودی
 $f' < 0$ (نمودار f' بالای محور x ها) باشد f نزولی



- ۲۷- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ممکن است $f'(x_0) = 0$ موجود نباشد ولی x_0 طول اکسترمم نسبی تابع f باشد. ممکن است $f'(x_0)$ موجود و برابر صفر باشد، ولی x_0 طول اکسترمم نسبی تابع f نباشد. اما اگر f در x_0 دارای اکسترمم نسبی باشد و $f'(x_0)$ موجود باشد، آن گاه $f'(x_0) = 0$ است.

۲۸- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.



بنابراین تابع f دارای ۲ ماکزیمم نسبی و ۳ مینیمم نسبی است.

- ۲۹- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. خط $y = m$ تابع درجه سوم را در ۳ نقطه به شرطی قطع می کند که اولاً تابع هم زمان Max و Min نسبی داشته باشد (y' دو ریشه داشته باشد). ثانیاً مقدار m بین عرض های ماکسیمم و مینیمم نسبی

$$y' = 6x^2 - 6x - 12 = 0 \quad \begin{cases} \text{Min}(2, -15) \text{ نسبی} \\ \text{Max}(-1, 12) \text{ نسبی} \end{cases} \quad \text{تابع باشد:}$$

بنابراین باید $-15 < m < 12$ باشد که m شامل ۲۶ عدد صحیح است.



«بانک سوال موسسه یاوران دانش»

۳۰- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

ارتفاع استوانه $h = 2x$

$$r^2 + x^2 = (4\sqrt{2})^2 \Rightarrow r = \sqrt{32 - x^2} \quad (1)$$

ارتفاع \times محیط قاعده $S =$ جانبی استوانه

$$S = 2\pi r \cdot (2x) \xrightarrow{\text{طبق ۱}} S = 2\pi \sqrt{32 - x^2} \cdot (2x)$$

$$S = 4\pi x \sqrt{32 - x^2} \xrightarrow{\text{مشتق = ۰}}$$

$$S' = 4\pi \left(1 \times \sqrt{32 - x^2} + \frac{-2x}{2\sqrt{32 - x^2}} \times x \right) = ۰$$

$$\frac{\sqrt{32 - x^2}}{1} = \frac{x^2}{\sqrt{32 - x^2}} \Rightarrow 32 - x^2 = x^2 \Rightarrow \boxed{x = 4} \Rightarrow S_{\max} = 4\pi \times 4 \sqrt{32 - 16}$$

$$S_{\max} = 64\pi = 192$$

۳۱- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. در تابع درجه ۳ با دامنه R ، نقطه‌های بحرانی فقط به ازای $f'(x) = ۰$ حاصل می‌شوند. چون این تابع فقط یک نقطه بحرانی دارد، پس معادله درجه ۲ مشتق تابع باید ریشه‌ی مضاعف داشته باشد:

$$f'(x) = 3ax^2 + 2(a+4)x - 3 \Rightarrow \Delta = 4(a+4)^2 + 36a = ۰$$

$$a^2 + 17a + 16 = ۰ \Rightarrow a = -16, a = -1$$

از طرفی دیگر به ازای $a = ۰$ ضابطه تابع $f(x) = 4x^2 - 3x + 2$ می‌شود که یک سهمی است و آن هم فقط یک نقطه بحرانی دارد. پس تمام مقادیر a عبارتند از ۳ عدد: ۰ و -۱ و -۱۶ که مجموعشان -۱۷ می‌باشد.



۳۲- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ابتدا نقاط بحرانی تابع در بازه‌ی $D_F = [-1, 1]$ را مشخص می‌کنیم:

$$y' = 1 - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = 0 \Rightarrow x = \sqrt{1-x^2} \xrightarrow{\text{به توان ۲}} x^2 = 1 - x^2 \Rightarrow 2x^2 = 1$$

$$\Rightarrow x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} : f(-1) = -1, f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0, f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0, f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}, f(1) = 1$$

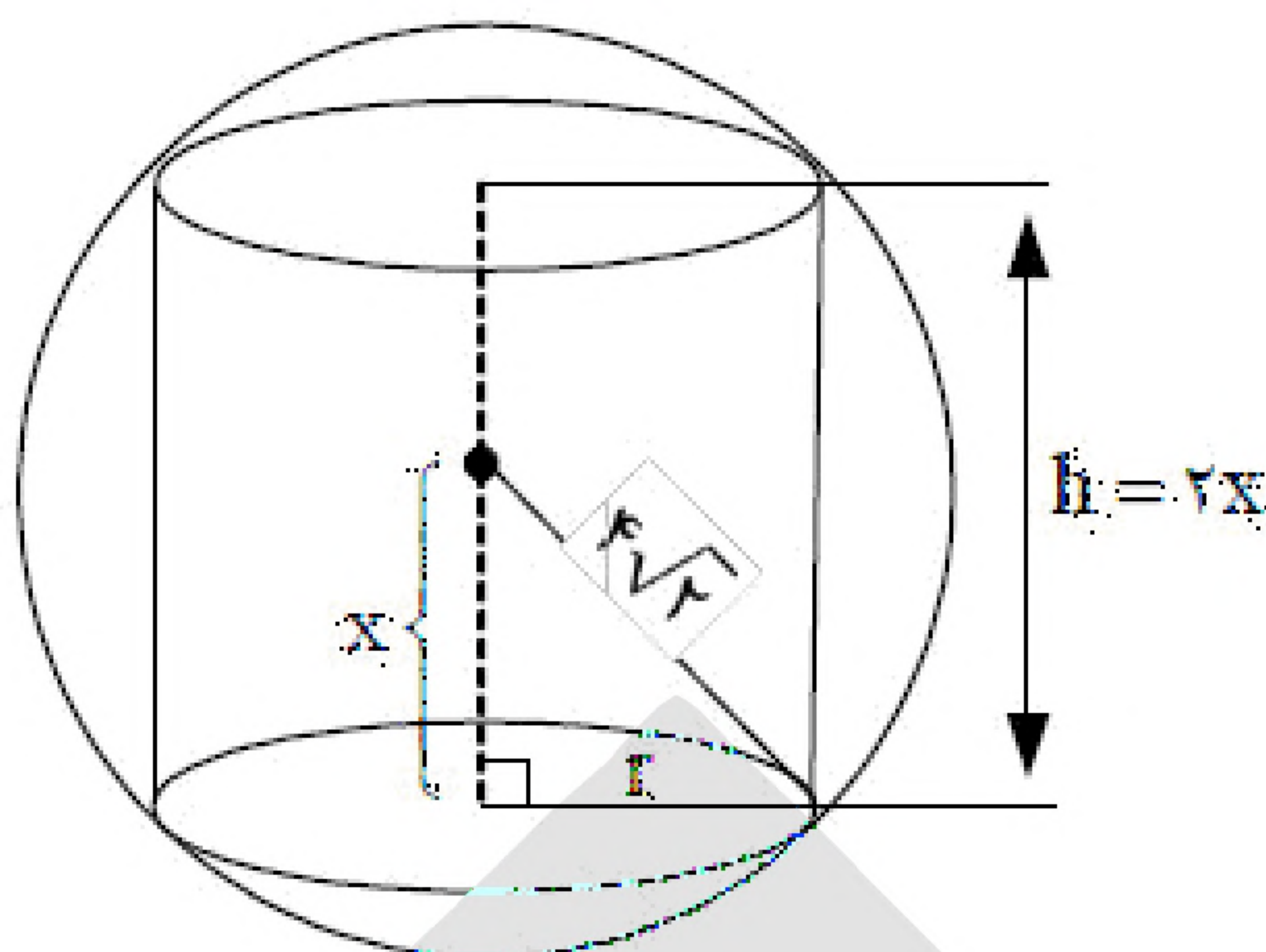
$$\text{مطلق Max}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}\right) \quad \text{مطلق Min}(-1, -1)$$

$$\text{Min و Max شیب خط گذرنده از نقاط} \quad m = \frac{\sqrt{2}+1}{\frac{\sqrt{2}}{2}+1} = \sqrt{2} \xrightarrow{\text{معادله خط}}$$

$$y+1 = \sqrt{2}(x+1) \xrightarrow[\text{محل برخورد با محور x ها}]{y=0} x = \frac{\sqrt{2}}{2} - 1$$



۳۳- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.



$$x^2 + r^2 = 3^2 \Rightarrow r = \sqrt{3^2 - x^2}$$

$S =$ ارتفاع \times محیط قاعده $= 2\pi r \times 2x = 4\pi xr$

$$S = 4\pi x \sqrt{3^2 - x^2}$$

$$S' = 4\pi \left(1 \times \sqrt{3^2 - x^2} + \frac{-2x}{2\sqrt{3^2 - x^2}} \times x \right) = 0$$

$$\sqrt{3^2 - x^2} = \frac{x^2}{\sqrt{3^2 - x^2}} \Rightarrow 3^2 - x^2 = x^2$$

$$3^2 = 2x^2 \quad x^2 = 1.5$$

$$\boxed{x = 1.5} \rightarrow \boxed{r = 1.5}$$

$$S_{\max} = 4\pi \times 1.5 \times 1.5 = 9\pi$$

۳۴- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$y' = 3x^2 + 2mx - 9 \Rightarrow y'(-3) = 0 \Rightarrow 3(-3)^2 + 2m(-3) - 9 = 0$$

$$m = 3 \begin{cases} y' = 3x^2 + 6x - 9 = 0 \\ y = x^3 + 3x^2 - 9x - 19 \end{cases} \begin{cases} x = 1 \Rightarrow y = -24 \\ x = -3 \end{cases}$$





۳۵- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$f'(x) = 1 + \frac{4-2x}{2\sqrt{4x-x^2}} = 0 \Rightarrow 1 = \frac{x-2}{\sqrt{4x-x^2}} \xrightarrow{\text{دو طرف به توان ۲}} x^2 - 4x + 2 = 0$$

$$x = 2 \pm \sqrt{2} \xrightarrow{x > 2} x = 2 + \sqrt{2}, y = 6 + 2\sqrt{2}$$

بنابراین نقطه ماکسیمم نسبی $A(2 + \sqrt{2}, 6 + 2\sqrt{2})$ است و فاصله آن از خط $-x + y = 0$ (نیمساز ربع اول):

$$\text{فاصله از نیمساز ناحیه اول} = \frac{|6 + 2\sqrt{2} - 2 - \sqrt{2}|}{\sqrt{(-1)^2 + 1^2}} = \frac{4 + \sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} + 1$$

۳۶- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. در حالتی که نمودار تابع درجه ۳ به صورت  یا  باشد بین نقاط

ماکزیمم و مینیمم نسبی، هر خط افقی نمودار تابع را در ۳ نقطه متمایز قطع می‌کند. بنابراین:

$$4x + k = x^3 - 3x^2 - 5x + 1$$

$$\downarrow$$

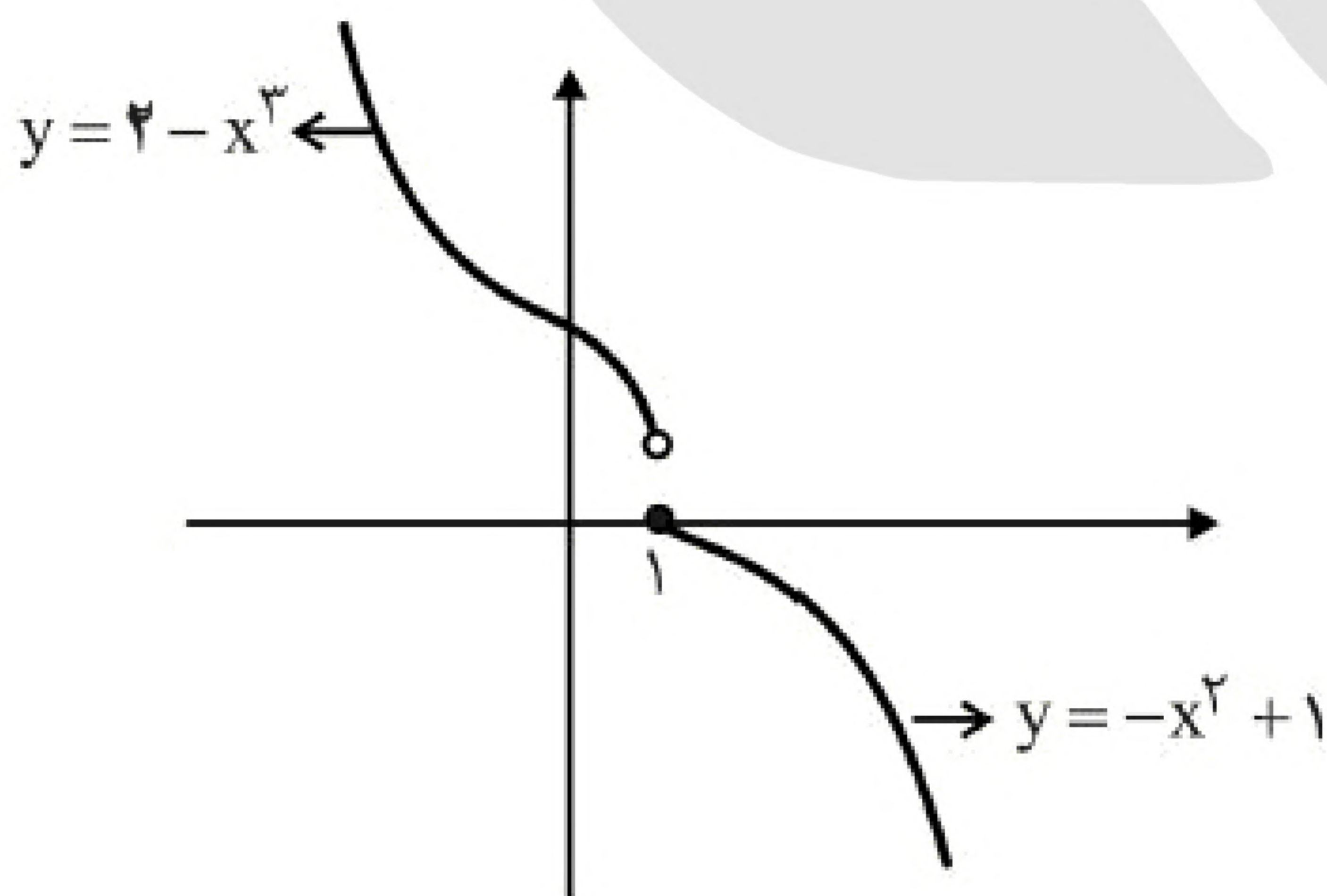
$$x^3 - 3x^2 - 9x + 1 = k$$

$$g(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 1 \Rightarrow g(x) < k < g(x) \quad \begin{matrix} \min \\ \max \end{matrix} \quad \text{تابع درجه ۳ برای بررسی حدود } k$$

$$g'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1, g(-1) = 6 \text{ max} \\ x = 3, g(3) = -26 \text{ min} \end{cases} \Rightarrow -26 < k < 6 \xrightarrow{\text{عدد صحیح}}$$

$$-25 \leq k \leq 5$$

به ازای ۳۱ عدد صحیح برای k در این بازه، سه نقطه متمایز تلاقی خط و منحنی وجود دارد.



۳۷- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. با توجه به شکل نه ماکزیمم نسبی است و نه مینیمم نسبی است، زیرا عرض این نقطه از عرض نقاط مجاورش در سمت چپ کمتر و از عرض نقاط مجاورش در سمت راست بیش‌تر است.



- ۳۸- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. نقاط a ، c و f متعلق به دامنه‌ی تابع f نیستند بنابراین نقطه‌ی بحرانی تابع به حساب نمی‌آیند.
در نقاط b ، d و g تابع مشتق‌پذیر نیست در نتیجه نقاط بحرانی تابع هستند.
در نقطه‌ی e مشتق تابع برابر صفر است. بنابراین e طول نقطه بحرانی تابع f است.

$$f'(x) = \frac{a(a+2)-3}{(-x+a+2)^2} = \frac{a^2+2a-3}{(-x+a+2)^2} < 0$$
$$(a+3)(a-1) < 0 \Rightarrow -3 < a < 1$$

۳۹- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

- ۴۰- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. f در بازه‌ی $(-\infty, 0)$ نزولی است، بنابراین $f' < 0$ (نمودار f' زیر محور x ها)
 f در بازه‌ی $(0, +\infty)$ صعودی است، بنابراین $f' > 0$ (نمودار f' بالای محور x ها)
در نقطه‌ی صفر مشتق‌پذیر نیست ($f'(0)$ نامتناهی است).