

گنجینه سوال رایگان

+ پاسخ تشریحی

یاوران دانش



راه های ارتباطی با ما:

www.Dyavari.com

۰۲۱-۷۶۷۰۳۸۵۸

۰۹۱۲-۳۴ ۹۴ ۱۳۴



	۱	۲	۳	۴
۱ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۴ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۵ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۶ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۷ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۸ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۹ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۰ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۱ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۲ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۳ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۱۴ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۵ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۶ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۷ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۸ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۹ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۲۰ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۱ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۲ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۳ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۴ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۵ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۲۶ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۷ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۸ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۹ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۰ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۱ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۳۲ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۳ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۴ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۳۵ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۳۶ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۷ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۸ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۳۹ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۴۰ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>





۱- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\begin{cases} f'(3) = 5 & (1) \\ 5(3) - y - 7 = 0 \Rightarrow y = 8 \Rightarrow f(3) = 8 & (2) \end{cases}$$

خط مماس در $x = 3 \Rightarrow 5x - y - 7 = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 8} \left(\frac{g(x) - g(8)}{x - 8} \times \frac{1}{x + 7} \right) = \frac{37}{150}$$

$$g'(x) \times \frac{1}{15} = \frac{37}{150} \Rightarrow g'(8) = \frac{37}{10} \quad (3)$$

طبق ۳

$$(g \circ f)'(3) = g'(f(3)) \times f'(3) = g'(8) \times f'(3) = \frac{37}{10} \times 5 = 18.5$$

طبق ۱ طبق ۲

$$\frac{7}{6} = \frac{f(b) - f(4)}{b - 4} \Rightarrow \frac{7}{6} = \frac{b + \sqrt{b} - 6}{b - 4}$$

$$7b - 28 = 6b + 6\sqrt{b} - 24 \Rightarrow b + 4 = 6\sqrt{b} \xrightarrow{\text{دو طرف به توان ۲}}$$

$$b^2 - 20b + 64 = 0 \Rightarrow (b - 16)(b - 4) = 0$$

$$x = \frac{b}{4}$$

$$b = 16 \quad b = 4 \quad (b > 4) \text{ غ ق ق ق}$$

$$x = 4 \text{ : آهنگ در لحظه } f'(x) = 1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$f'(4) = 1 + \frac{1}{4} = 1.25$$

۲- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.



۳- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\text{آهنگ تغییر متوسط} = \frac{f(K+1) - f(K)}{(K+1) - K} = \frac{\left(\frac{1}{K+1} + \frac{1}{\sqrt{5}}\right) - \left(\frac{1}{K} + \frac{1}{\sqrt{5}}\right)}{1} = \frac{-1}{K(K+1)}$$

تابع f در بازه $[K, K+1]$

$$f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow f'(x) = \frac{-1}{x^2} \Rightarrow f'(\sqrt{5}) = \frac{-1}{5}$$

$$\text{مطابق فرض سؤال} = \frac{1}{K(K+1)} = \frac{-1}{5} \Rightarrow K^2 + K - 20 = 0$$

$$(K+5)(K-4) = 0$$

$$K_1 = -5, K_2 = 4$$

$$9 = \text{اختلاف دو مقدار } K$$

۴- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\begin{aligned} f'(-3) &= \lim_{x \rightarrow (-3)} \frac{f(x) - f(-3)}{x + 3} = \lim_{x \rightarrow (-3)} \frac{x(x+1)(x+2)\dots(x+7) - 0}{x + 3} \\ &= \lim_{x \rightarrow (-3)} \frac{x(x+1)(x+2)\cancel{(x+3)}(x+4)(x+5)(x+6)(x+7)}{\cancel{x+3}} \\ &= (-3)(-2)(-1)(1)(2)(3)(4) = -144 \end{aligned}$$

۵- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(f(x)-3)(f(x)+3)}{(x-2)(x+1)} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} \times \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)+3}{x+1} \\ &= f'(2) \times \frac{f(2)+3}{2+1} = 4 \times \frac{3+3}{3} = 4 \times 2 = 8 \end{aligned}$$



۶- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. می‌دانیم $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$. بنابراین کافی است در صورت کسر $f(x)$ را کم و اضافه کنیم:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+3h) - f(x) + f(x) - f(x-3h)}{5h} = \frac{27x}{\sqrt{x^2 + 5}}$$

$$\frac{3}{5} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+3h) - f(x)}{3h} + \frac{3}{5} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x-3h) - f(x)}{(-3h)} = \frac{27x}{\sqrt{x^2 + 5}}$$

$$\frac{3}{5} f'(x) + \frac{3}{5} f'(x) = \frac{27x}{\sqrt{x^2 + 5}} \Rightarrow \frac{6}{5} f'(x) = \frac{27x}{\sqrt{x^2 + 5}}$$

$$f'(x) = \frac{5}{6} \times \frac{27x}{\sqrt{x^2 + 5}} \xrightarrow{x=2} f'(2) = \frac{5 \times 54}{6 \times 3} \Rightarrow f'(2) = 15$$

روش دوم: استفاده از قاعده هوییتال چون حد $\frac{0}{0}$ است.

۷- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. مقادیر f و f' در نقاط A و B و C و D و E به طور خلاصه در جدول زیر آمده است:

x	A	B	C	D	E
f(x)	۰	-	۰	+	۰
f'(x)	-	۰	+	۰	۰

فقط در نقاط A و D رابطه $f > f'$ برقرار است.

۸- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. مقادیر f و f' در نقاط A و B و C و D و E به طور خلاصه در جدول زیر آمده است:

x	A	B	C	D	E
f(x)	۰	-	۰	+	۰
f'(x)	-	۰	+	۰	۰

فقط در نقاط B و C رابطه $f < f'$ برقرار است.

۹- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} &= f'(-1) = \lim_{x \rightarrow (-1)} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow (-1)} \frac{(x+1)(x-2)\sqrt[5]{x^3 - 33x}}{x+1} \\ &= \lim_{x \rightarrow (-1)} (x-2)\sqrt[5]{x^3 - 33x} = (-3) \times (2) = -6 \end{aligned}$$



۱۰- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ابتدا معادله خط گذرا بر A و B را می‌نویسیم:

$$y - 2 = \frac{3-2}{-1-1}(x-1) \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$$

چون این خط در $x = 3$ بر نمودار تابع f مماس است، بنابراین:

$$f(3) = -\frac{1}{2}(3) + \frac{5}{2} \Rightarrow f(3) = 1$$

$$f'(3) = m = -\frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f^2(x) + 4f(x) - 5}{3-x} &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(f(x) + 5)(f(x) - 1)}{-(x-3)} = \lim_{x \rightarrow 3} (-(f(x) + 5)) \times \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x-3} \\ &= (-(f(3) + 5)) \times f'(3) = -(1 + 5) \times \left(-\frac{1}{2}\right) = 3 \end{aligned}$$

۱۱- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ابتدا معادله خط مماس را می‌نویسیم:

$$\left. \begin{array}{l} m = f'(4) = 2 \\ \text{شیب خط مماس} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} y - y_1 = m(x - x_1) \\ y - 20 = 2(x - 4) \Rightarrow y = 2x + 12 \end{array}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} B \left| \begin{array}{l} 6 \\ 24 \end{array} \right. \\ C \left| \begin{array}{l} 3 \\ 18 \end{array} \right. \end{array} \right. \quad \text{نقاط B و C روی خط مماس هستند}$$

$$y_B + y_C = 24 + 18 = 42$$

۱۲- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$f(x) = \frac{(x-1)^3 + x^{\frac{22}{5}}}{\frac{3}{2}x} \xrightarrow{\text{تفکیک}} f(x) = \underbrace{(x-1)^3 \cdot x^{-\frac{3}{2}}}_{g(x)} + \underbrace{x^{\frac{29}{10}}}_{g(x)}$$

مشتق دوم برای این بخش به خاطر عامل صفرساز $(x-1)^3$ در $x = 1$ صفر است و نیاز به محاسبه نیست

$$g'(x) = \frac{29}{10}x^{\frac{19}{10}} \Rightarrow g''(x) = \frac{29}{10} \times \frac{19}{10}x^{\frac{9}{10}}$$

$$f''(1) = 0 + g''(1) = \frac{29}{10} \times \frac{19}{10} \times 1 = 5/51$$



«بانک سوال موسسه یاوران دانش»

۱۳- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$g(x) = \text{Log} \left(x + \sqrt{x^2 - 4} \right)^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} \text{Log} \left(x + \sqrt{x^2 - 4} \right) \Rightarrow 3g(x) = \text{Log} \left(x + \sqrt{x^2 - 4} \right)$$

$$f(x) + 3g(x) = \text{Log} \left(x - \sqrt{x^2 - 4} \right) + \text{Log} \left(x + \sqrt{x^2 - 4} \right)$$

$$= \text{Log} \left(x - \sqrt{x^2 - 4} \right) \times \left(x + \sqrt{x^2 - 4} \right) = \text{Log} (x^2 - x^2 + 4) = \text{Log} 4 = \text{عدد ثابت}$$

$$f(x) + 3g(x) = \text{عدد ثابت} \xrightarrow{\text{مشتق از طرفین}} f'(x) + 3g'(x) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{f'(x)}{g'(x)} = -3 \xrightarrow{x = 3 + 2\sqrt{2}} \frac{f'(3 + 2\sqrt{2})}{g'(3 + 2\sqrt{2})} = -3$$

۱۴- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. تابع در $x = a$ نقطه گوشه‌ای دارد. هرگاه اگر مشتق راست و چپ در $x = a$ هر دو موجود (متناهی) ولی نابرابر باشند یا یکی متناهی و دیگر نامتناهی باشد:
 $D_f = \mathbb{R} - \{0\}$

$x^3 - 9x = 0$: ریشه‌های ساده قدرمطلق نقاط مشتق‌ناپذیر گوشه‌ای هستند.

(عضو دامنه نیست) غ ق ق

$$\begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \\ x = -3 \end{cases} \Rightarrow \text{۲ نقطه گوشه‌ای}$$

$$f'_+(3) \neq f'_-(3)$$

$$f'_+(-3) \neq f'_-(-3)$$



۱۵- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$x > \sqrt{2} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2x^2 > 4 \Rightarrow [2x^2] = 4 \\ x^2 > 2 \Rightarrow |x^2 - 2| = x^2 - 2 \end{array} \right\} \Rightarrow f(x) = x^3 + x^2 - 6$$

$$f'(x) = 3x^2 + 2x$$

$$f'_+(\sqrt{2}) = 6 + 2\sqrt{2} \quad (1)$$

$$x < \sqrt{2} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2x^2 < 4 \Rightarrow [2x^2] = 3 \\ x^2 < 2 \Rightarrow |x^2 - 2| = 2 - x^2 \end{array} \right\} \Rightarrow f(x) = x^3 - x^2 - 1$$

$$f'(x) = 3x^2 - 2x$$

$$f'_-(\sqrt{2}) = 6 - 2\sqrt{2} \quad (2)$$

$$f(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2} - 4 \quad (3)$$

$$1, 2, 3 \Rightarrow 3f'_+(\sqrt{2}) + 2f'_-(\sqrt{2}) - f(\sqrt{2})$$

$$= 3(6 + 2\sqrt{2}) + 2(6 - 2\sqrt{2}) - 2\sqrt{2} + 4$$

$$= 18 + 6\sqrt{2} + 12 - 4\sqrt{2} - 2\sqrt{2} + 4 = 34$$

$$f(x) = (1 - 3x)^{\frac{2}{3}} \Rightarrow f'(x) = \frac{2}{3}(1 - 3x)^{-\frac{1}{3}} \times (-3)$$

$$f'(x) = \frac{-2}{\sqrt[3]{1-3x}} \quad (1)$$

شیب مماس، عمود بر این خط
 $x + y + 13 = 0 \Rightarrow m = -1 \xrightarrow{\text{عکس و قرینه است}} m' = 1 \quad (2)$

$$1, 2 \Rightarrow \frac{-2}{\sqrt[3]{1-3x}} = 1 \Rightarrow x = 3, y = 4$$

$$A\Big|_4^3, m' = 1 \Rightarrow y - 4 = 1(x - 3) \Rightarrow x - y + 1 = 0 \quad \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \\ c = 1 \end{cases}$$

$$a^2 + b^2 + c^2 = 3$$

۱۶- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.



۱۷- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{5}x & ; x \geq 0 \\ x & ; x < 0 \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} 5x & ; x \geq 0 \\ 3x & ; x < 0 \end{cases}$$

$$(f \circ g)_{(x)} = \begin{cases} \frac{3}{5}(5x) & ; x \geq 0 \\ 3x & ; x < 0 \end{cases} \Rightarrow (f \circ g)_{(x)} = 3x ; x \in \mathbb{R}$$

$$(f \circ g)'_{(x)} = 3 ; x \in \mathbb{R}$$

$$(f \circ g)_{(x)} = \begin{cases} 5\left(\frac{3}{5}x\right) & ; x \geq 0 \\ 3x & ; x < 0 \end{cases} \Rightarrow (g \circ f)_{(x)} = 3x ; x \in \mathbb{R}$$

$$(g \circ f)'_{(x)} = 3 ; x \in \mathbb{R}$$

$$(f \circ g)'_{(x)} = (g \circ f)'_{(x)} = 3 ; x \in \mathbb{R}$$

در نتیجه:

۱۸- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$x \Rightarrow \pi^+ : f(x) = -\sin x + \cos x \Rightarrow f'(x) = -\cos x - \sin x \quad (1) \\ f'_+(\pi) = -(-1) - 0 = 1$$

$$x \Rightarrow \pi^- : f(x) = -\sin x + \cos x \Rightarrow f'(x) = \cos x - \sin x \quad (2) \\ f'_-(\pi) = -1 - 0 = -1$$

$$2, 1 \Rightarrow f'_+(\pi) - f'_-(\pi) = 1 - (-1) = 2$$

$$g(r) = \frac{v}{\lambda}, \quad g'(r) = \frac{v}{\omega}, \quad h'(x) = (6x - 2)g(r\sqrt{x}) + \frac{r}{r\sqrt{x}}g'(r\sqrt{x}) \times (rx^2 - 2x + 4)$$

$$h'(1) = 4g(r) + \frac{r}{r}g'(r) \times (5) = 4 \times \frac{v}{\lambda} + \frac{r}{r} \times \frac{v}{\omega} \times 5 = 14$$

$$h'(1)(f'_+(\pi) - f'_-(\pi)) = 14 \times 2 = 28$$



۱۹- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. تابع $f(x)$ ترکیبی از دو تابع $y_1 = [x]$ و $y_2 = \left[2x + \frac{1}{2}\right]$ به صورت تفریق است.

بنابراین نقاط مشتقناپذیر بر دامنه مشترک آنها بررسی می‌شود. می‌دانیم در این دو تابع، جزء صحیح به ازای نقاطی که در آنها کل عبارت درون جزء صحیح برابر عدد صحیح می‌شود، ناپیوسته و در نتیجه مشتقناپذیرند:

$$y_1 = [x] \Rightarrow x = K \in \mathbb{Z} \xrightarrow{x \in (0, 5)} x = 1, 2, 3, 4 \quad (1)$$

$$y_2 = \left[2x + \frac{1}{2}\right] \Rightarrow 2x + \frac{1}{2} = K' \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = \frac{K'}{2} - \frac{1}{4} \xrightarrow{x \in (0, 5)}$$

$$0 < \frac{K'}{2} - \frac{1}{4} < 5 \Rightarrow \begin{cases} K' = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 \\ x = \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{5}{4}, \frac{7}{4}, \frac{9}{4}, \frac{11}{4}, \frac{13}{4}, \frac{15}{4}, \frac{17}{4}, \frac{19}{4} \end{cases} \quad (2)$$

با توجه به نقاط ۱ و ۲ در نقاطی که y_1 ناپیوسته است، y_2 پیوسته است و بالعکس. بنابراین تابع $f(x) = y_1 - y_2$ در تمام ۱۴ نقطه ناپیوسته و مشتقناپذیر است.

۲۰- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. در توابع چندجمله‌ای شامل قدرمطلق، در نقاطی که ریشه‌های ساده داخل قدرمطلق هستند و تابع f در آنها مشتقناپذیر است، تابع دارای نقطه گوشه‌ای است.

$$f(x) = x(x-1)(x+1)|x(x+1)(x+2)|$$

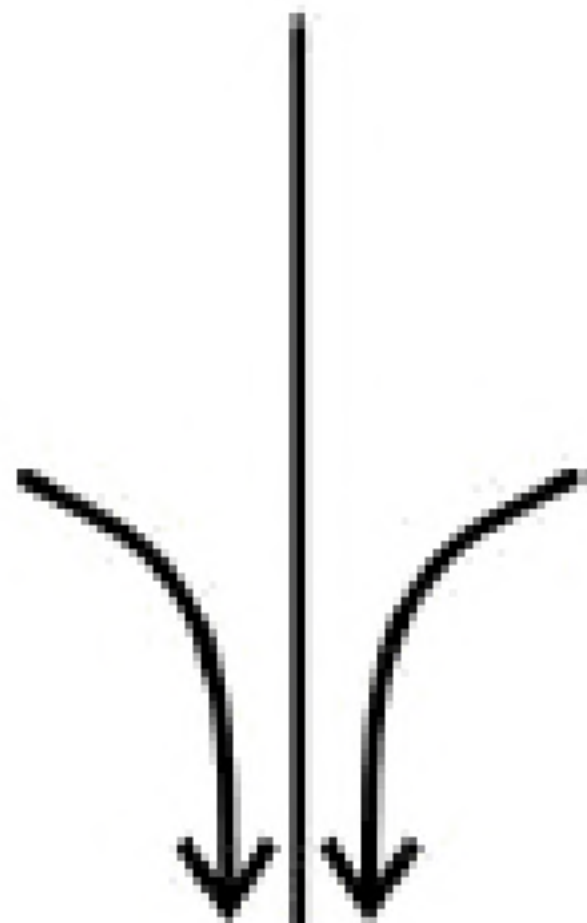
با توجه به ضابطه تابع f ، این تابع فقط در $x = -2$ دارای نقطه گوشه‌ای است؛ زیرا در این نقطه پیوسته، ولی $f'_+(-2) \neq f'_-(-2)$ است. در نقاط ریشه دیگر درون قدرمطلق یعنی $x = 0$ و $x = -1$ تابع پیوسته و مشتقپذیر است؛ زیرا: $f'_+(-1) = f'_-(-1) = 0$ و $f'_+(0) = f'_-(0) = 0$ است. بنابراین، این تابع فقط یک نقطه گوشه‌ای دارد.

۲۱- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. نمودار تابع f در نقطه $x = -2$ (ریشه عبارت زیر رادیکال با فرجه ۳) مماس قائم دارد،

$$f'(-2) = \lim_{x \rightarrow (-2)} \frac{(x^2 + 3x)\sqrt[3]{x+2} - 0}{x+2} = \lim_{x \rightarrow (-2)} \frac{x^2 + 3x}{\sqrt[3]{(x+2)^2}} = \frac{-2}{+} = -\infty$$

زیرا:

چون $f'_-(-2) = f'_+(-2) = -\infty$ است، بنابراین نمودار تابع f' در همسایگی $x = -2$ به صورت



است.



$$f'(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}, \quad f''(x) = \frac{-2}{9x\sqrt[3]{x}}$$

۲۲- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$f'(x) = f''(x) \Rightarrow \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} = \frac{-2}{9x\sqrt[3]{x}} \Rightarrow \sqrt[3]{x} = -3x \cdot \sqrt[3]{x}$$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{x}(1 + 3x) = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \text{ نامتناهی هستند، یعنی موجود نیستند غ ق ق} \\ x = -\frac{1}{3} \Rightarrow A\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{\sqrt[3]{9}}\right) \text{ نقطه مورد نظر سوال} \end{array} \right.$$

$$\text{مماس } m = f'\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{-2\sqrt[3]{3}}{3}$$

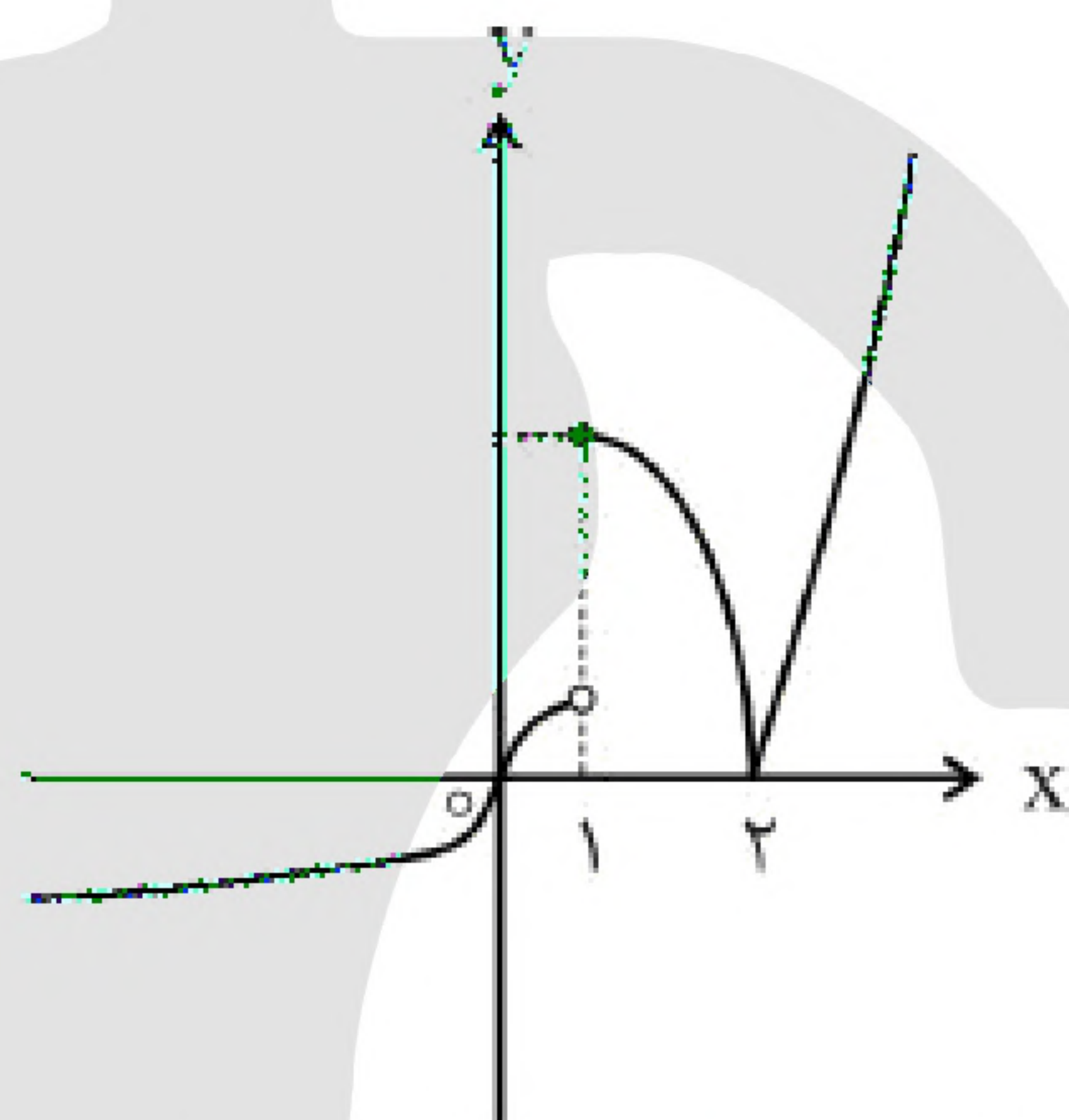
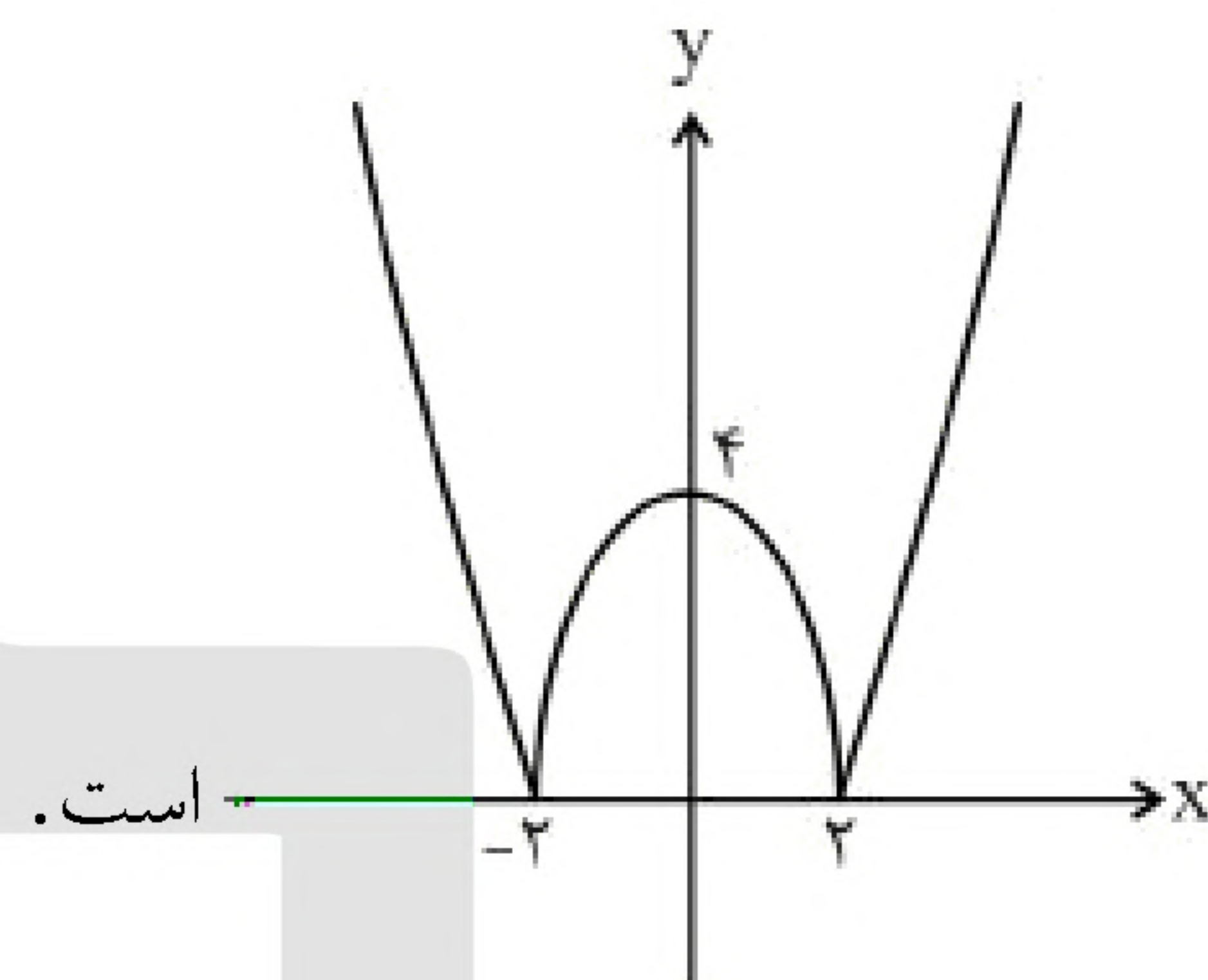
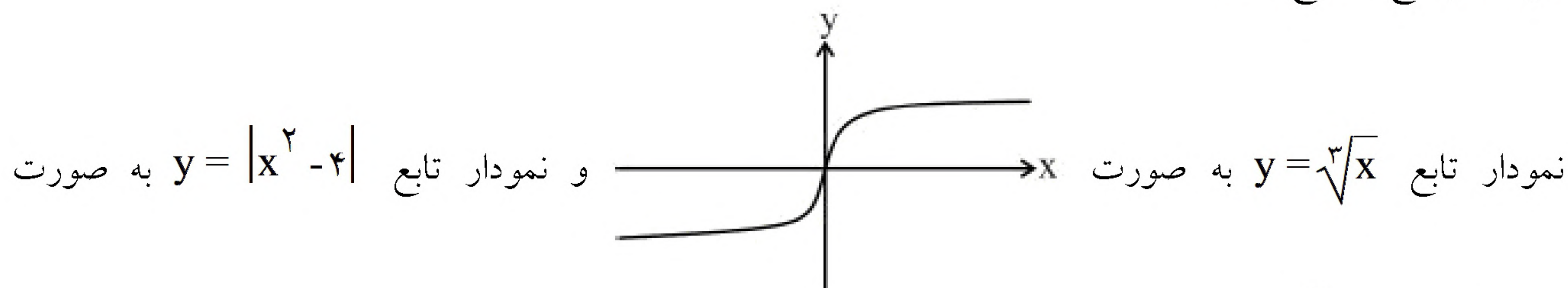
$$\text{معادله خط مماس } y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y - \frac{1}{\sqrt[3]{9}} = \frac{-2\sqrt[3]{3}}{3} \left(x + \frac{1}{3}\right) \xrightarrow{\times 3\sqrt[3]{9}}$$

$$3\sqrt[3]{9}y - 3 = -6\left(x + \frac{1}{3}\right) \Rightarrow 3\sqrt[3]{9}y - 3 = -6x - 2 \Rightarrow 6x + 3\sqrt[3]{9}y - 1 = 0$$

$$\begin{cases} a = 6 \\ b = 3\sqrt[3]{9} \Rightarrow a^3 + b^3 + c^3 = 216 + 243 - 1 = 458 \\ c = -1 \end{cases}$$



۲۳- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.



با ترکیب این دو نمودار با توجه به ضابطه $f(x)$:

- ✓ در $x = 2$ نقطه گوشه‌ای و $f'_+(2) \neq f'_-(2)$ است، بنابراین در $x = 2$ مشتق و خط مماس وجود ندارد.
- ✓ در $x = 1$ به دلیل عدم پیوستگی، مشتق و خط مماس وجود ندارد.
- ✓ در $x = 0$ خط مماس عمودی داریم. $(f'(0) = +\infty)$ پس مشتق ندارد، اما مماس دارد. بنابراین تابع f در ۳ نقطه مشتق ندارد و در ۲ نقطه هم خط مماس ندارد.

$$f'(x) = 1 \times \sqrt{2x-1} + \frac{2}{2\sqrt{2x-1}} \times x + \frac{8}{x^2}$$

۲۴- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$f'(1) = 10$$

$$y' = 3x^2 \cdot f\left(\frac{2}{x}\right) + x^3 \times \left(\frac{-2}{x^2} \times f'\left(\frac{2}{x}\right)\right)$$

$$y'(x=2) = 12f(1) + 8 \times \left(-\frac{1}{2} \times f'(1)\right) \Rightarrow y'(x=2) = 12f(1) - 4f'(1)$$

$$= 12(-7) - 4(10) = -124$$



$$f'(x) = \frac{-7}{(2x+1)^2}$$

۲۵- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$7x - y - 2 = 0 \Rightarrow \text{خط } m = 7 \xrightarrow[\text{(عکس و قرینه } m \text{ است)}]{\text{شیب خط عمود بر آن}} m' = \frac{-1}{7}$$

خط مماس بر $f(x)$

$$\frac{-7}{(2x+1)^2} = \frac{-1}{7} \Rightarrow (2x+1)^2 = 49 \begin{cases} 2x+1 = 7 \Rightarrow A \begin{cases} x = 3 \\ y = -2 \end{cases} \\ 2x+1 = -7 \Rightarrow B \begin{cases} x = -4 \\ y = -3 \end{cases} \end{cases}$$

$$AB = \sqrt{(-4-3)^2 + (-3+2)^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

۲۶- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ابتدا شرط پیوستگی در $x = 2$ را بررسی می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \sqrt{1+4x} = 3, f(2) = 3, \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 4a + 2b + 2$$

$$4a + 2b + 2 = 3 \Rightarrow 4a + 2b = 1$$

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{4}{2\sqrt{1+4x}} & ; x > 2 \\ 2ax + b & ; x < 2 \end{cases} \xrightarrow{\text{مشتق پذیر}} f'_+(2) = f'(2) \Rightarrow \frac{2}{3} = 4a + b$$

$$\begin{cases} 4a + 2b = 1 \\ 4a + b = \frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = \frac{1}{3} \\ a = \frac{1}{12} \end{cases} \Rightarrow 24(b - a) = 24\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{12}\right) = 8 - 2 = 6$$

۲۷- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\left. \begin{array}{l} t = 0 \Rightarrow V(0) = 400 \\ t = 40 \Rightarrow V(40) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{V(40) - V(0)}{40 - 0} = \frac{0 - 400}{40} = -10 \quad (1)$$

$$1 = 2 \Rightarrow -20\left(1 - \frac{t}{40}\right) = -10 \Rightarrow 1 - \frac{t}{40} = \frac{1}{2} \Rightarrow t = 20 \text{ min}$$



۲۸- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} \Rightarrow f'\left(\frac{\sqrt{5}}{10}\right) = 1 - \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{5}}{10}\right)^2} = 1 - 20 = -19$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f\left(\frac{1}{4}\right) - f\left(\frac{1}{5}\right)}{\frac{1}{4} - \frac{1}{5}} = \frac{\left(\frac{1}{4} + 4\right) - \left(\frac{1}{5} + 5\right)}{\frac{1}{20}} = \frac{-19}{\frac{1}{20}} = -19$$

بنابراین آهنگ لحظه‌ای و متوسط خواسته شده یکسان و نسبت آن‌ها یک است.

$$(g \circ f)'(x) = f'(x) \times g'(f(x))$$

۲۹- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$(g \circ f)'(3) = f'(3) \times g'(f(3)) = 24, \quad f(3) = \frac{3(3) - 2}{2(3) + 1} = \frac{7}{7} = 1$$

$$f'(3) \times g'(1) = 24 \quad (1)$$

$$f'(x) = \frac{7}{(2x+1)^2} \Rightarrow f'(3) = \frac{7}{(2(3)+1)^2} = \frac{1}{7}$$

$$1 \Rightarrow \frac{1}{7} \times g'(1) = 24 \Rightarrow g'(1) = 168$$

۳۰- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ابتدا تابع را خلاصه‌تر می‌کنیم:

$$f(x) = \underbrace{(\cos^2 x + \sin^2 x)}_1 \underbrace{(\cos^2 x - \sin^2 x)}_{\cos 2x} + \operatorname{tg}^2 x$$

$$f(x) = \cos 2x + \operatorname{tg}^2 x$$

$$\text{آهنگ متوسط} = \frac{f\left(\frac{\pi}{3}\right) - f\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}} = \frac{\left(-\frac{1}{2} + 3\right) - (0 + 1)}{\frac{\pi}{12}} = \frac{18}{\pi}$$

$$f'(x) = -2 \sin 2x + 2 \operatorname{tg} x (1 + \operatorname{tg}^2 x)$$

$$f'\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -2(-1) + 2(-1)(1+1) = -2 \quad \text{آهنگ لحظه‌ای}$$

$$\text{اختلاف مورد نظر سؤال} = \pi \left(\frac{18}{\pi}\right) - (-2) = 18 + 2 = 20$$



جاگذاری در ضابطه
 $x = 8 \xrightarrow{\text{خط مماس}} y = 28 \Rightarrow f(8) = 28$

۳۱- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

شیب خط مماس $\Rightarrow f'(8) = 3$

$$g'(x) = 2x \cdot f(17 - x^2) + x^2(-2x \times f'(17 - x^2))$$

$$g'(3) = 2(3)f(8) + 9(-6 \times f'(8)) \Rightarrow g'(3) = 6f(8) - 54f'(8)$$

$$\Rightarrow g'(3) = 6 \times 28 - 54 \times 3 \Rightarrow g'(3) = 6 \quad g(x) \text{ شیب خط مماس بر}$$

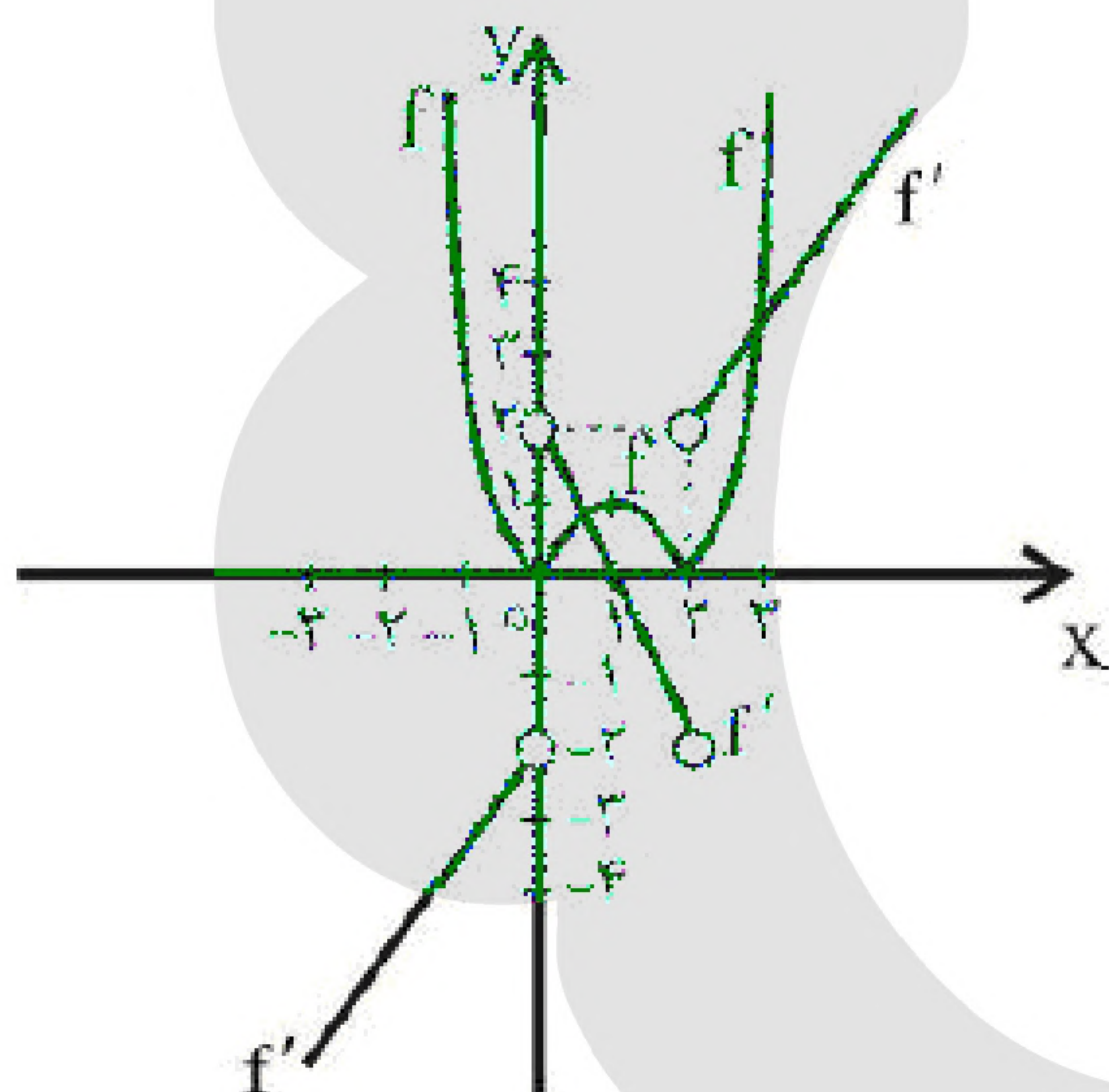
$$g(3) = 3^2 \times f(8) = 9 \times 28 = 252 \Rightarrow A(3, 252) \quad (2)$$

معادله خط مماس
 $2, 1 \xrightarrow{\text{معادله خط مماس}} y - 252 = 6(x - 3)$

$$y = 6x + 234$$

عرض از مبدا شیب

۳۲- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.



$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & ; x \leq 0 \text{ یا } x \geq 2 \\ 2x - x^2 & ; 0 < x < 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 2x - 2 & ; x < 0 \text{ یا } x > 2 \\ \text{وجود ندارد} & ; x = 0 \text{ یا } x = 2 \\ 2 - 2x & ; 0 < x < 2 \end{cases}$$

\Rightarrow محل برخورد f و f' در بازه $0 < x < 2$

$$2x - x^2 = 2 - 2x \Rightarrow x^2 - 4x + 2 = 0$$

$$= 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 - \sqrt{2} \\ x = 2 + \sqrt{2} \end{cases}$$

غ ق ق (چون خارج از بازه $0 < x < 2$ است)

$$x > 2 \text{ در } f', f \text{ برخورد } \Rightarrow x^2 - 2x = 2x - 2 \Rightarrow x^2 - 4x + 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 + \sqrt{2} \\ x = 2 - \sqrt{2} \end{cases}$$

غ ق ق (چون خارج از بازه $x > 2$ است)

$$f' \text{ با } f \text{ برخورد طول های } = (2 - \sqrt{2}) + (2 + \sqrt{2}) = 4$$



۳۳- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. قدرمطلق تابع سهمی قائم فقط در حالتی که $\Delta > 0$ بوده و محور X ها را در دو نقطه متمایز قطع کند، در ۲ نقطه (صفرهای تابع) مشتقناپذیر است (نقطه گوشه). بنابراین اگر قدرمطلق یک تابع سهمی فقط در یک نقطه مشتقناپذیر است به این معناست که ضریب X^2 صفر بوده و عملاً با یک تابع درجه اول سروکار داریم:
 $m - 1 = 0 \Rightarrow m = 1 \Rightarrow f(x) = |2x - 8|$
این تابع فقط در $x = 4$ (ریشه عبارت داخل قدرمطلق) مشتقناپذیر است.

$$f'(x) = \begin{cases} 2 & ; x \geq 4 \\ -2 & ; x < 4 \end{cases}$$

با توجه به توضیح بالا، تابع $g(x)$ در دو نقطه مشتقناپذیر است، پس الزاماً $\Delta > 0$ است:

$$n^2 - 4(4)(1) > 0$$

$$n^2 > 16 \Rightarrow (-\infty, -4) \cup (4, +\infty)$$

حدود n :

$$\text{یا } R - [-4, 4] \begin{cases} a = -4 \\ b = 4 \end{cases}$$

$$f'(4) - f'(-4) = 2 - (-2) = 4$$

$$g(x) = f(2 - x^3) \Rightarrow g'(x) = -3x^2 f'(2 - x^3)$$

۳۴- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.
از طرف دیگر:

$$f(x) = \frac{x-1}{x-2} \Rightarrow f'(x) = \frac{-1}{(x-2)^2} \Rightarrow f'(2 - x^3) = \frac{-1}{((2 - x^3) - 2)^2} = \frac{-1}{x^6}$$

$$g'(x) = -3x^2 f'(2 - x^3) \Rightarrow g'(x) = -3x^2 \times \frac{-1}{x^6} = \frac{3}{x^4} = 3x^{-4}$$

پس داریم:

$$g''(x) = 3(-4)x^{-5} = \frac{-12}{x^5} \Rightarrow g''(x-1) = \frac{-12}{(x-1)^5}$$

$$\begin{cases} x \rightarrow 1^+ : \frac{-12}{+} = -\infty \\ x \rightarrow 1^- : \frac{-12}{-} = +\infty \end{cases}$$



۳۵- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. چون $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-1}{f(x)} = +\infty$ پس $f(x)$ حتماً دارای ریشه مکرر از مرتبه زوج $x = 3$ است،

$$f(x) = (x-3)^2 h(x)$$

یعنی این تابع به صورت زیر است:

از آنجا که $f(x)$ یک چندجمله‌ای از درجه ۵ است، $h(x)$ یک چندجمله‌ای از درجه ۳ است و برای آن حالات زیر متصور است:

- حالت ۱: $h(x)$ دارای یک ریشه ساده باشد $\leftarrow f(x)$ دارای یک ریشه مضاعف $x = 3$ و یک ریشه ساده است.
حالت ۲: $h(x)$ دارای سه ریشه ساده باشد $\leftarrow f(x)$ دارای یک ریشه مضاعف $x = 3$ و سه ریشه ساده است.
حالت ۳: $h(x)$ دارای یک ریشه مضاعف و یک ریشه ساده باشد $\leftarrow f(x)$ دارای دو ریشه مضاعف $x = 3$ و $x = \alpha$ و یک ریشه ساده است.

حالا به تابع $g(x) = f(x) \left[\frac{x}{3} \right]$ دقت کنید.

در حالت کلی این تابع در نقاطی که داخل براکت را عدد صحیح می‌کنند، مشتق‌ناپذیر است ($x = 3, 6, 9$) ولی اگر نقطه موردنظر، ریشه مکرر پشت براکت یعنی تابع $f(x)$ باشد، به جمع نقاط مشتق‌پذیر برمی‌گردد.
پس تا اینجا تابع g حتماً در نقاط صحیح $x = 1, 2, 4, 5, 7, 8$ (۶ نقطه) مشتق‌پذیر است و از آنجا که در تمام حالات بررسی شده، $x = 3$ ریشه مضاعف تابع f است، این نقطه نیز به جمع نقاط مشتق‌پذیر برگشته و کلاً ۷ نقطه صحیح مشتق‌پذیر داریم.

اما در مورد نقاط $x = 6$ و $x = 9$ به حالات درنظر گرفته شده برای توابع h و f دقت کنید:
در حالت‌های ۱ و ۲ دیدیم که تابع f فقط دارای یک ریشه مضاعف $x = 3$ است و لذا $x = 6, 9$ مشتق‌ناپذیراند و همان ۷ نقطه صحیح مشتق‌پذیر را داریم.

در حالت ۳، تابع f علاوه بر $x = 3$ ، دارای ریشه مضاعف در $x = \alpha$ است، اگر $\alpha \neq 6, 9$ باشد. همچنان $x = 6, 9$ مشتق‌ناپذیر بوده و باز هم ۷ نقطه صحیح مشتق‌پذیر داریم. اما اگر $\alpha = 6$ یا 9 باشد، علاوه بر $x = 3$ ، $x = 6$ یا 9 هم به جمع نقاط مشتق‌پذیر برمی‌گردد و تعداد نقاط صحیح مشتق‌پذیر ۸ می‌شود که این عدد، ماکزیمم تعداد آنها است.

ضمناً تابع f می‌تواند به صورت $f(x) = (x-3)^4 h(x)$ نیز باشد که در این صورت $h(x)$ از درجه ۱ بوده و دارای یک ریشه ساده است و مانند حالت ۱ در بالا خواهد شد.



«بانک سوال مؤسسه یاوران دانش»

۳۶- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\begin{aligned} f(x) + g(x) &= \text{Log} \left(\sqrt{x^2 + 3} - x \right) + \text{Log} \left(\sqrt{x^2 + 3} + x \right) \\ \Rightarrow f(x) + g(x) &= \text{Log} \left(\sqrt{x^2 + 3} - x \right) \left(\sqrt{x^2 + 3} + x \right) \Rightarrow f(x) + g(x) \\ &= \text{Log} \left((x^2 + 3) - (x^2) \right) \Rightarrow f(x) + g(x) = \text{Log} 3 \end{aligned}$$

با مشتق‌گیری از طرفین این تساوی داریم:

$$(f(x) + g(x))' = (\text{Log } 3)' \Rightarrow f'(x) + g'(x) = 0 \Rightarrow f'(x) = -g'(x) \Rightarrow \frac{f'(x)}{g'(x)} = -1$$

$$\xrightarrow{x = \sqrt[4]{6}} \frac{f'(\sqrt[4]{6})}{g'(\sqrt[4]{6})} = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f^{-1}(2x) - 4}{x - 1} = \frac{f^{-1}(2) - 4}{0}$$

۳۷- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$f^{-1}(2) - 4 = 0 \Rightarrow f^{-1}(2) = 4$$

برای آنکه حاصل این حد، متناهی باشد باید:

از طرف دیگر، چون f تابع خطی است، پس f^{-1} هم خطی بوده و اگر آن را به فرم $f^{-1}(x) = mx + h$ در نظر بگیریم:

$$\text{اولا: } f^{-1}(2) = 4 \Rightarrow 2m + h = 4 \Rightarrow h = 4 - 2m$$

$$\text{ثانیا: } f^{-1}(2x) = m(2x) + h = 2mx + h = 2mx + 4 - 2m$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f^{-1}(2x) - 4}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(2mx + 4 - 2m) - 4}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2m(x - 1)}{x - 1} = 2m$$

پس:

$$2m = 4 \Rightarrow m = 2 \xrightarrow{h = 4 - 2m} h = 0$$

چون مقدار این حد برابر ۴ است، پس:

$$f^{-1}(x) = mx + h \xrightarrow{\substack{m=2 \\ h=0}} f^{-1}(x) = 2x \Rightarrow f(x) = \frac{1}{2}x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2} \Rightarrow f'(2) = \frac{1}{2}$$

$$f'(2) \times f^{-1}(2) = \frac{1}{2} \times 4 = 2$$

نهایتاً داریم:

$$\text{شیب خط مماس} = f'(1) = 2$$

۳۸- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$x = 1 \Rightarrow y = 2(1) + 3 = 5 \Rightarrow f(1) = 5$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(f(x) - f(1))(f^2(x) + f(x) \times f(1) + f^2(1))}{(x - 1)(x^2 + x + 1)}$$

با استفاده از اتحاد چاق و لاغر:

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \times \frac{f^2(1) + f(1) \times f(1) + f^2(1)}{(1 + 1 + 1)} = f'(1) \times \frac{3f^2(1)}{3} = 2 \times 5^2 = 50$$



۳۹- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x) - f(4)}{(x-4)(x+8)} = 2 \Rightarrow f'(4) \times \lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{x+8} = 2 \Rightarrow f'(4) = 24$$

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(4+3h) - f(4-3h)}{h(h^2+3)} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^2+3} \times \left[\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(4+3h) - f(4)}{\frac{1}{3} \times (3h)} - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(4-3h) - f(4)}{-\frac{1}{3}(-3h)} \right] \\ &= \frac{1}{3} \times [3f'(4) + 3f'(4)] = 2f'(4) = 2 \times 24 = 48 \end{aligned}$$

۴۰- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. اگر خطی بر منحنی تابع مماس باشد، معادله تلاقی خط و منحنی ریشه مضاعف دارد، زیرا خط مماس منحنی تابع را در یک نقطه (نقطه تماس) قطع می‌کند:

$$A \Big|_{a+3}^1 \quad B \Big|_{a-3}^{-1} \Rightarrow m_{AB} = \frac{f(1) - f(-1)}{1 - (-1)} = \frac{a+3 - a+3}{2} = 3$$

معادله خط مماس $y - (a+3) = 3(x-1) \Rightarrow y = 3x + a$

$$\begin{cases} y = 3x + a \\ y = x^3 + ax^2 + 2x \end{cases} \Rightarrow x^3 + ax^2 + 2x = 3x + a \Rightarrow x^3 + ax^2 - x - a = 0$$

$$x^2(x+a) - (x+a) = 0 \Rightarrow (x^2-1)(x+a) = 0 \xrightarrow{\text{شرط ریشه مضاعف}} a = 1 \text{ یا } a = -1$$

$$a = 1 \Rightarrow f(-1) = -2, f(1) = 4$$

$$a = -1 \Rightarrow f(-1) = -4, f(1) = 2 \Rightarrow f(-1) \times f(1) = -8$$