

گنجینه سوال رایگان

+ پاسخ تشریحی

یاوران دانش



راه های ارتباطی با ما:

www.Dyavari.com

۰۲۱-۷۶۷۰۳۸۵۸

۰۹۱۲-۳۴ ۹۴ ۱۳۴



	۱	۲	۳	۴
۱ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۲ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۴ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۵ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۶ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۷ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۸ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۹ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۰ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۱ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۱۲ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۳ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۴ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۵ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۶ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۱۷ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۸ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۹ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۰ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۲۱ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۲۲ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۳ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۲۴ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۵ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۲۶ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۷ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۸ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۹ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۰ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۱ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۲ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۳۳ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۴ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۳۵ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۶ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۷ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۸ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۹ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۴۰ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>





۱- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. بررسی هریک از گزینه‌ها:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{3x-1}{x+1} \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{3(x+1)-4}{x+1} \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[3 - \frac{4}{x+1} \right] = [3^+] = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{3x+1}{x-1} \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{3(x-1)+4}{x-1} \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[3 + \frac{4}{x-1} \right] = [3^-] = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{2x+3}{x+1} \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{2(x+1)+1}{x+1} \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[2 + \frac{1}{x+1} \right] = [2^-] = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{2x+1}{x-1} \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{2(x-1)+3}{x-1} \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[2 + \frac{3}{x-1} \right] = [2^-] = 1$$

۲- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} (4 - [x])g(x) = \epsilon \Rightarrow 3 \times \lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = \epsilon \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = 2$$

این حد الزاماً به صورت $\frac{0}{0}$ بوده است. بنابراین کافی است در صورت کسر $\sqrt{4(x-1)^2}$ داشته باشیم:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{ax^2 + bx + c}}{x-1} = 2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{4(x-1)^2}}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2|x-1|}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2(x-1)}{(x-1)} = 2$$

$$\Rightarrow 4(x-1)^2 = ax^2 + bx + C \Rightarrow 4x^2 - 8x + 4 = ax^2 + bx + C \quad \begin{cases} a = 4 \\ b = -8 \\ c = 4 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{4(x-1)^2}}{x-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2|x-1|}{x-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2(x-1)}{(x-1)} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) + a - b + c = 2 + 4 + 8 + 4 = 18$$



۳- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\left(x + \sqrt{x^2 + mx} \right)}{1} \times \frac{\left(x - \sqrt{x^2 + mx} \right)}{\left(x - \sqrt{x^2 + mx} \right)} = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - x^2 - mx}{x - \sqrt{x^2 + mx}} = 3 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-mx}{x - \sqrt{\left(x + \frac{m}{2}\right)^2 - \frac{m^2}{4}}} = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-mx}{x - \left|x + \frac{m}{2}\right|} = 3 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-mx}{2x + \frac{m}{2}} = 3 \Rightarrow \frac{-m}{2} = 3 \Rightarrow m = -6$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{6x+1}{x+2} \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{6(x+2)-11}{x+2} \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[6 - \frac{11}{x+2} \right] = [6^-] = 5$$

۴- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. چون در $x \rightarrow (-3)$ مقدار صورت منفی می‌شود، پس مخرج باید در همسایگی $x = -3$ به صورت 0^+ باشد. بنابراین کافی است که مخرج به صورت $2(x+3)^2$ باشد:

$$2(x+3)^2 = 2x^2 + 12x + 18 = 2x^2 + ax + b$$

↓
مقایسه نظیر به نظیر

$$a = 12, b = 18 \Rightarrow a \times b = 216$$

۵- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$f(x) = \frac{3(x^2 - 2x + 3) + 5x - 9}{x^2 - 2x + 3} = 3 + \frac{5x - 9}{x^2 - 2x + 3}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3 + (0)^+ \Rightarrow f(x) > 3$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 3 + (0)^- \Rightarrow f(x) < 3$$

۶- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. چون در $x \rightarrow -3$ مقدار صورت منفی می‌شود، پس مخرج باید در همسایگی $x = -3$ به صورت 0^+ باشد. بنابراین کافی است که مخرج به صورت $2(x+3)^2$ باشد:

$$2(x+3)^2 = 2x^2 + 12x + 18 = 2x^2 + ax + b \xrightarrow{\text{مقایسه نظیر به نظیر}} a = 12, b = 18 \Rightarrow a \times b = 216$$



۷- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\text{مجانِب افقی: } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) \approx \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\cancel{x} \left(1 - \frac{\cancel{x}}{\cancel{x}} + \frac{\cancel{x}}{\cancel{x}^2} \right)}{\cancel{x} \left(1 - \frac{\cancel{x}}{\cancel{x}} - \frac{\cancel{x}}{\cancel{x}^2} \right)} = 1 \Rightarrow y = 1$$

۰ = مخرج کسر : مجانب قائم

$$\begin{cases} x = 3 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x-1)}{(x-3)(x+1)} = \frac{1}{4} \Rightarrow \text{مجانِب قائم نیست زیرا باید حد تابع در } x = 3 \text{ برابر بی نهایت می شد} \\ x = -1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow (-1)} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)} \frac{x-1}{x+1} = \frac{(-2)}{(\pm)} = \pm\infty \Rightarrow x = -1 \text{ تنها مجانب قائم است} \end{cases}$$

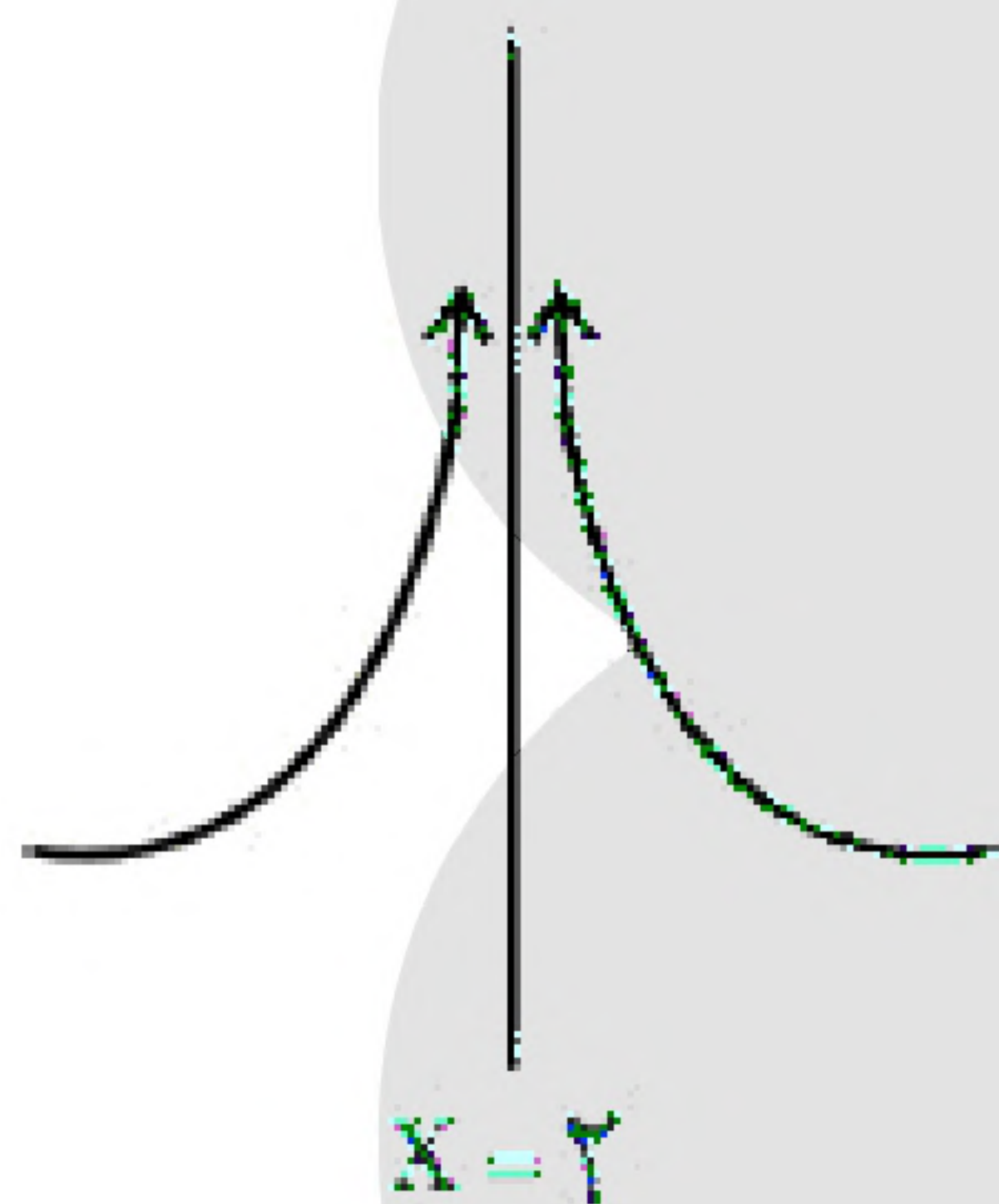
بنابراین تابع دو مجانب دارد. (یک مجانب افقی و یک مجانب قائم)

۸- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$f(x) = 0 \Rightarrow x = 2$: مجانب قائم $g(x)$ با توجه به نمودار $f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(-1)^{[(-2)^-]}}{(-1)^{-}} = \frac{(-1)^{-3}}{(-1)^{-}} = \frac{-1}{-} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(-1)^{[(-2)^+]}}{(-1)^{+}} = \frac{(-1)^{-2}}{(-1)^{+}} = \frac{1}{+} = +\infty$$



۹- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$n < 3 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\wedge_0 (x^3 + 1)}{n x^n + \delta x^3} \cong \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\wedge_0 x^3}{\delta x^3} = 16$$

$$n = 3 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\wedge_0 (x^3 + 1)}{3 x^3 + \delta x^3} \cong \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\wedge_0 x^3}{\wedge x^3} = 10$$

$$n > 3 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\wedge_0 (x^3 + 1)}{n x^n + \delta x^3} \cong \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\wedge_0 x^3}{n x^n} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\wedge_0}{n x^{n-3}} = 0$$

۲۶ = حاصل جمع تمام مقادیر ممکن حد عبارت



۱۰- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 \sqrt{2x+1} (3 - \sqrt{8x-1})}{ax^n - 1} \xrightarrow{\text{هم ارزی پرتوان}} \sim \frac{x^3 \sqrt{2x} (-\sqrt{8x})}{ax^n}$$

$$= \frac{-x^3 \sqrt{16x^2}}{ax^n} = \frac{-x^3 |4x|}{ax^n} = \frac{-4x^4}{ax^n}$$

$$\begin{cases} n = 4 \\ \frac{-4}{a} = 8 \Rightarrow a = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

برای آن که حاصل این حد برابر با ۸ شود، باید:

پس باید حاصل حد زیر را حساب کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow \left(-\frac{1}{2}\right)^-} \left(\left[\frac{1}{x} \right] + [-2x] \right) = \left[\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}^+ \right] + \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}^+ \right] = -2 + 1 = -1$$

۱۱- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. برای آن که حاصل حد فوق، بی نهایت شود، باید $x = a$ مخرج کسر را صفر کند:

$$|2 \cos^2 a - 2 \cos a - \sin^2 a| = 0 \Rightarrow 2 \cos^2 a - 2 \cos a - \sin^2 a = 0$$

با استفاده از روابط $\cos^2 a = 2 \cos^2 a - 1$ و $\sin^2 a = 1 - \cos^2 a$ داریم:

$$2(2 \cos^2 a - 1) - 2 \cos a - (1 - \cos^2 a) = 0 \Rightarrow 5 \cos^2 a - 2 \cos a - 3 = 0$$

$$\xrightarrow{\cos a = t} 5t^2 - 2t - 3 = 0 \Rightarrow t = 1, \frac{-3}{5}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos a = 1 \xrightarrow{a \in [0, 2\pi]} a = 0, 2\pi \\ \cos a = \frac{-3}{5} \xrightarrow{a \in [0, 2\pi]} \end{cases}$$

a دارای دو جواب درست به صورت های $\pi \pm \alpha$ در ربع های دوم و سوم است

$$0 + 2\pi + (\pi - \alpha) + (\pi + \alpha) = 4\pi$$

پس مجموع مقادیر ممکن برابر a برابر است با:



«بانک سوال موسسه یاوران دانش»

۱۲- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. این تابع به ازای کلیه مقادیر a حتماً دارای مجانب افقی $y = \frac{6x^3}{9x^3} = \frac{2}{3}$ هست. پس

برای این که کلاً دارای دو مجانب باشد، باید فقط یک مجانب قائم داشته باشد.
دو حالت زیر امکان پذیر است:

الف) مخرج فقط یک ریشه داشته باشد. یعنی ریشه عامل $(x + a)$ همان ریشه عامل $9x^2 + 6x + 1 = (3x + 1)^2$ باشد.
 $-a = \frac{-1}{3} \Rightarrow a = \frac{1}{3}$ باشد:

ب) صورت و مخرج کسر دارای ریشه مشترک باشند تا عامل $(x + a)$ تولیدی مجانب قائم دیگری نکند. ریشه های صورت را پیدا می کنیم:

واضح است که $x = 1$ صورت را صفر کرده و ریشه است، بنابراین در صورت حتماً عامل $(x - 1)$ وجود دارد، با تقسیم عبارت صورت بر عامل $(x - 1)$ ، عوامل دیگر آن هم مشخص می شود:
صورت کسر $= (x - 1)(2x + 1)(3x + 1)$

پس صورت کسر دارای سه ریشه 1 ، $\frac{-1}{2}$ ، $\frac{-1}{3}$ است و ریشه عامل $(x + a)$ در مخرج می تواند هر کدام از

آنها باشد:
 -1 یا $\frac{1}{2}$ یا $\frac{1}{3} \Rightarrow a = \frac{1}{3}$ یا $\frac{1}{2}$ یا $-\frac{1}{3}$ یا -1

$a = \frac{1}{3}$ در حالت الف هم به دست آمده بود و تکراری محسوب می شود، پس نهایتاً a سه مقدار مختلف می تواند داشته باشد.

۱۳- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$n = 3 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{40(x^3 + 1)}{3x^3 + 5x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{40x^3}{8x^3} = 5$$

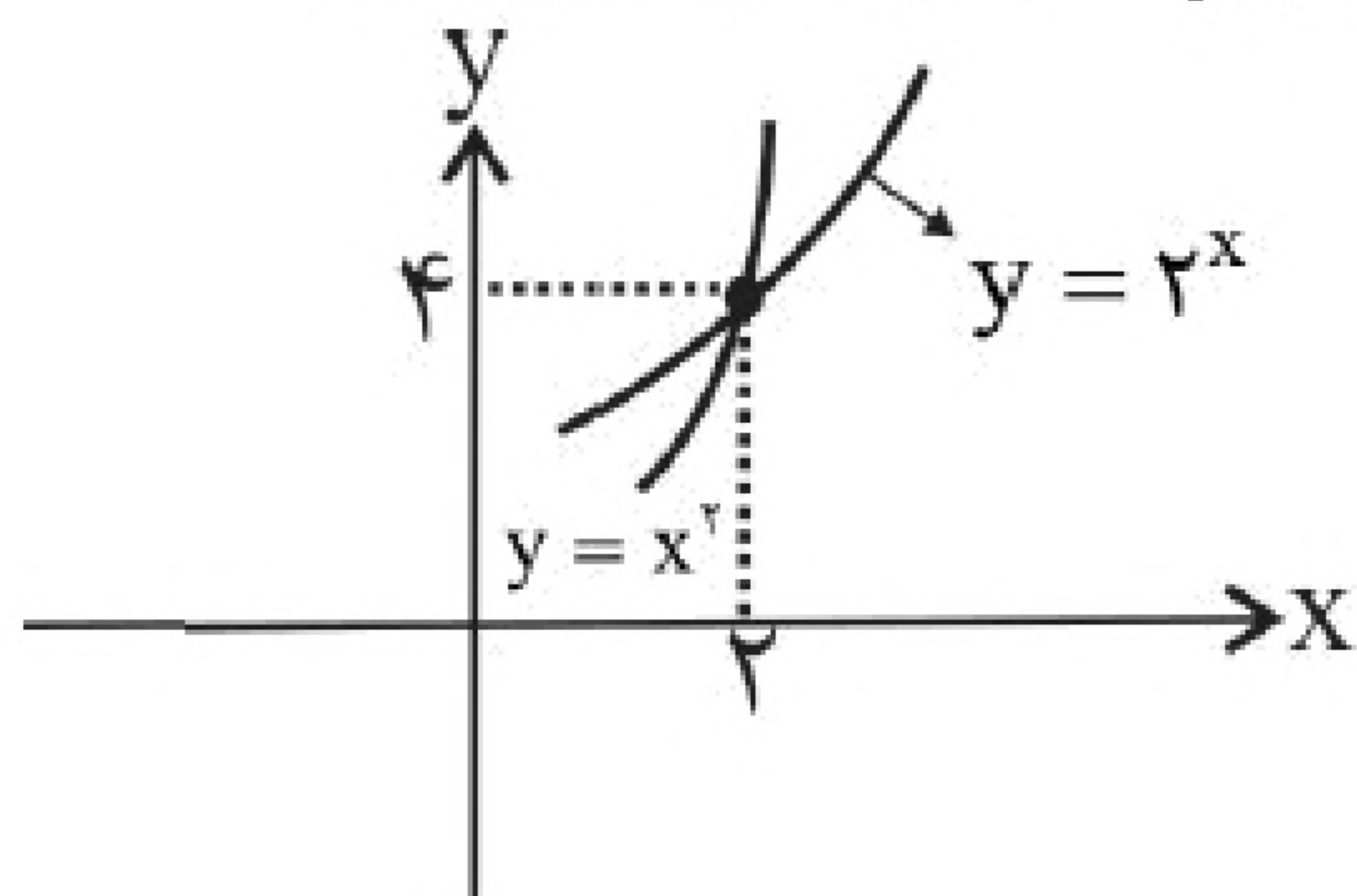
$$n > 3 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{40(x^3 + 1)}{nx^n + 5x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{40x^3}{nx^n} = 0$$

$$n < 3 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{40(x^3 + 1)}{nx^n + 5x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{40x^3}{5x^3} = 8$$

$$13 = 5 + 0 + 8 = \text{حاصل جمع تمام مقادیر حد ممکن}$$



۱۴- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. نمودار دو تابع $y = 2^x$ و $y = x^2$ در همسایگی $x = 2$ به صورت زیر است:



$$x \rightarrow 2^+: 2^x < x^2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2 - 2^x}{2^x - x^2} = \frac{-4}{0^-} = +\infty$$

$$x \rightarrow 2^-: 2^x > x^2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2 - 2^x}{2^x - x^2} = \frac{-4}{0^+} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{f(x+1)}{f(2-x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)}{\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)} = \frac{\text{عدد مثبت}}{0^-} = -\infty = K$$

۱۵- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

با توجه به جملات پرتوان در صورت و مخرج برای محاسبه حد در بی نهایت:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2 + 2x} + \sqrt[3]{2 - x^3}}{x + |2x - 3|} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2} + \sqrt[3]{-x^3}}{x + |2x|} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|2x| - x}{x - 2x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x}{-x} = 2$$

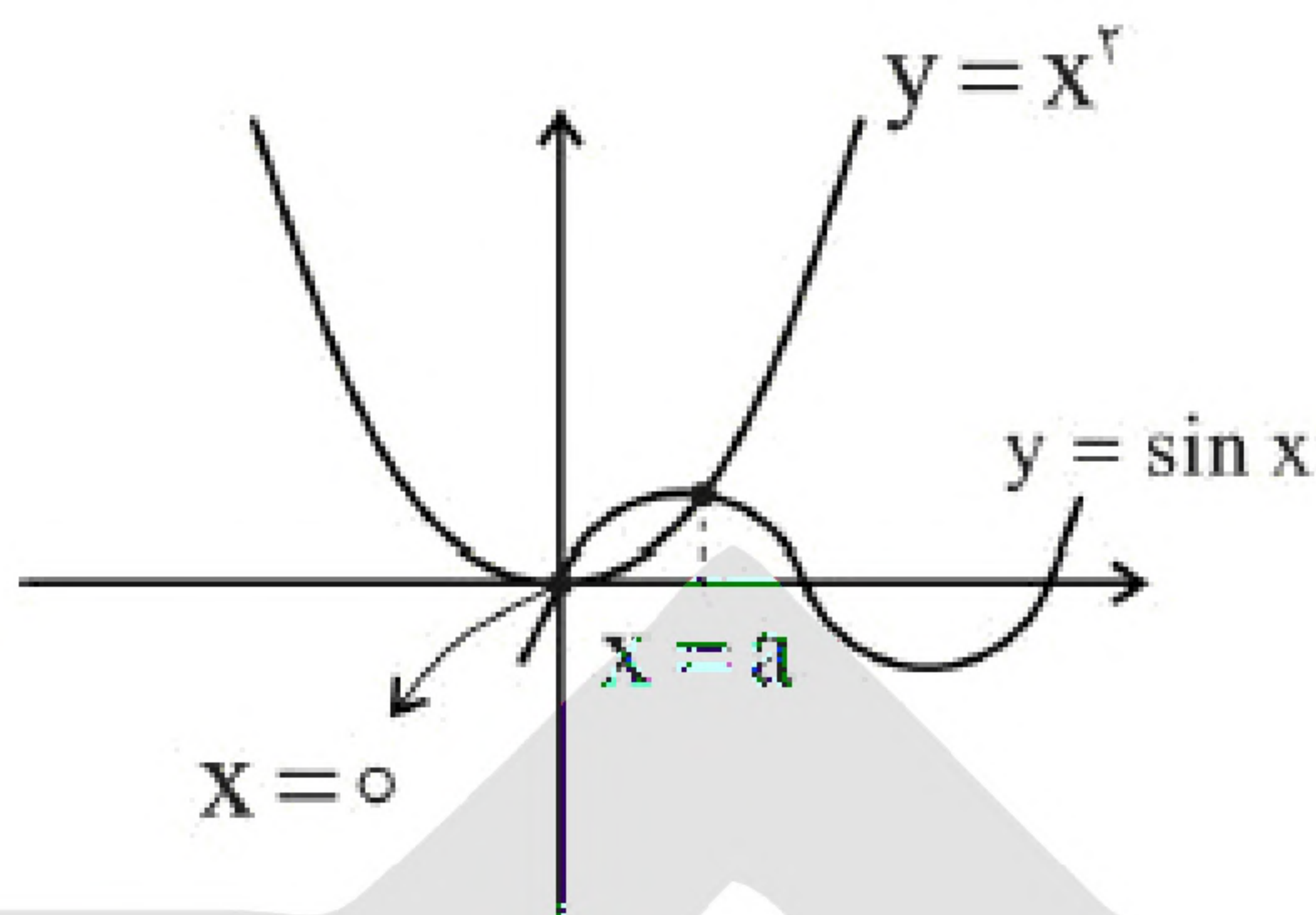
۱۶- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x - \sqrt{ax^2 + bx} \times \frac{x + \sqrt{ax^2 + bx}}{x + \sqrt{ax^2 + bx}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - (ax^2 + bx)}{x + \sqrt{a|x|}} \quad \begin{array}{l} \text{چون } x \rightarrow +\infty \\ \text{پس } |x| = x \end{array}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(1-a)x^2 - bx}{(1 + \sqrt{a})x} = 2 \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ \frac{-b}{2} = 2 \Rightarrow b = -4 \Rightarrow a - b = 5 \end{cases}$$



۱۷- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. برای محاسبه ریشه‌های مخرج باید دو نمودار $y = \sin x$ و $y = x^2$ را در یک دستگاه رسم کرده و سپس رفتار تابع را در همسایگی دو نقطه $x = 0$ و $x = a > 0$ که محل برخورد دو نمودار است، بررسی کرد:



$$\text{همسایگی } x = a \begin{cases} x > a : x^2 > \sin x \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \frac{1}{+} = +\infty \\ x < a : x^2 < \sin x \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \frac{1}{-} = -\infty \end{cases} \Rightarrow$$

$$\text{همسایگی } x = 0 \begin{cases} x > 0 : x^2 < \sin x \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \frac{1}{-} = -\infty \\ x < 0 : x^2 > \sin x \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \frac{1}{+} = +\infty \end{cases} \Rightarrow$$



۱۸- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. در $x \rightarrow -\infty$ عبارت $\sqrt{4x^2 + 15x}$ هم‌ارز با $\sqrt{4x^2}$ و در نهایت $|2x| = -2x$ است:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{mx^n + 15}{3x - (-2x)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{mx^n}{5x} = -1 \begin{cases} m = -5 \\ n = 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{-5x + 15}{3x - \sqrt{4x^2 + 15x}} \times \frac{3x + \sqrt{4x^2 + 15x}}{3x + \sqrt{4x^2 + 15x}} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(-5x + 15) \times 18}{\underbrace{9x^2 - 4x^2 - 15x}_{5x^2 - 15x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-5(\cancel{x-3}) \times 18}{5x(\cancel{x-3})} = -6$$



۱۹- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^-} y &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-2}{\sqrt[3]{2-f}} = \frac{-2}{\sqrt[3]{2-2^+}} = \frac{-2}{0^-} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} y &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{-2}{\sqrt[3]{2-f}} = \frac{-2}{\sqrt[3]{2-2^-}} = \frac{-2}{0^+} = -\infty \end{aligned} \right\} \rightarrow \begin{array}{c} \nearrow \\ x=2 \\ \searrow \end{array}$$

۲۰- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\begin{aligned} \text{اگر } n > 3 &\Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\lambda x^n}{2x^n} = \frac{\lambda}{2} \\ \text{اگر } n = 3 &\Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x^3 + \lambda x^3}{2x^3} = \frac{\lambda - 2}{2} \\ \text{اگر } n < 3 \text{ (طبیعی است } n) &\left\{ \begin{array}{l} n = 2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x^2}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-1) = -1 \\ \text{یا} \\ n = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x}{2x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-1) = -1 \end{array} \right. \end{aligned}$$

۲۱- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{5^n \left(\left(\frac{2}{5}\right)^n + \left(\frac{3}{5}\right)^n + \left(\frac{4}{5}\right)^n + 1 \right)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{5^n} = 5$$

$$x \Rightarrow -\frac{1}{2} \Rightarrow x + \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow 2x + 1 = 0$$

۲۲- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} \frac{x^2}{(2x+1)^2} = +\infty \Rightarrow 4x^2 + 4x + 1 = 4x^2 + ax + b \Rightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = 1 \end{cases}$$

$$x \rightarrow -\frac{1}{2}$$

$$a + b = 4 + 1 = 5$$



۲۳- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. در عبارت فرض سؤال، چون $\lim_{x \rightarrow 1} (x+2) = 3$ و حاصل نهایی حد $+\infty$ شده است.

پس مخرج کسر $2(x-1)^2$ بوده است تا مخرج کسر به 0^+ میل کند.

$$2(x-1)^2 = 2x^2 - 4x + 2 = 2x^2 + ax + b \Rightarrow \begin{cases} a = -4 \\ b = 2 \end{cases}$$

با جایگذاری مقادیر a ، b به محاسبه حد دوم می‌پردازیم:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x \left(x + \sqrt{x^2 - 8} \right) \times \frac{x - \sqrt{x^2 - 8}}{x - \sqrt{x^2 - 8}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x(x^2 - x^2 + 8)}{x - \sqrt{x^2 - 8}}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{8x}{x - |x|} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{8x}{x - (-x)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{8x}{2x} = 4$$

۲۴- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$x = 2 \Rightarrow \text{مخرج کسر} = 0 \Rightarrow x = \frac{-d}{c} = 2 \Rightarrow d = -2c \quad (1)$$

$$y = 1 = \frac{a}{c} \Rightarrow a = c \quad (2)$$

$$(-1, 0) \xrightarrow{\text{جایگذاری}} 0 = \frac{a(-1) + b}{c(-1) + d} \Rightarrow -a + b = 0 \Rightarrow a = b \quad (3) \Rightarrow (2) \Rightarrow b = c \quad (4)$$

$$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d} = \frac{cx + c}{cx - 2c} = \frac{\cancel{c}(x+1)}{\cancel{c}(x-2)} \Rightarrow f(x) = \frac{x+1}{x-2} \Rightarrow a = b = c = 1, d = -2$$

$$f(a - b - 2c - d + 3) = f(3) = \frac{3+1}{3-2} = 4$$



۲۵- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$f(x) = \frac{2x^2 - 3x + 1}{x^2 + 5x - 3} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 2 \Rightarrow y = 2 \quad \text{مجانِب افقی}$$

اکنون باید بررسی کنیم که تابع در همسایگی مجانب افقی در $x \rightarrow +\infty$ و $x \rightarrow -\infty$ آیا با مقادیر بزرگتر از ۲ به آن نزدیک می‌شود یا با مقادیر کوچکتر از ۲؟ برای این کار دو برابر مخرج را در صورت ظاهر می‌کنیم:

$$f(x) = \frac{2(x^2 + 5x - 3) - 13x + 7}{x^2 + 5x - 3}$$

تفکیک
↓

$$f(x) = 2 + \frac{7 - 13x}{x^2 + 5x - 3}$$

$$\text{وقتی } x \rightarrow +\infty : \frac{7 - 13x}{x^2 + 5x - 3} \approx 0^- \Rightarrow f(x) \rightarrow 2^- \quad (1)$$

$$\text{وقتی } x \rightarrow -\infty : \frac{7 - 13x}{x^2 + 5x - 3} \approx 0^+ \Rightarrow f(x) \rightarrow 2^+ \quad (2)$$



۲۶- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{4x - 1}{a(x - 2)^2} = -\infty \xrightarrow{\text{پایه } a < 0} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{7}{ax^2 - 4ax + 4a} = -\infty \Rightarrow 4a = -12 \Rightarrow a = -3$$

$$\Rightarrow -4a = b \Rightarrow b = 12$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (b - a)x \times \frac{4x - 1}{-3x^2 + 12x - 12} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{60x^2 - 15x}{-3x^2 + 12x - 12} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{60x^2}{-3x^2} = -20$$



۲۷- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. چون درجه صورت و مخرج یکسان است، این تابع می‌تواند فقط مجانب‌های قائم و افقی داشته باشد:

$$x = 4 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 4} f(x) = \pm \infty \quad \checkmark$$

$$x = -4 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow (-4)} f(x) = \pm \infty \quad \checkmark$$

مجاانب‌های قائم: $4 - |x| = 0$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - 14}{4 - x} = -1 \Rightarrow y = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - 14}{4 + x} = 1 \Rightarrow y = 1$$

مجاانب‌های افقی:

مساحت بین ۲ مجانب قائم و ۲ مجانب افقی برابر مساحت یک مستطیل به صورت $2 \times 8 = 16$ است.

$$\text{اگر } n > 3 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{8x^n}{2x^n} = 4$$

۲۸- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\text{اگر } n = 3 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x^3 + 8x^3}{2x^3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{6x^3}{2x^3} = 3$$

$$\left\{ \begin{array}{l} n = 2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x^2}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x) = +\infty \\ \text{یا} \\ n = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2}{\sqrt{x}} = -\infty \end{array} \right.$$

۳ اگر $n < 3$ (طبیعی است)

۲۹- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x - \sqrt{x^2 + 2x - 1})(x + \sqrt{x^2 + 2x - 1})}{x + \sqrt{x^2 + 2x - 1}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - |x^2|}{x + |x|} = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x + x) = -\infty$$



۳۰- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$k > 3 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{kx^3 - bx^k - 3}{2x^k - 4x^2 + 3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-bx^k}{2x^k} = -\frac{b}{2} = 2 \Rightarrow b = -4$$

$$k = 3 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 - bx^3 - 3}{2x^3 - 4x^2 + 3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(3-b)x^3}{2x^3} = \frac{3-b}{2} = 2 \Rightarrow b = -1$$

$$k < 3 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{kx^3 - bx^k - 3}{2x^k - 4x^2 + 3} \neq 2 \quad \text{غیرقابل قبول}$$

«بانک سوال موسسه یاوران دانش»

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x - ax^2 - ax - bx - b}{x+1} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2(1-a) + x(-1-a-b) - b}{x+1} = 0 \Rightarrow \begin{cases} 1-a=0 \Rightarrow a=1 \\ -1-a-b=0 \Rightarrow b=-2 \end{cases}$$

$a+b=1-2=-1$

۳۱- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3^{10} x^{20} \times 2^{20} x^{40}}{6^{15} x^{60}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6^{10} \times 2^{10} \cancel{x^{60}}}{6^{15} \cancel{x^{60}}} = \frac{2^{10}}{6^5} = \frac{2^{10}}{2^5 \times 3^5} = \frac{2^5}{3^5} = \left(\frac{2}{3}\right)^5 = \frac{32}{243}$$

۳۲- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

۳۳- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. با توجه به جواب $-\infty$ باید مخرج $(x-4)^2$ باشد. بنابراین با مقایسه این عبارت و مخرج کسر:

$$-16 + 8x - x^2 = b - ax - x^2$$

نتیجه می گیریم که $b = -16$ و $a = -8$ است.

$$\lim_{x \rightarrow (-\infty)} \frac{(a+8)x^3 + bx^2 - 3}{\sqrt{2x - 2x^2}} = \lim_{x \rightarrow (-\infty)} \frac{-16x^2}{-2x^2} = 8$$



۳۴- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. در این سؤال دقت کنید که $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$ و خود دارای مجانب قائم است:

$$f(x) = \frac{3}{\sqrt{x+3}} + \frac{\sin x}{\cos x \cdot \sqrt{3-x}}$$

ابتدا دامنه عبارات رادیکالی را تعیین می‌کنیم:

$$\left. \begin{array}{l} x+3 > 0 \\ 3-x > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow -3 < x < 3$$

تابع در همسایگی راست -3 تعریف و مجانب قائم دارد. $x+3=0 \Rightarrow x=-3 \Rightarrow$

تابع در همسایگی چپ 3 تعریف و مجانب قائم دارد. $3-x=0 \Rightarrow x=3 \Rightarrow$

$$\cos x = 0 \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2} \quad \left\{ \begin{array}{l} \xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} x = \frac{\pi}{2} \approx 1/57 \\ x = -\frac{\pi}{2} \approx -1/57 \end{array} \right. \quad (-3 < x < 3)$$

تابع در همسایگی دو طرفه $x = \frac{\pi}{2}$, $x = -\frac{\pi}{2}$ تعریف و مجانب قائم دارد. پس تابع ۴ مجانب قائم دارد.

۳۵- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$x \geq 0, |x| = x \rightarrow f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 2x + 1} = \frac{x-1}{x+1} \Rightarrow x+1=0 \Rightarrow x=-1$$

$$x < 0, |x| = -x \rightarrow f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 2x + 1} = \frac{x+1}{x-1} \Rightarrow x-1=0 \Rightarrow x=1$$

زیرا هر دو ریشه‌ی مخرج که می‌توانند مجانب قائم باشند در دامنه تعریف گفته شده قرار ندارند. بنابراین تابع فقط یک

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) \cong \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

مجانب افقی به صورت $y=1$ دارد:

۳۶- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x \rightarrow (-2)^+} \frac{[-x] + m - 1}{4 - x^2} = \frac{[-(-2)^+] + m - 1}{4 - ((-2)^+)^2} = \frac{[2^-] + m - 1}{4 - 4^-} = \frac{m}{+}$$

$$\Rightarrow +\infty \Rightarrow m > 0$$

۳۷- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. عبارت‌های داخل قدرمطلق را تعیین علامت و عبارت $[2x]$ را تعیین مقدار می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-(1-x) + (1+x)}{[4^-] - (x^2 - 1)} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2x}{4 - x^2} = \frac{4}{4 - 4^-} = \frac{4}{+} = +\infty$$



۳۸- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. عبارت را در مزدوج صورت و مخرج ضرب و تقسیم می‌کنیم.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x+1} - \sqrt{x+2})(\sqrt{x+1} + \sqrt{x+2})(\sqrt{x+3} + \sqrt{x+4})}{(\sqrt{x+3} - \sqrt{x+4})(\sqrt{x+3} + \sqrt{x+4})(\sqrt{x+1}\sqrt{x+2})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x+1) - (x+2)}{(x+3) - (x+4)} \times \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+3} + \sqrt{x+4}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x+2}} = \frac{1-2}{3-4} \times \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} + \sqrt{x}}{\sqrt{x} + \sqrt{x}} = 1$$

۳۹- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. مخرج کسر بایستی ریشه مضاعف $x = 3$ داشته باشد پس باید مخرج $a(x-3)^2$ باشد.

$$a(x-3)^2 = ax^2 - 6ax + 9a$$

در نتیجه:

$$\begin{cases} -6a = b \\ 9a = -1 \end{cases} \Rightarrow a = -\frac{1}{9}, b = \frac{2}{3}$$

$$g(x) = \frac{1}{x + 6b + 9a} = \frac{1}{x + 4 - 1} = \frac{1}{x + 3}$$

مجانِب قائم تابع g برابر $x = -3$ است.

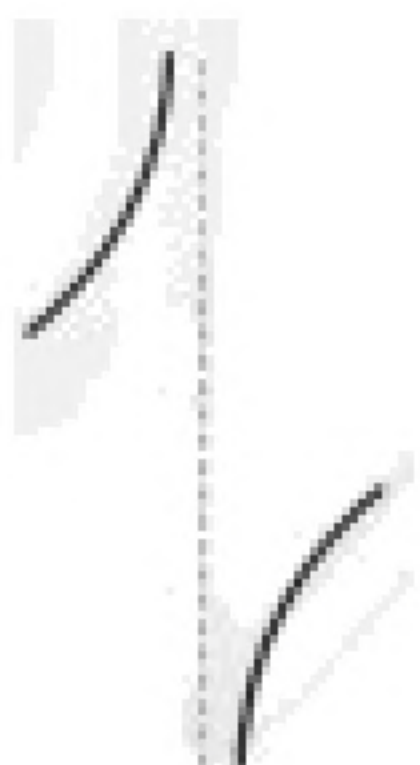
۴۰- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \frac{1}{1-1^+} - \frac{1}{2} = \frac{1}{0^-} - \frac{1}{2} = -\infty$$

$$x \rightarrow 1^+$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \frac{1}{1-1^-} - \frac{1}{2} = \frac{1}{0^+} - \frac{1}{2} = +\infty$$

$$x \rightarrow 1^-$$

بنابراین نمودار تابع $f(x)$ در اطراف $x = 1$ به صورت  خواهد بود.