

گنجینه سوال رایگان
+ پاسخ تشریحی

یاوران دانش



راه های ارتباطی با ما:

www.Dyavari.com

۰۲۱-۷۶۷۰۳۸۵۸

۰۹۱۲-۳۴ ۹۴ ۱۳۴



- | | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
|------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|
| ۱ - | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۲ - | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۳ - | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۴ - | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۵ - | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۶ - | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۷ - | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |
| ۸ - | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۹ - | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۱۰ - | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۱۱ - | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |
| ۱۲ - | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۱۳ - | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |
| ۱۴ - | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۱۵ - | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۱۶ - | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۱۷ - | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |
| ۱۸ - | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۱۹ - | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۲۰ - | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |
| ۲۱ - | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۲۲ - | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۲۳ - | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |
| ۲۴ - | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۲۵ - | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۲۶ - | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۲۷ - | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۲۸ - | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۲۹ - | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۳۰ - | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |
| ۳۱ - | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۳۲ - | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۳۳ - | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۳۴ - | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |
| ۳۵ - | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۳۶ - | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۳۷ - | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۳۸ - | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۳۹ - | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۴۰ - | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |

- | | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
|------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|
| ۴۱ - | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |
| ۴۲ - | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |
| ۴۳ - | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۴۴ - | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۴۵ - | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |
| ۴۶ - | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۴۷ - | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۴۸ - | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |



۱- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\text{Cotg}\left(\frac{\pi}{2} + 2x\right) = \text{Cos}\left(\frac{\pi}{2} + 2x\right) \Rightarrow -\text{tg}(2x) = -\text{Sin } 2x \Rightarrow \text{tg}(2x) = \frac{2 \text{tg}(2x)}{1 + \text{tg}^2 2x}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{tg}(2x) = 0 \Rightarrow 2x = k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} \\ \text{یا} \\ 1 + \text{tg}^2 2x = 2 \Rightarrow \text{tg}^2 2x = 1 \Rightarrow \text{tg } 2x = \pm 1 \Rightarrow 2x = k\pi \pm \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} \pm \frac{\pi}{8} \end{array} \right\}$$

$$\xrightarrow{-\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{4}} \left\{ \begin{array}{l} x_1 = -\frac{\pi}{8} \\ x_2 = \frac{\pi}{8} \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha = x_2 - x_1 = \frac{\pi}{4} \Rightarrow 3\alpha = \frac{3\pi}{4} = \text{Cos}(3\alpha) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

۲- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\text{Sin } 2\alpha = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \text{Cos } 2\alpha \Rightarrow y = a \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \text{Cos} \left(\frac{\pi}{2} - 2bx \right) \right) + c$$

$$\Rightarrow y = -\frac{a}{2} \text{Sin}(2bx) + \left(\frac{a}{2} + c \right)$$

$$\left(-\frac{a}{2} \right) \cdot (2b) > 0 \Rightarrow ab < 0$$

$$\frac{a}{2} + c = \frac{-2+1}{2} \Rightarrow \frac{a}{2} + c = -\frac{1}{2} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \Rightarrow \text{یا}$$

$$\left| -\frac{a}{2} \right| = \frac{1 - (-2)}{2} \Rightarrow |a| = 3 \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} a = 3, c = -2 \\ a = -3, c = 1 \end{array}$$

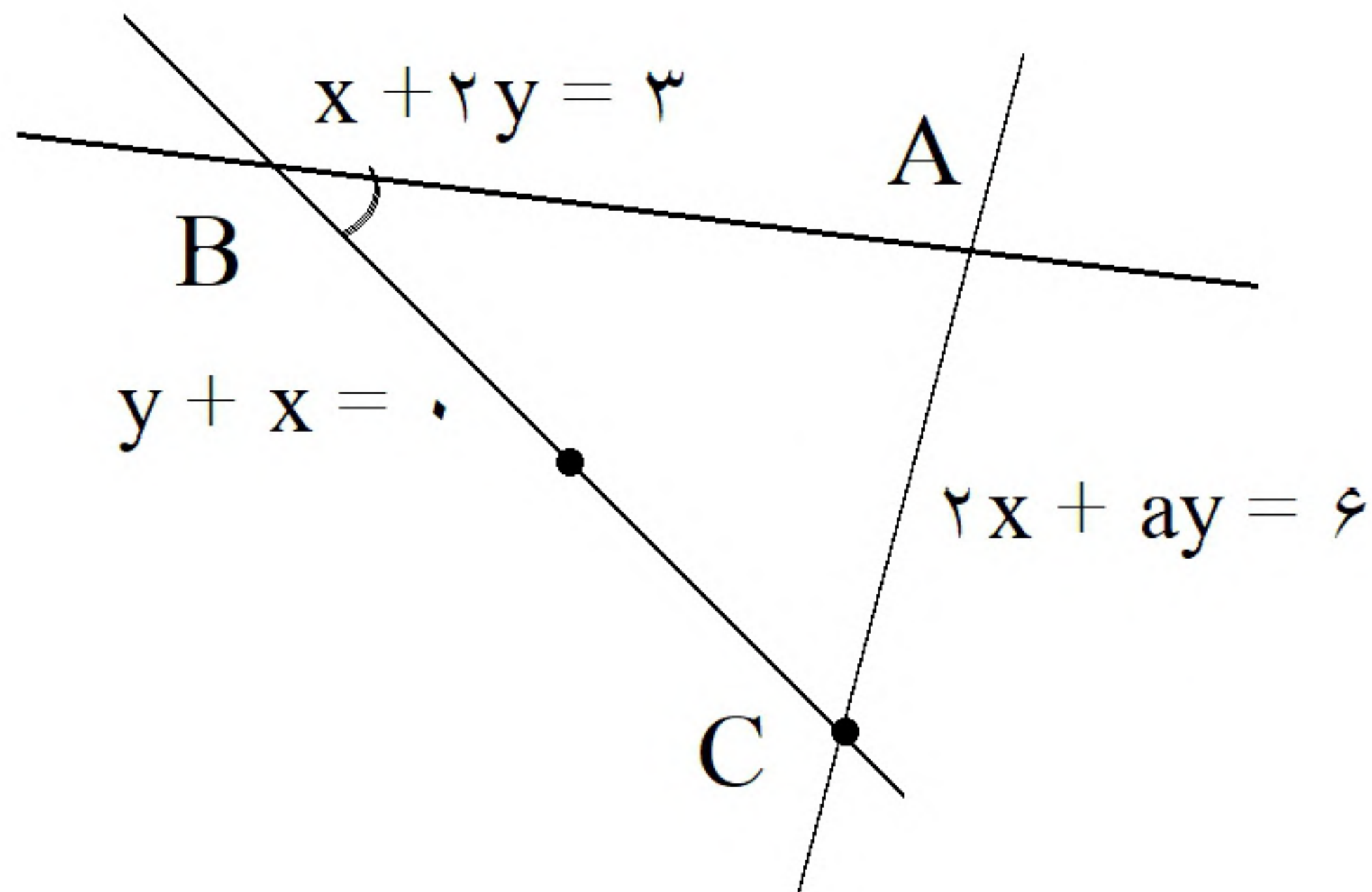
$$\frac{2\pi}{|2b|} = \frac{15\pi}{4} - \left(\frac{-5\pi}{4} \right) \Rightarrow |b| = \frac{1}{5}$$

$$ab = -3 \times \frac{1}{5} = -0.6$$

تابع در همسایگی صفر صعودی است. پس:



۳- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. چون مرکز دایره‌ای که از ۳ رأس A, B, C می‌گذرد روی ضلع BC قرار دارد پس مثلث در رأس A قائم‌الزاویه است.



$$m_{AB} \cdot m_{AC} = -1 \Rightarrow \left(-\frac{1}{2}\right) \left(-\frac{2}{a}\right) = -1 \Rightarrow a = -1$$

$$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ y + x = 0 \\ 2x - y = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A(3, 0) \\ B(-3, 3) \\ C(2, -2) \end{cases}$$

$$\left. \begin{aligned} AB &= \sqrt{36 + 9} = 3\sqrt{5} \\ AC &= \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} \operatorname{tg}(\hat{B}) &= \frac{\sqrt{5}}{3\sqrt{5}} = \frac{1}{3} \\ \operatorname{tg}(\hat{C}) &= 3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \operatorname{tg}(B - C) = \frac{\operatorname{tg} B - \operatorname{tg} C}{1 + \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C}$$

$$= \frac{\frac{1}{3} - 3}{1 + 1} = -\frac{4}{3} \Rightarrow \operatorname{Cotg}(B - C) = -\frac{3}{4}$$

۴- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \sin x \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \cos x = \frac{1}{\sqrt{3}} \xrightarrow{\times 2\sqrt{3}} 3 \sin x - \sqrt{3} \cos x = 2$$

از طرفی:

$$\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \sin^2\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{3} \xrightarrow{\cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x} \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2x - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{3} \Rightarrow 3 \sin x - \sqrt{3} \cos x + m \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = 1$$

$$\Rightarrow 2 - \frac{m}{3} = 1 \Rightarrow m = 3$$



۵- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$f(x) = \frac{2}{a} - \frac{b}{1 + \tan^2\left(cx - \frac{3\pi}{4}\right)} = \frac{2}{a} - b \cos^2\left(cx - \frac{3\pi}{4}\right)$$

برای اینکه تابع بیشترین مقدار ممکن شود باید $\cos^2\left(cx - \frac{3\pi}{4}\right) = 0$ شود پس:

$$\frac{2}{a} = 6 \Rightarrow a = \frac{1}{3}$$

برای اینکه تابع کمترین مقدار ممکن شود باید $\cos^2\left(cx - \frac{3\pi}{4}\right) = 1$ شود پس:

$$\frac{2}{\frac{1}{3}} - b = 0 \Rightarrow b = 6$$

$$T = \frac{\pi}{|c|} = 9\pi \xrightarrow{c > 0} c = \frac{1}{9}$$

از طرفی:

$$f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 6 - 6 \cos^2\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = 6 - 1/5 = 4/5$$

$$S = \frac{5 \times 12 \times \sin \alpha}{2} = 15 \Rightarrow \sin \alpha = \frac{1}{2}$$

۶- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\alpha = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$$

$$\text{اختلاف} = \frac{4\pi}{6} = \frac{2\pi}{3}$$

$$\sin\left(\frac{\pi + 4x}{2}\right) \Rightarrow \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2x\right) = \cos 2x$$

$$\cos\left(\frac{\pi + 4x}{2}\right) \Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2} + 2x\right) = -\sin 2x$$

$$\Rightarrow \sin 4x = \cos 2x \Rightarrow 2 \sin 2x \cdot \cos 2x = \cos 2x \xrightarrow{\cos 2x \neq 0} \sin 2x = \frac{1}{2}$$

۷- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\xrightarrow{[0, \pi]} 2x = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} \Rightarrow \alpha = \frac{\frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{6}}{2} = \frac{\pi}{3} \Rightarrow \tan^2 \alpha = -\sqrt{3}$$

$$\frac{\pi}{b} = \frac{9\pi}{20} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{5} \Rightarrow b = 5$$

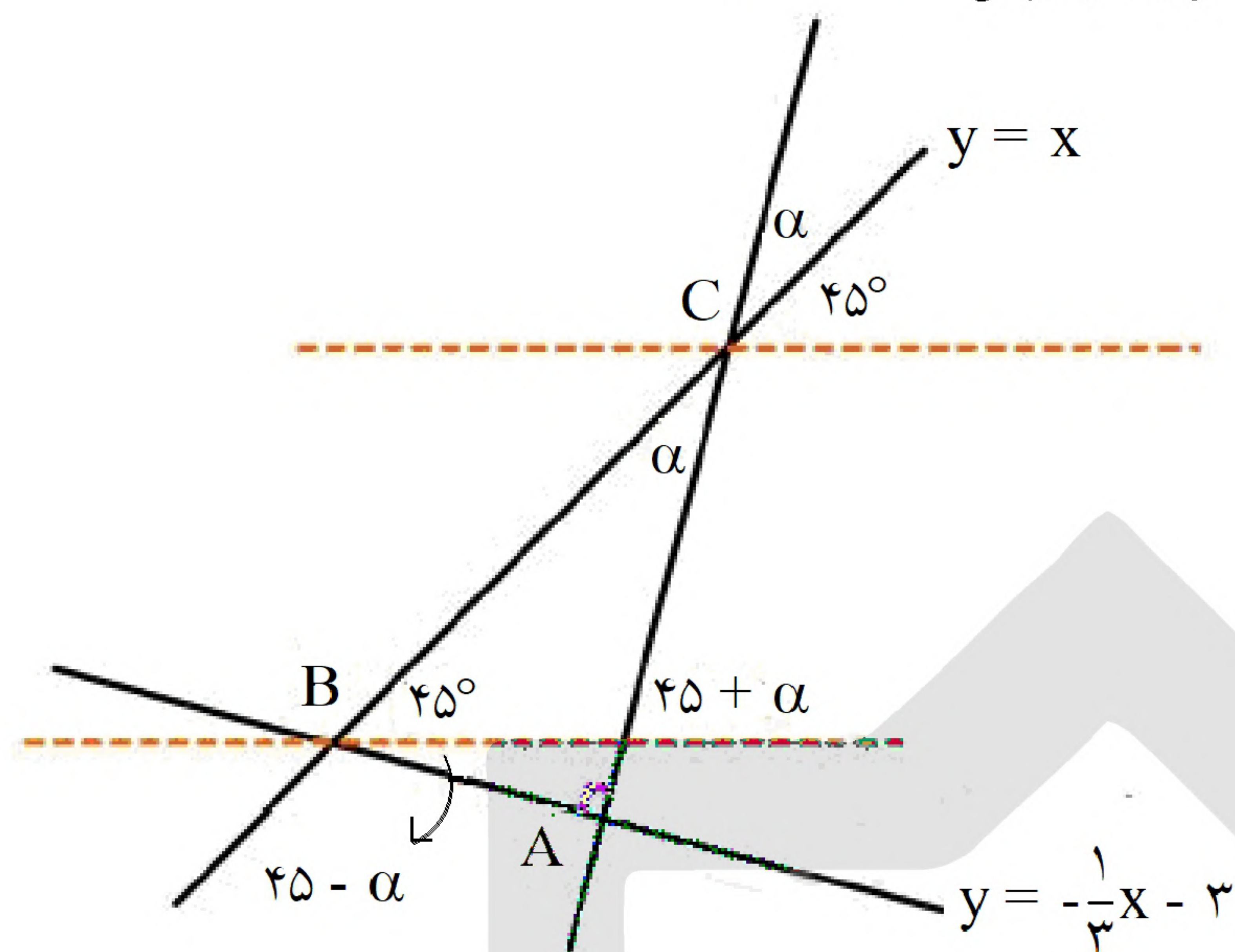
۸- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\left. \begin{array}{l} a + c = 1 \\ 0 + c = -2 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} a = 3 \\ c = -2 \end{array}$$

$$ab = 15$$



۹- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. چون مرکز روی BC قرار دارد، پس $\hat{A} = 90^\circ$.



$$\operatorname{tg}(45^\circ + \alpha) = 3 \Rightarrow \operatorname{tg}(90^\circ + 2\alpha)$$

$$\frac{2 \times 3}{1 - 3^2} = -\frac{3}{4} \Rightarrow -\operatorname{Cotg} 2\alpha = -\frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow \operatorname{Cotg} 2\alpha = \frac{3}{4}$$

$$\hat{B} - \hat{C} = 90^\circ - \alpha - \alpha = 90^\circ - 2\alpha$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg}(\hat{B} - \hat{C}) = \operatorname{Cotg} 2\alpha = \frac{3}{4}$$

۱۰- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\cos x}{\sqrt{2}} - \frac{\sin x}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos x - \sin x) = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \cos x - \sin x = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

طرفین تساوی بالا را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$\Rightarrow 1 - \sin 2x = \frac{2}{3} \Rightarrow \sin 2x = \frac{1}{3}$$

حال در معادله داده شده جای‌گذاری می‌کنیم:

$$m\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right) - 3\sqrt{6}\left(\frac{1}{3}\right) = \sqrt{6} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}m = 2\sqrt{6} \Rightarrow m = 6$$



$$f(x) = a + \frac{b}{2} \sin\left(2cx - \frac{3\pi}{2}\right)$$

۱۱- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$f(x) = a + \frac{b}{2} \cos(2cx)$$

$$\left. \begin{aligned} y_{\max} &= a + \frac{|b|}{2} = 3 \\ y_{\min} &= a - \frac{|b|}{2} = -1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow a = 1, |b| = 4$$

در $x = 0$ مینیمم تابع رخ داده است. پس $b < 0$ و $b = -4$ است. دوره تناوب هم برابر π است.

$$\Rightarrow T = \frac{2\pi}{2|c|} = \pi \Rightarrow |c| = 1$$

پس $f(x) = 1 - 2 \cos 2x$ است. باید معادله $f(x) = 0$ را حل کنیم:

$$1 - 2 \cos 2x = 0 \Rightarrow \cos 2x = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} 2x = \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6} \\ 2x = \frac{5\pi}{3} \Rightarrow x = \frac{5\pi}{6} \end{cases}$$

اختلاف این جوابها در بازه $[0, \pi]$ برابر $\frac{2\pi}{3}$ است.

$$\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} \alpha \Rightarrow x = k\pi + \alpha$$

۱۲- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\operatorname{tg} 2x = \operatorname{Cotg} x \Rightarrow \operatorname{tg} 2x = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \Rightarrow 2x = k\pi + \frac{\pi}{2} - x \Rightarrow 3x = k\pi + \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow x = \frac{k\pi}{3} + \frac{\pi}{6} \xrightarrow{-\pi \leq x \leq \pi} k = \underbrace{-3, -2, -1, 0, 1, 2}_6$$

«بانک سوال موسسه یاوران دانش»

۱۳- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$T = \frac{\pi}{2}; T = \frac{2\pi}{b} \Rightarrow \frac{\pi}{2} = \frac{2\pi}{b} \Rightarrow b = 4$$

$$\begin{cases} y_{\max} = |a| + c = 1 \\ y_{\min} = -|a| + c = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow c = \frac{3}{4}; bc = 4 \times \frac{3}{4} \Rightarrow bc = 3$$



۱۴- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\sin x \cos x + \frac{1}{2} \sin^2 x = \frac{1}{2} \cos^2 x \Rightarrow \sin x \cos x = \frac{1}{2} (\cos^2 x - \sin^2 x)$$

$$\Rightarrow \sin 2x = \cos 2x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} - 2x \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \Rightarrow k = -2, -1, 0, 1 \Rightarrow \text{معادله ۴ جواب دارد} \\ 2x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} + 2x \otimes \end{cases}$$

راه حل دوم:

$$\left. \begin{aligned} \sin 2x = \cos 2x &\Rightarrow \tan(2x) = 1 \\ -\pi \leq x \leq \pi &\Rightarrow -2\pi \leq 2x \leq 2\pi \end{aligned} \right\} \text{تعداد جواب} = 2 \times 2 = 4$$

دور ۲

$$\frac{T}{2} = \frac{13}{8} - \frac{5}{8} \Rightarrow T = 2; T = \frac{2\pi}{b} \Rightarrow 2 = \frac{2\pi}{b} \Rightarrow b = \pi$$

۱۵- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\begin{cases} y_{\max} = |a| + c' = 1/5 \\ y_{\min} = -|a| + c' = -1/5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c' = 1 \\ a = 1/5 \end{cases}; \left(\frac{5}{8}, \frac{1}{2}\right) \in f(x) \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \sin\left(\frac{5\pi}{8} - c\right)$$

$$\Rightarrow \frac{5\pi}{8} - c = \frac{\pi}{2} \Rightarrow c = \frac{\pi}{8}$$

$$\frac{ab}{c} = \frac{1/5 \times \pi}{\pi/8} \Rightarrow \frac{ab}{c} = 4$$

۱۶- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\frac{\cos x}{1 + \sin x} = \frac{1 + \sin x}{\cos x} \Rightarrow \cos^2 x = (1 + \sin x)^2 \Rightarrow (1 - \sin^2 x) = (1 + \sin x)^2$$

$$\Rightarrow (1 - \sin x)(1 + \sin x) = (1 + \sin x)(1 + \sin x) \Rightarrow 1 - \sin x = 1 + \sin x \Rightarrow 2 \sin x = 0$$

$$\Rightarrow \sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi \Rightarrow \text{اختلاف} = \pi - 0 = \pi$$



۱۷- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\cos\left(\frac{17\pi}{8} + x\right) = \cos\left(2\pi + \frac{\pi}{8} + x\right) = \cos\left(x + \frac{\pi}{8}\right)$$

$$\cos\left(\frac{3\pi}{8} - x\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{8} + x\right)\right) = \sin\left(x + \frac{\pi}{8}\right) \Rightarrow \cos\left(x + \frac{\pi}{8}\right) \sin\left(x + \frac{\pi}{8}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{4} \Rightarrow \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x + \frac{\pi}{4} = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{24} \xrightarrow{x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]} x_1 = -\frac{\pi}{24} \\ 2x + \frac{\pi}{4} = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \Rightarrow x = k\pi + \frac{7\pi}{24} \xrightarrow{x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]} x_2 = \frac{7\pi}{24} \end{cases}$$

$$\Rightarrow x_1 + x_2 = \frac{6\pi}{24} = \frac{\pi}{4}$$

۱۸- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. برای رسم نمودار داده شده، نمودار $y = \cos x$ را $\frac{\pi}{3}$ واحد به راست می‌بریم، سپس طول

نقاط را بر c تقسیم می‌کنیم، عرض نقاط را در b ضرب و با a جمع می‌کنیم.
با توجه به نمودار b و c هر دو مثبت هستند و داریم:

$$(0, 0) \in \text{نمودار} \Rightarrow a + b \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = 0 \Rightarrow 2a + b = 0 \quad (1)$$

$$y_{\max} = a + |b| \xrightarrow{b > 0} a + b = 1 \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1), (2)} a = -1, b = 2$$

دوره تناوب هم برابر $2\pi = \frac{4\pi}{3} - \left(-\frac{2\pi}{3}\right)$ است.

$$\Rightarrow \frac{2\pi}{|c|} = \frac{2\pi}{c} = 2\pi \Rightarrow c = 1 \Rightarrow b(c - a) = 2 \times 2 = 4$$



۱۹- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\underbrace{\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)}_{\alpha} \underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right)}_{\beta} = 1$$

$$\alpha + \beta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin \alpha = \cos \beta$$

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = 1 \Rightarrow \cos^2\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 1$$

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \pm 1 \Rightarrow \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 0$$

$$x - \frac{\pi}{3} = k\pi \Rightarrow \left. \begin{matrix} x = k\pi + \frac{\pi}{3} \\ 0 \leq x \leq 2\pi \end{matrix} \right\} x = \frac{\pi}{3}, x = \pi + \frac{\pi}{3} \Rightarrow \text{این معادله در این فاصله ۲ جواب دارد.}$$

$$\left. \begin{matrix} |a| + c = 2/5 \\ -|a| + c = -1/5 \end{matrix} \right\} c = 1, |a| = 1/5 \quad (a < 0 \text{ نمودار در صفر می نیمم دارد پس } a < 0)$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. (نمودار در صفر می نیمم دارد پس $a < 0$)

$a = -1/5$
 $ac = -1/5$

۲۱- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right) = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Rightarrow \sin^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1 \Rightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \pm 1 \Rightarrow x + \frac{\pi}{4} = k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{4}; k \in \mathbb{Z}$$

جواب های بازه $[0, 2\pi]$ عبارت اند از $\frac{\pi}{4}$ و $\frac{5\pi}{4}$ که مجموع آنها برابر $\frac{3\pi}{2}$ است.

۲۲- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\left. \begin{matrix} \max = |a| + b = 3 \\ \min = -|a| + b = -7 \end{matrix} \right\} \Rightarrow b = -2, |a| = 5$$

اما تابع در $x = 0$ ماکزیمم دارد، پس $a > 0$ است.

$$\Rightarrow f(x) = 5 \cos x - 2 \Rightarrow f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 5 \cos \frac{\pi}{3} - 2 = \frac{5}{2} - 2 = \frac{1}{2}$$

۲۳- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow \sec^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow \sec^2 x = 1 \Rightarrow \cos x = \pm 1 \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} \\ \text{یا} \\ x = 2\pi - \frac{\pi}{3} \end{cases}$$



۲۴- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$c = \frac{\max + \min}{2} = \frac{5 + 1}{2} = 3$$

$$-\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4} \Rightarrow 0 < \frac{\pi}{4} - x < \frac{\pi}{2}$$

۲۵- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

پس کمان موردنظر در ربع اول است در این بازه تانژانت مثبت است.

$$\frac{1-m}{2+m} > 0 \Rightarrow -2 < m < 1$$

پس:

۲۶- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\sin x + \sqrt{3} \cos x = \sqrt{2} \xrightarrow{\div 2} \frac{1}{2} \sin x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \sin x + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \cos x = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + \frac{\pi}{3} = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = 2k\pi - \frac{\pi}{12} \\ x + \frac{\pi}{3} = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{5\pi}{12} \end{cases} \Rightarrow x = -\frac{\pi}{12}, \frac{23\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}$$

$$\frac{27\pi}{12} = \frac{9\pi}{4}$$

مجموع ریشه‌های قابل قبول در بازه فوق:

۲۷- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\frac{T}{4} = \frac{5}{4} - \frac{3}{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow T = 2 \Rightarrow \frac{2\pi}{|b|} = 2 \xrightarrow{b>0} b = \pi$$

$$\max = \frac{1}{4} \Rightarrow |a| = \frac{1}{4} \Rightarrow a = \frac{1}{4}$$

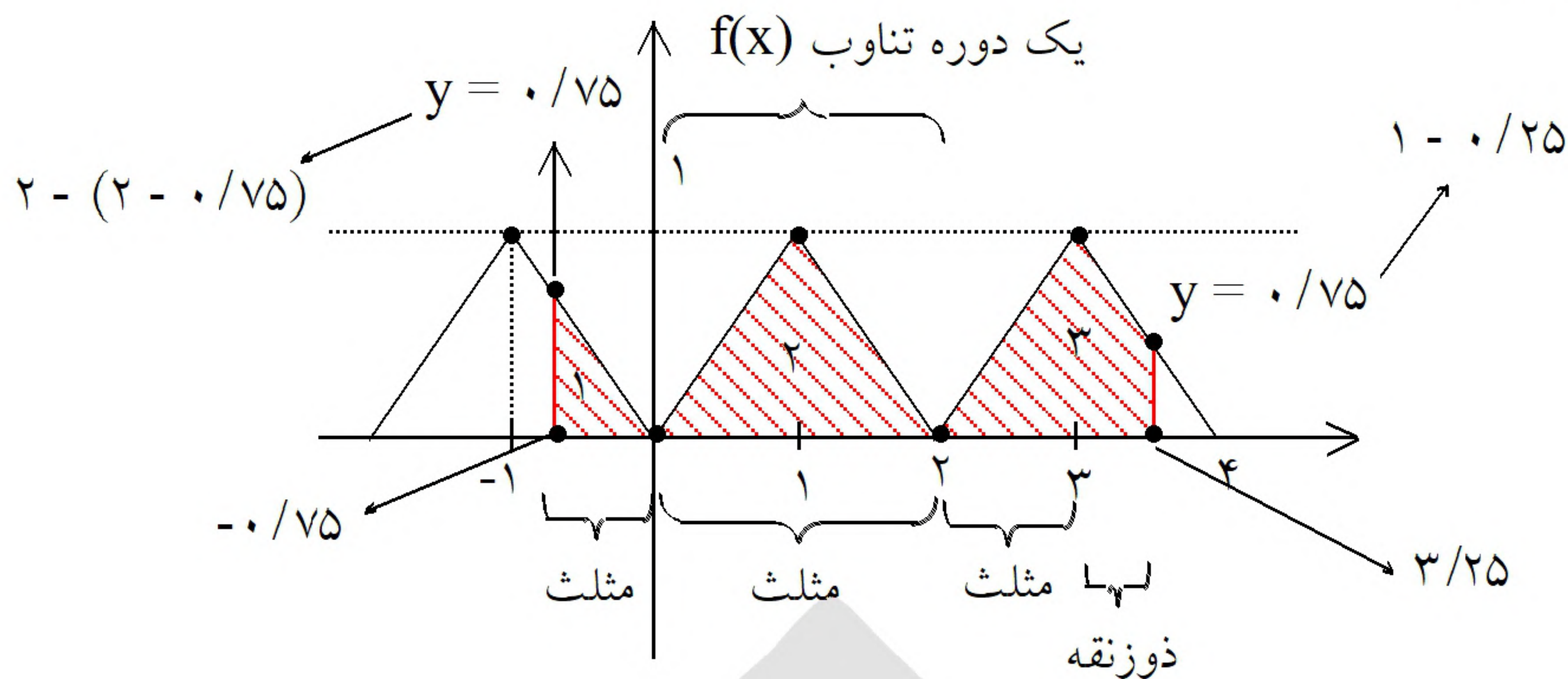
$$\left(\frac{5}{4}, 0\right) \Rightarrow \frac{1}{4} \cos\left(\frac{5\pi}{4} + c\right) = 0 \Rightarrow \frac{5\pi}{4} + c = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow c = \frac{\pi}{4}$$

$$\frac{ac}{b} = \frac{\frac{1}{4} \times \frac{\pi}{4}}{\pi} = \frac{1}{16}$$

پس:



۲۸- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.



$$S = \underbrace{\left(\frac{3}{4} \times \frac{3}{4}\right)}_{S_1} \times \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1 \times 2}{2}}_{S_2} + \underbrace{\frac{1 \times 1}{2}}_{S_3} + \underbrace{\left(1 + \frac{3}{4}\right) \times \frac{1}{4}}_{S_4} = \frac{9}{32} + 1 + \frac{1}{2} + \frac{7}{32} = 2$$

۲۹- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$5\sin^2 x + 2\cos^3 x = -2 \Rightarrow 5\sin^2 x + 2\cos^3 x + 2 = 0$$

$5\sin^2 x$ و $2\cos^3 x + 2$ توابعی نامنفی‌اند پس باید هم زمان صفر باشند تا مجموع صفر گردد لذا

$$5\sin^2 x = 0 \Rightarrow \sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi \Rightarrow x = -\pi, 0, \pi$$

از این سه مقدار فقط دو مقدار $-\pi, \pi$ عبارت $2\cos^3 x + 2$ را صفر می‌کند پس معادله ۲ جواب دارد

۳۰- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. خط $x = k$ محور تقارن $y = f(x)$ است اگر و تنها اگر $f(k - x) = f(k + x)$

$$x = 1: f(1 - x) = f(1 + x) \text{ محور تقارن}$$

$$x = 3: f(3 - x) = f(3 + x) \text{ محور تقارن}$$

در این صورت داریم:

$$f(x) = f(1 + (x - 1)) = f(1 - (x - 1)) = f(2 - x) = f(3 - (x + 1)) = f(3 + x + 1) = f(4 + x) \\ \Rightarrow f(x + 4) = f(x) \Rightarrow T = 4$$



۳۱- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$(1 + \cos \alpha)(1 + \cos 2\alpha)(1 + \cos 4\alpha) = \frac{\sin^2(4\alpha)}{8 \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{1}{8}$$

$$\sin \frac{\alpha}{2} \neq 0 \rightarrow \sin^2 4\alpha = \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$4\alpha = k\pi \pm \frac{\alpha}{2} \Rightarrow \begin{cases} 4\alpha = k\pi + \frac{\alpha}{2} \\ \text{یا} \\ 4\alpha = k\pi - \frac{\alpha}{2} \end{cases}$$

$$\frac{7\alpha}{2} = k\pi \Rightarrow \alpha = \frac{2k\pi}{7}$$

$$\frac{9\alpha}{2} = k\pi \Rightarrow \alpha = \frac{2k\pi}{9}$$

$$\left. \begin{aligned} 0 < \frac{2k\pi}{7} < 2\pi &\Rightarrow 0 < k < 7 \Rightarrow \text{جواب ۶} \\ 0 < \frac{2k\pi}{9} < 2\pi &\Rightarrow 0 < k < 9 \Rightarrow \text{جواب ۸} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{در مجموع ۱۴ جواب دارد.}$$

تذکر: چون $\alpha = 0$, $\alpha = 2\pi$ جواب نمی‌باشند، بازه باز در نظر گرفته شد.

$$(1 + \cos \alpha)(1 + \cos 2\alpha)(1 + \cos 4\alpha) = 2 \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot 2 \cos^2 \alpha \cdot 2 \cos^2 2\alpha \quad \text{توجه:}$$

$$= 8 \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cos^2 \alpha \cdot \cos^2 2\alpha = \frac{8 \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cos^2 \alpha \cdot \cos^2 2\alpha}{\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{\sin^2 4\alpha}{8 \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$$

$$\sin x \cdot \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x \quad \text{و} \quad \sin^2 \alpha = \sin^2 \beta \Rightarrow \alpha = k\pi \pm \beta \quad \text{یادآوری:}$$



۳۲- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\sin(a+b) - \sin(a-b) = 2 \cos a \sin b$$

توجه:

$$2 \sin x \cos(2x) = \sin(2x+x) - \sin(2x-x) = \sin 3x - \sin x$$

در نتیجه:

$$\Rightarrow 2 \sin(x) \cos(2x) + \sin(x) = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin 3x - \sin x + \sin x = 1 \Rightarrow \sin 3x = 1 \Rightarrow 3x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{2k+1}{6}\pi$$

جواب‌های بازه $[0, 2\pi]$ عبارت‌اند از $\frac{\pi}{6}$ ، $\frac{5\pi}{6}$ و $\frac{9\pi}{6}$ که مجموع آن‌ها برابر $\frac{5\pi}{2}$ است.

راه حل دوم:

$$2 \sin x \cos 2x + \sin x = 1 \Rightarrow 2 \sin x (1 - 2 \sin^2 x) + \sin x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x = 1$$

$$\Rightarrow \sin 3x = 1 \Rightarrow 3x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{2k+1}{6}\pi$$

جواب‌های بازه $[0, 2\pi]$ عبارت‌اند از $\frac{\pi}{6}$ ، $\frac{5\pi}{6}$ و $\frac{9\pi}{6}$ که مجموع آن‌ها برابر $\frac{5\pi}{2}$ است.

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

۳۳- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\Rightarrow \cos^2 x - \sin^2 x \cos 3x = \cos^2 x + \sin^2 x = -\sin^2 x \cos 3x = \sin^2 x$$

$$\Rightarrow -\sin^2 x \cos 3x - \sin^2 x = 0 \Rightarrow -\sin^2 x (\cos 3x + 1) = 0$$

$$\sin^2 x = 0 \Rightarrow x = k\pi \Rightarrow$$

k	۰	۱	۲
x	۰	π	2π

$$\cos 3x = -1 \Rightarrow 3x = 2k\pi + \pi \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{3} \Rightarrow$$

k	۰	۱	۲
x	$\frac{\pi}{3}$	π	$\frac{5\pi}{3}$

در مجموع ۵ ریشه در بازه $[0, 2\pi]$ وجود دارد.



۳۴- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$(1 + \cos 2\alpha)(1 + \cos 4\alpha)(1 + \cos 8\alpha) = \frac{1}{8}$$

$$2 \cos^2 \alpha \cdot 2 \cos^2 2\alpha \cdot 2 \cos^2 4\alpha = \frac{1}{8} \Rightarrow (\cos \alpha \cos 2\alpha \cos 4\alpha)^2 = \frac{1}{64}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{8} \frac{\sin 8\alpha}{\sin \alpha} \right)^2 = \frac{1}{64} \Rightarrow \sin^2 8\alpha = \sin^2 \alpha$$

$$8\alpha = k\pi \pm \alpha \Rightarrow \begin{cases} 7\alpha = k\pi \Rightarrow \alpha = \frac{k\pi}{7} \\ 9\alpha = k\pi \Rightarrow \alpha = \frac{k\pi}{9} \end{cases} \xrightarrow{\max} \alpha = \frac{8\pi}{9}$$

تذکر:

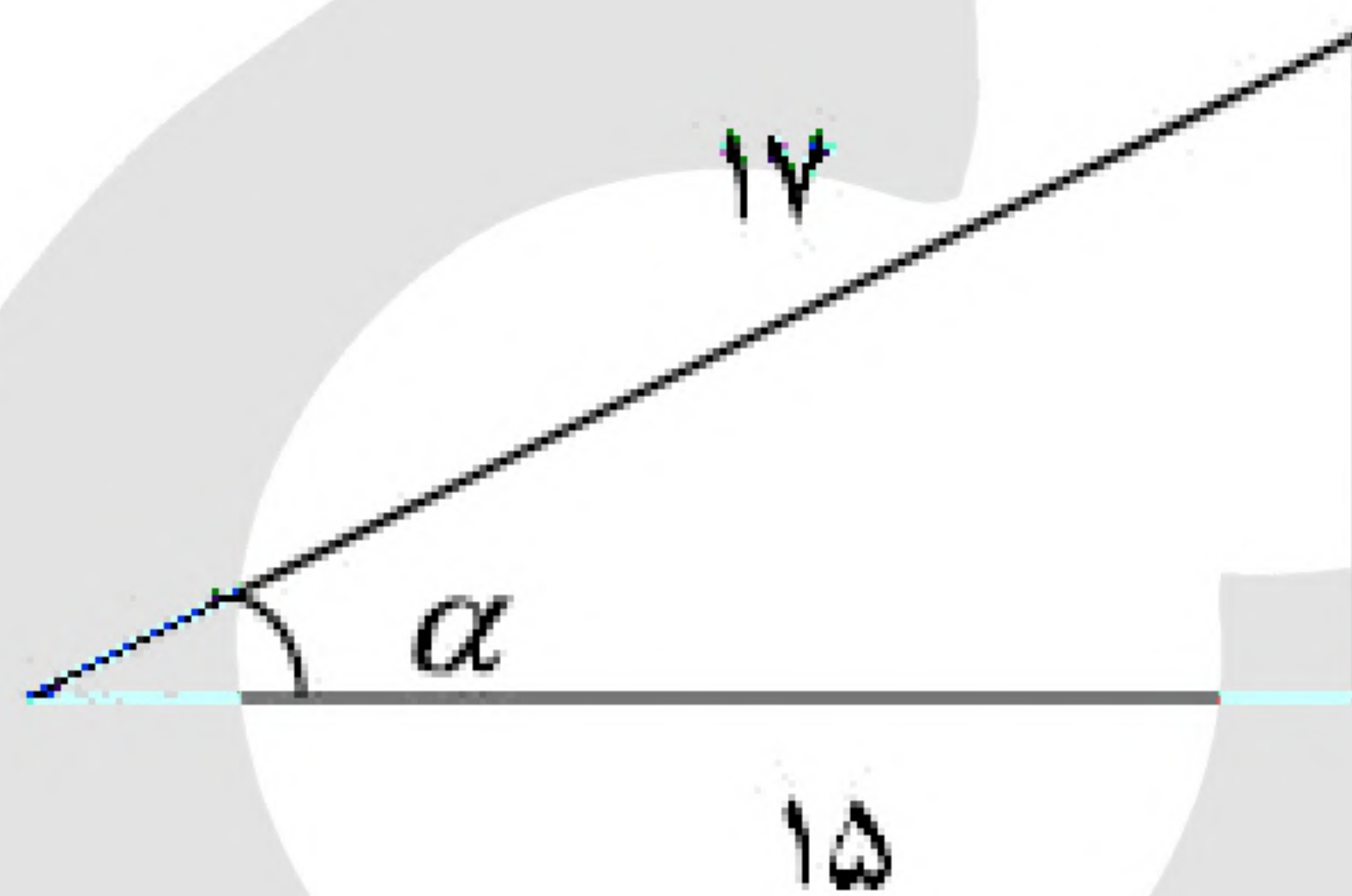
$$\begin{aligned} \cos \alpha \cos 2\alpha \cos 4\alpha &= \frac{\sin \alpha \cos \alpha \cos 2\alpha \cos 4\alpha}{\sin \alpha} = \frac{\frac{1}{2} \sin 2\alpha \cos 2\alpha \cos 4\alpha}{\sin \alpha} \\ &= \frac{\frac{1}{4} \sin 4\alpha \cos 4\alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sin 8\alpha}{8 \sin \alpha} \end{aligned}$$

۳۵- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. راه حل اول:

$$\tan \alpha = \frac{2 \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{1 - \tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{2 \times \frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{16}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{15}{16}} = \frac{8}{15}$$

$$\sin \alpha = \frac{8}{17}$$

$$\cos \alpha = \frac{15}{17}$$



$$\sin \alpha = \frac{8}{17}$$

$$\Rightarrow \frac{\tan(\alpha) - \sin(\alpha)}{\sin(\alpha) - \cos(\alpha)} = \frac{\frac{8}{15} - \frac{8}{17}}{\frac{8}{17} - \frac{15}{17}} = \frac{\frac{136 \times 120}{15 \times 17}}{\frac{7}{-17}} = \frac{\frac{16}{15 \times 17}}{-\frac{7}{17}} = \frac{-16}{105}$$

راه حل دوم:

$$\cos \alpha = \frac{1 - \tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{1 + \tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{1 - \frac{1}{16}}{1 + \frac{1}{16}} = \frac{\frac{15}{16}}{\frac{17}{16}} = \frac{15}{17}$$



«بانک سوال موسسه یاوران دانش»

۳۶- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. برای حل معادله مثلثاتی باید ابتدا نسبت‌ها را به کمک فرمول بسط داده و ساده کنیم:

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$$

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\sin x \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \times \cos x + \cos x \times \frac{1}{2} - \sin x \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos 2x \Rightarrow \cos x = \cos 2x$$

$$\Rightarrow 2x = 2k\pi \pm x \Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi + x \Rightarrow x = 2k\pi \\ 2x = 2k\pi - x \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} \end{cases}$$

جواب $\frac{2k\pi}{3}$ جواب $2k\pi$ را نیز شامل می‌شود، بنابراین $\frac{2k\pi}{3}$ قابل قبول است.

$$4 \sin(3x) \cos(3x) = 1$$

۳۷- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$2 \sin(6x) = 1 \Rightarrow \sin(6x) = \frac{1}{2}$$

$$\left\{ \begin{aligned} 6x &= 2k\pi + \frac{\pi}{6} \xrightarrow{\div 6} x = \frac{k\pi}{3} + \frac{\pi}{36} \Rightarrow \begin{cases} k=0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{36} \\ k=1 \Rightarrow x = \frac{13\pi}{36} \end{cases} \\ 6x &= 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} \xrightarrow{\div 6} x = \frac{k\pi}{3} + \frac{5\pi}{36} \Rightarrow \begin{cases} k=0 \Rightarrow x = \frac{5\pi}{36} \\ k=1 \Rightarrow x = \frac{17\pi}{36} \end{cases} \end{aligned} \right.$$

این معادله در بازه $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ دارای ۴ جواب است.

۳۸- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$T = \frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{3}$$

$$T = \frac{2\pi}{|b|} \Rightarrow |b| = 3 \Rightarrow b = \pm 3 \Rightarrow \text{گزینه ۳ و ۴ غلط}$$

$$\begin{cases} \max : |a| + c = 1 \\ \min : -|a| + c = -3 \end{cases} \Rightarrow 2c = -2 \Rightarrow c = -1 \quad \text{گزینه ۲ غلط}$$



۳۹- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\tan 3x = \frac{1}{\tan x} \Rightarrow \tan 3x = \cot x \xrightarrow{\cot x = \tan\left(\frac{\pi}{2} + x\right)} \tan 3x = \tan\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$$

$$\Rightarrow 3x = k\pi + \left(\frac{\pi}{2} - x\right) \Rightarrow 4x = k\pi + \frac{\pi}{2} \xrightarrow{\div 4} x = \frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{8}$$

و جواب‌های قابل قبول در بازه داده شده عبارتند از:

$$x = \frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{8}$$

$$x_1 = \frac{\pi}{8}, x_2 = \frac{5\pi}{8}, x_3 = \frac{9\pi}{8}, x_4 = \frac{13\pi}{8}$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 6\pi$$

۴۰- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$$

$$\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \Rightarrow (1) \quad 2x - \frac{\pi}{4} = 2k\pi + \frac{\pi}{4} - x \Rightarrow 3x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{6}$$

$$(2) \quad 2x - \frac{\pi}{4} = 2k\pi + \pi - \left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{4} + x \Rightarrow 2x - \frac{\pi}{4} = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{4} + x$$

$$\Rightarrow x = 2k\pi + \pi = (2k+1)\pi$$

$$(1) \cup (2) = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{6}$$

۴۱- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$T = \frac{9\pi}{2} - \left(-\frac{3\pi}{2}\right) = 6\pi = \frac{2\pi}{|b|} \Rightarrow |b| = \frac{1}{3}$$

$$\min = -3 \Rightarrow -|a| + c = -3 \Rightarrow c = -1 \Rightarrow |a| = 2$$

چون نمودار تابع سینوس باضریب منفی است. (نمودار رو به پایین است). بنابراین $a = -2$ و $b = \frac{1}{3}$ می‌باشد.

$$b = \frac{1}{3}, a = -2 \Rightarrow \frac{a}{b} = -6$$

البته می‌توان $a = 2, b = -\frac{1}{3}$ در نظر گرفت که جواب نهایی باز هم -6 می‌شود.



۴۲- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{1}{2} \Rightarrow (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x = \frac{1}{2} \Rightarrow 1 - 2\left(\frac{1}{2}\sin^2 x\right)$$

$$= \frac{1}{2} \Rightarrow 1 - \frac{1}{2}\sin^2 x = \frac{1}{2}$$

$$-\frac{1}{2}\sin^2 x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \sin^2 x = 1 \Rightarrow \begin{cases} \sin^2 x = 1 \\ \text{یا} \\ \sin^2 x = -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x_1 = k\pi + \frac{\pi}{4} \\ \text{یا} \\ x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \Rightarrow x_2 = k\pi - \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

k	۰	۱	۲
x_1	$\frac{\pi}{4}$	$\pi + \frac{\pi}{4}$	×
x_2	×	$\pi - \frac{\pi}{4}$	$2\pi - \frac{\pi}{4}$

جواب‌های بین $[0, 2\pi]$

$$\text{مجموع جواب‌ها} = \frac{\pi}{4} + \pi + \frac{\pi}{4} + \pi - \frac{\pi}{4} + 2\pi - \frac{\pi}{4} = 4\pi$$

۴۳- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$f(x) = \operatorname{tg}(\pi x) - \operatorname{Cotg}(\pi x) = \frac{\sin(\pi x)}{\cos(\pi x)} - \frac{\cos(\pi x)}{\sin(\pi x)} = \frac{\sin^2(\pi x) - \cos^2(\pi x)}{\sin(\pi x)\cos(\pi x)}$$

$$= \frac{-\cos(2\pi x)}{\frac{1}{2}\sin(2\pi x)} = -2\operatorname{Cotg}(2\pi x) \Rightarrow T = \frac{\pi}{2\pi} = \frac{1}{2}$$

۴۴- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\cos 3x + \cos x = 0 \Rightarrow \cos 3x = -\cos x \Rightarrow \cos(3x) = \cos(\pi - x)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x = 2k\pi + \pi - x \Rightarrow 4x = 2k\pi + \pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \quad \checkmark \\ \text{یا} \\ 3x = 2k\pi - \pi + x \Rightarrow 2x = 2k\pi - \pi \Rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{2} \quad \text{غ ق ق} \end{cases}$$

$$\cos\left(k\pi - \frac{\pi}{2}\right) = 0 \quad \text{چون}$$



۴۵- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$4 \sin x \sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = 1 \Rightarrow 4 \sin x (-\cos x) = 1 \Rightarrow -2(2 \sin x \cos x) = 1$$

$$\Rightarrow -2 \sin 2x = 1 \Rightarrow \sin 2x = \left(-\frac{1}{2}\right) \Rightarrow \sin(2x) = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi - \frac{\pi}{6} \\ 2x = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = k\pi - \frac{\pi}{12} \\ x_2 = k\pi + \frac{5\pi}{12} \end{cases}$$

k	۰	۱	۲
x_1	\times	$\pi - \frac{\pi}{12}$	$2\pi - \frac{\pi}{12}$
x_2	$\frac{5\pi}{12}$	$\pi + \frac{5\pi}{12}$	\times

$$\text{مجموع} = \pi - \frac{\pi}{12} + 2\pi - \frac{\pi}{12} + \frac{5\pi}{12} + \pi + \frac{5\pi}{12} = 4\pi + \pi = 5\pi$$

۴۶- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. با توجه به شروع صعودی به ازای $x > 0$ پس $b > 0$ بنابراین برای آنکه تابع ماکزیمم شود باید $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ باشد، در نتیجه $x = \frac{\pi}{6}$ است یعنی تابع از نقطه $\left(\frac{\pi}{6}, \sqrt{3}\right)$ می‌گذرد.

$$\left(\frac{\pi}{6}, \sqrt{3}\right) \Rightarrow a + b \sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3} \Rightarrow a + b = \sqrt{3} \Rightarrow a = \sqrt{3} - b$$

$$f(\pi) = -\frac{3}{2} \Rightarrow a + b \sin\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{3}{2} \Rightarrow a - \frac{\sqrt{3}}{2}b = -\frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow b + \frac{\sqrt{3}}{2}b = \sqrt{3} + \frac{3}{2} \Rightarrow b \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \sqrt{3} \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \Rightarrow b = \sqrt{3}$$



۴۷- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\begin{aligned} \sin^3 x + \cos^3 x &= 1 - \frac{1}{2} \sin 2x \Rightarrow (\sin x + \cos x)(\sin^2 x + \cos^2 x - \sin x \cos x) \\ &= 1 - \frac{1}{2} (2 \sin x \cos x) \Rightarrow (\sin x + \cos x)(1 - \sin x \cos x) = (1 - \sin x \cos x) \\ &\Rightarrow \begin{cases} 1 - \sin x \cos x = 0 \Rightarrow \sin x \cos x = 1 \Rightarrow 2 \sin x \cos x = 2 \Rightarrow \sin 2x = 2 \text{ غ ق ق} \\ \text{یا} \\ \sin x + \cos x = 1 \Rightarrow \begin{cases} \sin x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} \\ \text{یا} \\ \cos x = 1 \Rightarrow x = 0, x = 2\pi \end{cases} \end{cases} \\ \text{مجموع} &= \frac{\pi}{2} + 2\pi = \frac{5\pi}{2} \end{aligned}$$

۴۸- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\begin{aligned} y &= 1 + a \left(\frac{1}{2} \sin(2bx) \right) \Rightarrow y = 1 + \frac{a}{2} \sin(2bx) \Rightarrow 1 + \left| \frac{a}{2} \right| = \frac{3}{2} \Rightarrow \left| \frac{a}{2} \right| = \frac{1}{2} \Rightarrow |a| = 1 \\ T &= \frac{3\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4} \right) \Rightarrow \frac{2\pi}{|2b|} = \pi \Rightarrow |b| = 1 \xrightarrow{a \cdot b > 0} \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases} \Rightarrow a + b = 2 \\ \text{تذکر: توجه داشته باشید تابع سینوس برای } x > 0 \text{ صعودی شروع می‌شود پس } a \text{ و } b \text{ هم‌علامتند که حالت } a = -1 \text{ و } b = -1 \text{ یعنی } a + b = -2 \text{ در گزینه‌ها نیست.} \end{aligned}$$