

گنجینه سوال رایگان

+ پاسخ تشریحی

یاوران دانش



راه های ارتباطی با ما:

www.Dyavari.com

۰۲۱-۷۶۷۰۳۸۵۸

۰۹۱۲-۳۴ ۹۴ ۱۳۴



	۱	۲	۳	۴
۱ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۳ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۴ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۵ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۶ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۷ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۸ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۹ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۰ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۱ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۲ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۱۳ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۱۴ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۵ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۱۶ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۷ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۸ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۹ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۲۰ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۲۱ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۲۲ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۳ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۴ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۵ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۶ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۷ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۸ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۹ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۰ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۱ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۲ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۳۳ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۴ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۵ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۳۶ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۷ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۸ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۹ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۴۰ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

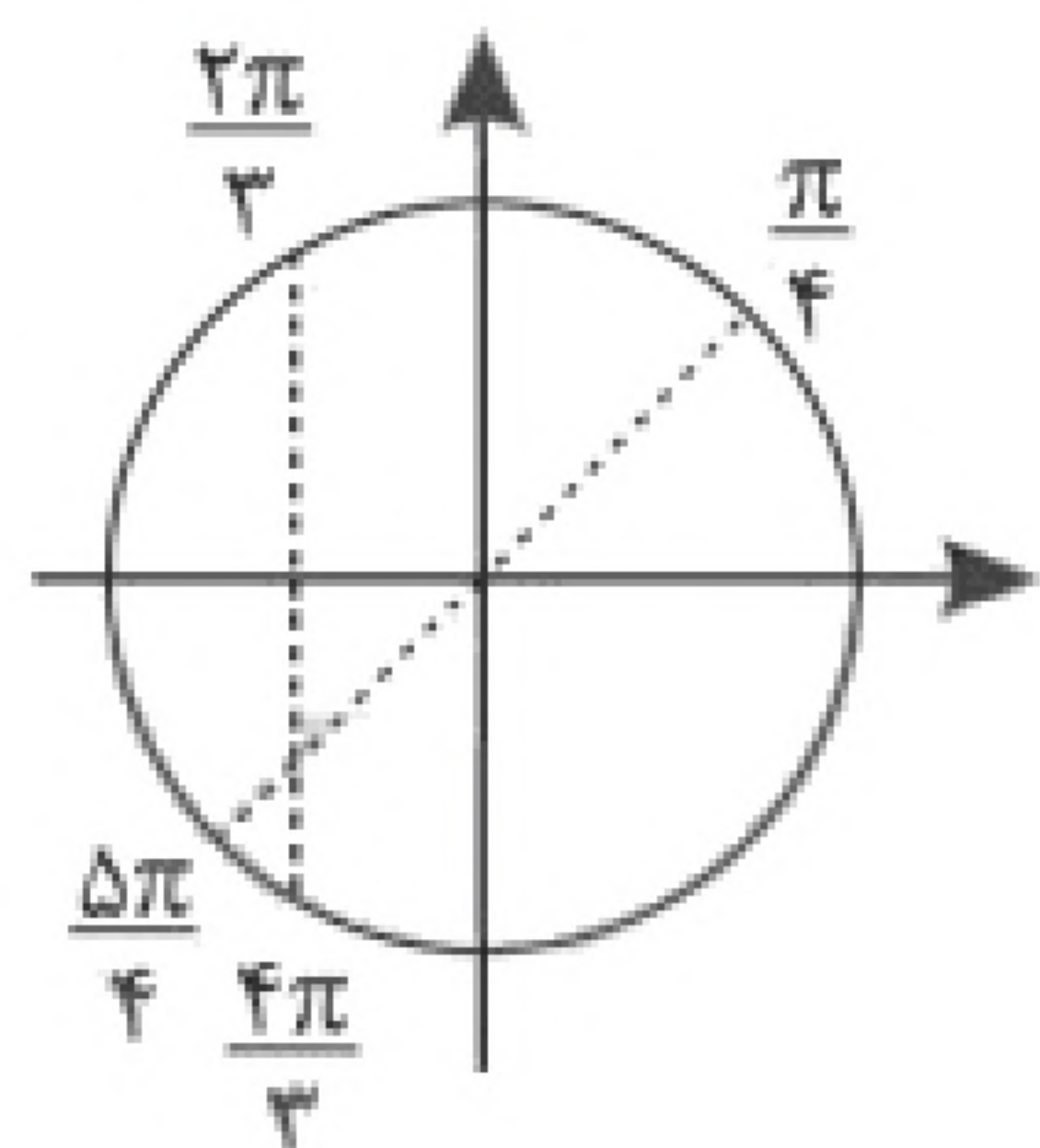




۱- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$2(\sin x - \cos x) = 1 - \tan x \Rightarrow 2(\sin x - \cos x) = \frac{\cos x - \sin x}{\cos x}$$

$$\begin{cases} \sin x - \cos x = 0 \Rightarrow \tan x = 1 \\ \frac{1}{\cos x} = -2 \Rightarrow \cos x = -\frac{1}{2} \end{cases}$$



اگر جواب‌ها را بر روی دایره‌ی مثلثاتی مشخص کنیم، داریم:

بیشترین فاصله $\frac{\pi}{4}$ تا $-\frac{2\pi}{3}$ است یعنی:

$$\max \text{ فاصله} = \frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{3} = \frac{11\pi}{12}$$

۲- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. تابع در همسایگی راست مبدأ نزولی اکید است پس $a < 0$ و

$$y = 0 \Rightarrow \cos\left(ax + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$$

$$ax + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}, -\frac{5\pi}{3}$$

$$ax = 0, -\frac{2\pi}{3}, -\frac{6\pi}{3}$$

$$x = 0, -\frac{2\pi}{3a}, -\frac{6\pi}{3a} \Rightarrow AB = |x_B - x_A| \Rightarrow AB = \left| -\frac{6\pi}{3a} + \frac{2\pi}{3a} \right| \Rightarrow \left| \frac{4\pi}{3a} \right| = \frac{\pi}{3}$$

$$\Rightarrow (|a| = 4, a < 0) \Rightarrow a = -4$$

۳- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\frac{2\tan x}{1 - \tan^2 x} + \frac{1 + \tan x}{1 - \tan x} = 1 \quad \tan x = A$$

$$\frac{2A}{1 - A^2} + \frac{1 + A}{1 - A} = 1 \Rightarrow \frac{2A + A^2 + 2A + 1}{1 - A^2} = 1$$

$$4A + A^2 + 1 = 1 - A^2 \Rightarrow 4A + 2A^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} A = 0 \\ A = -2 \end{cases}$$

$$A = 0 \Rightarrow \tan x = 0 \Rightarrow x = k\pi \Rightarrow \text{جواب ۳: } 0, \pi, 2\pi$$

$$A = -2 \Rightarrow \tan x = -2 \Rightarrow \text{جواب ۲}$$

پس در کل ۵ جواب در بازه‌ی $[0, 2\pi]$ داریم.



۴- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. مخرج مشترک می گیریم.

$$\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} = 8$$

$$8 \sin^2 x \cdot \cos^2 x = 1 \Rightarrow 2 \sin^2 2x = 1 \Rightarrow \sin 2x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow 2x = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}, \frac{7\pi}{8}$$

$$\text{مجموع ریشه‌ها} = 2\pi \Rightarrow \text{نسبت} = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{8}} = 16$$

۵- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\tan\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\cos 2x}{\sin 2x} \Rightarrow \tan\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \cot 2x$$

$$\tan\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) \Rightarrow x + \frac{\pi}{3} = k\pi + \frac{\pi}{2} - 2x$$

$$\Rightarrow 2x = k\pi + \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{12} \quad k \in \mathbb{Z}$$

۶- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$f(0) = 1 \Rightarrow a - 1 = 1 \Rightarrow a = 2$$

چون f اکیداً نزولی است پس $b < 0$ است.

$$f(x) = 2 - \tan\left(-\frac{b}{2}x + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$x = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow -\frac{b}{2}x + \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow -\frac{b}{2}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{3\pi}{4} \Rightarrow b = -3 \Rightarrow a - b = 5$$

۷- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

در نقطه‌ی $x = \frac{5\pi}{12}$ تابع f تعریف نشده است. پس:

$$bx - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow b \times \frac{5\pi}{12} = \frac{5\pi}{6} \Rightarrow b = 2$$

از طرفی با توجه به \max تابع داریم:

$$f(x) = a \cos^2\left(bx - \frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow \max = 3 = a \Rightarrow f(x) = 3 \cos^2\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{7\pi}{3}\right) = 3 \cos^2\left(\frac{14\pi}{3} - \frac{\pi}{3}\right) = 3\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$$



۸- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$x = 0 \Rightarrow y_A = a \Rightarrow b < 0$$

$$T = \frac{\pi}{\left| \frac{a\pi}{2} \right|} = \frac{2}{a}$$

$$m = \frac{-y}{x} = \frac{-(a-1)}{\frac{2}{3} \times \frac{2}{a}} = -\frac{a^2 - a}{3} = -\frac{1}{4} \Rightarrow 4a^2 - 4a - 3 = 0 \xrightarrow{a > 0} a = \frac{3}{2}$$

$$\min = a + b = 1 \Rightarrow b = -\frac{1}{2}$$

۹- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$T = \frac{2\pi}{\left| \frac{\pi}{b} \right|} = 2|b|$$

$$\begin{cases} \max = 2a - 1 + |a| = 4|b| \\ \min = 2a - 1 - |a| = |b| \end{cases}$$

a نمی تواند منفی باشد چون در معادله دوم به تناقض $3a - 1 = |b|$ می رسیم. پس $a > 0$ است.

$$\begin{cases} 3a - 1 = 4|b| \\ a - 1 = |b| \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ |b| = 3 \end{cases} \Rightarrow a + |b| = 5$$

۱۰- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$f(0) = 0 \Rightarrow a + 2b = 0$$

$$T = \pi = \frac{2\pi}{\left| \frac{1}{b} \right|} \Rightarrow |b| = \frac{1}{2}$$

حالت اول: $b < 0$

$$\begin{cases} a + 2b = 0 \\ b = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow a = 1 \Rightarrow 2b - a = -2$$

حالت دوم: $b > 0$

$$\begin{cases} a + 2b = 0 \\ b = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow a = -1 \Rightarrow f(x) = -1 + 2 \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$$

شکل تابع با این ضابطه تناقض دارد.

۱۱- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$S = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin \alpha \Rightarrow 24 = \frac{1}{2} \times 6 \times 10 \cdot \sin \alpha \Rightarrow \sin \alpha = \frac{4}{5} \Rightarrow \cos \alpha = \pm \frac{3}{5}$$



۱۲- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$T = \frac{\pi}{|b|} \Rightarrow \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{|b|} \Rightarrow |b| = 2$$

$$f_{\max} = 2 \Rightarrow a = 2 \Rightarrow |ab| = 4$$

«بانک سوال موسسه یاوران دانش»

۱۳- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$2 \sin 2x = \operatorname{tg} x + \operatorname{Cotg} x \Rightarrow 2 \sin 2x = \frac{2}{\sin 2x} \Rightarrow \sin^2 2x = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin 2u = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

اگر $0 \leq x \leq 2\pi$ باشد، $0 \leq 2x \leq 4\pi$ است.

$$\begin{cases} \sin 2x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \text{جواب ۴} \\ \sin 2x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \text{جواب ۴} \end{cases}$$

معادله در کل ۸ جواب دارد.

۱۴- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$4 + 4 \cos \pi x = 2 \Rightarrow 4 \cos \pi x = -2$$

$$\Rightarrow \cos \pi x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \pi x = \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$$

β دومین ریشه‌ای است که تابع y خط $y = 2$ را قطع می‌کند:

$$\pi \beta = \frac{4\pi}{3} \Rightarrow \beta = \frac{4}{3}$$

$$4 + 4 \cos \pi x = 6 \Rightarrow \cos \pi x = \frac{1}{2} \Rightarrow \pi x = \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, \frac{7\pi}{3}$$

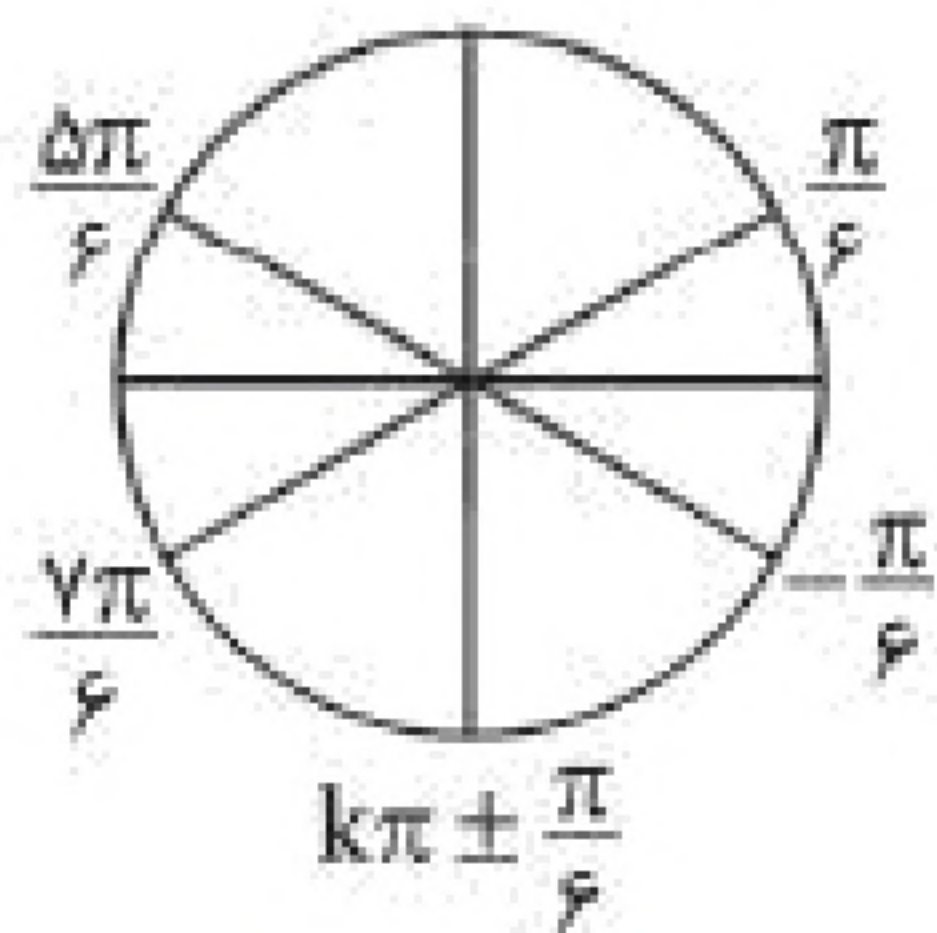
α سومین ریشه‌ای است که نمودار تابع، خط $y = 6$ را قطع کرده است:

$$\alpha = \frac{7}{3}$$

$$\Rightarrow \alpha - \beta = \frac{7}{3} - \frac{4}{3} = 1$$



۱۵- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

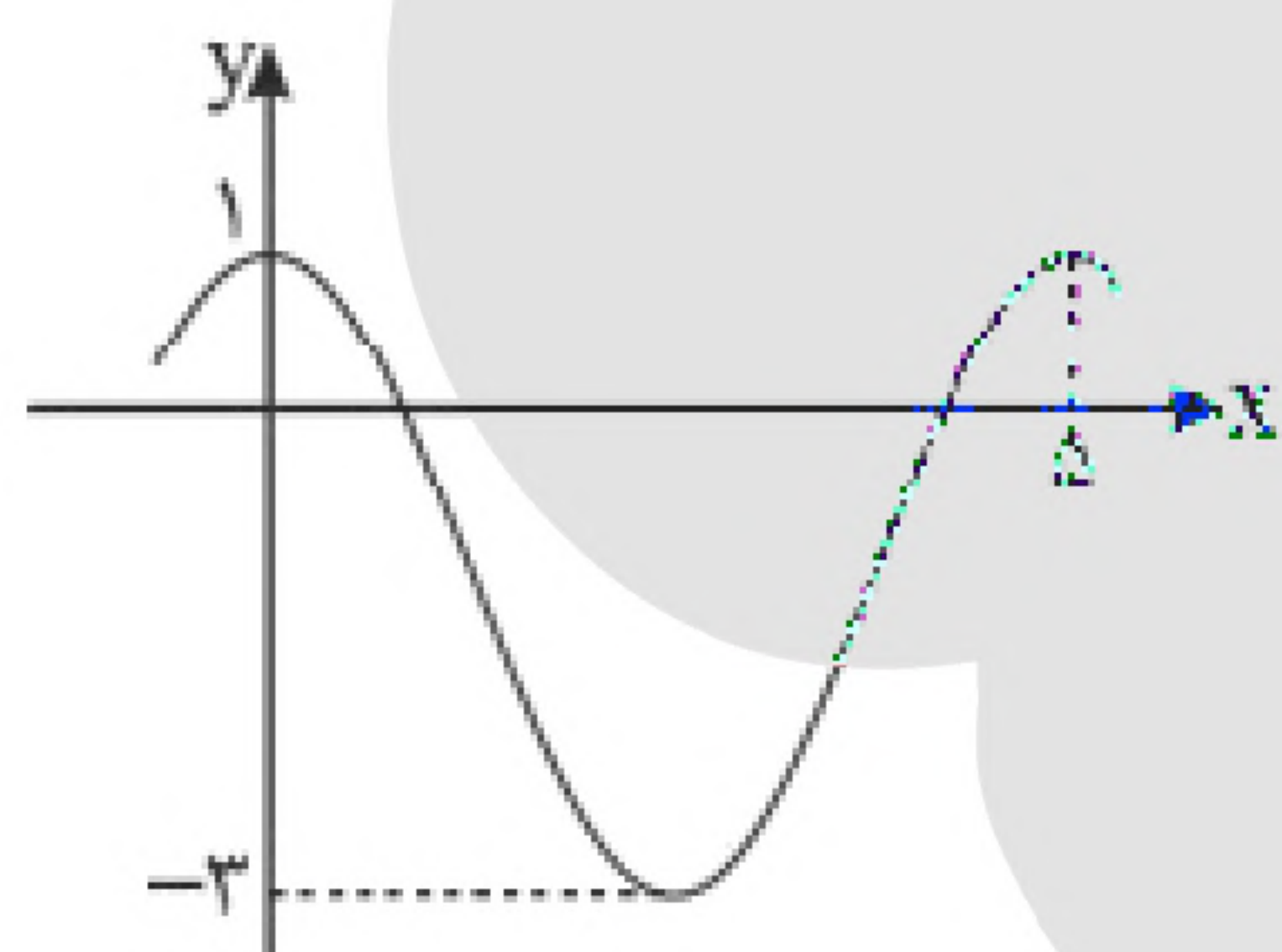


$$\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{4} \Rightarrow \underbrace{\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)}_{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \left(x - \frac{\pi}{3}\right)\right)} = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \sin^2\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{4} \Rightarrow \begin{cases} \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} \\ \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + \frac{\pi}{6} = k\pi + \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = k\pi \\ x + \frac{\pi}{6} = k\pi - \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

۱۶- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.



$$\begin{aligned} \max : |a| + c = 1 &\xrightarrow{a > 0} a + c = 1 \Rightarrow a = 2, c = -1 \\ \min : -a + c = -3 &\Rightarrow c - a = -3 \\ \frac{2\pi}{|\pi b|} = \frac{2\pi}{3} &\Rightarrow \frac{2}{b} = \frac{2}{3} \Rightarrow b = \pm \frac{3}{2} \\ abc = 2 \left(\pm \frac{3}{2}\right)(-1) &= \pm \frac{3}{1} = \pm 3 \end{aligned}$$

۱۷- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

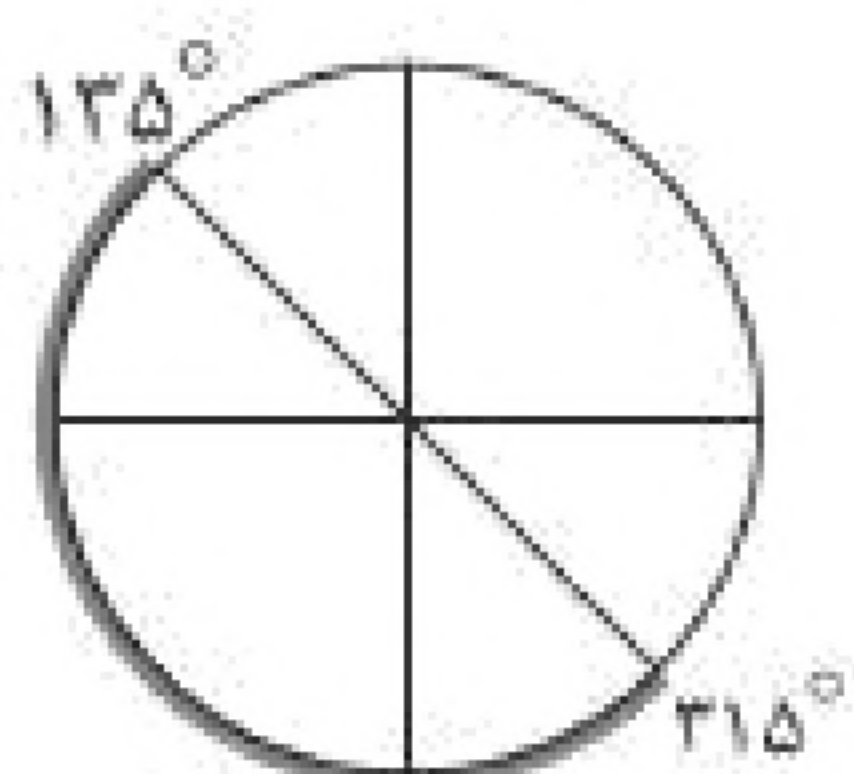
$$2 \sin x \cdot \cos x = 1 \Rightarrow \sin 2x = 1 \Rightarrow 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{4}$$



۱۸- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

گزینه (۱) نادرست است. تابع تناژانت غیریکنواست ولی در فاصله بین هر دو مجانب قائم متوالی اکیداً صعودی است.
گزینه (۲) صحیح است زیرا متغیر x در توابع $f(x) = \sin x$ و $f(x) = \cos x$ هر عدد حقیقی را می‌تواند اختیار کنند و دامنه هر دو تابع برابر \mathbb{R} است.

گزینه (۳) صحیح است زیرا در بازه $(135^\circ, 180^\circ)$ ، شرط $\sin x > 0$ و $\cos x < 0$ برقرار است اما $|\cos \alpha| > |\sin \alpha|$ است و در بازه $(180^\circ, 270^\circ)$ ، هر دو نسبت منفی هستند و در بازه $(270^\circ, 315^\circ)$ ، شرط $\sin x < 0$ و $\cos x > 0$ برقرار است اما $|\sin x| > |\cos x|$ است.



گزینه (۴) صحیح است زیرا:

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} \xrightarrow{D} \cos x \neq 0 \Rightarrow x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$$

۱۹- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -\operatorname{Cotg} 2x = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + 2x\right)$$

$$x + \frac{\pi}{4} = k\pi + \frac{\pi}{2} + 2x \Rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{4}$$

$$0 < x < 2\pi \Rightarrow x = \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$$

$$S = \frac{10\pi}{4} = \frac{5\pi}{2} \quad \text{جمع جواب ها}$$

۲۰- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

ابتدا معادله را حل می‌کنیم:

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$$

$$\Rightarrow 2 + 2\cos^2 x - 3\cos x - 1 = 0 \Rightarrow 2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi \\ \cos x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1 = -\frac{1}{2}$$



۲۱- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$2 \cos^2 x + 3 \cos x - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \cos x = \frac{1}{2} \\ \cos x = -2 \text{ غ ق ق} \end{cases}$$

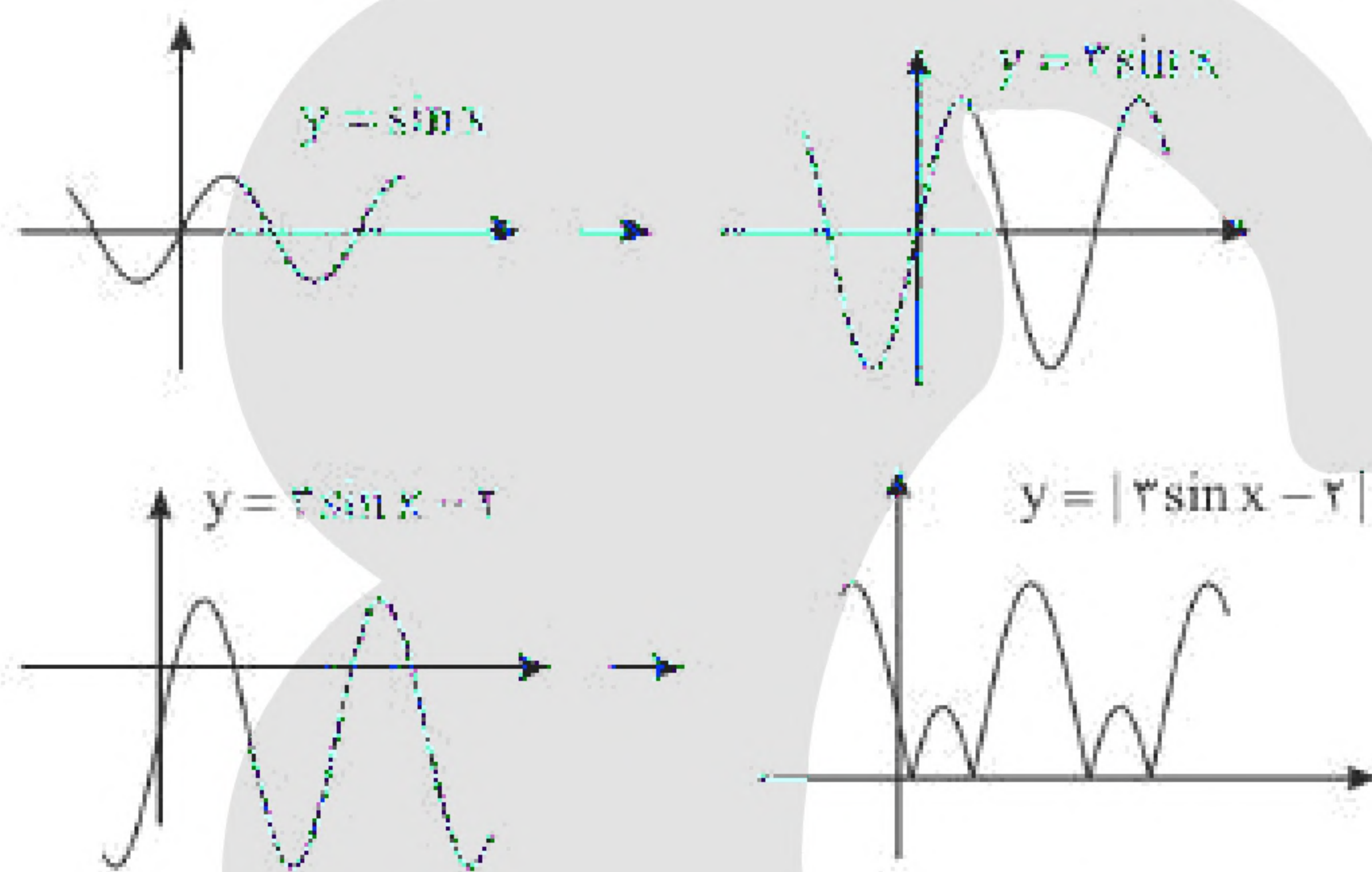
$$\cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{3} \text{ اولین جواب مثبت}$$

پس:

$$\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{12} = \frac{2\pi}{12} = \frac{\pi}{6}$$

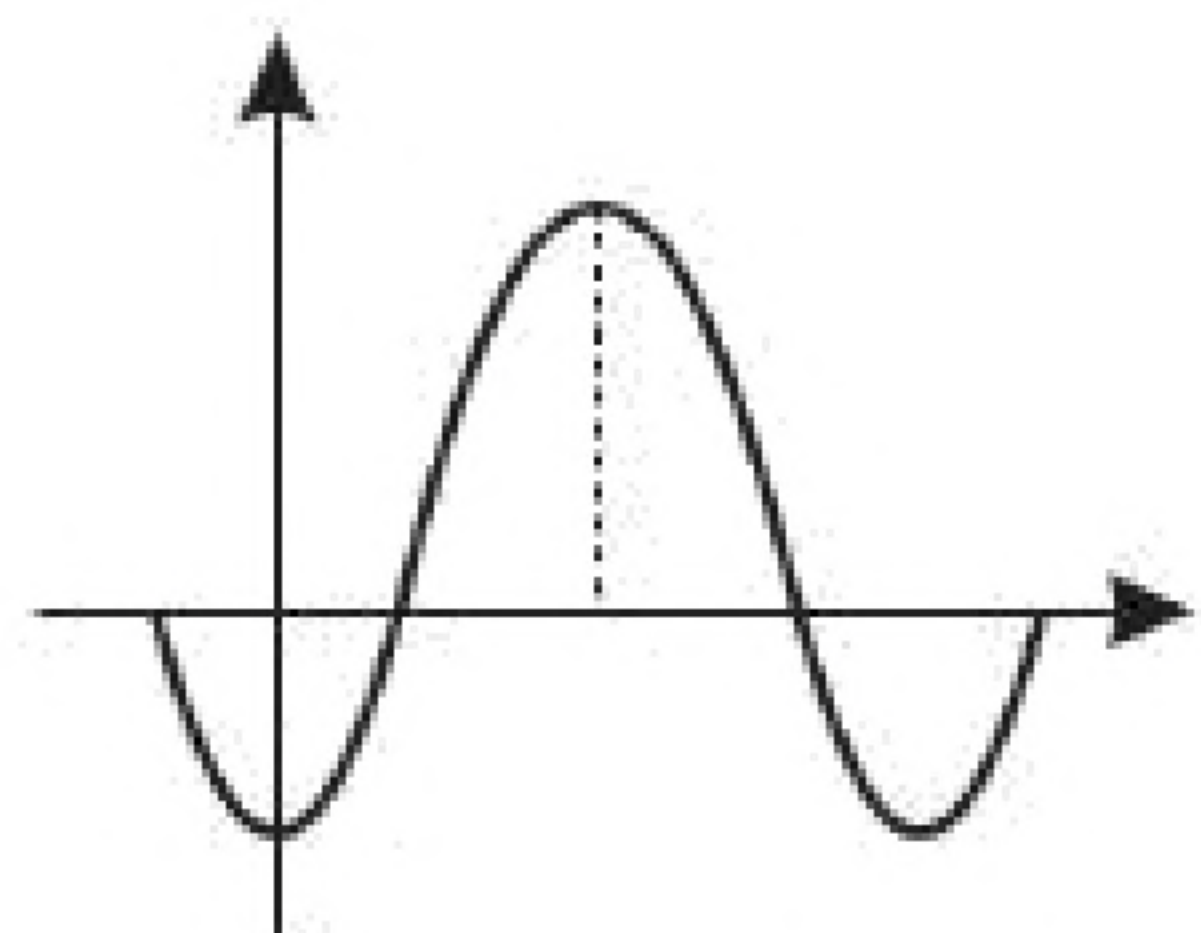
۲۲- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

تابع $y = |3 \sin x - 2|$ را رسم می‌کنیم.



۲۳- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

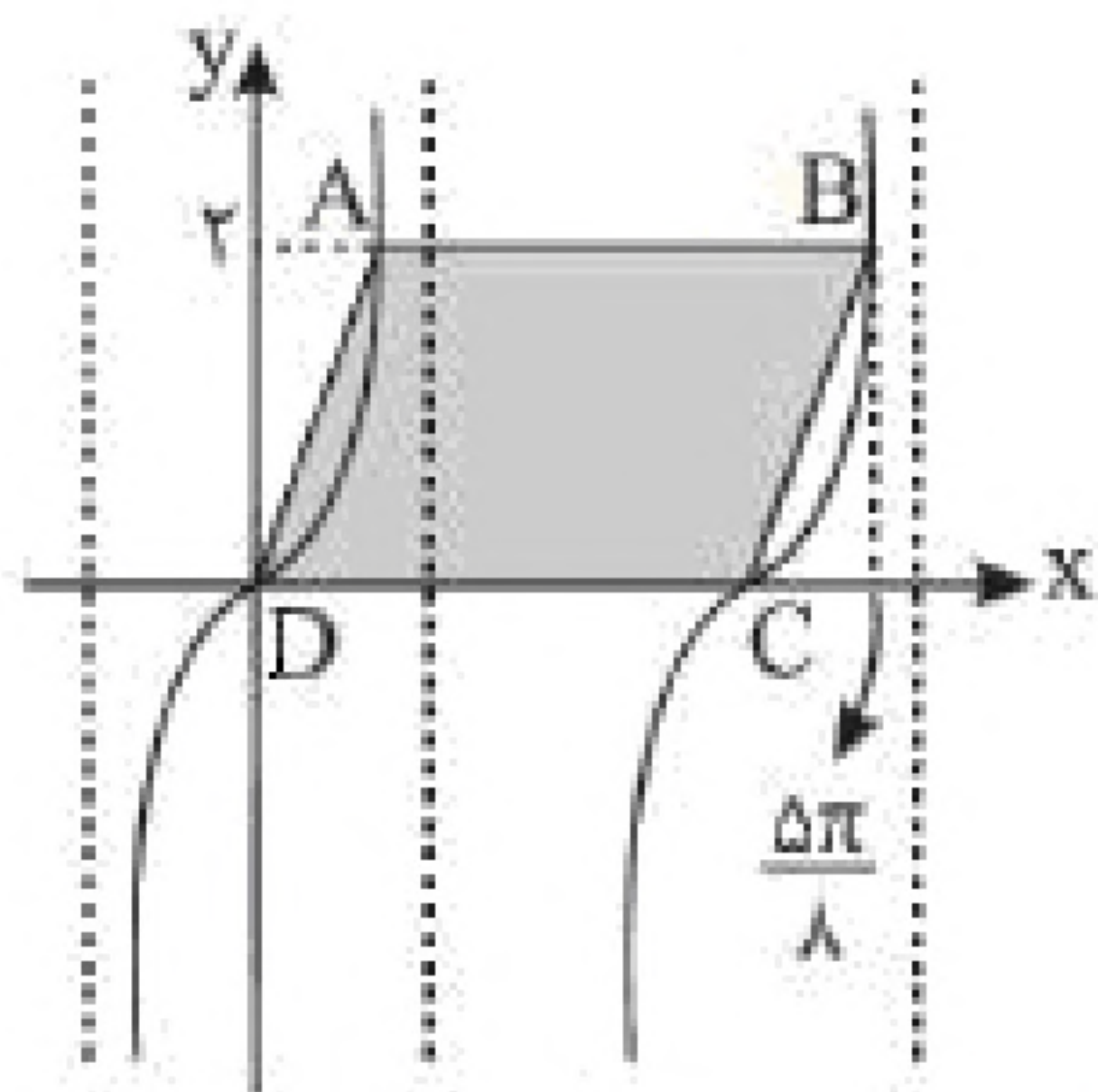
با توجه به نمودار تابع، حداکثر مقدار α برابر طول اولین نقطه \max است.



زمانی تابع برابر \max است که $\cos \frac{\pi}{3} x = -1$ باشد پس $\frac{\pi}{3} \alpha = \pi$ و در نتیجه $\alpha = 3$ است.



۲۴- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

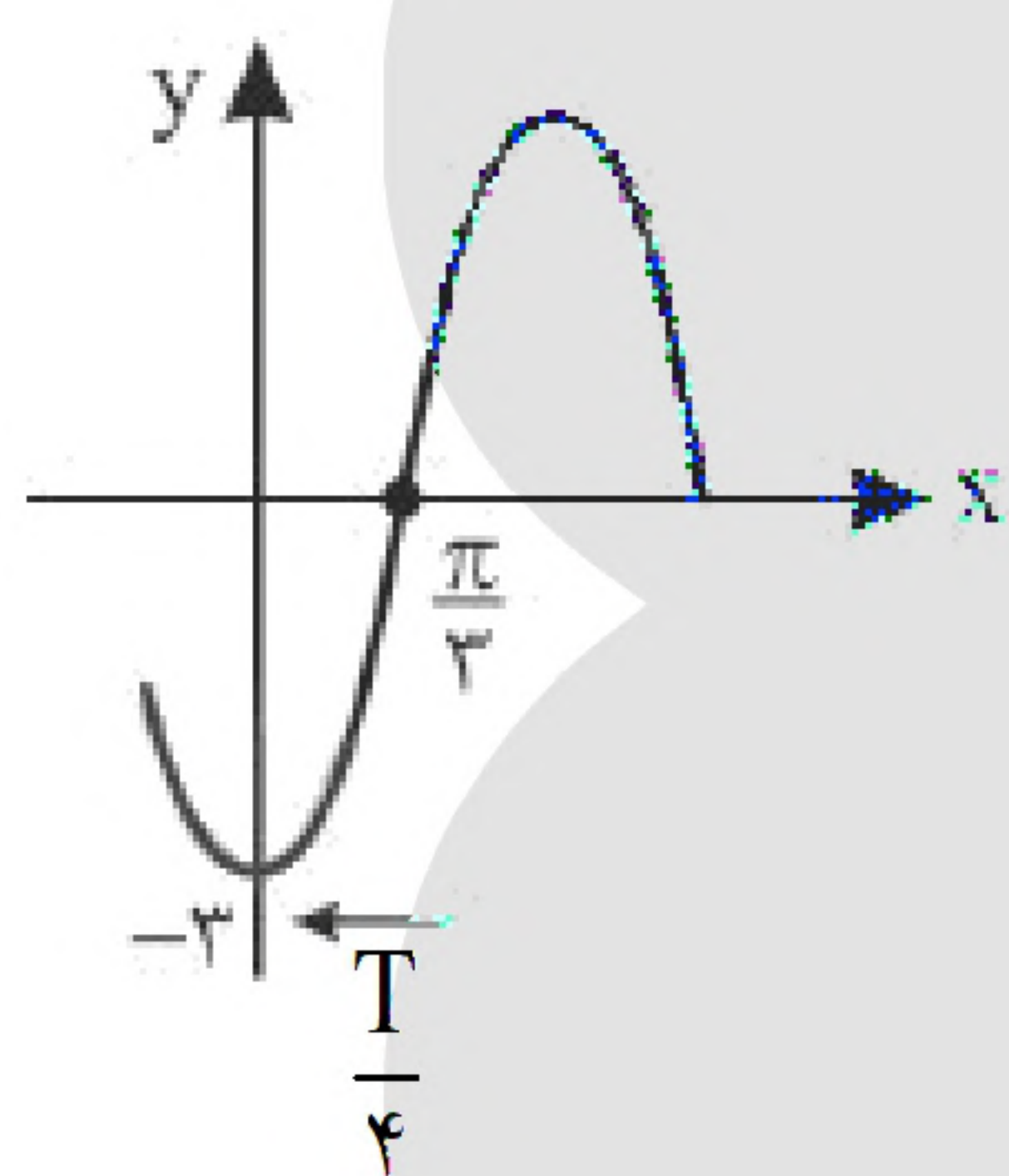


$$f(x) = 2 \operatorname{tg} 2x \xrightarrow{x = \frac{\Delta \pi}{\lambda}} 2 \operatorname{tg} \left(\frac{\Delta \pi}{\lambda} \right) = 2 \operatorname{tg} \left(\pi + \frac{\pi}{4} \right) = 2 \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} \right) = 2$$

دوره تناوب تابع $y = \operatorname{tg} 2x$ برابر $\frac{\pi}{2}$ است.

$$\begin{cases} CD = T = \frac{\pi}{2} \\ \text{ارتفاع} = 2 \end{cases} \Rightarrow S = \frac{\pi}{2} \times 2 = \pi$$

۲۵- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.



$$y = a \cos bx \Rightarrow a = -3$$

$$\frac{T}{4} = \frac{\pi}{3} \Rightarrow T = \frac{4\pi}{3}$$

$$T = \frac{4\pi}{3} = \frac{2\pi}{|b|} \Rightarrow |b| = \frac{3}{2} \Rightarrow b = \pm \frac{3}{2}$$

$$a + b = -3 \pm \frac{3}{2} = \begin{cases} -4/2 \\ -1/2 \end{cases}$$

۲۶- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\begin{aligned} 2 \sin^3 x + \sin^2 x - 2 \sin x - 1 &= 0 \\ \Rightarrow (2 \sin^3 x - 2 \sin x) + (\sin^2 x - 1) &= 0 \\ \Rightarrow 2 \sin x (\sin^2 x - 1) + (\sin^2 x - 1) &= 0 \\ \Rightarrow (\sin^2 x - 1)(2 \sin x + 1) &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \sin x = 1 \Rightarrow x_1 = \frac{\pi}{2} \\ \sin x = -1 \Rightarrow x_2 = -\frac{\pi}{2} \\ \sin x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x_3 = -\frac{\pi}{6}, x_4 = -\frac{5\pi}{6} \end{cases}$$

$$\text{مجموع جواب} : \frac{\pi}{2} + \left(-\frac{\pi}{2}\right) - \frac{\pi}{6} - \frac{5\pi}{6} = -\pi$$



۲۷- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \sin x + \frac{1}{2} \cos x = 1 \Rightarrow \cos \frac{\pi}{6} \sin x + \sin \frac{\pi}{6} \cos x = 1$$

$$\Rightarrow \sin\left(\frac{\pi}{6} + x\right) = 1 \Rightarrow x + \frac{\pi}{6} = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{3}$$

۲۸- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$f(x) = \frac{1}{2} \sin 2ax$$

$$T_1 = \frac{2\pi}{|2a|} = \frac{\pi}{|a|} = \frac{\pi}{3} \Rightarrow |a| = 3$$

$$y = \operatorname{tg} \frac{\pi}{a} x \Rightarrow T_2 = \frac{\pi}{\left|\frac{\pi}{a}\right|} = |a| = 3$$

۲۹- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

با توجه به اتحاد $1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$ داریم:

$$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \sin^2 x \Rightarrow 1 + \sin^2 x \cos^2 x = 1$$

$$\Rightarrow \sin^2 2x = \frac{1}{2} \Rightarrow 2x = k\pi \pm \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} \pm \frac{\pi}{8}$$

نکته: $\sin^2 \alpha = \sin^2 \beta \Rightarrow \alpha = k\pi \pm \beta$

۳۰- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$T = 2a = \frac{\pi}{|b|} \xrightarrow{b > 0} ab = \frac{\pi}{2}$$

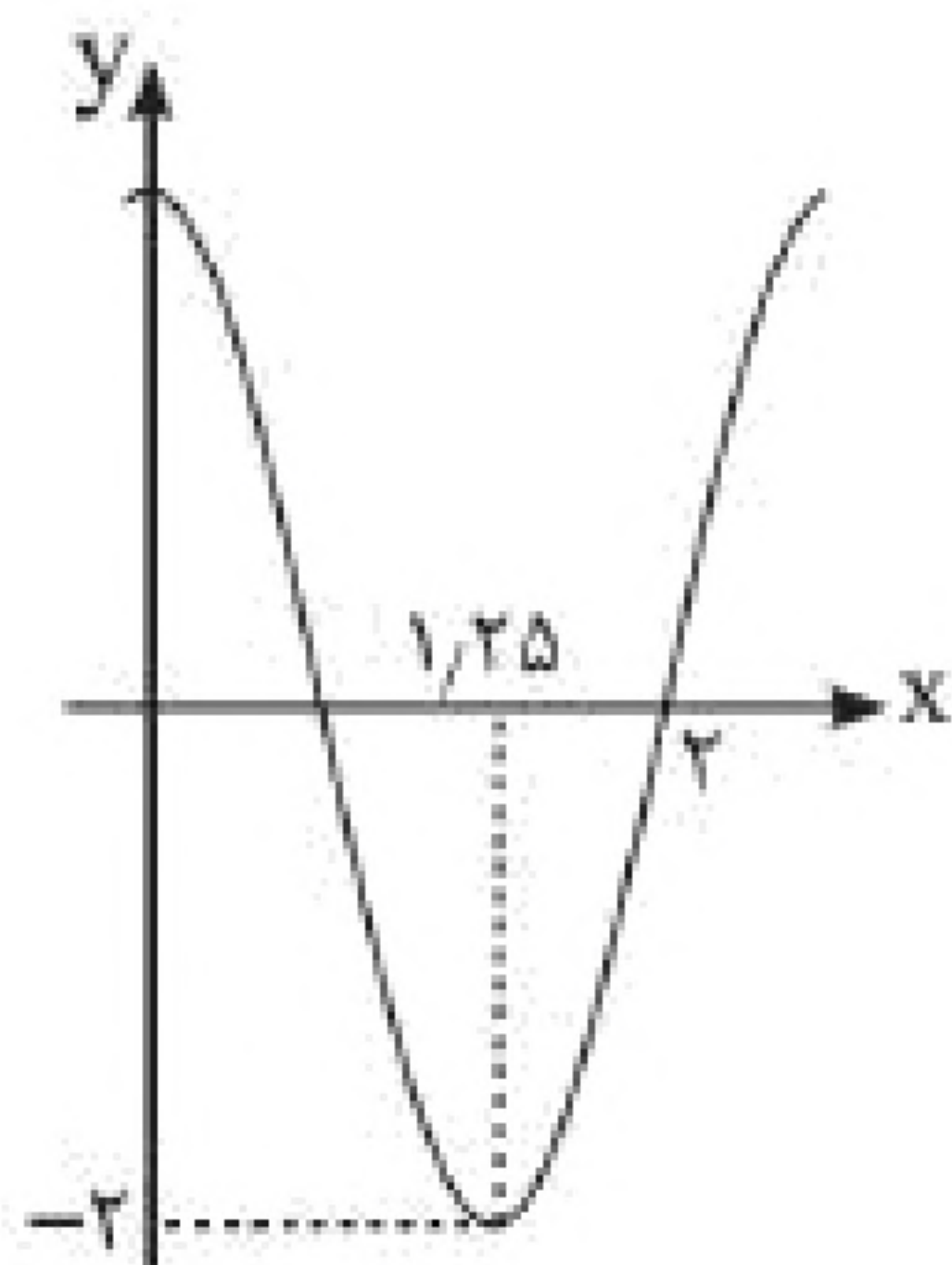
$$f\left(\frac{a}{2}\right) = a \Rightarrow a = \operatorname{tg} \frac{ab}{2} = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1$$

$$\Rightarrow a = 1 \Rightarrow b = \frac{\pi}{2}$$

$$f(x) = \operatorname{tg} \frac{\pi}{2} x \Rightarrow f\left(\frac{2}{3}\right) = \operatorname{tg} \frac{\pi}{3} = -\sqrt{3}$$



۳۱- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.
مینیم تابع -۲ است یعنی $a = -۲$ می شود.



$$y = -2 \cos(bx + c)$$

مینیم تابع جایی رخ می دهد که داخل کسینوس برابر π باشد:

$$\frac{1}{25}b + c = \pi$$

ریشه دوم جایی رخ می دهد که داخل کسینوس $\frac{3\pi}{2}$ باشد:

$$2b + c = \frac{3\pi}{2}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{25}b + c = \pi \\ 2b + c = \frac{3\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{3}{4}b = \frac{\pi}{2} \Rightarrow b = \frac{2\pi}{3}$$

۳۲- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

ابتدا دقت کنید که $T = 2 \left(\frac{7}{2} - \frac{3}{2} \right)$ یعنی $T = 4$ است:

$$T = 4 = \frac{2\pi}{|a|} \Rightarrow |a| = \frac{\pi}{2} \xrightarrow{a > 0} a = \frac{\pi}{2}$$

$$f(x) = 2 \sin\left(\frac{\pi}{2}x + \frac{\pi}{2n}\right)$$

$x = \frac{3}{2}$ اولین ریشه مثبت تابع است:

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = 0 \Rightarrow 2 \sin\left(\frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{2n}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{2n} = \pi \Rightarrow \frac{\pi}{2n} = \frac{\pi}{4} \Rightarrow n = 2 \Rightarrow an = \pi$$



«بانک سوال مؤسسه یاوران دانش»

۳۳- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

چون تابع دارای Max روی محور عرض‌ها است پس $-b > 0$ یعنی $b < 0$

$$\text{Max} = 6 \Rightarrow a + |b| = 6$$

$$T = \pi \Rightarrow \frac{2\pi}{|b|} = \pi \Rightarrow \left| \frac{a}{b} \right| = \frac{1}{2} \Rightarrow 2|a| = |b|$$

از طرفی:

$$a + |b| = 6 \Rightarrow a + 2|a| = 6$$

$$\text{حالت ۱: } a > 0 \Rightarrow 3a = 6 \Rightarrow a = 2 \Rightarrow b = -4$$

$$\text{حالت ۲: } a < 0 \Rightarrow -a = 6 \Rightarrow a = -6 \Rightarrow b = -12$$

$$\text{حالت ۱: } f(x) = 2 + 4 \cos 2x \Rightarrow f\left(\frac{\sqrt{\pi}}{6}\right) = 2 + 4 \times \frac{1}{2} = 4$$

$$\text{حالت ۲: } f(x) = -6 + 12 \cos 2x \Rightarrow f\left(\frac{\sqrt{\pi}}{6}\right) = -6 + 12 \times \frac{1}{2} = 0$$

با توجه به گزینه‌های موجود، گزینه‌ی ۳ صحیح است.

۳۴- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

چون max روی محور y ها است پس $a > 0$ است:

$$y_{\min} = 2 - |a| = 2 - a = -2 \Rightarrow a = 4$$

$$\Rightarrow f(x) = 2 + 4 \cos bx$$

$$f\left(\frac{8\pi}{3}\right) = 0 \Rightarrow 2 + 4 \cos \frac{8\pi b}{3} = 0 \Rightarrow \cos \frac{8\pi b}{3} = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{8\pi b}{3} = \pm \frac{4\pi}{3} \Rightarrow b = \pm \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow f(x) = 2 + 4 \cos \frac{x}{2}$$

$$f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 2 + 4 \cos \frac{\pi}{3} = 4$$

۳۵- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

دقت کنید $a < 0$ است.

$$T = 4\pi = \frac{2\pi}{|b|} \Rightarrow |b| = \frac{1}{2}$$

$$\text{max} = c - a = 6$$

$$f\left(\frac{10\pi}{3}\right) = 0 \Rightarrow c + a \cos \frac{10\pi b}{3} = 0 \Rightarrow c + a \cos \frac{5\pi}{3} = 0 \Rightarrow c + \frac{a}{2} = 0$$

$$\begin{cases} c - a = 6 \\ c + \frac{a}{2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = 2 \\ a = -4 \end{cases} \Rightarrow ac - |b| = -8/5$$



۳۶- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$A\left(\frac{3}{2}, 1\right) \Rightarrow \begin{cases} f\left(\frac{3}{2}\right) = 1 \\ \frac{3T}{2} = \frac{3}{2} \Rightarrow T = 1 \Rightarrow \frac{\pi}{\left|\frac{a\pi}{3}\right|} = 1 \Rightarrow |a| = 3 \end{cases}$$

دقت کنید $f(0) = a$ پس $a > 0$ یعنی $a = 3$ آنگاه $f(x) = 3 - b \sin^2 \pi x$

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = 1 \Rightarrow 3 - b \times 1 = 1 \Rightarrow b = 2 \Rightarrow f(x) = 3 - 2 \sin^2 \pi x$$

۳۷- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.
با فرض $\cos 3x \neq 0$ داریم:

$$\tan\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sin 3x}{\cos 3x}$$

$$-\tan\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \tan 3x \Rightarrow 3x = k\pi + x - \frac{\pi}{4}$$

$$x = \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{8}$$

در بین جواب‌های به دست آمده همگی شرط $\cos 3x \neq 0$ صدق می‌کند.

۳۸- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$f(0) = -2 \Rightarrow a - \tan \frac{\pi}{4} = -2 \Rightarrow a = -1$$

از طرفی $x = \frac{\pi}{6}$ اولین مجانب قائم تابع با طول مثبت است. از آنجایی که تابع صعودی اکید است پس $b < 0$

$$\Rightarrow b\left(\frac{\pi}{6}\right) + \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{b}{6} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{b}{6} = -\frac{3}{4} \Rightarrow b = -\frac{9}{2}$$

$$b - a = -\frac{9}{2} + 1 = -\frac{7}{2}$$

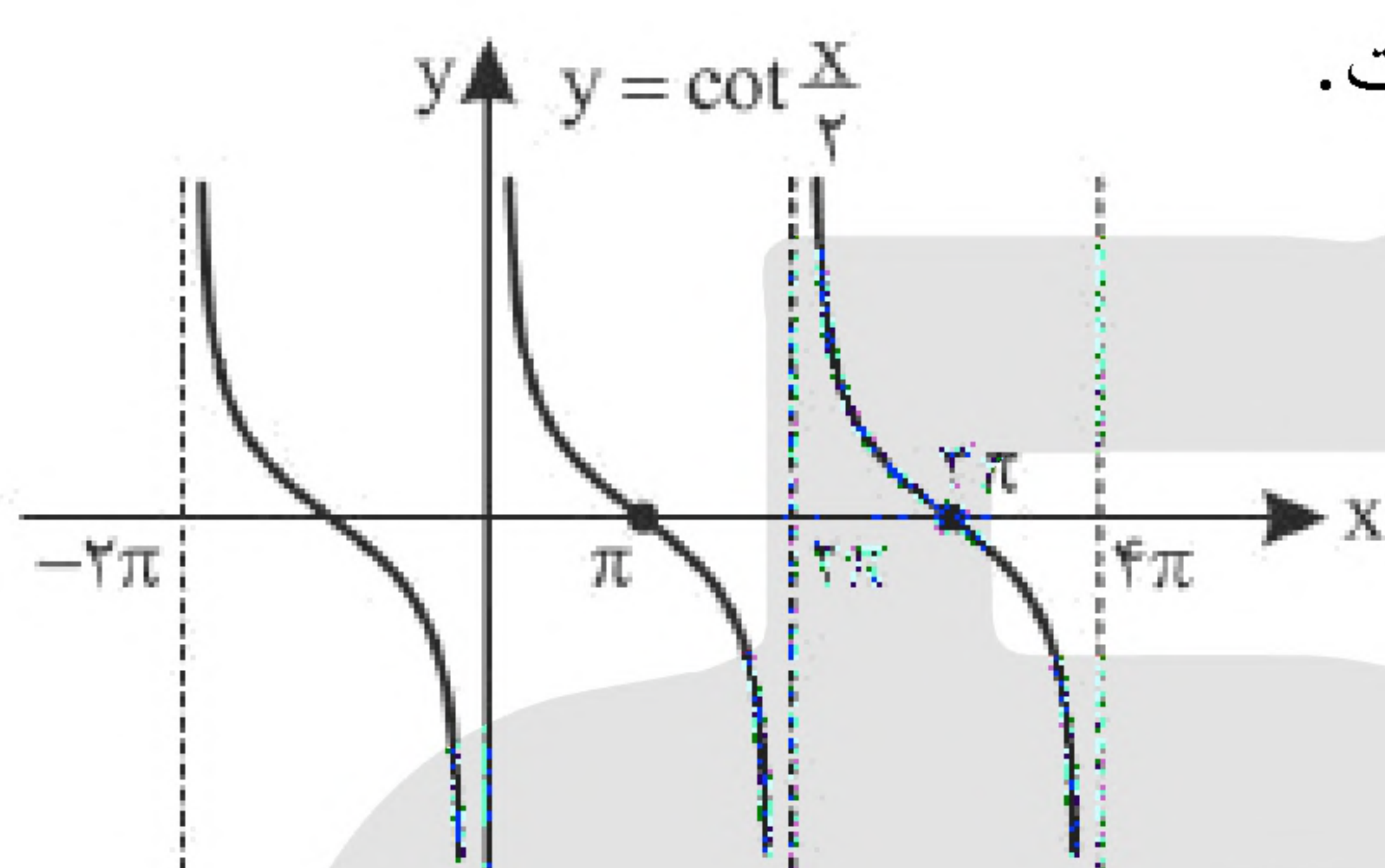


۳۹- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$f(x) = \frac{1 + \cos x}{\sin x} = \frac{1 + 2 \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - 1}{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} = \frac{2 \cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}$$

$$= \frac{\cos \frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} = \cot \frac{x}{2}$$

مطابق شکل این تابع در فاصله‌ی $(0, 2\pi)$ یک به یک و وارون‌پذیر است.



۴۰- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

می‌دانیم $\cot x - \tan x = 2 \cot 2x$ است.

$$y = 2 \cot 2x - \cot x = \cot x - \tan x - \cot x = -\tan x$$

باید نمودار $-\tan x$ را رسم کنیم فقط دقت کنید نقاطی به طول $x = \frac{k\pi}{2}$

که $k \in \mathbb{Z}$ در دامنه نیستند.

