گنجینه سوال رایـگان

+پاسخ تشریحی

یاوران دانش

راه های ارتباطی با ما:

www.Dyavari.com

۰۲۱-۷۶۷۰۳۸۵۸

۰۹۱۲-۳۴ ۹۴ ۱۳۴

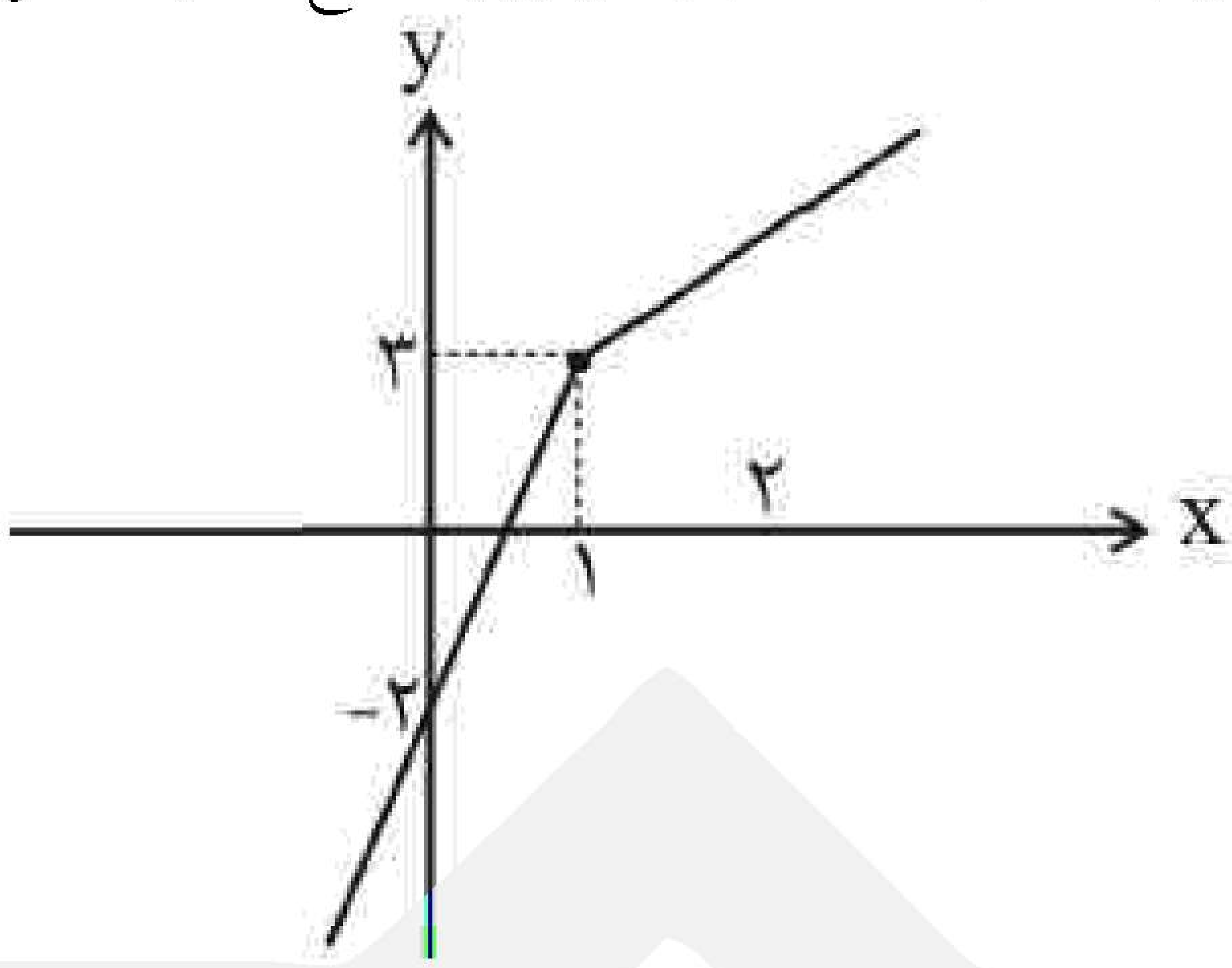
پاسخ کلیدی سوالات تستی (آزمایشی)

حسابان ۱۲ - فصل ۱

	۱	۲	۳	۴
۱ -	■	□	□	□
۲ -	■	□	□	□
۳ -	□	■	□	□
۴ -	□	■	□	□
۵ -	□	□	■	□
۶ -	□	■	□	□
۷ -	□	□	■	□
۸ -	□	■	□	□
۹ -	■	□	□	□
۱۰ -	□	□	■	□
۱۱ -	□	□	■	□
۱۲ -	■	□	□	□
۱۳ -	□	□	■	□
۱۴ -	□	□	□	■
۱۵ -	□	□	■	□
۱۶ -	■	□	□	□
۱۷ -	□	□	■	□
۱۸ -	□	■	□	□
۱۹ -	■	□	□	□
۲۰ -	□	□	□	■
۲۱ -	□	□	■	□
۲۲ -	□	■	□	□
۲۳ -	■	□	□	□
۲۴ -	□	□	□	■
۲۵ -	□	□	■	□
۲۶ -	□	□	■	□
۲۷ -	□	□	□	■
۲۸ -	□	□	□	■
۲۹ -	□	□	■	□
۳۰ -	□	□	■	□
۳۱ -	■	□	□	□
۳۲ -	□	□	□	■
۳۳ -	□	□	□	■
۳۴ -	■	□	□	□

	۱	۲	۳	۴
۳۵ -	□	■	□	□
۳۶ -	□	□	■	□
۳۷ -	□	□	■	□
۳۸ -	□	□	■	□
۳۹ -	□	□	■	□
۴۰ -	■	□	□	□

۱- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. نمودار $f(x) = ۳x - |۲x - ۲|$ را ببینید. تابع f اکیداً صعودی است.



حالا برای اینکه gof اکیداً نزولی شود باید g نزولی باشد. دقت کنید که $\text{Log}\, x$ بر R تعریف نمی‌شود. $|۲^x - ۱|$ در $x = ۰$ تغییر آهنگ می‌دهد. $|x - ۱| + ۲x$ اکیداً صعودی است، اما $g(x) = \left(\frac{\sqrt{۵}}{۳}\right)^x$ اکیداً نزولی است.

۲- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$f(x) = (x-۱)(x+۲)g(x) + ۳x - ۱$$

$$\begin{cases} f(۱) = ۲ \\ f(-۲) = -۷ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + b - ۳ = ۲ \\ ۴a + b = -۷ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -۴ \\ b = ۹ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(x) = x^۵ - ۴x^۳ - ۴x^۲ + ۹ \\ g(x) = xf(۴ + x) + f(x+۱) \end{cases}$$

$$g(-۲) = -۲f(۲) + f(-۱) = -۲(-۷) + (۸) = ۲۲$$

۳- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

۲ واحد راست و یک واحد بالا : $g(x) = ۲ + \sqrt{۳ - (x-۲)} + ۱ \Rightarrow g(x) = \sqrt{۵ - x} + ۳$

تابع g نزولی است؛ پس:

$$\cancel{g}(g(x)) < \cancel{g}(x) \Rightarrow g(x) > x \Rightarrow \sqrt{۵ - x} + ۳ > x \Rightarrow \sqrt{۵ - x} > x - ۳ \Rightarrow ۵ - x > x^۲ - ۶x + ۹$$

$$\Rightarrow x^۲ - ۵x + ۴ < ۰ \Rightarrow x < ۴$$

از طرفی شرایط دامنه به صورت زیر است:

$$\begin{cases} x \in D_g \Rightarrow x \leq ۵ \\ g(x) \in D_g \Rightarrow \sqrt{۵ - x} + ۳ \leq ۵ \Rightarrow \sqrt{۵ - x} \leq ۲ \Rightarrow ۵ - x \leq ۴ \Rightarrow x \geq ۱ \end{cases}$$

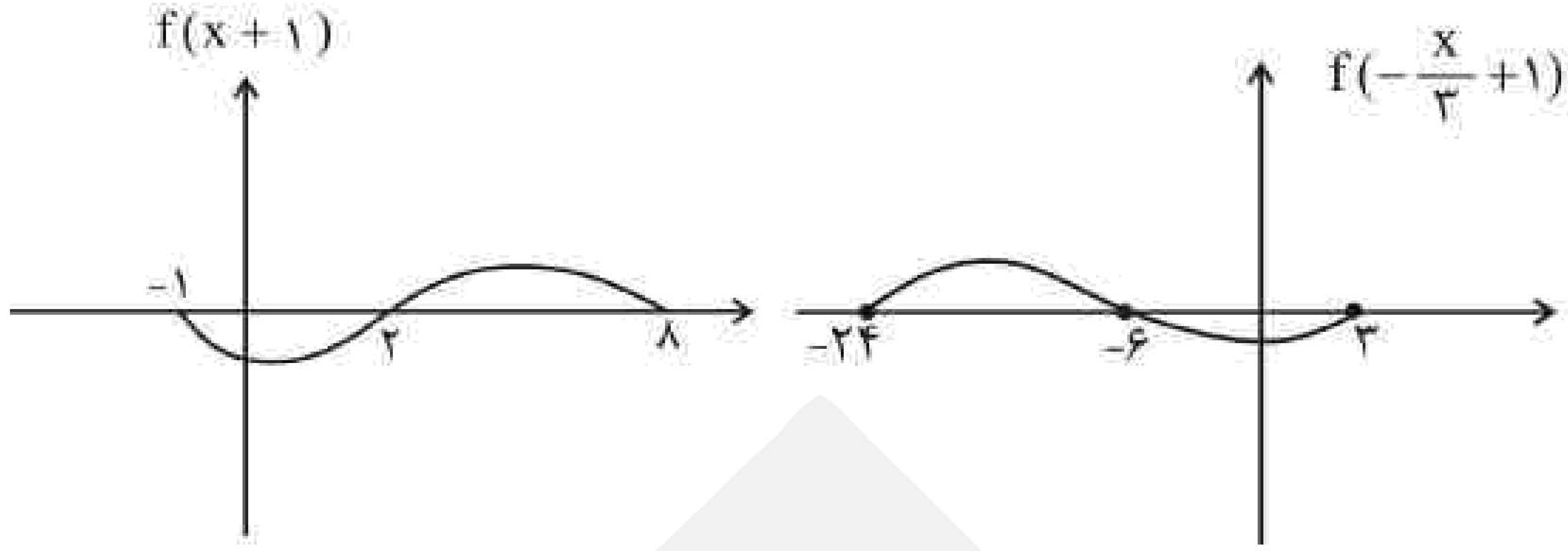
نتیجه نهایی آن است که $۱ \leq x < ۴$ است که شامل سه عدد صحیح است.

۴- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

قرینه نسبت به محور yها : $y = \frac{-۲x}{-x-۳} = \frac{۲x}{x+۳}$

$: y = \frac{۲(x+۲)}{x+۲+۳} - k = \frac{۲x+۴}{x+۵} - k \Rightarrow g(-۳) = -۳ \Rightarrow \frac{-۲}{۲} - k = -۳ \Rightarrow k = ۲$

۵- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. نمودار تابع $f\left(۱ - \frac{x}{۳}\right)$ را رسم می‌کنیم:



عبارت زیر رادیکال را تعیین علامت می‌کنیم:

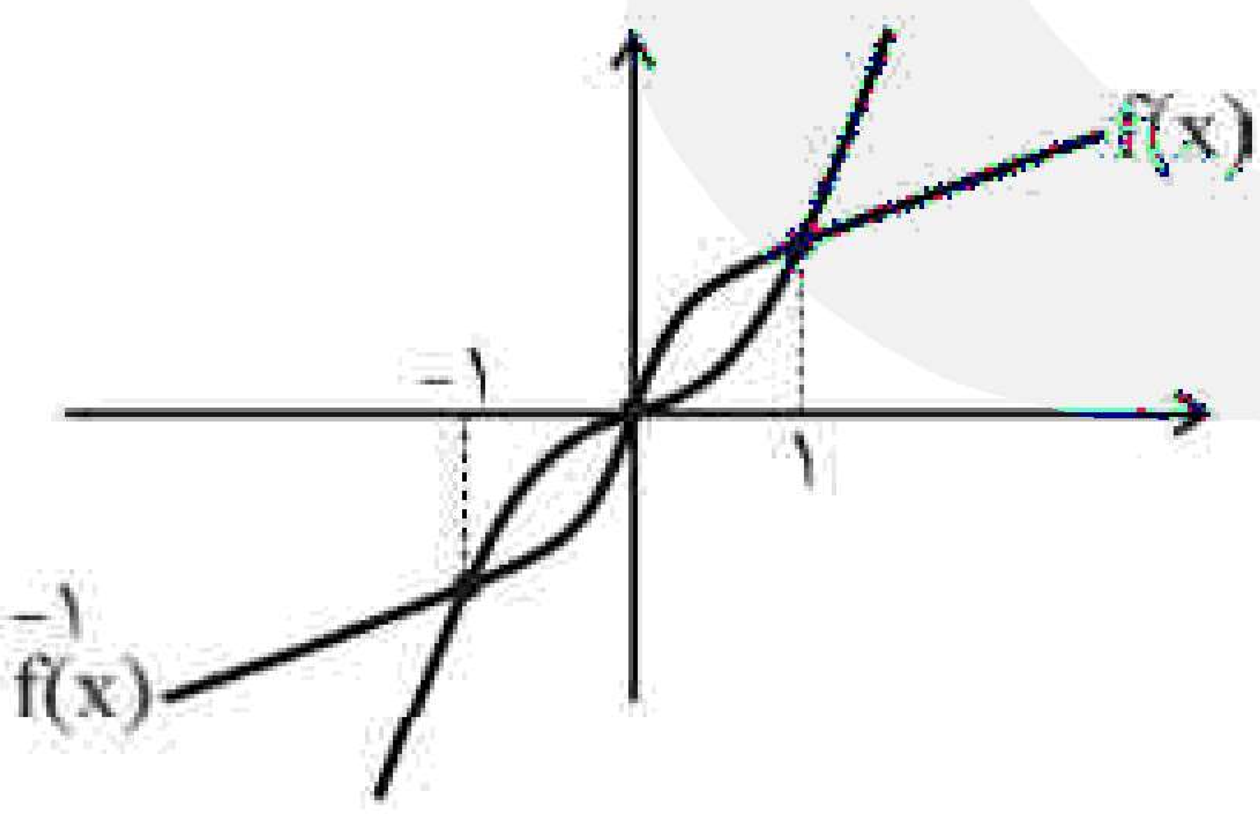
	-۲۴		-۶		۰		۳	
$f\left(۱ - \frac{x}{۳}\right)$		+		-		-		
x		-		-		+		
p		-		+		-		

$D = [-۶ , ۰) \cup \{-۲ , ۴ , ۳\}$

دامنهٔ تابع شامل ۸ عدد صحیح است.

۶- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. به دلیل اینکه xها در $\frac{-۵}{۲}$ ضرب شده است، (یعنی ۲x به ۵x- تبدیل شده است) پس قاعده در $\frac{۲}{۵}$ ضرب می‌شود و برابر $\frac{۸}{۵}$ است و yها در ۳ ضرب شده است (یعنی f به ۳f تبدیل شده است) و ارتفاع برابر ۱۵ می‌شود؛ پس مساحت برابر ۱۲ است.

«بانک سوال یاوران دانش»



۷- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. نمودار تابع f و f^{-1} به صورت مقابل است و هر دو، تابع اکیداً صعودی هستند.

$$f(f(x)) \geq f\left(f^{-1}(x)\right) \Rightarrow f(x) \geq f^{-1}(x)$$

با توجه به نمودار در بازه [۱ , ۱-] نمودار f(x) بالاتر از $f^{-1}(x)$ قرار دارد که شامل سه عدد صحیح است.

۸- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. برای محاسبه دامنه $g(x)$؛ زیر رادیکال را بزرگ‌تر مساوی صفر قرار می‌دهیم:

$$\frac{f(۳x-۱)-f(۲x)}{f(x)} \geq ۰$$

برای آنکه این کسر بزرگ‌تر مساوی صفر باشد، دو حالت داریم:

(۱) صورت نامنفی و مخرج مثبت
$$\begin{cases} f(۳x-۱) \geq f(۲x) \Rightarrow ۳x-۱ \leq ۲x \Rightarrow x \leq ۱ \\ f(x) > ۰ \Rightarrow x < ۲ \end{cases} \Rightarrow x \leq ۱$$

(۲) صورت نامثبت و مخرج منفی
$$\begin{cases} f(۳x-۱) \leq f(۲x) \Rightarrow ۳x-۱ \geq ۲x \Rightarrow x \geq ۱ \\ f(x) < ۰ \Rightarrow x > ۲ \end{cases} \Rightarrow x > ۲$$

بنابراین دامنه به صورت $(-\infty , ۱] \cup (۲ , +\infty)$ است، پس تنها عدد صحیحی که در دامنه نیست $x = ۲$ است.

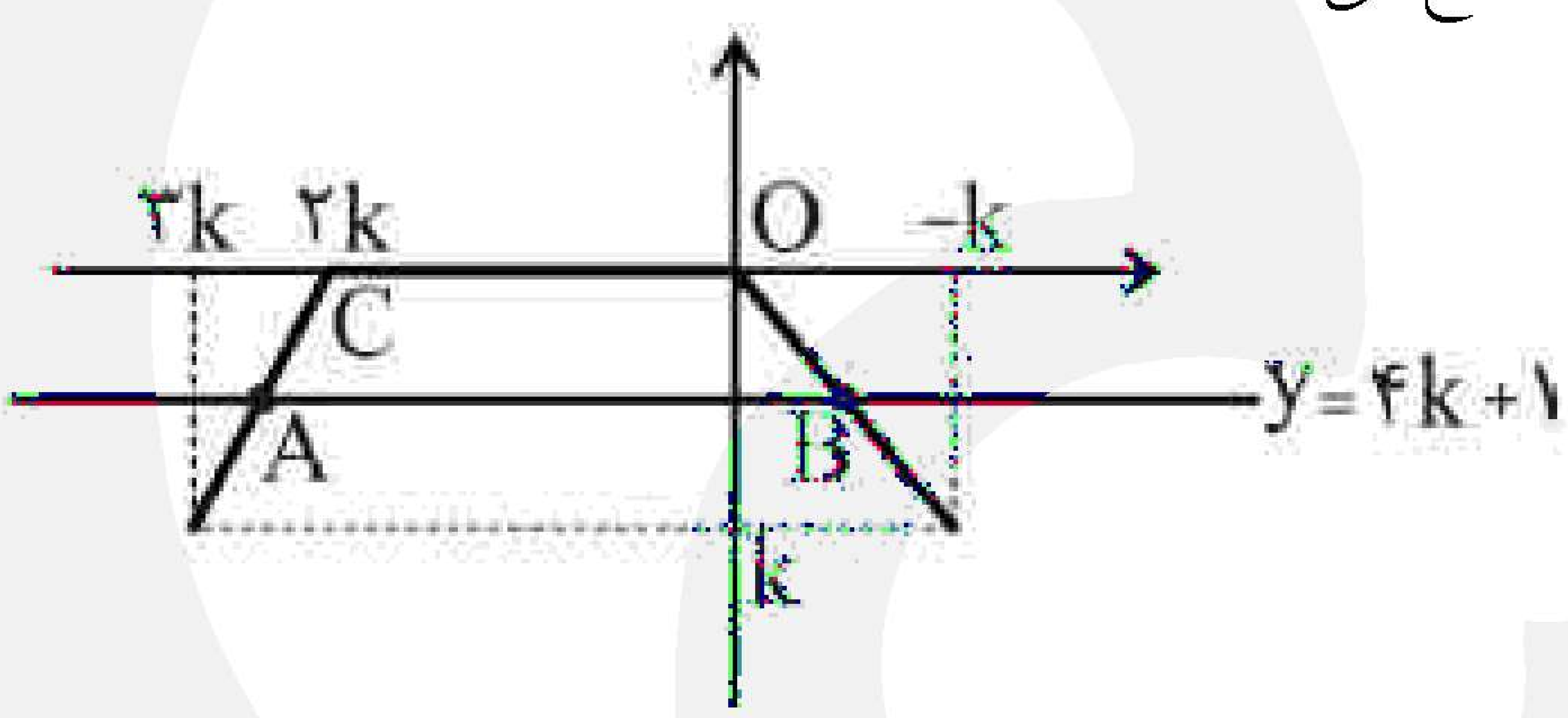
۹- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. به کمک دامنهٔ تابع $y = ۲f(۲x)+۱$، دامنهٔ تابع $f(x)$ را که بازهٔ $[۶ , ۱۰]$ است را می‌یابیم.

برای یافتن دامنهٔ تابع $g(x)$ داریم:

$$\begin{cases} \frac{۱-x}{۳} = ۶ \Rightarrow ۱-x = ۱۸ \Rightarrow x = -۱۷ \\ \frac{۱-x}{۳} = ۱۰ \Rightarrow ۱-x = ۳۰ \Rightarrow x = -۲۹ \end{cases}$$

دامنهٔ تابع $g(x)$ بازهٔ $[-۲۹ , -۱۷]$ است.

۱۰- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. با فرض $k < ۰$ نمودار نسبت به محور عرض و طول‌ها قرینه می‌شود. همین طور نمودار $f(x)$ در راستای افقی و عمودی دچار انبساط k برابری می‌شود. فرض کنیم نمودار خط افقی $y = ۴k+۱$ این نمودار را در دو نقطهٔ A و B قطع می‌کند.



دقت کنید که شیب دو پاره‌خط مورب برابر ۱ , ۱- است. با توجه به فرض سؤال داریم:

$$x_A + x_B = -۳ \Rightarrow x_C = -۳ \Rightarrow ۲k = -۳ \Rightarrow k = -\frac{۳}{۲}$$

اکنون مقدار $f(|k|+۱) = f\left(\frac{۵}{۲}\right)$ را می‌یابیم.

با توجه به شکل تابع $f(x)$، ضابطهٔ خط مورب در قسمت مثبت محور xها را می‌یابیم:

$$f(x) = x-۲ \Rightarrow f\left(\frac{۵}{۲}\right) = \frac{۵}{۲}-۲ = \frac{۱}{۲}$$

۱۱- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. با توجه به اینکه $f(x) > ۰$ و اینکه $f(x)$ اکیداً صعودی است، می‌توان نتیجه گرفت $\frac{۱}{f(x)}$ اکیداً نزولی است و $y = f(x) - \frac{۱}{f(x)}$ تابعی اکیداً صعودی است. از طرفی:

$$\begin{cases} ۰ < f(x) < ۱ \Rightarrow \frac{۱}{f(x)} > ۱ \Rightarrow f(x) - \frac{۱}{f(x)} < ۰ \\ ۱ < f(x) < ۵ \Rightarrow ۱ > \frac{۱}{f(x)} > \frac{۱}{۵} \Rightarrow f(x) - \frac{۱}{f(x)} > ۰ \end{cases}$$

روی دامنهٔ $(۰ , ۱)$ تابع $y = f(x) - \frac{۱}{f(x)}$ اکیداً صعودی و منفی است و توان دو آن تابعی اکیداً نزولی خواهد بود.

روی دامنهٔ $(۱ , ۱۰)$ تابع $y = f(x) - \frac{۱}{f(x)}$ اکیداً صعودی و مثبت است و $g(x) = \left(f(x) - \frac{۱}{f(x)}\right)^۲$ تابعی اکیداً صعودی خواهد بود.

۱۲- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. نکته: اگر n یک عدد طبیعی باشد، آنگاه:

$$x^n - a^n = (x - a)\left(x^{n-۱} + x^{n-۲}a + \ldots + a^{n-۱}\right)$$

حالا فرض کنید $x^۳ = t$ باشد:

$$t^۹ - ۱ = (t - ۱)\left(t^۸ + t^۷ + t^۶ + \ldots + t + ۱\right)$$

$$f(x) = x^{۲۴} + x^{۲۱} + x^{۱۸} + \ldots + x^۳ + ۱$$

از طرفی باقی‌مانده تقسیم $f(x)$ بر $x + ۱$ برابر $f(-۱)$ است ؛ پس:

$$R = f(-۱) = ۱$$

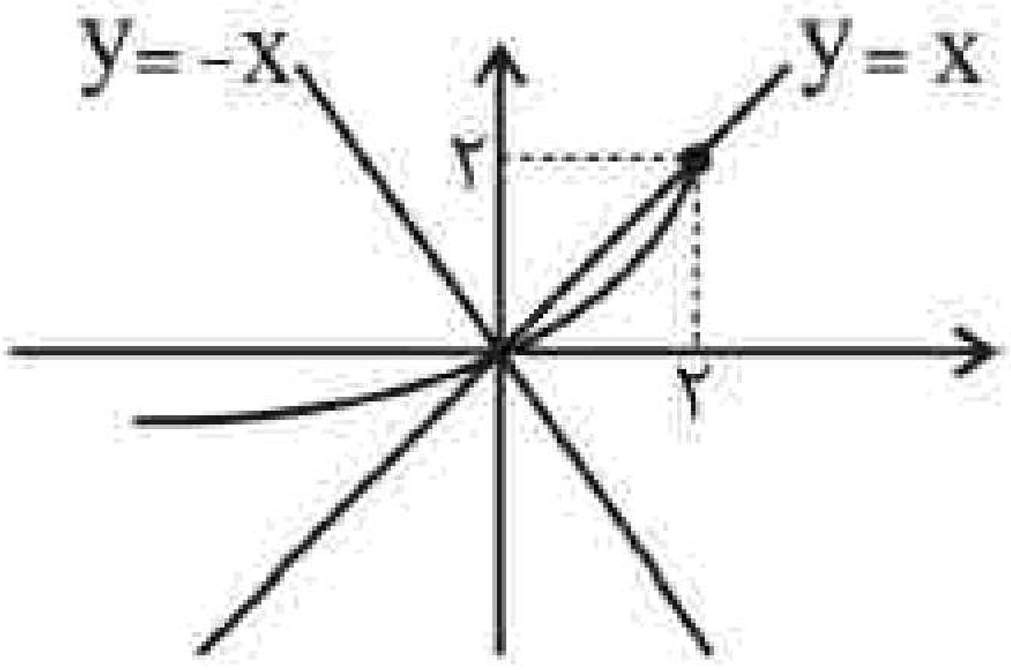
حالا قضیه تقسیم را می‌نویسیم. دقت کنید که مجموع ضرایب $g(x)$، همان $g(۱)$ است.

$$f(x) = (x + ۱)g(x) + ۱$$

$$x = ۱ \Rightarrow f(۱) = ۲g(۱) + ۱ \Rightarrow ۹ = ۲g(۱) + ۱ \Rightarrow g(۱) = ۴$$

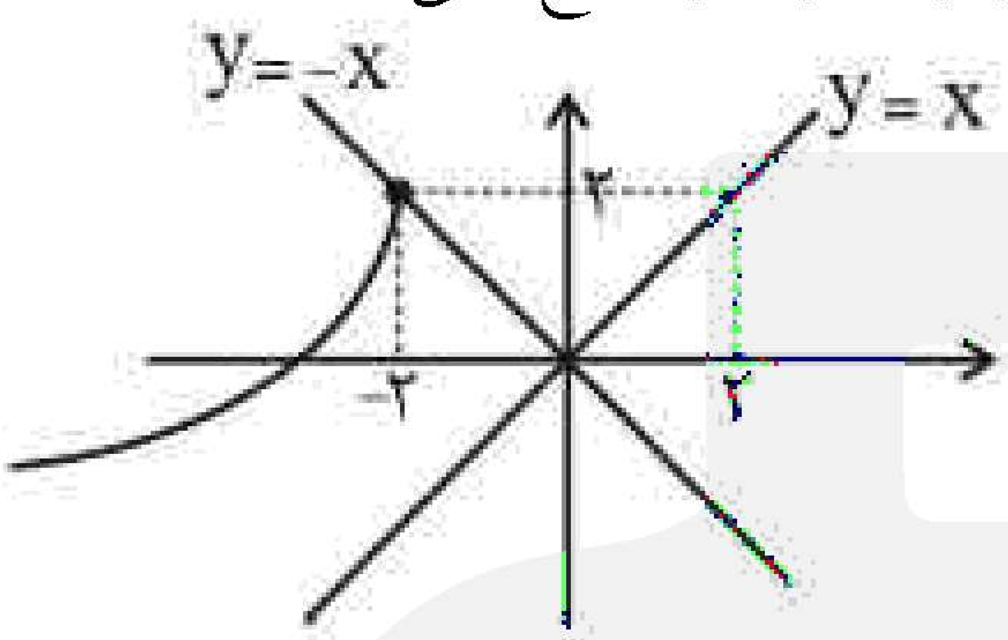
«بانک سوال یاوران دانش»

۱۳- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ابتدا دقت کنید که نمودار تابع $y = f(-۲x)$ به صورت زیر است:



$$f(-۲x) = ۲ - \sqrt{-۲x + ۴}$$

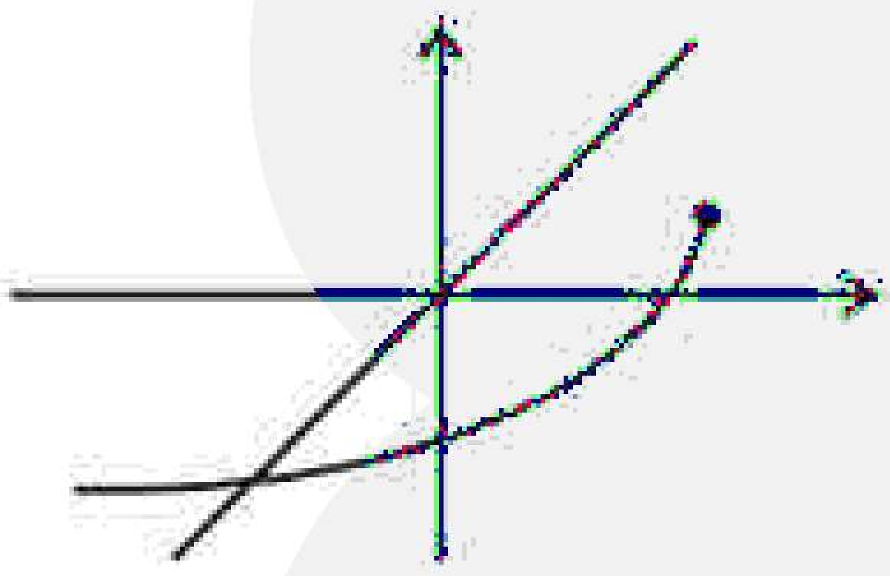
اگر نمودار $f(-۲x)$ را بیش از چهار واحد به سمت چپ انتقال دهیم، هیچ‌کدام از نیمسازها را قطع نمی‌کند.



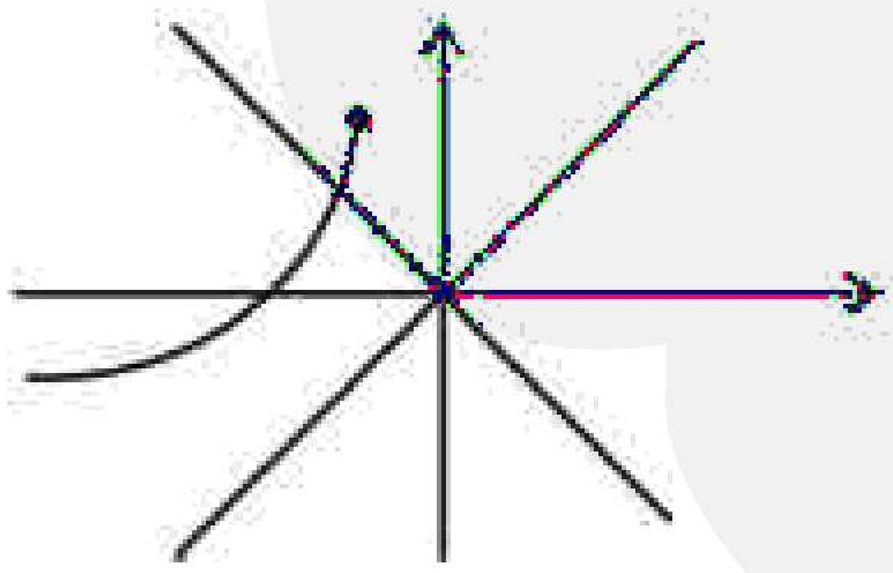
$$y = f(-۲x + b) \Rightarrow y = f\left(-۲\left(x - \frac{b}{۲}\right)\right)$$

پس کافی است $-\frac{b}{۲} > ۴$ باشد، یعنی $b < -۸$ باشد. بررسی سایر گزینه‌ها:

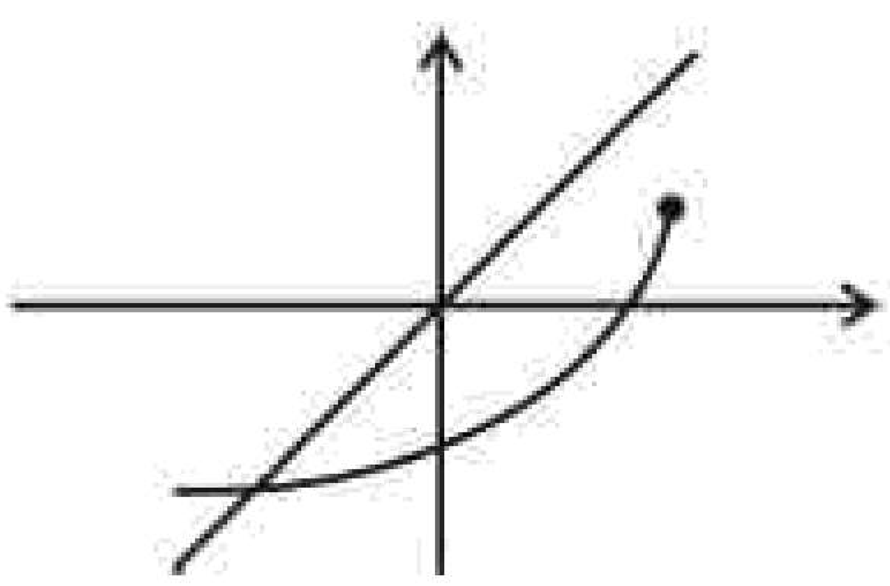
۱) $b > ۸$: نمودار تابع $f(-۲x)$ به اندازهٔ بیشتر از $\frac{b}{۲}$ به سمت راست می‌رود:



۲) $b > -۸$: نمودار تابع $f(-۲x)$ به اندازهٔ کمتر از $-\frac{b}{۲}$ به سمت چپ می‌رود (حتی ممکن است به سمت راست برود):



۴) $b < ۸$: نمودار تابع $f(-۲x)$ به اندازهٔ کمتر از $\frac{b}{۲}$ به سمت راست می‌رود (حتی ممکن است به سمت چپ برود):



۱۴- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. اگر f اکیداً صعودی و $f(a) < f(b)$ باشد، آنگاه $a < b$ است.

$$fog(x+۲) < ۱ \Rightarrow fog(x+۲) < f(۳) \Rightarrow g(x+۲) < ۳ \Rightarrow (x+۲)^۲ - ۵(x+۲) - ۳ < ۳$$
$$\Rightarrow x^۲ - x - ۱۲ < ۰ \Rightarrow -۳ < x < ۴$$

اعداد صحیح ۲- و ۱- و ۰، ۱، ۲ و ۳ در این نامساوی‌ها صدق می‌کنند که جمع آن‌ها برابر ۳ است.

۱۵- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$f(x) = -(x-۱)^۳ - ۱ \Rightarrow -f(x) = (x-۱)^۳ + ۱$$
$$g(x) = ۲(x+۱)^۳ + ۵ \Rightarrow \frac{۱}{۲}g(x) = (x+۱)^۳ + \frac{۵}{۲}$$

برای تبدیل $-f(x)$ به $\frac{۱}{۲}g(x)$ باید دو واحد به چپ و ۱/۵ واحد به بالا انتقال دهیم.

۱۶- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. چون $x = ۲$ در دامنهٔ تابع نیست، پس $x = ۲$ ریشهٔ مخرج است، یعنی $ax - ۴ = ۰$ است ؛ بنابراین $a = ۲$ است و داریم:

$$f(x) = \frac{۲}{۲x-۴} = \frac{۱}{x-۲} = \frac{x-۲}{(x-۲)^۲}$$
$$f(x-۱) = \frac{x-۱-۲}{(x-۱-۲)^۲} = \frac{x-۳}{(x-۳)^۲} = \frac{x-۳}{x^۲ - ۶x + ۹}$$

با مقایسه ضابطه $g(x)$ با این ضابطه، مقادیر $p = -۳$ و $m = -۶$ و $n = ۹$ به دست می‌آیند ؛ پس:

$$m - n + p = -۶ - ۹ - ۳ = -۱۸$$

۱۷- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. برای آنکه تابع $f(x) = -۳\left(\frac{۴a+۱}{a+۲}\right)^{۲-x}$ اکیداً نزولی باشد، لازم است که تابع نمایی $y = \left(\frac{۴a+۱}{a+۲}\right)^x$ اکیداً نزولی باشد و برای این منظور باید:

$$۰ < \frac{۴a+۱}{a+۲} < ۱$$

از حل این نامعادله به $\frac{-۱}{۴} < a < \frac{۱}{۳}$ می‌رسیم و از آنجا با تقسیم طرفین نامساوی بر ۲ داریم:

$$\frac{-۱}{۸} < \frac{a}{۲} < \frac{۱}{۶} \Rightarrow \left[\frac{a}{۲}\right] = -۱ , ۰ \Rightarrow \text{دو مقدار}$$

۱۸- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. با توجه به حضور زوج مرتب‌های $(۲ , b)$ و $(۴ , ۵)$ در تابع اکیداً صعودی f، واضح است که $b < ۵$.

با توجه به حضور زوج مرتب‌های $(b , ۳)$ و $(۴ , ۵)$ در تابع اکیداً صعودی f، واضح است که $b < ۴$.

حالا زوج مرتب‌های $(b , ۳)$ و $(۲ , b)$ را ببینید، دو حالت زیر متصوّر است:

$$\begin{cases} ۱)\ b < ۲ \Rightarrow f(b) < f(۲) \Rightarrow ۳ < b \xrightarrow[\text{اشتراک با } b < ۲]{} \varnothing \\ ۲)\ ۲ < b \Rightarrow f(۲) < f(b) \Rightarrow b < ۳ \xrightarrow{\text{اشتراک با } ۲ < b} ۲ < b < ۳ \end{cases}$$

از اشتراک سه بازه به دست آمده برای b، به بازه $۲ < b < ۳$ می‌رسیم و $[b] = ۲$ است.

۱۹- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. باقی‌مانده تقسیم $f(x)$ بر $x^2-3x=x(x-3)$ برابر با $3x+1$ است. پس برای یافتن باقی‌مانده تقسیم $f(x)$ بر هریک از عوامل x و $x-3$ می‌توان باقی‌مانده تقسیم $3x+1$ بر آن‌ها را به دست آورد:

$$\begin{cases} R(0)=1 \Rightarrow f(0)=1 = \text{باقی مانده تقسیم } R(x)=3x+1 \text{ بر } x = \text{باقی مانده تقسیم } f(x) \text{ بر } x \\ R(3)=10 \Rightarrow f(3)=10 = \text{باقیمانده تقسیم } R(x)=3x+1 \text{ بر } x-3 = \text{باقیمانده تقسیم } f(x) \text{ بر } x-3 \end{cases}$$

حال با توجه به نمودار $f(x)$، ضابطه آن را به صورت $f(x)=(x-\alpha)^3+\beta$ درنظر می‌گیریم و داریم:

$$\begin{cases} f(0)=1 \Rightarrow (-\alpha)^3+\beta=1 \\ f(3)=10 \Rightarrow (3-\alpha)^3+\beta=10 \end{cases}$$

برای حل دستگاه، طرفین معادله پایین را از طرفین معادله بالا کم می‌کنیم:

$$(3-\alpha)^3-(-\alpha)^3=9 \Rightarrow \left(27-27\alpha+9\alpha^2-\alpha^3\right)+\alpha^3=9 \Rightarrow 9\alpha^2-27\alpha+18=0$$

$$\Rightarrow \alpha^2-3\alpha+2=0 \Rightarrow \alpha=1\,,\,2$$

با جایگذاری $\alpha=1$ در یکی از معادلات به $\beta=2$ و با جایگذاری $\alpha=2$ به $\beta=9$ می‌رسیم و لذا:

$$\left[\frac{\alpha-\beta}{2}\right] \xrightarrow{\alpha=1,\ \beta=2} \left[\frac{-1}{2}\right]=-1$$

$$\left[\frac{\alpha-\beta}{2}\right] \xrightarrow{\alpha=2,\ \beta=9} \left[\frac{-7}{2}\right]=-4$$

پس مجموع مقادیر ممکن برابر با ۵- است.

۲۰- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. می‌دانیم که به ازای هر عدد حقیقی x داریم:

$$f(x-2)-f(x+4)=0 \Rightarrow f(x-2)=f(x+4) \xrightarrow{x-2=X} f(X)=f(X+6)$$

پس تابع f متناوب با دوره تناوب ۶ است.

حالا برای محاسبه $g'(3)$، ابتدا از طرفین رابطه داده شده مشتق می‌گیریم:

$$g(3x+1)=f(3-2x)-2f\left(-x-\frac{29}{3}\right)+\frac{x}{2}$$

$$\rightarrow 3g'(3x+1)=-2f'(3-2x)+2f'\left(-x-\frac{29}{3}\right)+\frac{1}{2}$$

برای رسیدن به $g'(3)$ لازم است: $3x+1=3 \Rightarrow x=\frac{2}{3}$

با جایگذاری $x=\frac{2}{3}$ در رابطه اخیر داریم: $3g'(3)=-2f'\left(\frac{5}{3}\right)+2f'\left(\frac{-31}{3}\right)+\frac{1}{2}$

از طرفی تابع f متناوب با دوره تناوب ۶ است، پس $f(x)=f(x+6)$ است، یعنی مثلاً:

$$f\left(\frac{-31}{3}\right)=f\left(\frac{-13}{3}\right)=f\left(\frac{5}{3}\right)=\dots$$

پس $f\left(\frac{-31}{3}\right)=f\left(\frac{5}{3}\right)$ و از آنجا که تابع f متناوب است، شیب خط مماس بر منحنی f در نقاط $x=\frac{-31}{3}$ و $x=\frac{5}{3}$ هم برابر است، به عبارتی $f'\left(\frac{-31}{3}\right)=f'\left(\frac{5}{3}\right)$ است و داریم:

$$3g'(3)=\cancel{-2f'\left(\frac{5}{3}\right)}+\cancel{2f'\left(\frac{-31}{3}\right)}+\frac{1}{2} \Rightarrow g'(3)=\frac{1}{6}$$

۲۱- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. با توجه به حضور زوج مرتب‌های $(1, a-1)$ و $(6, 3)$ در تابع اکیداً نزولی f، واضح است که: $a-1>6 \Rightarrow a>7 \quad \mathrm{I}$

با توجه به حضور زوج مرتب‌های $(5, a+2)$ و $(6, 3)$ در تابع اکیداً نزولی f، واضح است که:
$a+2>3 \Rightarrow a>1 \quad \mathrm{II}$

حالا زوج‌های مرتب $(5, a+2)$ و $(1, a-1)$ را ببینید. با توجه به نامساوی‌های I و II در بالا، قطعاً $a+2>1$ است و داریم:
$1<a+2 \Rightarrow f(1)>f(a+2) \Rightarrow a-1>5 \Rightarrow a>6$

اشتراک این ناحیه با نواحی I و II برابر است با: $a>7$ و $[a]$ می‌تواند مقادیر ۷، ۸ و ۹ و ... باشد، یعنی شامل شش عدد طبیعی ۱، ۲، ... و ۶ نیست.

«بانک سوال یاوران دانش»

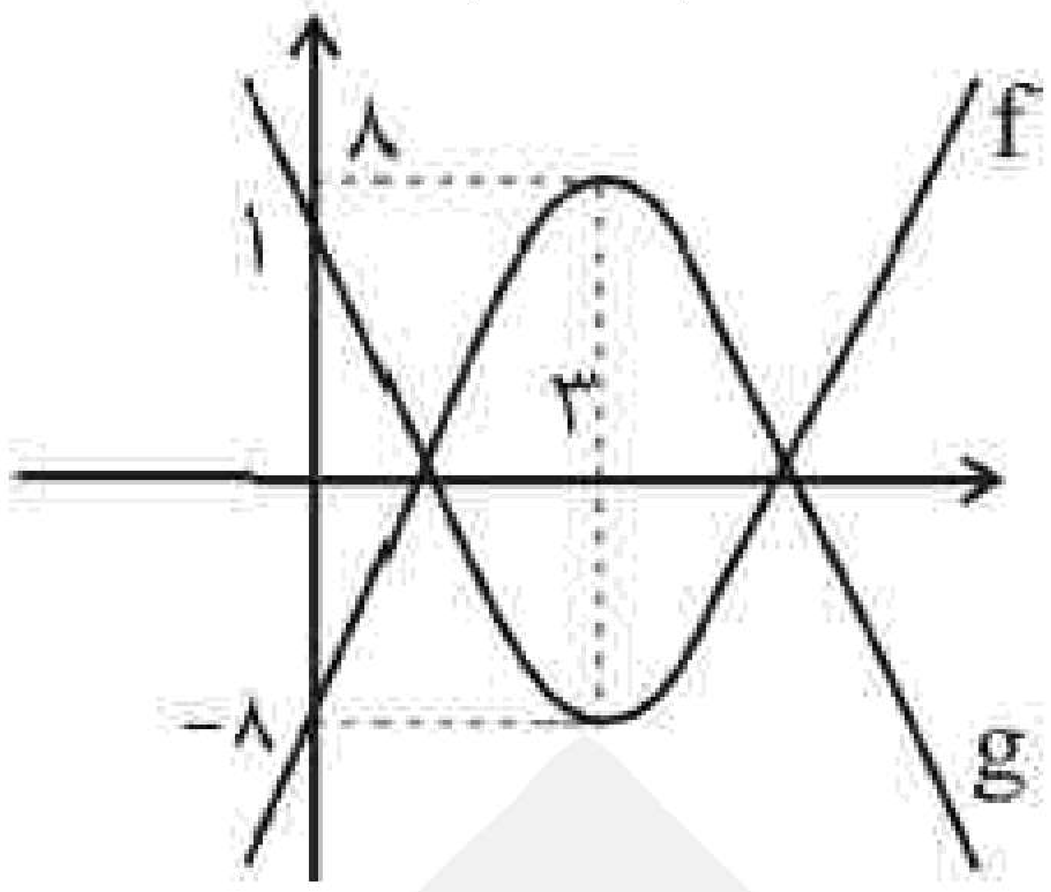
۲۲- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

(۱) دامنه تابع جدید $3 \le x \le 5 \Rightarrow 2 \le x-1 \le 4 \xrightarrow{\text{در تابع جدید}} 2 \le 1-\frac{x}{2} \le 4 \Rightarrow -6 \le x \le -2$

(۲) برد تابع جدید $-1 \le 2f-3 \le 3 \Rightarrow 1 \le f \le 3 \xrightarrow{\times(-3)} -9 \le -3f \le -3 \xrightarrow{-3} -12 \le -3f-3 \le -6$

$1, 2 \xrightarrow{\text{اجتماع}} [-12, -2] \Rightarrow$ ۱۱ عدد صحیح

۲۳- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. نمودار تابع f و g را رسم می‌کنیم:



برای اینکه $h(x)$ نمودار f را قطع نکند باید g حداقل ۱۶ واحد به پایین در جهت محور عرض‌ها انتقال یابد. بنابراین $k < -16$ باشد.

۲۴- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

ضابطه تابع خطی : $f(x) = ax + b \begin{cases} \xrightarrow{\text{گذرا بر } A(-2,-1)} -1 = -2a + b \\ \xrightarrow{\text{گذرا بر } B(1,5)} 5 = a + b \end{cases} \begin{matrix} \to a = 2 \\ \to b = 3 \end{matrix}$

$\Rightarrow f(x) = 2x + 3 \quad (1)$

$y = (x+2)^2 - 3 \xrightarrow[y \to -y]{\text{قرینه نسبت به محور xها}} y = -(x+2)^2 + 3 \xrightarrow{\text{۳ واحد انتقال در جهت منفی yها}}$

$y = -(x+2)^2 \xrightarrow[\text{در جهت مثبت محور xها}]{\text{۲ واحد انتقال}} y = -x^2 \quad (2)$

$(1),(2) \xrightarrow{\text{نقاط برخورد}} -x^2 = 2x + 3 \Rightarrow x^2 + 2x + 3 = 0$

$\Delta = -8 < 0 \Rightarrow$ دو نمودار هیچ نقطه برخوردی ندارند.

۲۵- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. اگر خارج‌قسمت تقسیم $P(x)$ بر $x^3 - 8$ را $Q(x)$ بنامیم آنگاه:

$$P(x) = (x^3 - 8)Q(x) + x^2 + x + 4 \to P(x) = (x-2)\overbrace{(x^2 + 2x + 4)Q(x)}^{A(x)} + x^2 + x + 4$$

$$P(x+3) = ((x+3) - 2)A(x+3) + (x+3)^2 + (x+3) + 4$$

برای یافتن باقی‌مانده‌ی این عبارت بر $x + 1$ داریم:

$$x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1 \Rightarrow P(-1+3) = 0 \times A(2) + (-1+3)^2 + (-1+3) + 4$$

حاصل برابر ۱۰ است.

۲۶- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$f(x)=\begin{cases}(۲+K)x-۲ \ ; \ x\geq ۰\\(۲-K)x-۲ \ ; \ x<۰\end{cases}$$

اگر شیب دو خط در ضابطه تابع هم‌علامت باشند، f در هر دو ضابطه یک رفتار صعودی اکید یا نزولی اکید در کل دامنه خواهد داشت، بنابراین:

$$(۲+K)(۲-K)>۰ \Rightarrow -۲<K<۲$$

توجه داشته باشید که به ازای $K=۲$ یا $K=-۲$ یک ضابطه از تابع ثابت می‌شود و یکنوایی اکید در کل دامنه به هم می‌خورد.

۲۷- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. چون به ازای هر عدد حقیقی x علامت f' منفی است، پس تابع f به ازای هر $x\in R$ نزولی اکید است، بنابراین:

$$\forall x_۱ , x_۲\in R : x_۱<x_۲ \Leftrightarrow f(x_۱)>f(x_۲)$$

در نتیجه:

$$f(۲K^۲-۱)>f(۳K+۴)$$

$$\Big\downarrow \text{چون } f \text{ نزولی اکید است}$$

$$۲K^۲-۱<۳K+۴$$

$$\Big\downarrow$$

$$۲K^۲-۳K-۵<۰$$

$$\Big\downarrow$$

$$-۱<K<\frac{۵}{۲}$$

$$\Big\downarrow K\in Z$$

$$K=۰ , ۱ , ۲$$

$$\Big\downarrow$$

با توجه به حدود نامعادله، ۳ عدد صحیح برای K وجود دارد.

۲۸- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$f(x)=۲^{-x} \xrightarrow[y\to(-y)]{\text{قرینه نسبت به محور } x \text{ ها}} y=-۲^{-x} \xrightarrow[x\to(-x)]{\text{قرینه نسبت به محور } y \text{ ها}}$$

$$y=-۲^{x} \xrightarrow{+۴ \text{ واحد در راستای قائم}} g(x)=-۲^{x}+۴ \quad *$$

$$g(x)-۷f(|x|)=۰ \Rightarrow -۲^{x}+۴-۷\times ۲^{-|x|}=۰$$

اگر $x \geq ۰ \xrightarrow{|x|=x} -۲^{x}+۴-۷\times ۲^{-x}=۰ \xrightarrow{\text{با فرض } ۲^{x}=t} \left(-t+۴-۷\times\frac{۱}{t}=۰\right)\times(-t)$

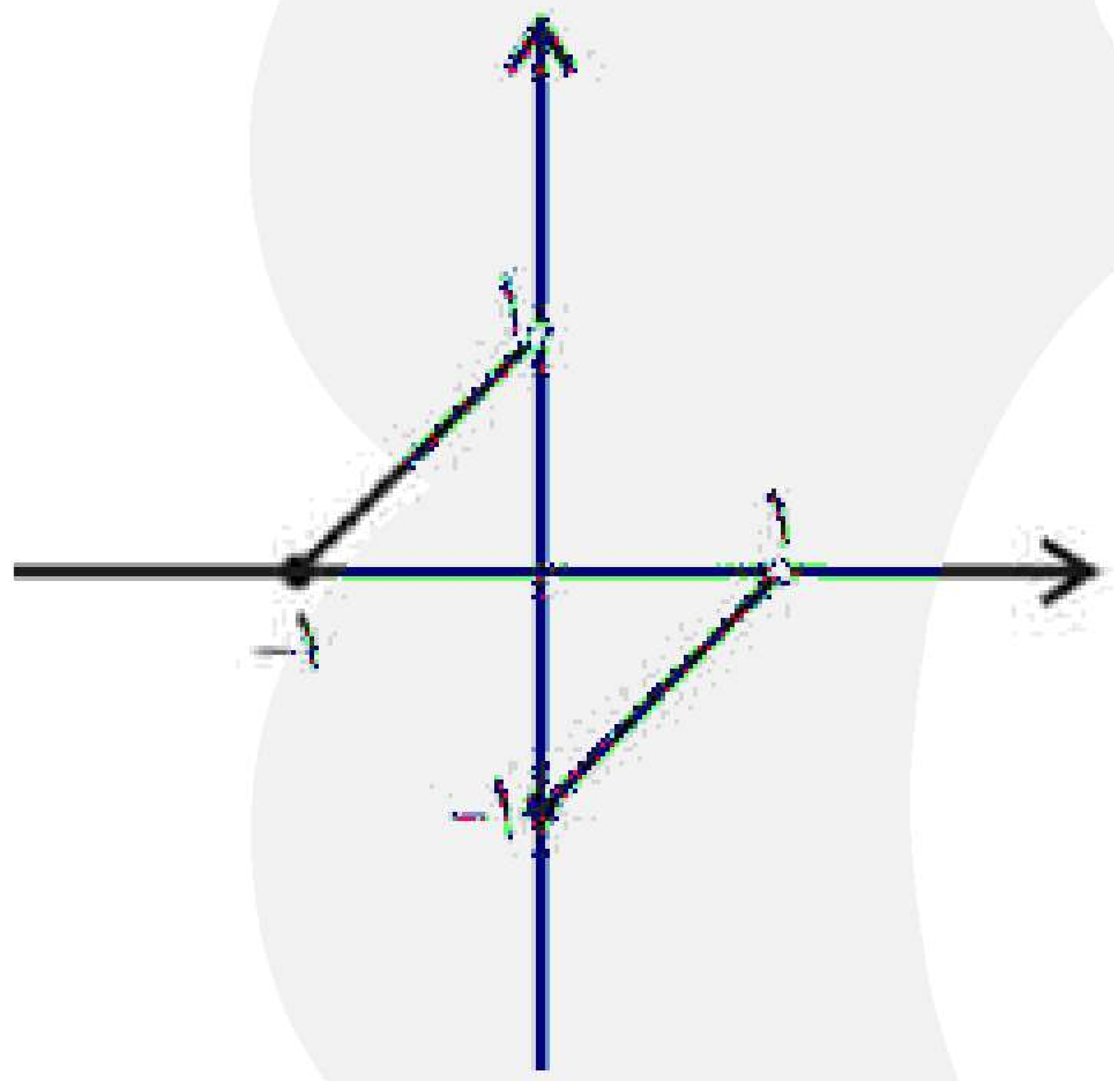
$t^{۲}-۴t+۷=۰ \xrightarrow{\Delta<۰}$ ریشهٔ حقیقی ندارد

اگر $x<۰ \xrightarrow{|x|=-x} -۲^{x}+۴-۷\times ۲^{x}=۰ \Rightarrow ۴=۸\times ۲^{x} \Rightarrow ۲^{x}=\frac{۱}{۲} \Rightarrow x=-۱ \Rightarrow K=-۱$

$$g\left(۲K^{۲}+۱\right)+۷f(۲K)=g(۳)+۷f(-۲)\overset{*}{=}\left(-۲^{۳}+۴\right)+۷\left(۲^{۲}\right)=(-۴)+۲۸=۲۴$$

۲۹- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. فاصله $f(x)$ را ساده کرده و نمودار آن را رسم می‌کنیم:

$$f(x)=\begin{cases} x+۱ & -۱\leq x<۰ \\ x-۱ & ۰\leq x<۱ \end{cases}$$



واضح است که این تابع در فواصل $(۰ , ۱-]$ و $(۱ , ۰]$ اکیداً صعودی است، امّا به خاطر پرش نمودار از بالا به پایین در $x=۰$، در کل بازه $(۱ , ۱-]$ غیریکنواست.

حالا ضابطه $fof(x)$ را به دست می‌آوریم:

$$fof(x)=f(f(x))=\begin{cases} f(x)+۱ & -۱\leq f(x)<۰ \\ f(x)-۱ & ۰\leq f(x)<۱ \end{cases}$$

با توجه به نمودار:

$$\begin{cases} ۰\leq x<۱ \Rightarrow -۱\leq f(x)<۰ \ , \ f(x)=x-۱ \\ -۱\leq x<۰ \Rightarrow ۰\leq f(x)<۱ \ , \ f(x)=x+۱ \end{cases}$$

پس داریم:

$$f(f(x))=\begin{cases} (x-۱)+۱=x & ۰\leq x<۱ \\ (x+۱)-۱=x & -۱\leq x<۱ \end{cases}$$

پس $f(f(x))=x$ بوده و اکیداً صعودی است.

«بانک سوال یاوران دانش»

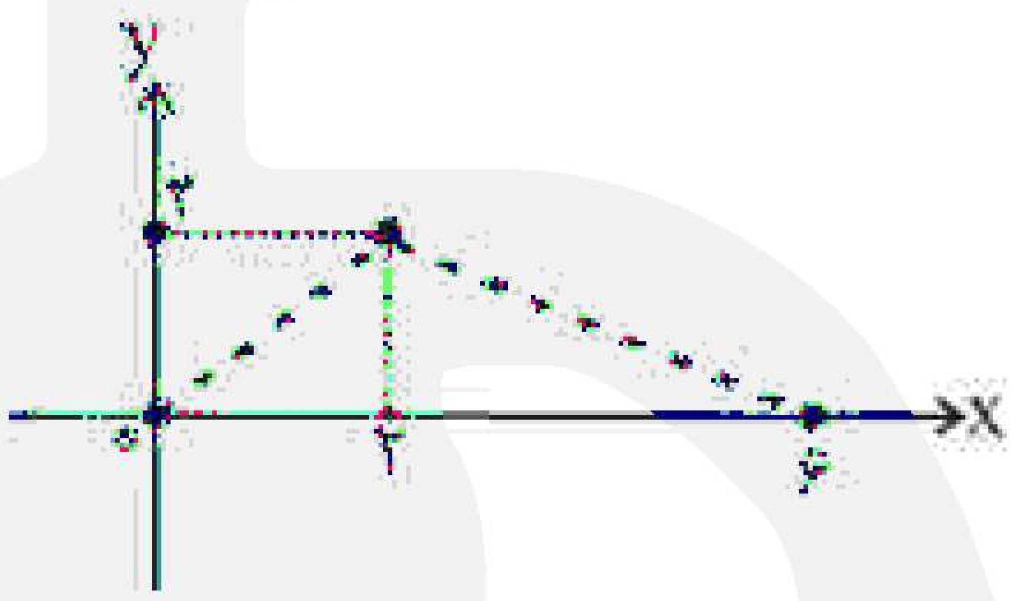
۳۰- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$P(x) = \underbrace{(x-۲)(x+۱)q(x)}_{\text{خارج قسمت}} + \underbrace{۴x+۱}_{\text{باقی مانده}}$$

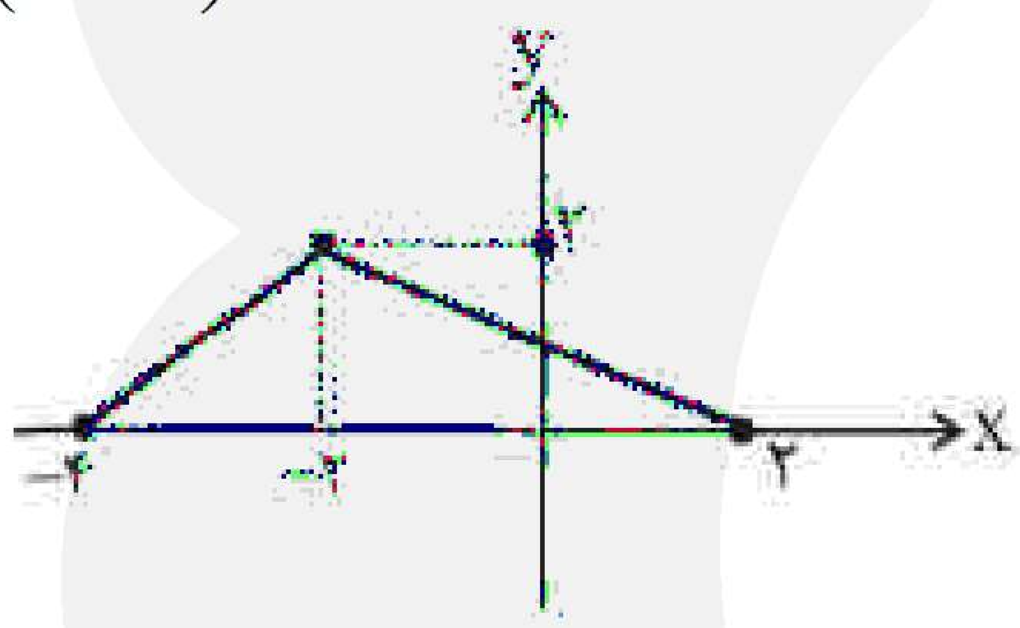
$$x-۲ = ۰ \Rightarrow x = ۲ \Rightarrow P(۲) = ۴(۲)+۱ \Rightarrow P(۲) = ۹$$
$$x+۱ = ۰ \Rightarrow x = -۱ \Rightarrow P(-۱) = ۴(-۱)+۱ \Rightarrow P(-۱) = -۳$$
$$x-۱ = ۰ \Rightarrow x = ۱ \Rightarrow g(۱) = P(-۱) + P(۲) + ۳(۱)^۲ + ۲$$
$$g(۱) = (-۳) + ۹ + ۳ + ۲ = ۱۱$$
$x-۱$ بر $g(x)$ باقی مانده تقسیم $= g(۱) = ۱۱$

۳۱- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

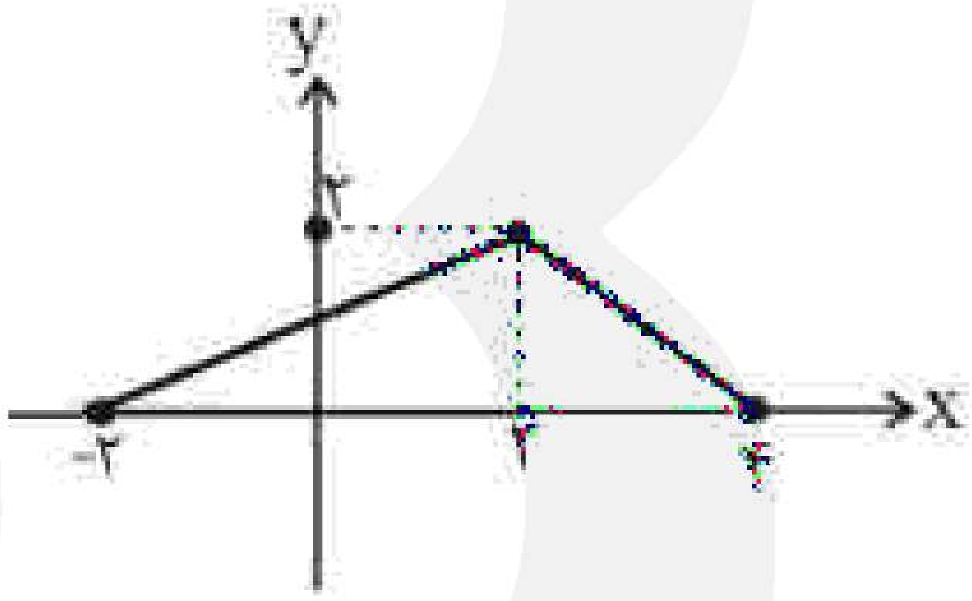
نمودار $y = f(x-۲)$:

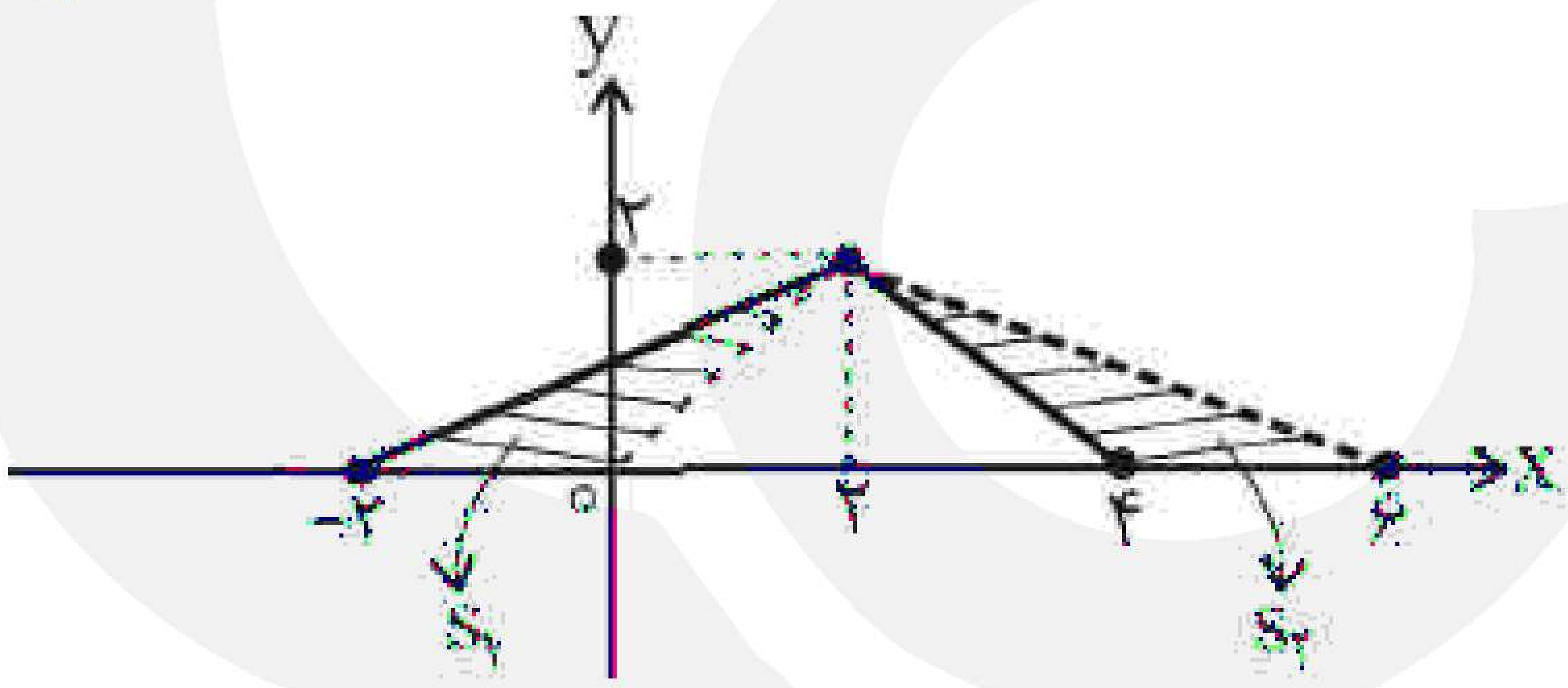


$y = f(۲+x)$:



$\xrightarrow{x \to (-x)}$ $y = f(۲-x)$





مساحت بین دو نمودار $= S_۱ + S_۲ = \frac{۲\times۲}{۲} + \frac{۲\times۲}{۲} = ۴$

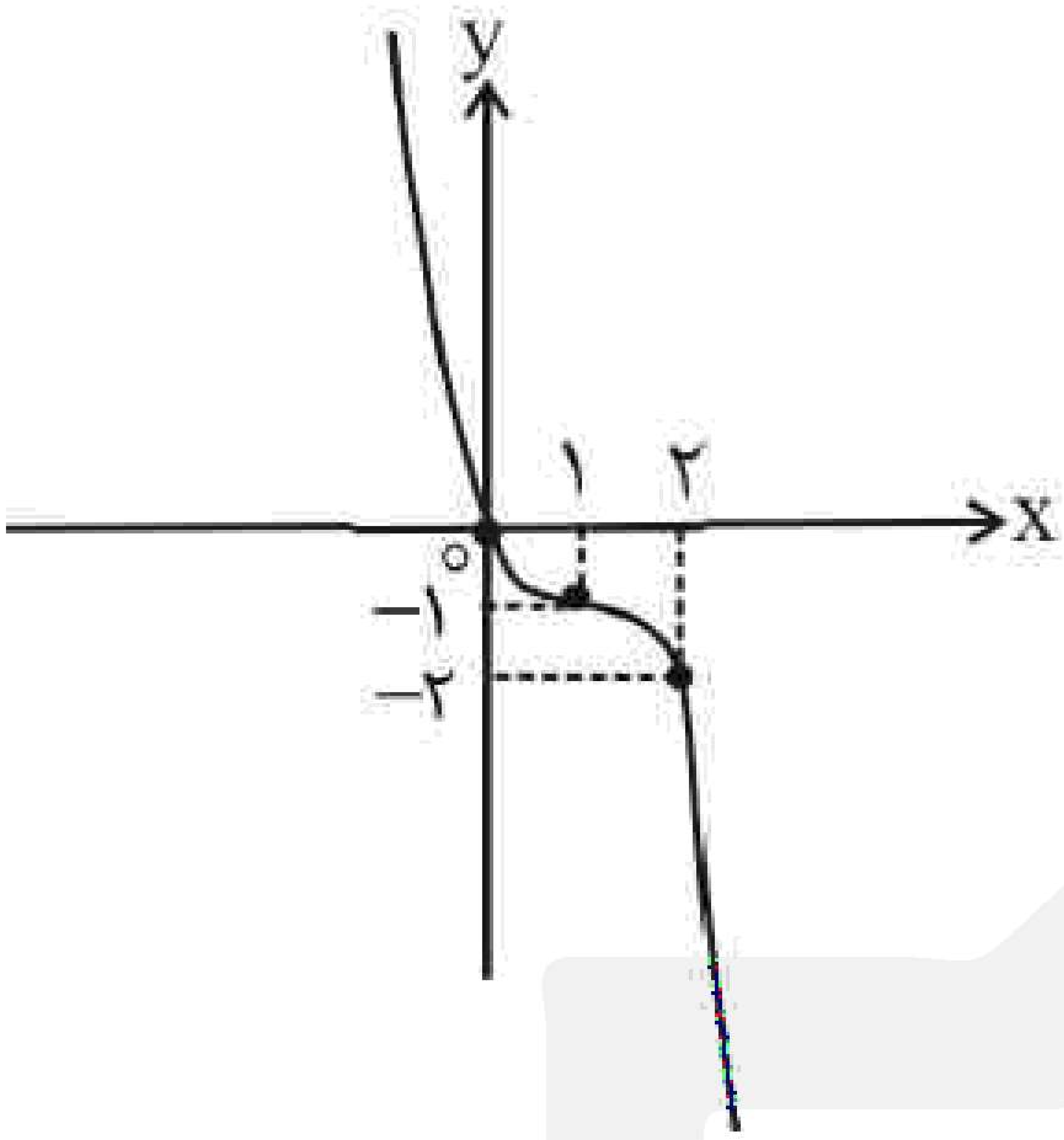
۳۲- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$۱ - x = t \Rightarrow x = ۱ - t$$

$$f(۱ - x) = x^۳ - ۱ \Rightarrow f(t) = (۱ - t)^۳ - ۱$$

$$\Rightarrow f(x) = -(t - ۱)^۳ - ۱$$

نمودار $y = f(x)$ فقط از نواحی دوم و چهارم مختصاتی می‌گذرد.



۳۳- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. با توجه به قضیهٔ تقسیم چندجمله‌ای‌ها و فرض سؤال $f(۱) = ۴$ و $f(-۲) = ۷$ و $f(x - ۱) = (x + ۱)(x - ۲)\underbrace{g(x)}_{\text{خارج قسمت}} + \underbrace{ax + b}_{\text{باقیمانده} = R(x)}$، بنابراین:

$$\begin{cases} x = ۲ \Rightarrow f(۱) = ۲a + b = ۴ \\ x = -۱ \Rightarrow f(-۲) = -a + b = ۷ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -۱ \\ b = ۶ \end{cases} \Rightarrow R(x) = ۶ - x$$

۳۴- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$-۲ \le x \le ۲۲ \xrightarrow{\div ۲} -۱ \le \boxed{\frac{x}{۲}} \le ۱۱ \Rightarrow -۱ \le \boxed{۳ - ۴x} \le ۱۱$$

$$\Big\downarrow -۳$$

$$-۴ \le -۴x \le ۸$$

$$\Big\downarrow \div(-۴)$$

$$\underbrace{-۲}_{a} \le x \le \underbrace{۱}_{b}$$

$$a^۲ + b^۲ = (-۲)^۲ + ۱^۲ = ۵$$

۳۵- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. اگر تابع f روی یک مجموعه، اکیداً نزولی باشد، آنگاه برای $a < b$ الزاماً $f(a) > f(b)$ است و نیز اگر f روی یک مجموعه اکیداً صعودی باشد، آنگاه برای $a < b$ الزاما $f(a) < f(b)$ خواهد بود، بنابراین:

$$K^۲ + ۳ < ۲K^۲ + ۱۳ \xrightarrow{\text{g اکیدا صعودی}} g\left(K^۲ + ۳\right) < g\left(۲K^۲ + ۱۳\right) \xrightarrow{\text{f اکیدا نزولی}}$$

$$f\left(g\left(K^۲ + ۳\right)\right) > f\left(g\left(۲K^۲ + ۱۳\right)\right)$$

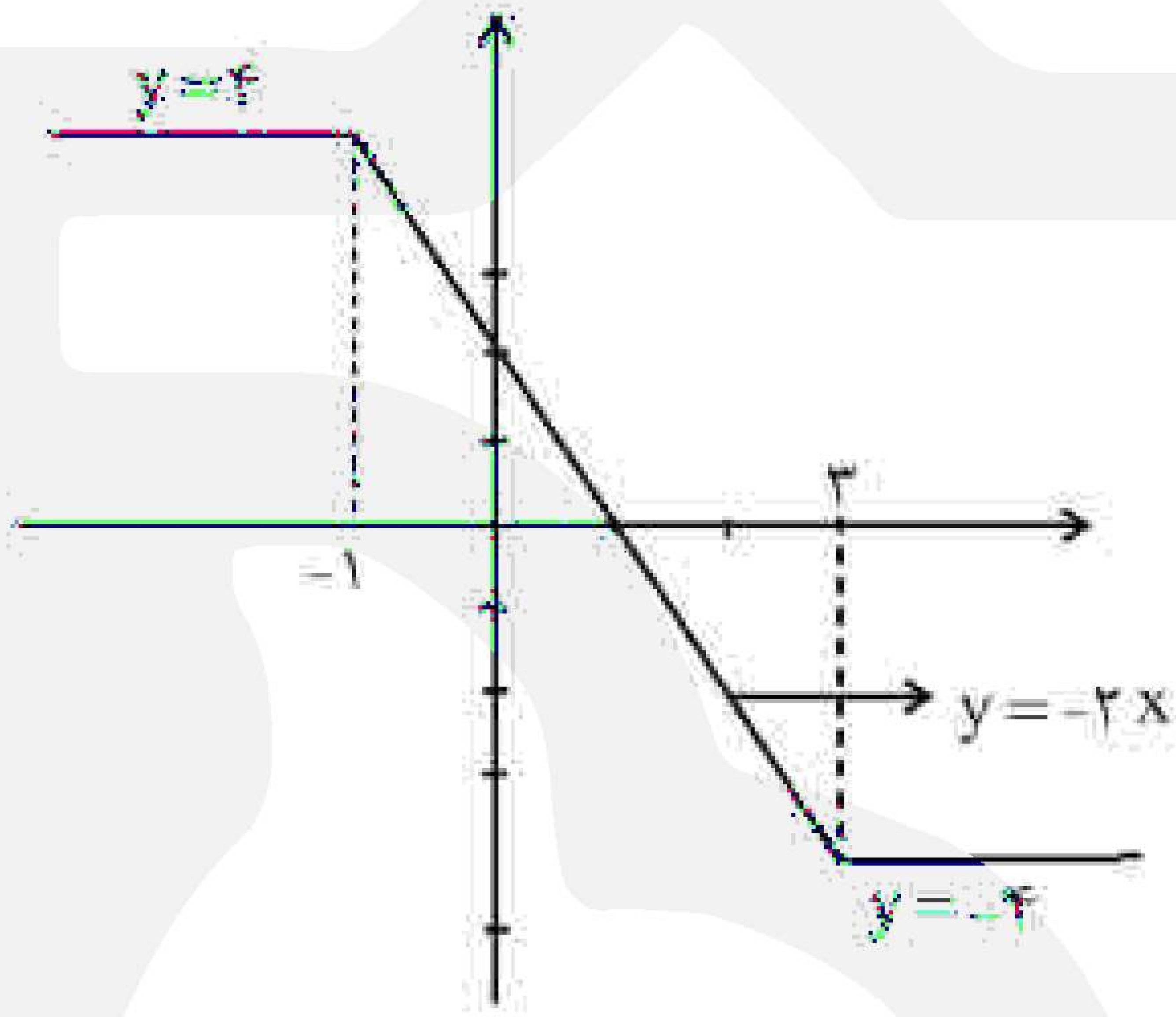
$$(fog)\left(K^۲ + ۳\right) > (fog)\left(۲K^۲ + ۱۳\right)$$

$$۳m - ۱ > ۲m + ۷$$

$m > ۸ \Rightarrow$ این بازه شامل ۸ عدد طبیعی ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵ و ۶ و ۷ و ۸ نمی شود.

۳۶- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$y = |x - ۳| - |x + ۱|$$



x		-۱		۳	
	$y = -x + ۳ + x + ۱$		$y = -x + ۳ - x - ۱$		$y = x - ۳ - x - ۱$
	$y = ۴$		$y = -۲x + ۲$		$y = -۴$
		$y = ۴$		$y = -۴$	

۳۷- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

(۱) دامنه تابع جدید $۳ \le x \le ۵ \Rightarrow ۲ \le x - ۱ \le ۴ \Rightarrow ۲ \le ۱ - \frac{x}{۲} \le ۴ \Rightarrow -۶ \le x \le -۲$

(۲) برد تابع جدید $-۱ \le ۲f - ۳ \le ۳ \Rightarrow ۱ \le f \le ۳ \xrightarrow{\times -۳} -۹ \le -۳f \le -۳ \Rightarrow -۱۲ \le -۳f - ۳ \le -۶$

بنابراین اجتماع ۱ و ۲ به صورت $[-۱۲ , -۲]$ و دارای ۱۱ عدد صحیح است.

۳۸- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$x_۰ = \frac{-m}{۲\left(۳ - m^۲\right)} = ۱ \Rightarrow ۶ - ۲m^۲ = -m \Rightarrow ۲m^۲ - m - ۶ = ۰$$

$$m = \frac{۱ \pm \sqrt{۱ + ۴۸}}{۴} = \begin{cases} ۲ \Rightarrow f(x) = -x^۲ + ۲x + ۱ & \text{ق ق} \\ -\frac{۳}{۲} \Rightarrow f(x) = \frac{۳}{۴}x^۲ - \frac{۳}{۲}x + ۱ & \text{غ ق ق} \end{cases}$$

(تابع در $x = ۱$ مینیمم دارد و در $(-\infty , ۱)$ نزولی است.)

$x_۰ = ۱ \Rightarrow y_۰ = -۱ + ۲ + ۱ = ۲$ ماکزیمم تابع

$m + y_۰ = ۲ + ۲ = ۴$

۳۹- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$D_f = [-۴ , ۶]$ $\quad$ $D_{f\ \text{تبدیل یافته}} = [-۳ , ۲]$

نمودار تابع، ضمن قرینه شدن نسبت به محور xها، دو برابر روی محور xها فشرده شده است.

$R_f = [-۲ , ۳]$ $\quad$ $R_{f\ \text{تبدیل یافته}} = \left[-\frac{۳}{۲} , ۱\right]$

نمودار تابع، ضمن قرینه شدن نسبت به محور yها دو برابر روی محور yها فشرده شده است. در نتیجه برد تابع نصف شده است.

۴۰- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

با توجه به باقیماندهها : $f(۲) = -۳ , f(-۳) = ۲$

مطابق الگوی تقسیم : $(fof)(x) = \left(x^۲ + x - ۶\right)g(x) + \underbrace{mx + n}_{R(x)\ \text{باقیمانده}}$

$$x = ۲ \Rightarrow fof(۲) = ۲m + n \Rightarrow f(\underbrace{f(۲)}_{-۳}) = ۲m + n$$

$$f(-۳) = ۲m + n \Rightarrow ۲m + n = ۲$$

$$x = -۳ \Rightarrow fof(-۳) = -۳m + n \Rightarrow f(\underbrace{f(-۳)}_{۲}) = -۳m + n$$

$$f(۲) = -۳m + n \Rightarrow -۳m + n = -۳$$

$$\begin{cases} ۲m + n = ۲ \\ -۳m + n = -۳ \end{cases} \Rightarrow m = ۱ , n = ۰ \Rightarrow R(x) = x$$