

گنجینه سوال رایگان

+ پاسخ تشریحی

یاوران دانش



راه های ارتباطی با ما:

www.Dyavari.com

۰۲۱-۷۶۷۰۳۸۵۸

۰۹۱۲-۳۴ ۹۴ ۱۳۴



	۱	۲	۳	۴
۱ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۲ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۴ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۵ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۶ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۷ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۸ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۹ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۱۰ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۱ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۲ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۱۳ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۱۴ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۵ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۶ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۷ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۸ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۹ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۰ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۱ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>





$$f(x) = \begin{cases} |[-x] - x| & \text{فرد } [x] \\ k - x + [x] & \text{زوج } [x] \end{cases}$$

۱- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\xrightarrow[n=2]{(1)} \begin{cases} 2^+ \rightarrow k - 2 + 2 = k \\ 2^- \rightarrow |-2 - 2| = 4 \\ 2 \rightarrow k \end{cases}$$

$$\xrightarrow[n=-2]{(2)} \begin{cases} -2^+ \rightarrow k + 2 - 2 = k \\ -2^- \rightarrow |2 + 2| = 4 \\ 2 \rightarrow k \end{cases}$$

$$\xrightarrow{1, 2} k = 4$$

$$n=1 \Rightarrow \begin{cases} 1^+ \rightarrow |-2 - 1| = +3 \\ 1^- \rightarrow k - 1 \\ 1 \rightarrow -2 \end{cases} \quad \text{برای زوج فقط برقرار است}$$

۲- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. می‌توانیم برای $n=1$ و $n=2$ مسئله را بررسی کنیم، پس پیوستگی را در $x = \pm 1$ و $x = \pm 2$ بررسی می‌کنیم:

$$x=1: \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) = 1 - 1 + k = k$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} |x - [-x]| = 2$$

$$x=-1: \lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = f(-1) = k$$

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} |x - [-x]| = 2$$

پس اگر $k=2$ باشد به ازای $x = \pm 1$ پیوستگی داریم، این یعنی مقادیر فرد n قابل قبول‌اند.

$$x=2: \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} |x - [-x]| = 5$$

$$f(2) = 2 - (-2) = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (x - [x] + k) = 1 + k$$

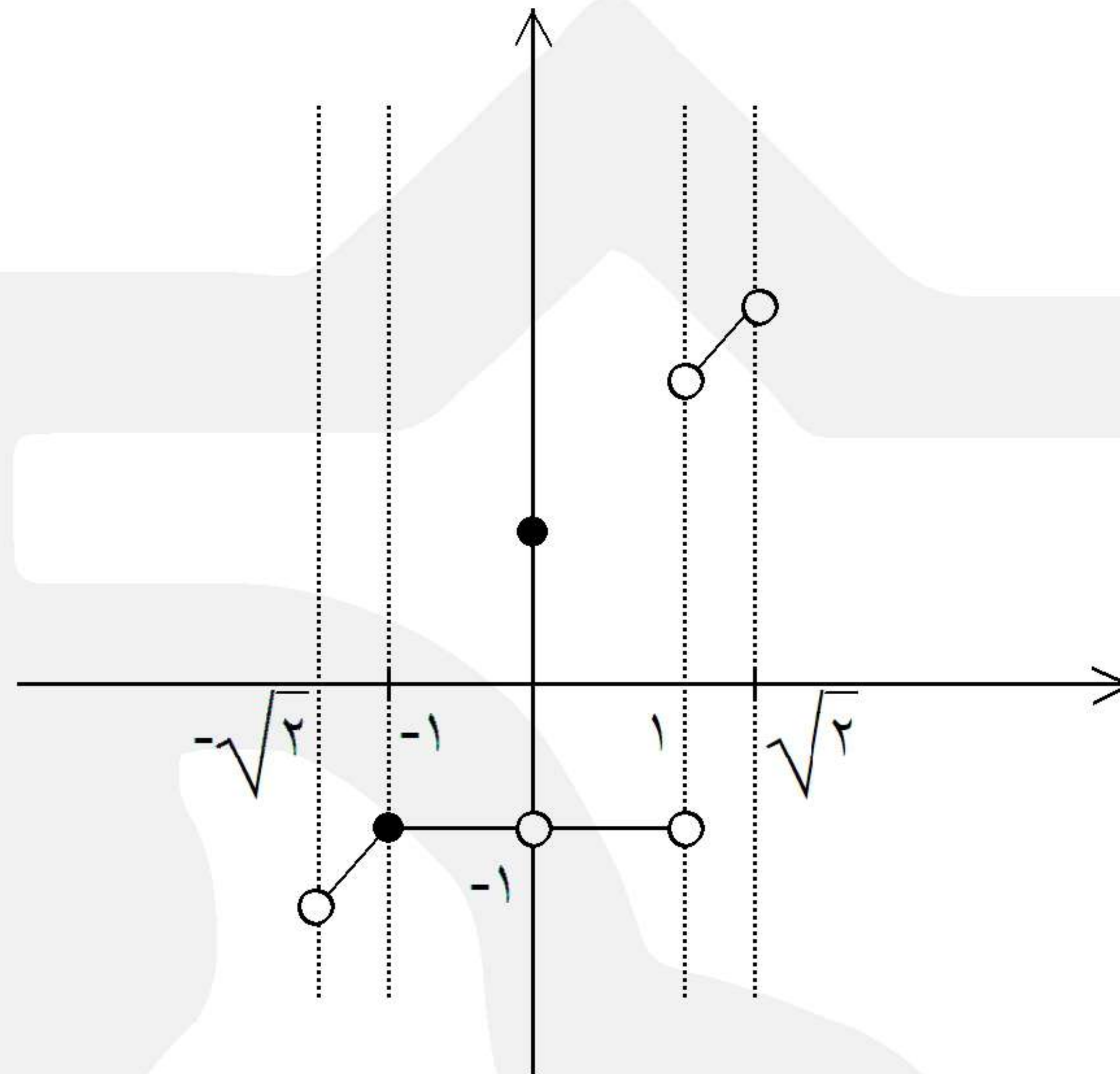
پس به ازای هیچ مقدار زوج n پیوستگی نداریم.



۳- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$f(x) = \begin{cases} -1 & -1 < x < 1 - \{0\} \\ \cos(\pi x) & x = 0, 1, -1 \\ |x|([x] + 1) & 1 < x < \sqrt{2} \text{ یا } -\sqrt{2} < x < -1 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} -1 & -1 < x < 1 - \{0\} \\ -1 & x = \pm 1 \\ 1 & x = 0 \\ 2x & 1 < x < \sqrt{2} \\ x & -\sqrt{2} < x < -1 \end{cases}$$

پس این تابع در $x = 0$ و $x = 1$ ناپیوسته است.



۴- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$y = -\sqrt{x - 27} \Rightarrow y^2 = x - 27 \Rightarrow x = y^2 + 27 \Rightarrow f(x) = x^2 + 27$$

$$\lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{2x + \sqrt{f(x)}}{|x^2 + x - 6|} = \lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{2x + \sqrt{x^2 + 27}}{|(x+3)(x-2)|} \times \frac{2x - \sqrt{x^2 + 27}}{2x - \sqrt{x^2 + 27}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{3(x^2 - 9)}{(x+3)(x-2)} \times \frac{1}{-6-6} = -0/3$$



۵- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. چون تابع در R پیوسته است پس در $x=0$ هم پیوسته است. حال برای دو حالت $a \in Z$ و $a \notin Z$ داریم:

$$a \notin Z \left\{ \begin{array}{l} f(0) = 0 \\ f(0^+) = 0 \\ f(0^-) = |0 - [-a]| = [-a] \end{array} \right\} \quad \text{غ ق ق} \quad [-a] = 0 \Rightarrow 0 \leq -a < 1 \Rightarrow -1 < a \leq 0$$

با شرط $a < -1$ اشتراک ندارد.

$$a \in Z \left\{ \begin{array}{l} f(0) = 0 \\ f(0^+) = 0 \\ f(0^-) = |0 + a - [0^-]| = |a + 1| \end{array} \right.$$

$$|a + 1| = 0 \Rightarrow a = -1$$

با شرط $a < -1$ اشتراک ندارد.

پس به ازای هیچ مقدار $a < -1$ پیوسته نمی شود.

تذکر: تابع فقط به ازای $a = -1$ روی R پیوسته می شود.

۶- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. حدود چپ و راست و مقدار تابع در $x=0$ را می یابیم.

$$\text{حد چپ: } L^- = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} ([x] - 2a) = -1 - 2a$$

$$\text{مقدار تابع: } f(0) = |b|$$

$$\text{حد راست: } L^+ = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos x}{2bx^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{2bx^2} = \frac{\frac{x^2}{2}}{2bx^2} = \frac{1}{4b}$$

برای پیوستگی باید $-1 - 2a = |b| = \frac{1}{4b}$ برقرار باشد.

$$\Rightarrow |b| = \frac{1}{4b} \Rightarrow \begin{cases} 4b^2 = 1 \Rightarrow b = \frac{1}{2} ; b > 0 \\ \text{یا} \\ -4b^2 = 1 \Rightarrow \text{جواب ندارد} \end{cases} \quad \Rightarrow -1 - 2a = \frac{1}{2} \Rightarrow a = -\frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow b - a = \frac{1}{2} + \frac{3}{4} = \frac{5}{4}$$



۷- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.
راه اول:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{2-3x} - \sqrt{2-5x}}{\sqrt{2-2\cos x}} &\times \frac{\sqrt{2-3x} + \sqrt{2-5x}}{\sqrt{2-3x} + \sqrt{2-5x}} \times \frac{\sqrt{2+2\cos x}}{\sqrt{2+2\cos x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2x\sqrt{2+2\cos x}}{\sqrt{4-4\cos^2 x} (\sqrt{2-3x} + \sqrt{2-5x})} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{4x}{4\sqrt{2}|\sin x|} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{4x}{4\sqrt{2}(-\sin x)} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

راه دوم: هوییتال

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{2-3x} - \sqrt{2-5x}}{\sqrt{4\sin^2 \frac{x}{2}}} &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{2-3x} - \sqrt{2-5x}}{-2\sin \frac{x}{2}} \xrightarrow{\text{HOP}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\frac{-3}{2\sqrt{2-3x}} + \frac{5}{2\sqrt{2-5x}}}{-\cos \frac{x}{2}} = \frac{-\frac{3}{2\sqrt{2}} + \frac{5}{2\sqrt{2}}}{-1} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

۸- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ضابطه سوم در بیشمار نقطه ناپیوسته است پس نیازی به بررسی بقیه ضابطه‌ها و نقاط مرزی نیست.

$$f(x) = \begin{cases} |x| + [-x] & -1 < x < 1, x \neq 0 \\ 1 + \cos \pi x & x = 0, 1, -1 \\ [x^2] - [x] & x > 1 \text{ یا } x < -1 \end{cases}$$



۹- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. روش اول: با روش هوییتال برای رفع ابهام $\frac{0}{0}$ فوق داریم:

$$\frac{\frac{2}{2\sqrt{2x+3}} - \frac{3}{2\sqrt{3x+4}}}{\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}} = \frac{1 - \frac{3}{2}}{\frac{1}{3}} = -\frac{3}{2}$$

روش دوم:

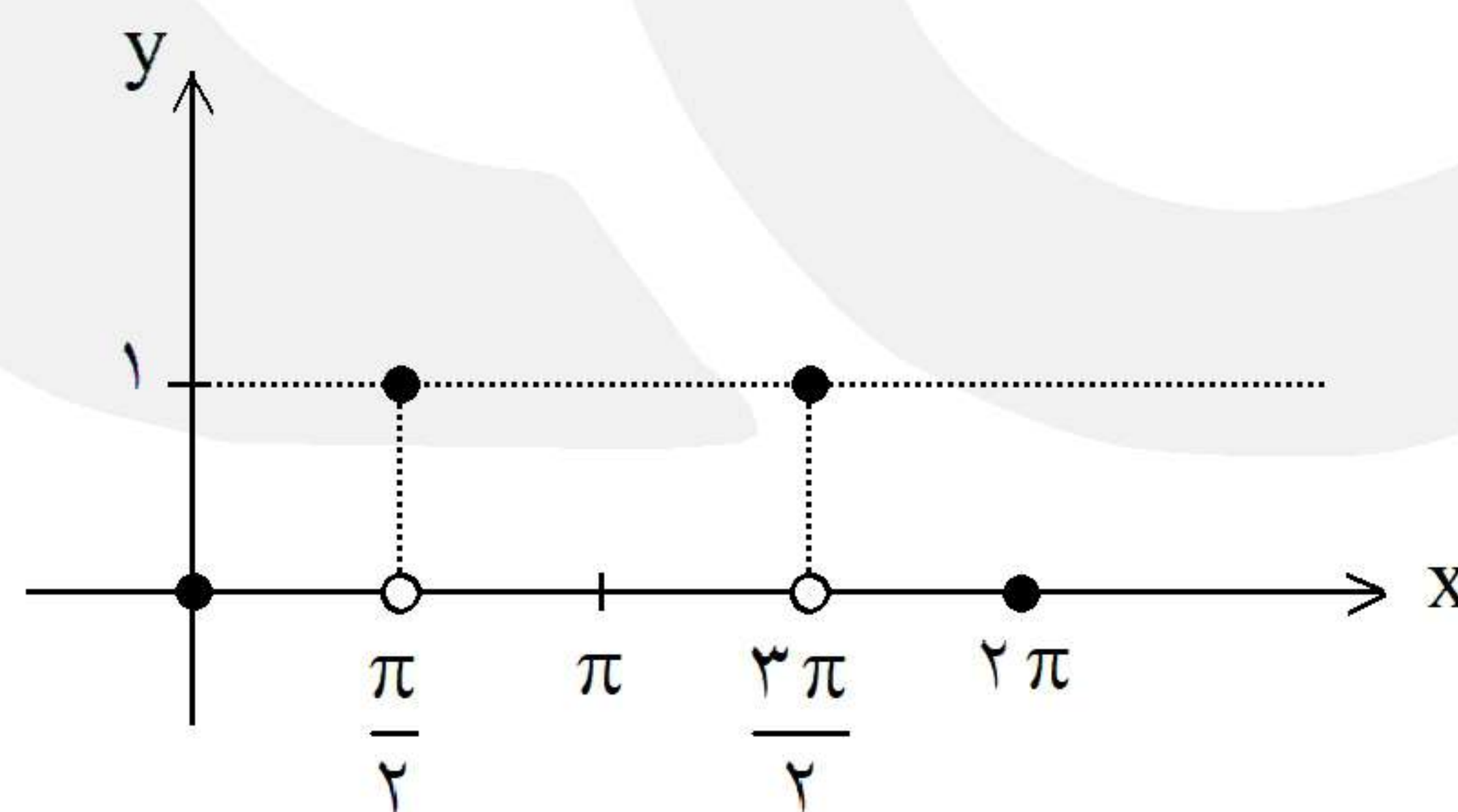
$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{2x+3} - \sqrt{3x+4}}{1 + \sqrt[3]{x}} &\times \frac{\sqrt{2x+3} + \sqrt{3x+4}}{\sqrt{2x+3} + \sqrt{3x+4}} \times \frac{1 + (\sqrt[3]{x})^2 - (\sqrt[3]{x})}{1 + (\sqrt[3]{x})^2 - (\sqrt[3]{x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{-(x+1)(1+1+1)}{(1+x)(1+1)} = \frac{-3}{2} \end{aligned}$$

۱۰- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

می‌دانیم $0 \leq \sin^2(x) \leq 1$ است. پس در نقاطی که $\sin^2 x \in [0, 1)$ قرار دارد، حاصل حد برابر صفر است. در نقاطی که $\sin^2 x = 1$ است، حاصل حد برابر ۱ است، پس ضابطه‌ی f به صورت زیر است:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & ; x = k\pi + \frac{\pi}{2} \\ 0 & ; x \neq k\pi + \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

نمودار تابع در بازه‌ی $[0, 2\pi]$ به صورت زیر است:



واضح است که تابع در $x = \frac{\pi}{2}$ و $x = \frac{3\pi}{2}$ ناپیوسته است.



۱۱- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ابتدا در همسایگی راست $x = 0$ ، حد را ساده تر می نویسیم:

$$[x] = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(\sqrt{1-x^3}-1)}{x^n(1-\cos\sqrt{3x})} = a$$

$$u \rightarrow 0 \begin{cases} \sin u \sim u \\ 1 - \cos u \sim \frac{u^2}{2} \end{cases}$$

در محاسبه ی این حد، نیاز داریم از هم ارزی های زیر استفاده کنیم:

پس حد به صورت زیر خواهد شد:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{1-x^3}-1}{x^{\frac{n^3x}{2}}} &= \frac{2}{3} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{1-x^3}-1}{x^{n+1}} = \frac{2}{3} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{1-x^3}-1}{x^{n+1}} \times \frac{\sqrt{1-x^3}+1}{\sqrt{1-x^3}+1} \\ &= \frac{2}{3} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-x^{\frac{3}{2}}}{2x^{\frac{n+1}{2}}} = \frac{-1}{3} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^{\frac{3}{2}}}{x^{\frac{n+1}{2}}} = a \end{aligned}$$

حاصل حد بالا به ازای مقادیر مختلف n به صورت زیر است:

$$\begin{cases} n < 2 \Rightarrow a = 0 \Rightarrow a^n = 0 \\ n = 2 \Rightarrow a = -\frac{1}{3} \Rightarrow a^n = \frac{1}{9} \\ n > 2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \square = -\infty \Rightarrow a^n = \pm\infty \end{cases}$$

پس گزینه ی ۱ را انتخاب می کنیم.

«بانک سوال یاوران دانش»

۱۲- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{U \rightarrow 0} \frac{\tan^{-1} U}{U} = 1 \Rightarrow \tan^{-1} U \sim U$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - 1 = \frac{1 - \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}} \times \frac{1 + \sqrt{1-x^2}}{1 + \sqrt{1-x^2}} = \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}(1 + \sqrt{1-x^2})} = \frac{x^2}{2}$$

$$\lim_{U \rightarrow 0} \frac{1 - \cos U}{U} = \lim_{U \rightarrow 0} \frac{\sin U}{1} = \frac{U}{1} = U$$

$$(1 - \cos \sqrt{2x})^n = \left(\frac{(\sqrt{2x})^2}{2} \right)^n = x^n$$

$$\text{حد مورد نظر} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\left(\frac{x^2}{2}\right)^2}{x^n} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^4}{2x^n} = a \Rightarrow n = 4, a = \frac{1}{2} \Rightarrow a + n = \frac{17}{2}$$

۱۳- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

از آنجا که $\sin(\pi x)$ در همه اعداد صحیح به عنوان عامل صفر عمل می‌کند، بنابراین در همه اعداد پیوسته است.

۱۴- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. برای رفع ابهام حدود $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ ، می‌توان از قاعده هوپیتال استفاده نمود:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}} \xrightarrow{\text{HOP}} \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{2+3x} - \sqrt{2-x}}{\sqrt{\frac{1}{2}x^2}} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}} \xrightarrow{\text{HOP}} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\frac{3}{2\sqrt{2+3x}} - \frac{-1}{2\sqrt{2-x}}}{\frac{-1}{\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{\frac{-1}{\sqrt{2}}} = -2$$



۱۵- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$|x - 1| = 1 \Rightarrow x - 1 = \pm 1 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 0 \end{cases}$$

با توجه به شروط داده شده باید در نقاط $x = 2$ ، $x = 0$ پیوستگی‌ها بررسی شوند.

$$f(x) = \begin{cases} (x - 1)[x] & ; 0 < x < 2 \\ x^2 + ax + b & ; x \leq 0 \text{ یا } x \geq 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(2) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 2 + 2a + b \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = (2 - 1)[2^-] = 1 \Rightarrow 2 + 2a + b = 1 \Rightarrow 2a + b = -3 \\ f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0 + 0 + b = b \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = (0 - 1)[0^+] = 0 \Rightarrow b = 0 \\ b = 0 \rightarrow 2a + 0 = -3 \Rightarrow a = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

«بانک سوال یاوران دانش»

۱۶- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x - \sqrt{x} + 5}{2x - \sqrt{3x+1}} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{HOP}} = \frac{2 - \frac{1}{2}}{2 - \frac{3}{4}} = \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{5}{4}} = -\frac{1}{2}$$

۱۷- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$f(x) = \begin{cases} x[x] & |x| < 1 \\ ax + b & |x| \geq 1 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} x[x] & -1 < x < 1 \\ ax + b & x \geq 1, x \leq -1 \end{cases}$$

کافی است f در $x = 1$ و $x = -1$ پیوسته باشد.

$$\begin{aligned} x = 1 & \begin{cases} f(1) = a + b \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (ax + b) = a + b \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} x[x] = 1 \times 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow a + b = 0 \\ x = -1 & \begin{cases} f(-1) = -a + b \\ \lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} (ax + b) = -a + b \\ \lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} x[x] = (-1)(-1) = 1 \end{cases} \Rightarrow -a + b = 1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow a = -\frac{1}{2}, b = \frac{1}{2}$$



۱۸- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sin^2 \pi x}{[x] + \cos(\pi x)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1 - \cos^2(\pi x)}{1 + \cos(\pi x)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(1 - \cos \pi x)(1 + \cos \pi x)}{1 + \cos(\pi x)}$$

$$= 1 - \cos \pi = 1 - (-1) = 2$$

۱۹- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$3 \in (x+1, 2x-2) \Rightarrow \begin{cases} x+1 < 3 \Rightarrow x < 2 \\ \text{و} \\ 2x-2 > 3 \Rightarrow 2x > 5 \Rightarrow x > 2.5 \end{cases}$$

اشتراک دو بازه تهی است.

۲۰- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3x-6}{x-\sqrt{x+2}} & x > 2 \\ ax-1 & x \leq 2 \end{cases}$$

کافی است f در $x=2$ پیوسته باشد:

$$f(2) = 2a-1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (ax-1) = 2a-1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3x-6}{x-\sqrt{x+2}} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3(x-2)(x+\sqrt{x+2})}{x^2-x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3(x-2)(x+\sqrt{x+2})}{(x-2)(x+1)}$$

$$= \frac{3 \times 4}{3} = 4$$

$$2a-1 = 4 \Rightarrow a = 2.5$$

۲۱- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin a \cos x + \cos a \sin x - \sin a}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin a (\cos x - 1)}{x} + \frac{\cos a \sin x}{x} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin a (\cos^2 x - 1)}{x(\cos x + 1)} + \lim_{x \rightarrow 0} \cos a \left(\frac{\sin x}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin a (-\sin^2 x)}{x(\cos x + 1)} + \cos a$$

$$= 0 + \cos a = \cos a$$