

گنجینه سوال رایگان

+ پاسخ تشریحی

یاوران دانش



راه های ارتباطی با ما:

www.Dyavari.com

۰۲۱-۷۶۷۰۳۸۵۸

۰۹۱۲-۳۴ ۹۴ ۱۳۴



| | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
|-----|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|
| ۱- | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۲- | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۳- | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۴- | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۵- | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۶- | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |
| ۷- | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |
| ۸- | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۹- | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |
| ۱۰- | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۱۱- | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |
| ۱۲- | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۱۳- | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۱۴- | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۱۵- | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۱۶- | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |
| ۱۷- | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۱۸- | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۱۹- | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |
| ۲۰- | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۲۱- | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۲۲- | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۲۳- | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |
| ۲۴- | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |
| ۲۵- | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۲۶- | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۲۷- | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۲۸- | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۲۹- | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۳۰- | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |
| ۳۱- | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۳۲- | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |
| ۳۳- | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |
| ۳۴- | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۳۵- | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۳۶- | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۳۷- | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۳۸- | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۳۹- | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۴۰- | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |





گزینه ۱ پاسخ صحیح است. $x+1=0 \Rightarrow x=-1 \xrightarrow{\text{بخش پذیر}} f(-1)=0$

$$(-1)^3 + a(-1) + 4 = 0 \Rightarrow a = 3$$

با تقسیم صورت بر $x+1$ و ضرب مزدوج برای عبارت مخرج:

$$\lim_{x \rightarrow (-1)} \frac{f(x)}{x + \sqrt{-x}} = \lim_{x \rightarrow (-1)} \frac{x^3 + 3x + 4}{x + \sqrt{-x}} = \lim_{x \rightarrow (-1)} \frac{(x+1)(x^2 - x + 4)(x - \sqrt{-x})}{\underbrace{(x + \sqrt{-x})(x - \sqrt{-x})}_{x^2 + x}}$$

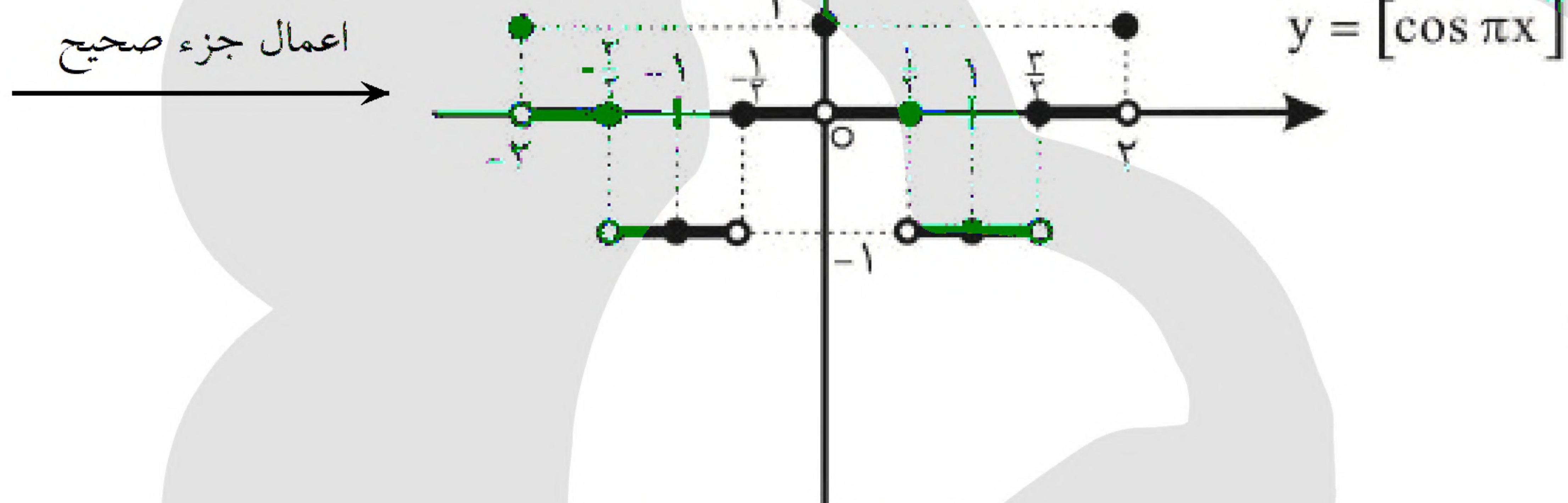
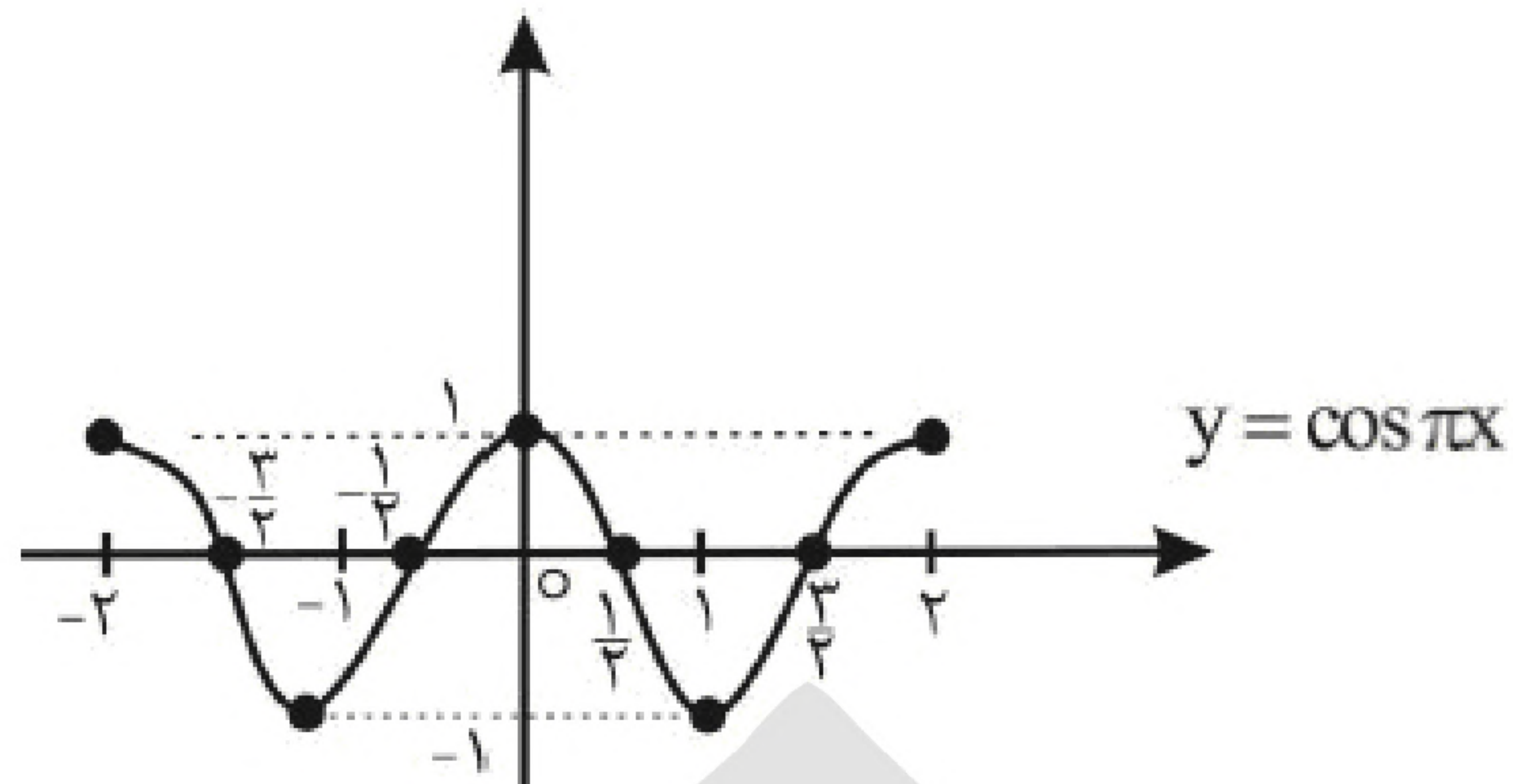
$$= \lim_{x \rightarrow (-1)} \frac{\cancel{(x+1)}(6)(-2)}{x \cancel{(x+1)}} = 12$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. در محاسبه حد، مقدار $[x^3]$ در همسایگی راست ۲، برابر ۸ می‌شود. بنابراین:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^3 - 8}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\cancel{(x-2)}(x^2 + 2x + 4)}{\cancel{(x-2)}(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 + 2x + 4}{x+2} = \frac{4+4+4}{4} = 3$$



۳- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.



مطابق نمودار، تابع $f(x) = [\cos \pi x]$ در هفت نقطه $2, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, -2$ ناپیوسته است.



۴- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. در $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} + a}{x^2 - 1}$ چون حد مخرج در $x \rightarrow 1$ صفر است باید حد صورت هم در این

$$\sqrt[3]{1} + a = 0 \Rightarrow a = -1$$

شرایط صفر باشد، بنابراین:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt[3]{x} - 1)(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1)}{(x^2 - 1)(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)}{(x-1)(x+1) \times 3} = \frac{1}{6} \quad f(1) = a - 2b = -1 - 2b$$

برای پیوستگی در $x = 1$:

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) \Rightarrow \frac{1}{6} = -1 - 2b \Rightarrow b = \frac{-7}{12} \Rightarrow 5a - 24b = 5(-1) - 24\left(\frac{-7}{12}\right) = -5 + 14 = 9$$

۵- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 7)}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 3)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} + 7}{\sqrt{x} + 3} = \frac{8}{4} = 2$$

۶- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{(1 + \cos x)(1 - \cos x + \cos^2 x)}{(1 + \cos x)(1 - \cos x)} = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 - \cos x + \cos^2 x}{1 - \cos x} = \frac{3}{2} = 1.5$$

۷- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ابتدا صورت را بر عامل صفرساز یعنی $(x+1)$ تقسیم کنید:

$$\lim_{x \rightarrow (-1)} \frac{3(x+1)(x^2 - 6x + 6)}{(x+1)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3(x^2 - 6x + 6)}{x-2} = -13$$



۸- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. برای پیوستگی باید $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$ باشد.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 - \sqrt{x^2 + ax + b}}{x - 1} = 4$$

چون حدّ مخرج صفر می‌شود پس حتماً حدّ صورت در $x \rightarrow 1$ هم صفر است:

$$2 - \sqrt{1 + a + b} = 0 \Rightarrow 2 = \sqrt{1 + a + b} \Rightarrow a + b = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 - \sqrt{x^2 + ax + b}}{x - 1} \times \frac{2 + \sqrt{x^2 + ax + b}}{2 + \sqrt{x^2 + ax + b}} = 4$$

$\underbrace{2 + \sqrt{x^2 + ax + b}}_{x \rightarrow 1 \text{ در } = 4}$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{-x^2 - ax - b + 4}{(x - 1)(4)} = 4$$

با تقسیم صورت بر $x - 1$ خارج قسمت برابر $(-x - a - 1)$ می‌شود و مخرج با توجه به شرط $a + b = 3$ مساوی صفر می‌شود:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(-x - a - 1)}{4(x - 1)} = 4 \Rightarrow \frac{-1 - a - 1}{4} = 4 \Rightarrow a = -18 \quad b = 21 \quad a \times b = -378$$

۹- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. در محاسبات حدّ عباراتی که صفرساز نیستند را می‌توانید از همان ابتدا برای خلاصه‌نویسی محاسبه و عدد بگذارید:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - \sqrt{2x - \sqrt{x}}} \times \frac{x + \sqrt{2x - \sqrt{x}}}{x + \sqrt{2x - \sqrt{x}}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2(x^2 - 1)}{x^2 - 2x + \sqrt{x}} \times \frac{(x^2 - 2x) - \sqrt{x}}{(x^2 - 2x) - \sqrt{x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-4(x^2 - 1)}{(x^2 - 2x)^2 - x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-4(x^2 - 1)}{x^4 - 4x^3 + 4x - x}$$

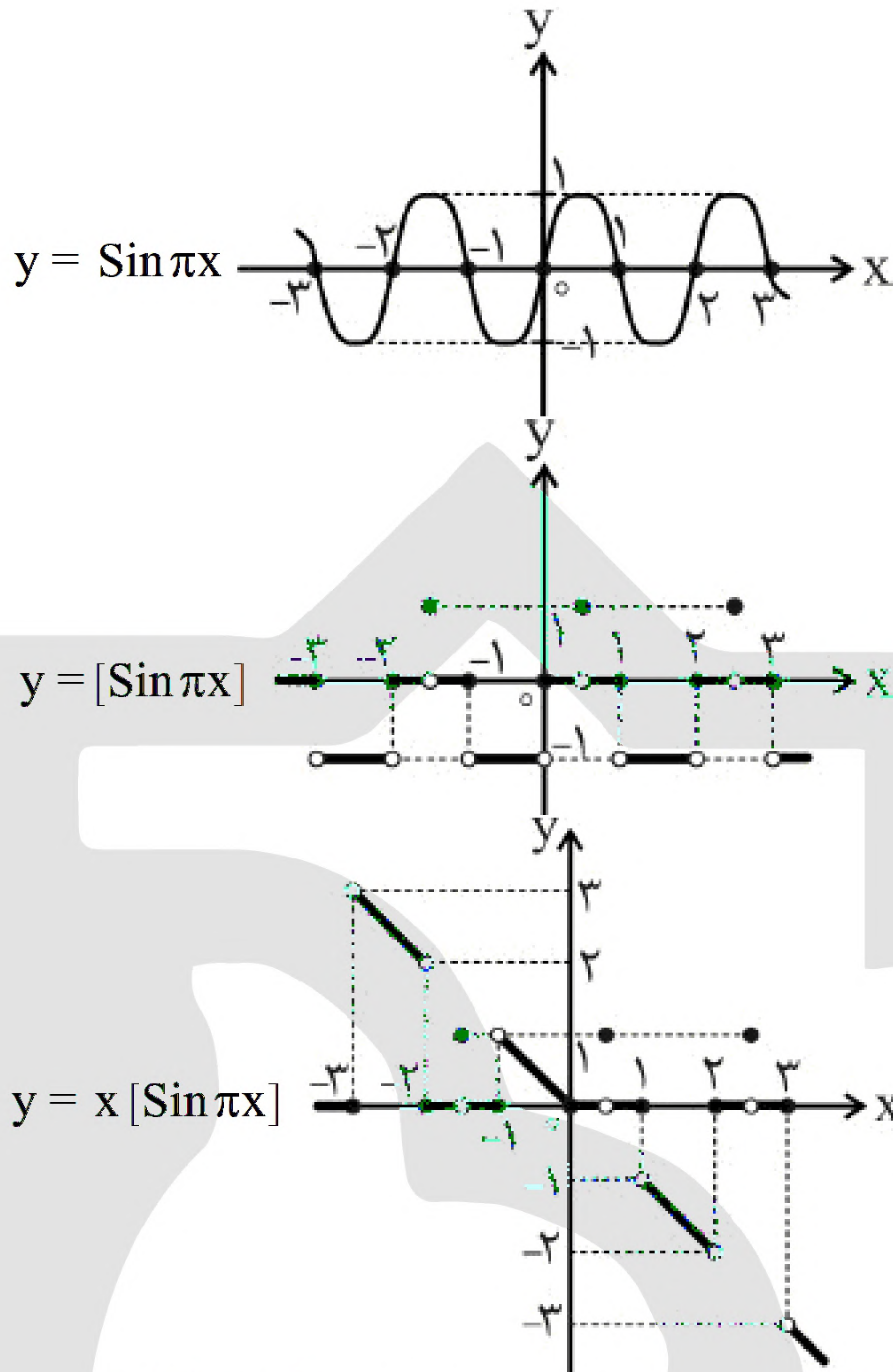
$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-4(x^2 - 1)}{x(x^3 - 4x^2 + 4x - 1)} (x - 1) \quad \text{با تقسیم بر عامل صفرساز}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-4(x - 1)(x + 1)}{x(x - 1)(x^2 - 3x + 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-4(x + 1)}{x(x^2 - 3x + 1)} = 8$$

تذکر: این حدّ را با روش هویتیال در زمان بسیار کوتاه می‌توانید حل کنید به شرط آنکه در مشتق مسلط باشید.



۱۰- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.



مطابق تعریف پیوستگی در بازه $[a, b]$ و با توجه به نمودار نهایی $y = x [\text{Sin } \pi x]$ در بازه $[-3, 3]$ ، این تابع در نقاط -3 و -2 و $-\frac{3}{2}$ و -1 و $-\frac{1}{2}$ و 1 و 2 و $\frac{5}{2}$ (نقطه ۸) ناپیوسته است.

۱۱- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

تعیین علامت $g(x) = 4 - x^2$

| | | | | |
|-----|-----------|------|-----|-----------|
| x | $-\infty$ | -2 | 2 | $+\infty$ |
| | | - | + | - |

$$\Rightarrow (f \circ g)(x) = \begin{cases} -2 & ; x < -2 \text{ یا } x > 2 \\ 2 & ; -2 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

تابع مرکب $f \circ g$ در $x = -2$ و $x = 2$ ناپیوسته است (نقطه ناپیوستگی)

$$(g \circ f)(x) = \begin{cases} * & ; x \geq * \\ * & ; x < * \end{cases} \Rightarrow (g \circ f)(x) = *, x \in \mathbb{R}$$

\Rightarrow $g \circ f$ در \mathbb{R} پیوسته است (صفر نقطه ناپیوستگی)



«بانک سوال موسسه یاوران دانش»

۱۲- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. نقطه A را به صورت $A(x, y)$ در نظر می‌گیریم. داریم:

$$AB = \sqrt{(x-1)^2 + (y+2)^2} = \sqrt{5} \Rightarrow (x^2 - 2x + 1) + (y^2 + 4y + 4) = 5$$

$$AC = \sqrt{(x+3)^2 + (y-4)^2} = 1 \Rightarrow (x^2 + 6x + 9) + (y^2 - 8y + 16) = 1$$

با کم کردن طرفین معادلات اخیر از هم، داریم:

$$(-8x - 8) + (12y - 12) = 4 \Rightarrow 12y = 8x + 24 \Rightarrow 3y = 2x + 6$$

حالا این خط در نقطه $x = 3$ بر منحنی $y = xf(x)$ مماس است.با جایگذاری $x = 3$ در معادله خط، نقطه مماس به صورت $(3, 4)$ است و این نقطه روی منحنی $y = xf(x)$ هم

$$3f(3) = 4 \Rightarrow f(3) = \frac{4}{3}$$

قرار دارد. پس:

از طرفی شیب این خط مماس برابر با $\frac{2}{3}$ است، پس مشتق تابع $y = xf(x)$ در $x = 3$ باید برابر $\frac{2}{3}$ شود:

$$(xf(x))' = f(x) + xf'(x) \xrightarrow{x=3} f(3) + 3f'(3) = \frac{2}{3} \xrightarrow{f(3) = \frac{4}{3}} \frac{4}{3} + 3f'(3) = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow f'(3) = \frac{-2}{9}$$

نهایتاً برای محاسبه حد خواسته شده که به صورت $\frac{0}{0}$ است، از هوییتال استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3f^2(x) - f(x) - 4}{x-3} \xrightarrow{f(3) = \frac{4}{3}} \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{6f(x)f'(x) - f'(x)}{1} = 6f(3)f'(3) \xrightarrow{\substack{f(3) = \frac{4}{3} \\ f'(3) = \frac{-2}{9}}} 6\left(\frac{4}{3}\right)\left(\frac{-2}{9}\right) - \left(\frac{-2}{9}\right)$$

$$= \frac{-16}{9} + \frac{2}{9} = \frac{-14}{9}$$



۱۳- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. از تساوی $f(x-3) = f(x+2)$ با تغییر متغیر $t = x-3 \Rightarrow x = t+3 \Rightarrow x+2 = t+5$ می‌توان نتیجه گرفت:

$$x-3 = t \Rightarrow x = t+3 \Rightarrow x+2 = t+5$$

$$f(t) = f(t+5)$$

یعنی:

بنابراین تابع f ، تابع متناوب با دوره تناوب $T = 5$ است و به جای محاسبه حد آن در $x = 87^-$ می‌توان حد آن را در

$$\text{نقطه } x = 87^- - (17 \times 5) = 2^- \text{ حساب کرد.}$$

در این صورت در بازه $(-1, 4)$ قرار داریم و ضابطه تابع f در این بازه مشخص است. پس کافی است حد زیر را

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2 - \sqrt{2x}}{|\sin \pi x|}$$

محاسبه کنیم:

دقت داریم که:

کمان در ربع چهار دایره مثلثاتی و سینوس آن منفی است $\Rightarrow x \rightarrow 2^- \Rightarrow \pi x \Rightarrow 2\pi^-$

حالا با ابهام $\frac{0}{0}$ مواجهیم و با استفاده از قاعده هوییتال:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2 - \sqrt{2x}}{-\sin \pi x} \xrightarrow{\text{Hop}} \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{\frac{-1}{2\sqrt{2x}} \times 2}{-\pi \cos \pi x} = \frac{-1}{2} \div -\pi = \frac{1}{2\pi}$$

۱۴- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ابتدا با ضرب عبارت سه جمله‌ای (چاق) از طریق اتحاد چاق و لاغر رفع ابهام می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt{5 + \sqrt{x+1}} - 2}{\sqrt{2x-4}} = \frac{\sqrt{(\sqrt{5 + \sqrt{x+1}})^2 - 2^2}}{\sqrt{2x-4}} = \frac{\sqrt{(\sqrt{5 + \sqrt{x+1}})^2 + 2^2 - 2^2}}{\sqrt{2x-4}} = \frac{\sqrt{(\sqrt{5 + \sqrt{x+1}})^2 + 2^2 - 2^2}}{\sqrt{2x-4}}$$

حد این عبارت وقتی $x \rightarrow 8$ برابر ۱۲ است

مزدوج

$$\lim_{x \rightarrow 8} \frac{5 + \sqrt{x+1} - 8}{(\sqrt{2x-4}) \times 12} = \lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt{x+1} - 3}{12(\sqrt{2x-4})} \times \frac{\sqrt{x+1} + 3}{\sqrt{x+1} + 3} \times \frac{\sqrt{2x+4}}{\sqrt{2x+4}}$$

مزدوج

$$\lim_{x \rightarrow 8} \frac{(x-8)(8)}{12(2(x-8))(6)} = \frac{1}{24 \times 6} = \frac{1}{18}$$



$$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = [(-2)^+]^2 - [(-2)^+] = 4 - (-2) = 6$$

۱۵- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$f(-2) = [(-2)]^2 - [(-2)] = 4 - (-2) = 6 \quad \text{در } -2 \text{ پیوستگی راست دارد}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = [(-1)^+]^2 - [(-1)^+] = 1 - (-1) = 2 = f(-1) \quad \text{در } -1 \text{ ناپیوسته است}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = [(-1)^-]^2 - [(-1)^-] = 4 - (-2) = 6$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = [(0)^-]^2 - [(0)^-] = 1 + 1 = 2 \quad \text{در } 0 \text{ ناپیوسته}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = [(0)^+]^2 - [(0)^+] = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = [1^-]^2 - [1^-] = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = [1^+]^2 - [1^+] = 0 = f(1) \quad \text{در } 1 \text{ پیوسته}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = [2^-]^2 - [2^-] = 0, \quad f(2) = [2]^2 - [2] = 2 \quad \text{در } 2 \text{ ناپیوسته}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} ax + 2b = 3a + b = 6$$

۱۶- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} ax^2 + bx + 2 = 9a + 3b + 2 = 2$$

$$\begin{cases} 3a + 2b = 6 \\ 9a + 3b = 0 \end{cases} \Rightarrow -3b = -18 \Rightarrow b = 6 \Rightarrow a = -2$$

$$a + b = 4$$



۱۷- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{h \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{h \rightarrow 3^-} \frac{-2(x-3)}{\sqrt{2x+3}-x} \times \frac{\sqrt{2x+3}+x}{\sqrt{2x+3}+x} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{-2(x-3)(\sqrt{2x+3}+x)}{-(x-3)(x+1)}$$

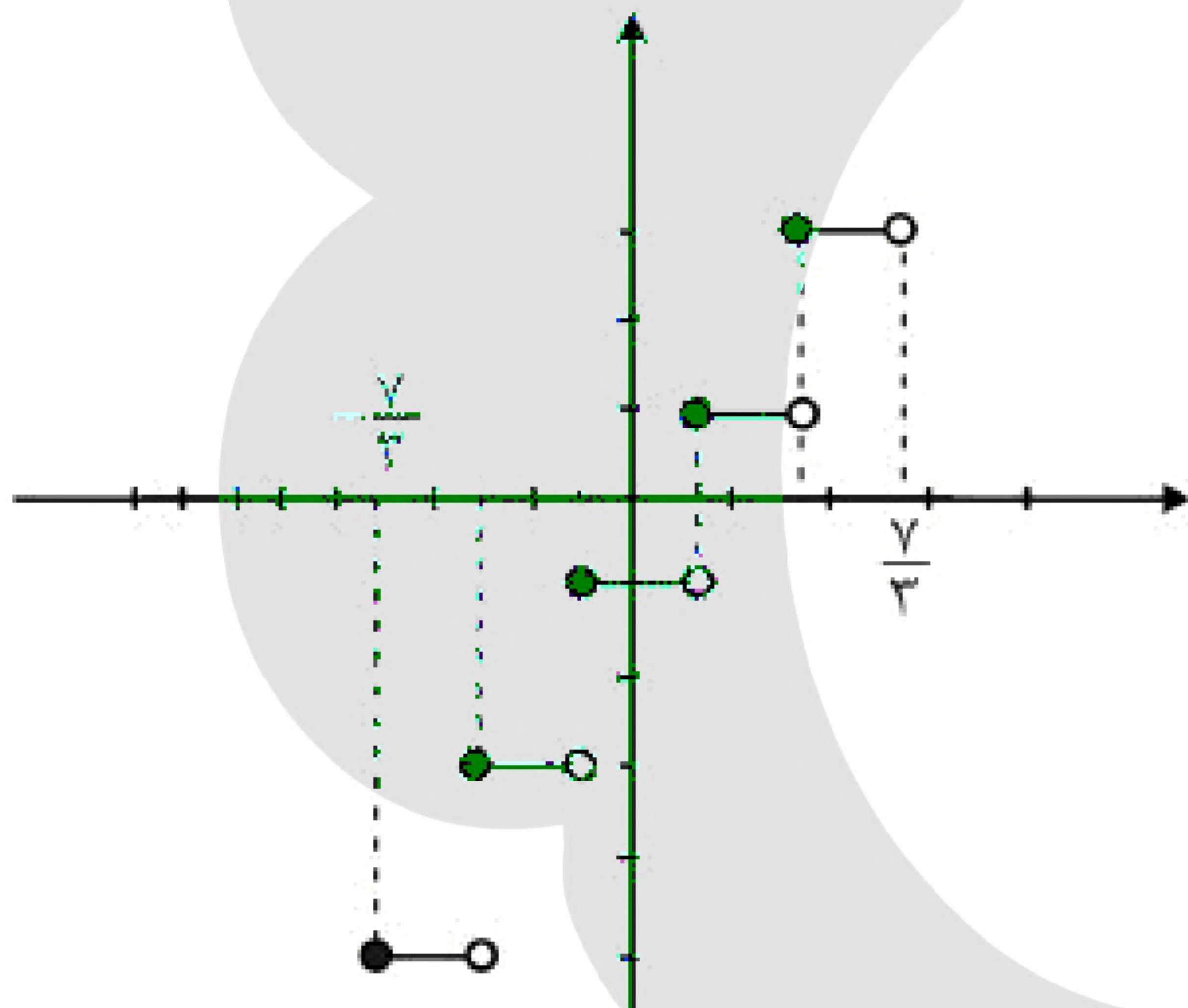
$$= \frac{-2(6)}{-4} = 3 = L$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{2(x-3)}{\sqrt{2x+3}-x} \times \frac{\sqrt{2x+3}+x}{\sqrt{2x+3}+x} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{2(x-3)(\sqrt{2x+3}+x)}{-(x-3)(x+1)}$$

$$= \frac{2(6)}{-4} = -4/5 = R$$

$$L - 4R = 3 - 4(-4/5) = 21$$

۱۸- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.



$$f(x) = 2 \left[x + \frac{1}{3} \right] - 1$$

$$-\frac{1}{3} \leq x < \frac{2}{3} \leftarrow 0 \leq x + \frac{1}{3} < 1$$

$$\Rightarrow \left[x + \frac{1}{3} \right] = 0 \Rightarrow y = -1$$

$$\frac{2}{3} \leq x < \frac{5}{3} \leftarrow 1 \leq x + \frac{1}{3} < 2$$

$$\Rightarrow \left[x + \frac{1}{3} \right] = 1 \Rightarrow y = 1$$

$$\frac{5}{3} \leq x < \frac{4}{3} \leftarrow 2 \leq x + \frac{1}{3} < 3 \Rightarrow \left[x + \frac{1}{3} \right] = 2 \Rightarrow y = 3$$

$$-\frac{4}{3} \leq x < -\frac{1}{3} \leftarrow -1 \leq x + \frac{1}{3} < 0 \Rightarrow \left[x + \frac{1}{3} \right] = -1 \Rightarrow y = -3$$

$$-\frac{7}{3} \leq x < -\frac{4}{3} \leftarrow -2 \leq x + \frac{1}{3} < -1 \Rightarrow \left[x + \frac{1}{3} \right] = -2 \Rightarrow y = -5$$

تابع در نقاط $-\frac{4}{3}$ ، $-\frac{1}{3}$ ، $\frac{2}{3}$ ، $\frac{5}{3}$ ناپیوسته است.



$$f(x) = [x] - [-x]$$

۱۹- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} ([x] - [-x]) = [1^-] - [- (1^-)] = 0 - (-1) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} ([x] - [-x]) = [1^+] - [- (1^+)] = 1 - (-2) = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) + \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1 + 3 = 4$$

$$f(x+1) = \sqrt{x+1+1} + 2 \Rightarrow f(x) = \sqrt{x+1} + 2$$

۲۰- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\sqrt{x+1} = y - 2 \Rightarrow x+1 = (y-2)^2 \Rightarrow f^{-1}(x) = (x-2)^2 - 1$$

$$f^{-1}(x) = x^2 - 4x + 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f^{-1}(x)}{\sqrt{2x+3}-3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 4x + 3}{\sqrt{2x+3}-3} \times \frac{\sqrt{2x+3}+3}{\sqrt{2x+3}+3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x-1) \times 6}{2(x-3)} = \frac{2 \times 6}{2} = 6$$

۲۱- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin 2x \cdot \cos 2x - 2 \sin^2 2x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin 2x (\cos 2x - 1)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin 2x (-2 \sin^2 x)}{x^3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(2 \sin x \cdot \cos x) (-2 \sin^2 x)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} (-8 \cos x) \times \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 = -8 \times 1 = -8$$



۲۲- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. با فرض $x - \frac{\pi}{2} = t$ آنگاه: $x = \frac{\pi}{2} + t$ و $x \rightarrow \frac{\pi}{2} \Rightarrow t \rightarrow 0$

$$a = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{2x - \pi}{\cos x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2\left(t + \frac{\pi}{2}\right) - \pi}{\cos\left(\frac{\pi}{2} + t\right)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-2t}{\sin t} = -2 \Rightarrow a = -2$$

$$b = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2 - 9}{\sqrt{3x - 5} - 2} \times \frac{\sqrt{3x - 5} + 2}{\sqrt{3x - 5} + 2} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{(x-3)(x+3) \times 4}{3(x-3)} = 4 \Rightarrow b = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x - 3\sqrt{x} + 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x}-1)(2\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{a \times b}{\frac{1}{2}} = \frac{-2 \times 4}{\frac{1}{2}} = -16$$

۲۳- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$(1) \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} \times \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x}+1)} = \frac{1}{2}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1 + a$$

$$(3) f(1) = 1 + a$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = (1 - b)(1) = 1 - b$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = (0 - b)(0) = 0$$

$$(6) f(1) = (1 - b)(1) = 1 - b$$

$$1, 2, 3 \Rightarrow 1 + a = \frac{1}{2} \Rightarrow a = -\frac{1}{2} \quad (7)$$

$$4, 5, 6 \Rightarrow 1 - b = 0 \Rightarrow b = 1 \quad (8)$$

$$7, 8 \Rightarrow 2a + b = 0$$

۲۴- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. تابع $y = [x]$ فقط در نقاط صحیح بازه موردنظر به جز $x = -3$ (که پیوستگی راست دارد)

یعنی $3, 2, 1, 0, -1, -2, x = -3$ ناپیوسته است. اما چون عبارت $x^3 - x$ در سه نقطه $x = 1$ و $x = 0$ و $x = -1$ صفر می‌شود، مشکل ناپیوستگی در این نقاط را رفع کرده و f در آن‌ها پیوسته می‌شود. بنابراین تابع $f(x)$ فقط در سه نقطه $x = -2$ و $x = 2$ و $x = 3$ ناپیوسته است.



۲۵- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. می‌دانیم وقتی $x \rightarrow 3^+$: $|9 - x^2| = -(9 - x^2)$ و $[3^+] = 3$:

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{3x^3 - 81}{x^2 - 9} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{3(x-3)(x^2 + 3x + 9)}{(x-3)(x+3)} = \frac{3(27)}{6} = 13/5$$

۲۶- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(\sqrt{x}-1)(2\sqrt{x}-1)}{a(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = \frac{1}{2a}$$

$$f(1) = 2b - 1$$

(توجه: اگر $0 < x < 1$ آنگاه $\sqrt{x} > x$)

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^3 - 1}{-(x - \sqrt{x})} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x-1)(x^2 + x + 1)}{-(x - \sqrt{x})} \times \frac{x + \sqrt{x}}{x + \sqrt{x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3(x-1)(2)}{-x(x-1)} = -6$$

$$\text{شرط پیوستگی: } \frac{1}{2a} = -6 = 2b - 1 \quad \begin{cases} a = \frac{-1}{12} \\ b = \frac{-5}{2} \end{cases}$$

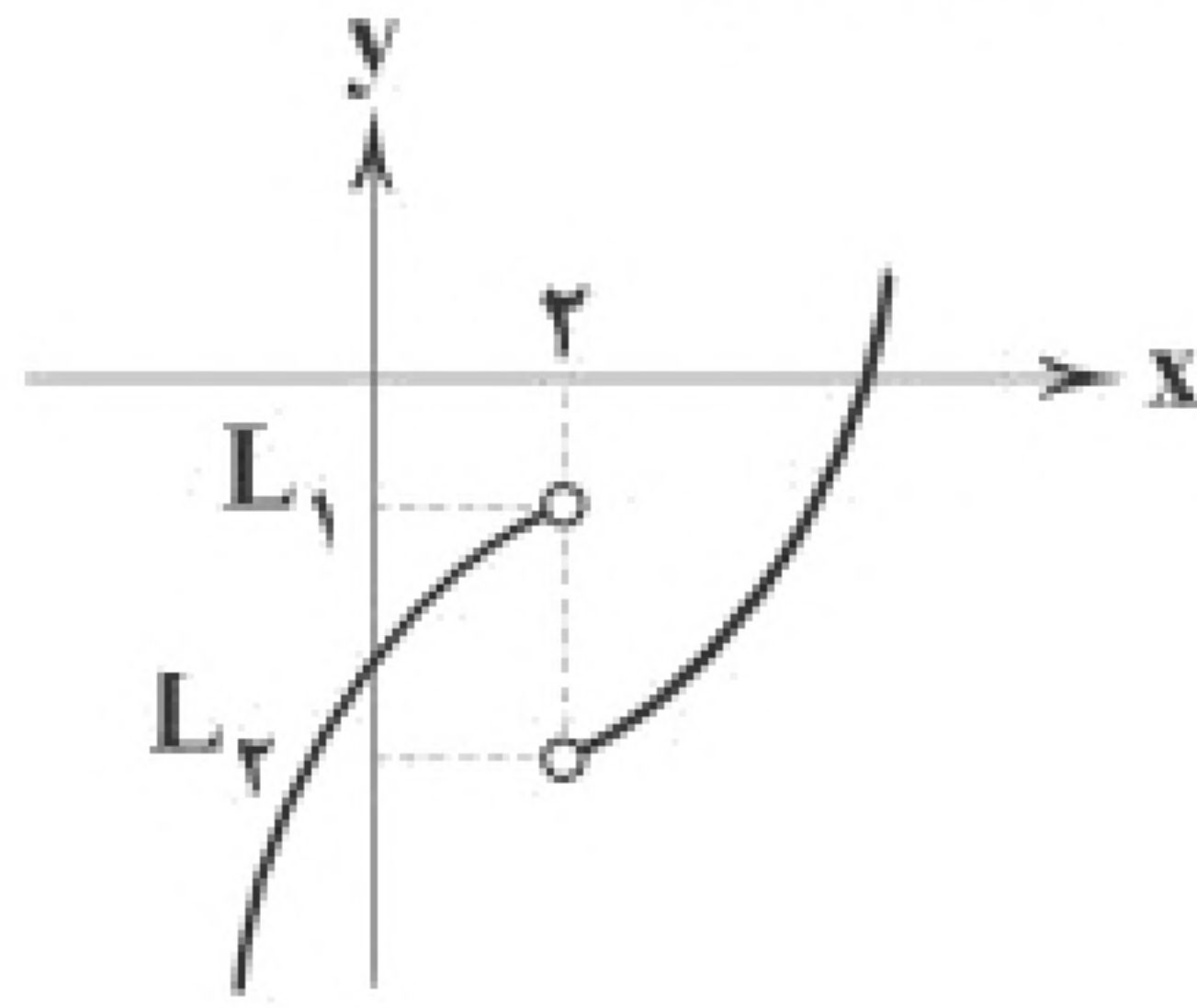
$$4(3a - b) = 4\left(-\frac{1}{4} + \frac{5}{2}\right) = 9$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{(1 + \cos x)(1 - \cos x + \cos^2 x)}{(1 + \cos x)(1 - \cos x)} = \frac{3}{2}$$

۲۷- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.



۲۸- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. شکل زیر را در نظر می‌گیریم:



$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{|f(x)|}{f(x)} = \frac{|L_2|}{L_2} = \frac{L_2 < 0}{L_2} = -1 \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{|f(x)|}{f(x)} = \frac{|L_1|}{L_1} = \frac{L_1 < 0}{L_1} = -1 \end{array} \right.$$

چون حد چپ و راست هر دو برابر (-1) است، پس حد تابع در $x = 2$ برابر (-1) است.

۲۹- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. فرض می‌کنیم $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = L$ و $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = M$ باشد، بنابراین:

$$\begin{cases} L + M = 4 \\ L - M = 5 \end{cases} \rightarrow 2L = 9 \Rightarrow L = \frac{9}{2} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \frac{9}{2}$$

$$a = \lim_{x \rightarrow 2} [f^2(x)] = \left[\left(\frac{9}{2} \right)^2 \right] = \left[\frac{81}{4} \right] = 20.25$$

$$b = \lim_{x \rightarrow 2} [f(x)]^2 = \left[\frac{9}{2} \right]^2 = 4^2 = 16$$

$$a + b = 20.25 + 16 = 36.25$$



«بانک سوال مؤسسه یاوران دانش»

۳۰- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{4x^2 + ax + 5}{2x^2 + 7x - 4} = \frac{4\left(\frac{1}{2}\right)^2 + a\left(\frac{1}{2}\right) + 5}{2\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 7\left(\frac{1}{2}\right) - 4} = \frac{1 + \frac{a}{2} + 5}{\frac{1}{2} + \frac{7}{2} - 4} = \frac{6 + \frac{a}{2}}{\frac{1}{2}} = L$$

بنابراین باید $6 + \frac{a}{2}$ هم برابر صفر باشد، تا پس از رفع ابهام مقدار L به دست آید:

$$6 + \frac{a}{2} = 0 \Rightarrow a = -12 \quad (*)$$

لذا داریم:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{4x^2 + ax + 5}{2x^2 + 7x - 4} \stackrel{(*)}{=} \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{4x^2 - 12x + 5}{2x^2 + 7x - 4}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{\cancel{(2x-1)}(2x-5)}{\cancel{(2x-1)}(x+4)} = \frac{2 \times \frac{1}{2} - 5}{\frac{1}{2} + 4} = \frac{-4}{\frac{9}{2}} = \frac{-8}{9} = L$$

$$\Rightarrow a - 18L = -12 - 18\left(-\frac{8}{9}\right) = -12 + 16 = 4$$

۳۱- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. دامنه‌ی تابع f بازه‌ی $[-2, 2]$ است، پس تابع در $x = 2$ فقط حد چپ و در $x = -2$ فقط حد راست دارد و داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \sqrt{4 - x^2} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -2^+} \sqrt{4 - x^2} = 0$$

برای $x > 2$ و $x < -2$ ، عبارت زیر رادیکال منفی می‌شود و تابع حد ندارد.

۳۲- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$f(2) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (a[-x] - x^2) \Rightarrow -2a - 4 = -2a - 4 \Rightarrow a \in \mathbb{R}$$

به ازای هر مقدار a ، حد چپ تابع با مقدار تابع برابر است.

۳۳- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$n - 2 < 1 < 2n + 3 \Rightarrow \begin{cases} n - 2 < 1 \Rightarrow n < 3 \\ 1 < 2n + 3 \Rightarrow 2n > -2 \Rightarrow n > -1 \end{cases} \Rightarrow -1 < n < 3$$



۳۴- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (-x + 5) = -1 + 5 = 4 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 4 - 1 = 3 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) - \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 4 - 1 = 3$$

۳۵- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3^x - 3^2 - x}{3^x - 3} = \frac{0}{0}$$

با انتخاب $3^x = t$ داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3^x - 3^2 - x}{3^x - 3} = \lim_{t \rightarrow 3} \frac{t - 9 \times \frac{1}{t}}{t - 3} = \lim_{t \rightarrow 3} \frac{\frac{t^2 - 9}{t}}{t - 3} = \lim_{t \rightarrow 3} \frac{(t-3)(t+3)}{t-3} = \frac{3+3}{3} = 2$$

۳۶- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. توابع چند جمله‌ای در همه‌ی نقاط حد دارند، فقط باید مرزها بررسی شوند:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = a(2) - b = 2a - b$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 2^2 - a = 4 - a$$

شرط وجود حد $\longrightarrow 2a - b = 4 - a \Rightarrow 3a - b = 4$

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = -(a+1)(-1)^2 + 6(-1) + 2 = -a - 5$$

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = a(-1) - b = -a - b$$

شرط وجود حد $\longrightarrow a - b = -a - 5 \Rightarrow b = 5$

با جای‌گذاری در یکی از معادلات، $a = 3$ به دست می‌آید:

$$f(1) = a(1) - b = 3 - 5 = -2$$



۳۷- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$f(0) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x(x+1)}{2x+x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cancel{x}(x+1)}{3\cancel{x}} = \frac{1}{3} \neq f(0)$$

پس تابع در $x = 0$ پیوستگی راست ندارد.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x(x+1)}{2x+(-x)} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\cancel{x}(x+1)}{\cancel{x}} = 0 + 1 = 1 = f(0)$$

پس تابع در $x = 0$ فقط پیوستگی چپ دارد.

۳۸- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\overbrace{|x+2|}^{\text{مثبت}} - \overbrace{|1-4x|}^{\text{منفی}}}{x^3 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-3x + 3}{x^3 - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-3(x-1)}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{-3}{1+1+1} = -1$$



۳۹- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. باید نقاطی که درون براکت صحیح می‌شوند، نقاط مرزی ضابطه‌ها و نقاط ابتدا و انتهای دامنه بررسی شوند.

$x = -2$: نقطه‌ی ابتدای دامنه است.

$$x = -2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow (-2)} f(x) = \text{وجود ندارد}, \lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x) = -2$$

در نتیجه در $x = -2$ ناپیوسته است.

$$x = -1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = [(-1)^-] = -2, \lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = -1$$

در نتیجه در $x = -1$ هم ناپیوسته است.

$$x = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = [0^-] = -1, \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = [0^+] = 0$$

در نتیجه در $x = 0$ هم ناپیوسته است.

$$x = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = [1^-] = 0, \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 3(1) - 3 = 0$$

$$f(1) = 3(1) - 3 = 0$$

در نتیجه در $x = 1$ پیوسته است.

$$x = 4 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = 3 \times 4 - 3 = 9, \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = 4^2 - 7 = 9$$

$$f(4) = 16 - 7 = 9$$

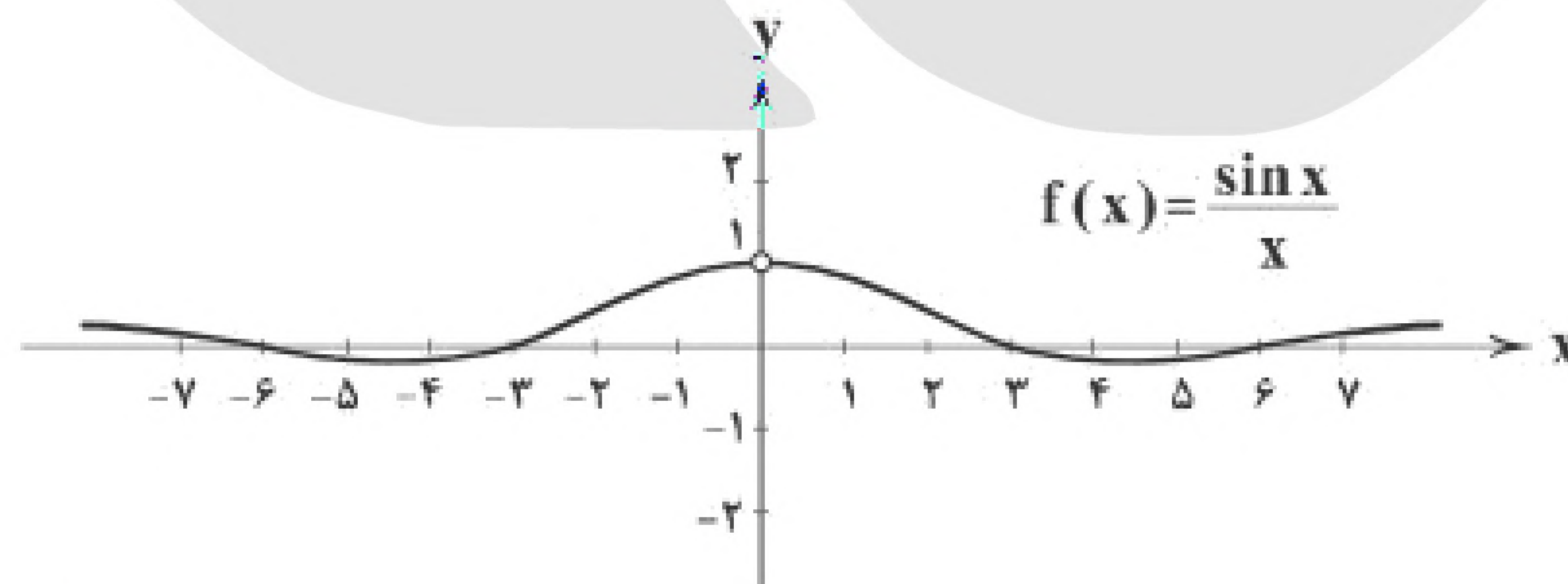
در نتیجه در $x = 4$ پیوسته است.

$$x = 5 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) = 5^2 - 7 = 18, \lim_{x \rightarrow 5^+} f(x) = \text{وجود ندارد}$$

در نتیجه در $x = 5$ نیز ناپیوسته است، پس در ۴ نقطه ناپیوسته است.

۴۰- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. با توجه به نمودار $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ در همسایگی عدد صفر حاصل از یک کم‌تر است

بنابراین داریم:



$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\sin x}{x} \right] = [1^-] = 0$$