

گنجینه سوال رایگان

+ پاسخ تشریحی

یاوران دانش



راه های ارتباطی با ما:

www.Dyavari.com

۰۲۱-۷۶۷۰۳۸۵۸

۰۹۱۲-۳۴ ۹۴ ۱۳۴



	۱	۲	۳	۴
۱-	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۲-	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳-	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۴-	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۵-	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۶-	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۷-	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۸-	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۹-	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۰-	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۱-	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۲-	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۱۳-	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۴-	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۵-	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۶-	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۷-	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۱۸-	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۹-	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۲۰-	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۱-	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۲-	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۳-	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۴-	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۲۵-	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۲۶-	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۷-	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۲۸-	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۹-	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۰-	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۱-	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۲-	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۳-	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۴-	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۵-	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۳۶-	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>





$$\text{محیط} = 2\pi \Rightarrow R = 1$$

۱- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

مثث $O\hat{A}B$ متساوی الاضلاع است. $AB = OA = 1 = OB \Rightarrow$

$$\left. \begin{aligned} P_{\text{هاشور}} &= \cancel{AH} + \cancel{BH} + \widehat{AB} \\ P_{\triangle OAH} &= \cancel{AH} + \cancel{OH} + OA \end{aligned} \right\} \Rightarrow P_{\text{هاشور}} - P_{\triangle OAH} = \widehat{AB} - OA = \frac{\pi}{3} - 1 = \frac{\pi - 3}{3}$$

$$\widehat{AB} = R\alpha = 1 \times \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$$

$$OA = R = 1$$

۲- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$5\pi < 4x < 6\pi \Rightarrow \frac{5\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \sin x < \cos x \Rightarrow \sin^3 x < \cos^3 x$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sin^3 x - \cos^3 x} < 0$$

پس یکی از گزینه‌های ۱ یا ۳ صحیح است. حال فارغ از علامت، اندازه را به دست می‌آوریم.

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{Cotg} x = 4 \Rightarrow \frac{1}{\sin x \cos x} = 4 \Rightarrow \sin x \cos x = \frac{1}{4}$$

$$A = \sin x - \cos x \xrightarrow{A < 0} A^2 = 1 - 2 \sin x \cos x = 1 - 2 \left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2} \Rightarrow A = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

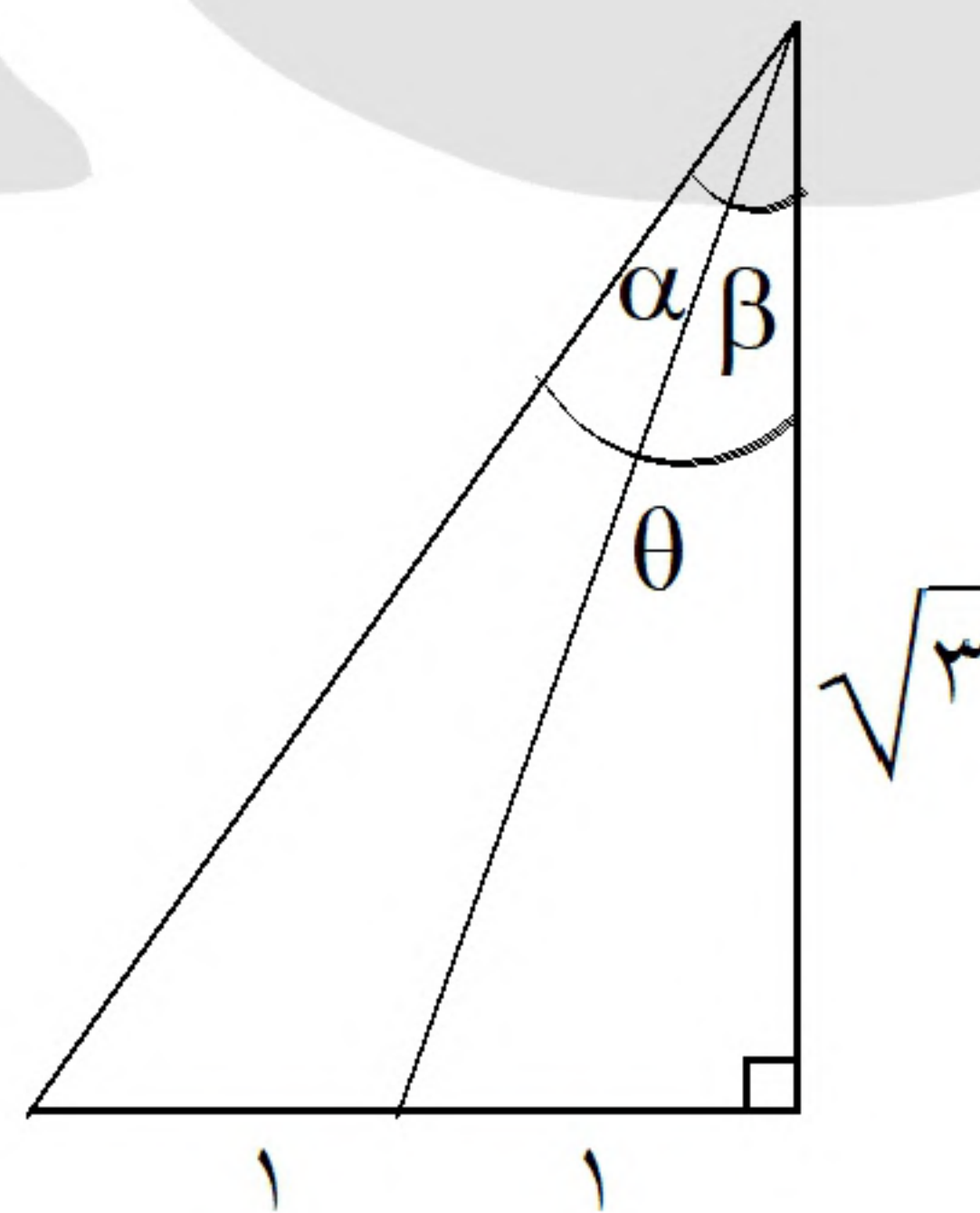
$$\frac{1}{\sin^3 x - \cos^3 x} = \frac{1}{(\sin x - \cos x)(1 + \sin x \cos x)} = \frac{1}{-\frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 + \frac{1}{4}\right)} = -\frac{1}{\frac{5}{4}\sqrt{2}}$$

۳- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\theta = \alpha + \beta \Rightarrow \alpha = \theta - \beta$$

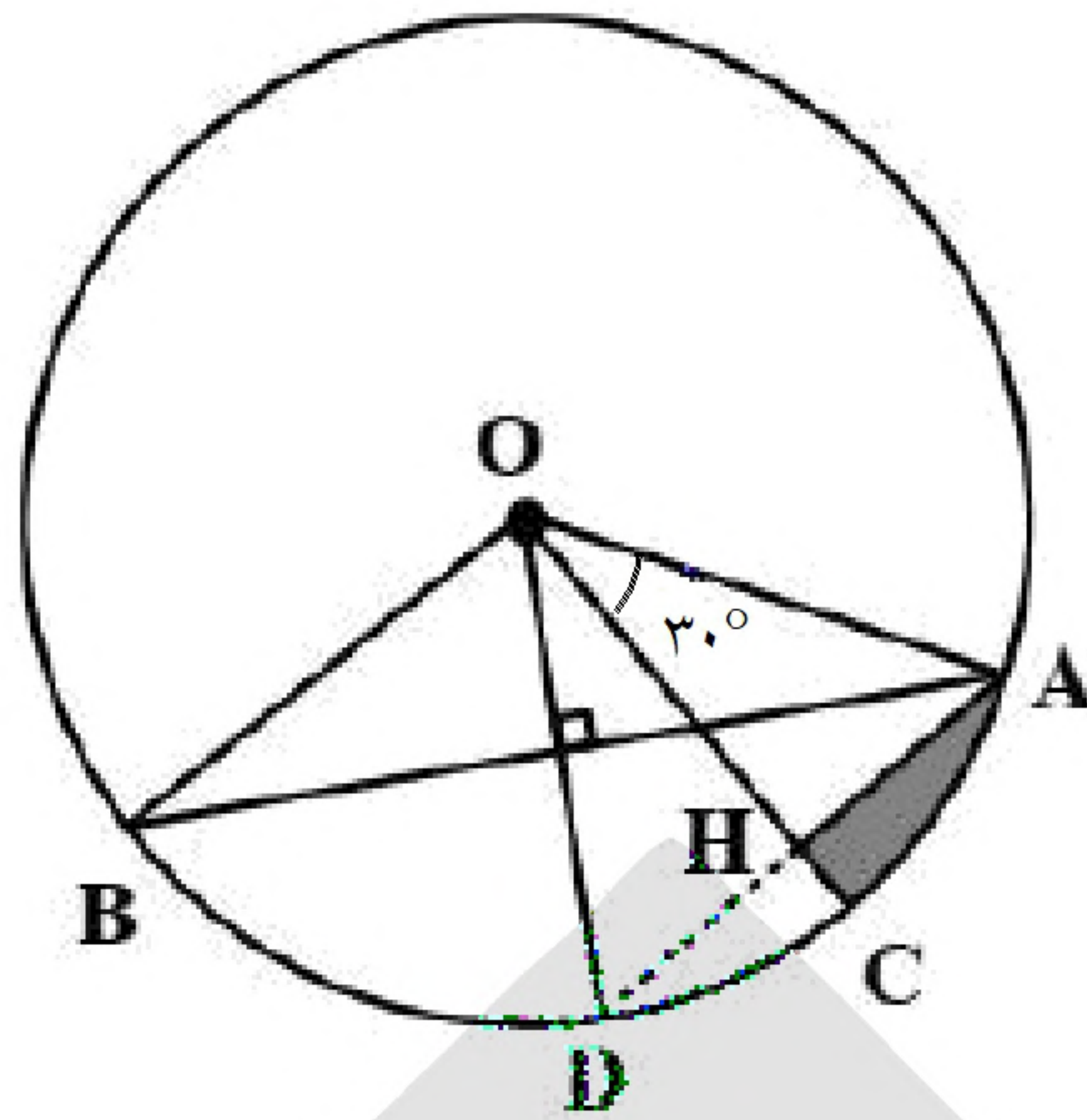
$$\tan \alpha = \tan(\theta - \beta) = \frac{\tan \theta - \tan \beta}{1 + \tan \theta \cdot \tan \beta}$$

$$= \frac{\frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 + \frac{2}{3}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{\frac{5}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{5}$$





۴- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.



$$\left. \begin{aligned} |OA| = 1, |OH| = \frac{\sqrt{3}}{2}, |AH| = \frac{1}{2} \\ |\widehat{AC}| = \frac{2\pi}{12}, |HC| = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}, |AH| = \frac{1}{2} \end{aligned} \right\} \rightarrow P = \sqrt{3} - \frac{\pi}{6}$$

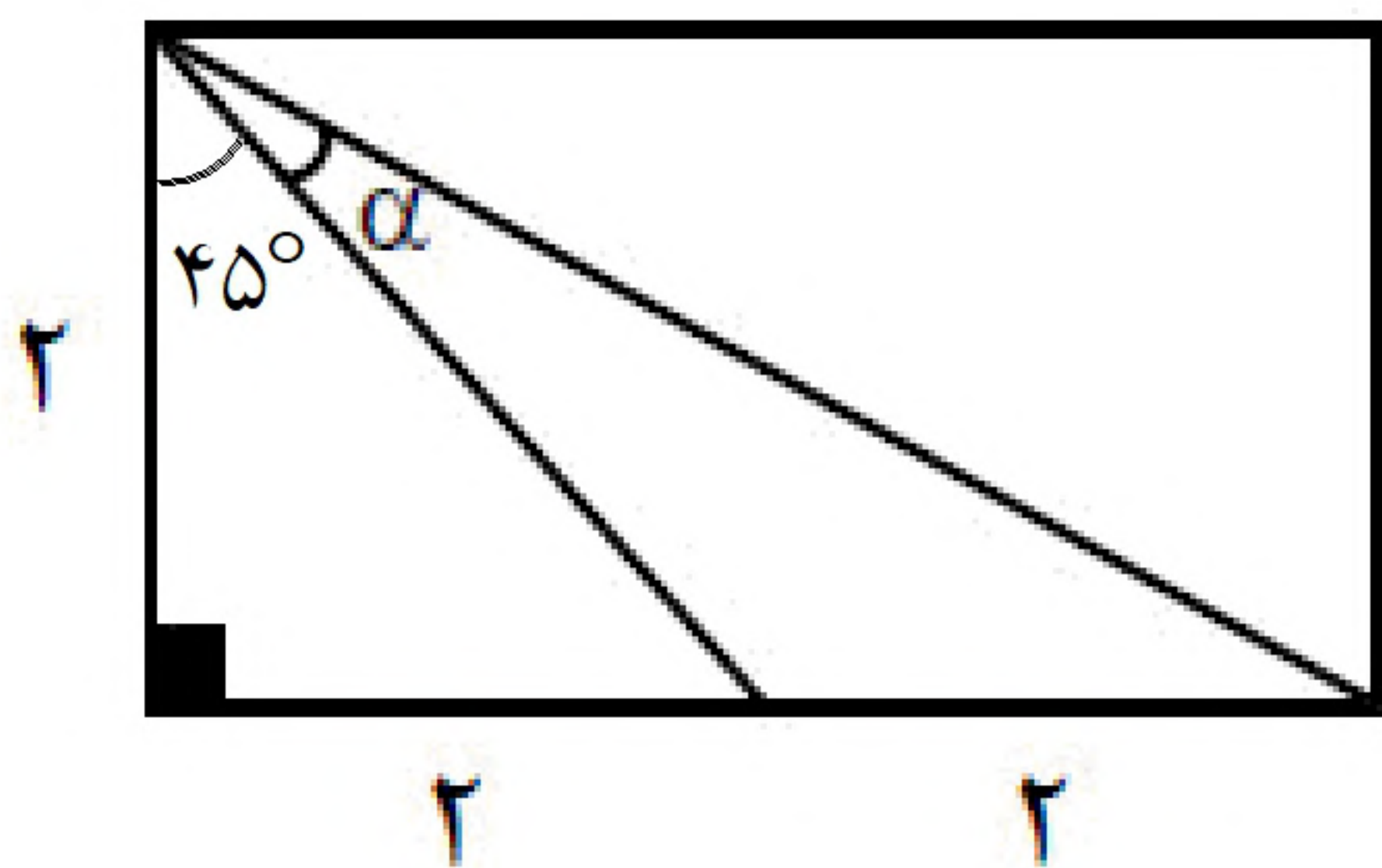
۵- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} = -3 \Rightarrow \sin x \cdot \cos x = \frac{-1}{3} \Rightarrow 2 \sin x \cdot \cos x = \frac{-2}{3}$$

$$\Rightarrow (\sin x + \cos x)^2 = 1 + 2 \sin x \cdot \cos x = \frac{1}{3} \xrightarrow{\frac{3\pi}{4} < x < \pi} \sin x + \cos x = \frac{-1}{\sqrt{3}}$$

$$\frac{1}{\sin^3 x + \cos^3 x} = \frac{1}{(\sin x + \cos x)(1 - \sin x \cos x)} = \frac{-\sqrt{3}}{\frac{4}{3}} = -\frac{3\sqrt{3}}{4} = -0.75\sqrt{3}$$

۶- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.



$$\operatorname{tg}(\alpha + 45^\circ) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + 1}{1 - \operatorname{tg} \alpha} = \frac{4}{2} = 2$$

$$\Rightarrow 2 - 2 \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \alpha + 1 \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{3}$$

و در نتیجه $\operatorname{Cot} \alpha = 3$ است.



۷- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{Cotg} \alpha = \frac{4}{3} \Rightarrow \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} - \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{4}{3} \Rightarrow \frac{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha} = \frac{4}{3} \Rightarrow \frac{-\cos 2\alpha}{\frac{1}{2} \sin 2\alpha} = \frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow \operatorname{Cotg} 2\alpha = -\frac{2}{3} \Rightarrow \operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{3}{2}$$

۸- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$B = 2A, A + B + C = 180^\circ \Rightarrow C = 180 - (A + B) \Rightarrow \sin C = \sin(A + B)$$

$$2 \sin A \cos B - \sin C = 2 \sin A \cos B - \sin(A + B)$$

$$= 2 \sin A \cos B - \sin A \cos B - \cos A \sin B = \sin A \cdot \cos B - \cos A \sin B = \sin(A - B)$$

$$\xrightarrow{B = 2A} \sin(A - 2A) = \sin(-A) = -\sin A$$

۹- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. راه اول: نسبت‌های مثلثاتی $\sin(\alpha + \theta)$ و $\cos(\alpha + \theta)$ را می‌نویسیم:

$$\sin(\alpha + \theta) = \sin \alpha \cos \theta + \cos \alpha \sin \theta$$

$$\Rightarrow \frac{4}{2\sqrt{5}} = \sin \alpha \times \frac{3}{\sqrt{10}} + \cos \alpha \times \frac{1}{\sqrt{10}}$$

$$\Rightarrow 3 \sin \alpha + \cos \alpha = 2\sqrt{2} \quad (1)$$

$$\cos(\alpha + \theta) = \cos \alpha \cos \theta - \sin \alpha \sin \theta$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{5}} = \cos \alpha \times \frac{3}{\sqrt{10}} - \sin \alpha \times \frac{1}{\sqrt{10}}$$

$$\Rightarrow 3 \cos \alpha - \sin \alpha = \sqrt{2} \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1), (2)} \cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

راه دوم: از $\tan(\alpha + \theta)$ استفاده کنیم:

$$\tan \alpha = \tan((\alpha + \theta) - \theta) = \frac{\tan(\alpha + \theta) - \tan \theta}{1 + \tan(\alpha + \theta) \cdot \tan \theta} = \frac{2 - \frac{1}{3}}{1 + 2 \left(\frac{1}{3}\right)} = \frac{\frac{5}{3}}{\frac{5}{3}} = 1$$

$$\alpha = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$$



۱۰- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\sin x + \cos x = \frac{6\sqrt{5}}{10} \xrightarrow{\text{به توان ۲}} 1 + \sin 2x = 1/8 \Rightarrow \sin 2x = -7/8$$

$$\sin 2x = \frac{2 \tan x}{1 + \tan^2 x} \Rightarrow \frac{2 \tan x}{1 + \tan^2 x} = \frac{-7}{8} \Rightarrow 5 \tan x = 2 + 2 \tan^2 x$$

$$\Rightarrow 2 \tan^2 x - 5 \tan x + 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \tan x = 2 \\ \tan x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

فقط $\frac{1}{2}$ در گزینه‌ها موجود است.

۱۱- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$-\frac{\pi}{6} < 2x < \frac{5\pi}{6} \Rightarrow -\frac{1}{2} < \sin 2x \leq 1 \Rightarrow -\frac{1}{2} < \frac{m-1}{4} \leq 1 \Rightarrow -2 < m-1 \leq 4$$

$$\Rightarrow -1 < m \leq 5 \Rightarrow m \in (-1, 5]$$

«بانک سوال موسسه یاوران دانش»

۱۲- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\frac{1 - \sin x}{1 + \sin x} = 4 \Rightarrow 1 - \sin x = 4 + 4 \sin x \Rightarrow \sin x = -\frac{3}{5} \xrightarrow{\text{ربع سوم}} \cos x = -\frac{4}{5}$$

$$\tan^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} = \frac{1 - \left(-\frac{4}{5}\right)}{1 - \frac{4}{5}} = \frac{\frac{9}{5}}{\frac{1}{5}} = 9 \Rightarrow \tan \frac{x}{2} = -3$$

$$\pi < x < \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{2} < \frac{x}{2} < \frac{3\pi}{4} \Rightarrow \tan \frac{x}{2} < -1$$

۱۳- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\hat{A} = 45^\circ + \hat{B} \Rightarrow \hat{A} - \hat{B} = 45^\circ \Rightarrow \hat{C} = 180^\circ - (\hat{A} + \hat{B})$$

$$2 \cos A \sin B - \sin C = \sin(\hat{A} + \hat{B}) - \sin(\hat{A} - \hat{B}) - \sin(180^\circ - (\hat{A} + \hat{B}))$$

$$= \cancel{\sin(\hat{A} + \hat{B})} - \sin(\hat{A} - \hat{B}) - \cancel{\sin(\hat{A} + \hat{B})} = -\sin \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$



۱۴- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) - (-\sin(\pi - \alpha))}{|\operatorname{tg}^2 \alpha - 1|} = \frac{\cos \alpha + \sin(\pi - \alpha)}{|\operatorname{tg}^2 \alpha - 1|} = \frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{|\operatorname{tg}^2 \alpha - 1|}$$

$$\cos \alpha = \frac{2}{3} \Rightarrow \sin^2 \alpha = 1 - \left(\frac{4}{9}\right) \Rightarrow \sin \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{3} \quad (\text{ربع } 4^{\text{م}})$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{-\sqrt{5}}{3} \times \frac{3}{2} = \frac{-\sqrt{5}}{2} = \frac{-\sqrt{5}}{3} + \frac{2}{3} = \frac{2 - \sqrt{5}}{3} = \frac{4(2 - \sqrt{5})}{12} = \frac{4(2 - \sqrt{5})}{\left|+\frac{5}{4} - 1\right| \cdot \frac{1}{4}}$$

۱۵- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$f\left(\frac{\pi}{12}\right) = f(15^\circ) = 32 \times \cos^2(15^\circ) \cos^2(30^\circ) \cos^2(60^\circ) \cos^2(120^\circ) \cos^2(240^\circ)$$

$$\cos 120^\circ = \cos(180^\circ - 60^\circ) = -\cos 60^\circ$$

$$\cos 240^\circ = \cos(180^\circ + 60^\circ) = -\cos 60^\circ$$

$$= 32 \times \cos^2(15^\circ) \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \left(\frac{-1}{2}\right)^2 \times \left(\frac{-1}{2}\right)^2 = \frac{3}{8} \cos^2(15^\circ)$$

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 \Rightarrow \cos 30^\circ = 2\cos^2 15^\circ - 1 \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\cos^2 15^\circ - 1$$

$$\cos^2 15^\circ = \frac{\sqrt{3} + 2}{4} \Rightarrow \frac{3}{8} \times \frac{\sqrt{3} + 2}{4} = \frac{6 + 3\sqrt{3}}{32} = \frac{6 + \sqrt{27}}{32}$$

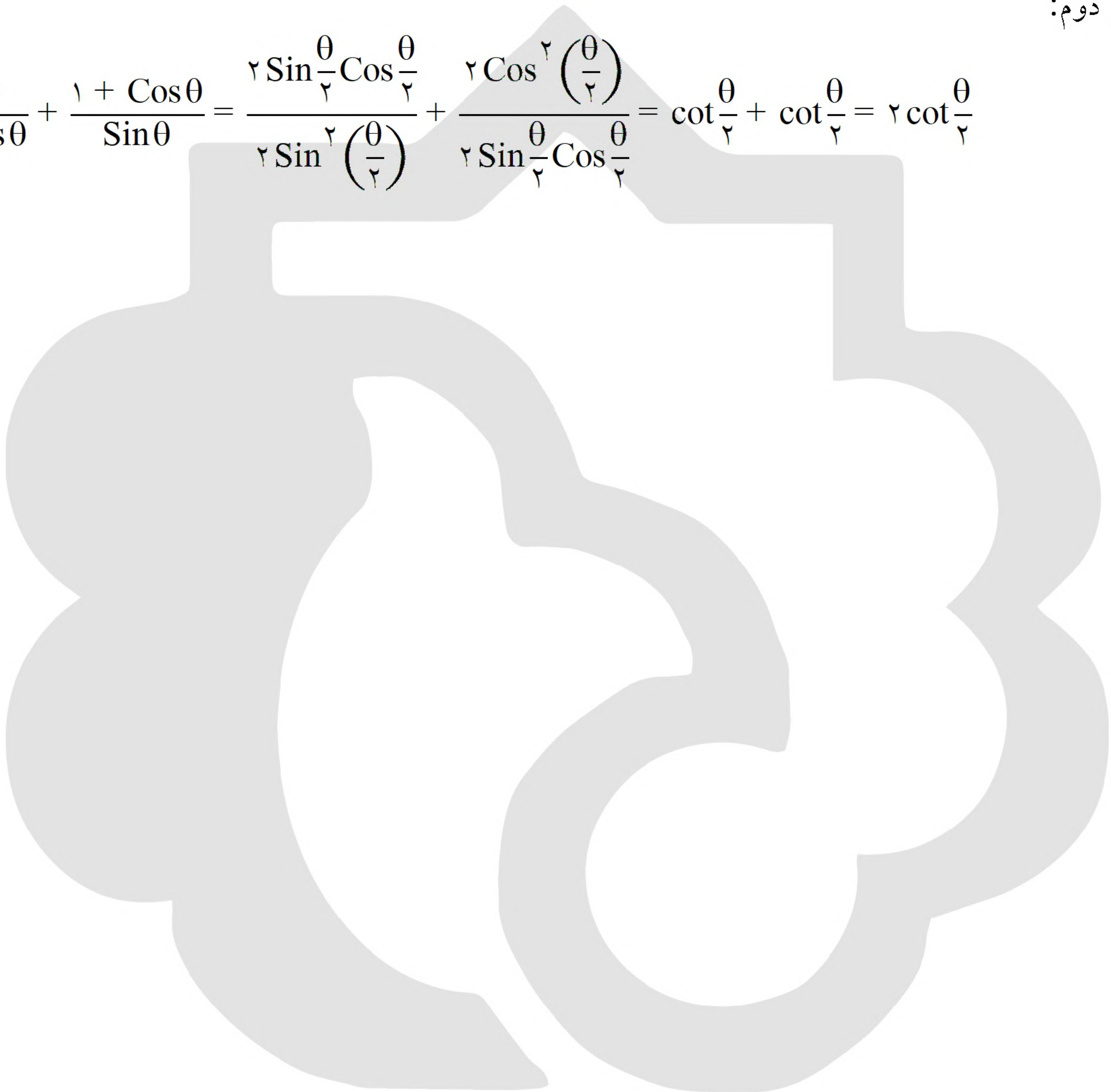


۱۶- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\begin{aligned} \frac{\sin \theta}{1 - \cos \theta} + \frac{1 + \cos \theta}{\sin \theta} &= \frac{\sin^2 \theta + 1 - \cos^2 \theta}{\sin \theta (1 - \cos \theta)} = \frac{2 \sin^2 \theta}{\sin \theta (1 - \cos \theta)} \\ &= \frac{2 \sin \theta}{1 - \cos \theta} = \frac{2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}}{2 \sin^2 \left(\frac{\theta}{2}\right)} = 2 \cot \frac{\theta}{2} \end{aligned}$$

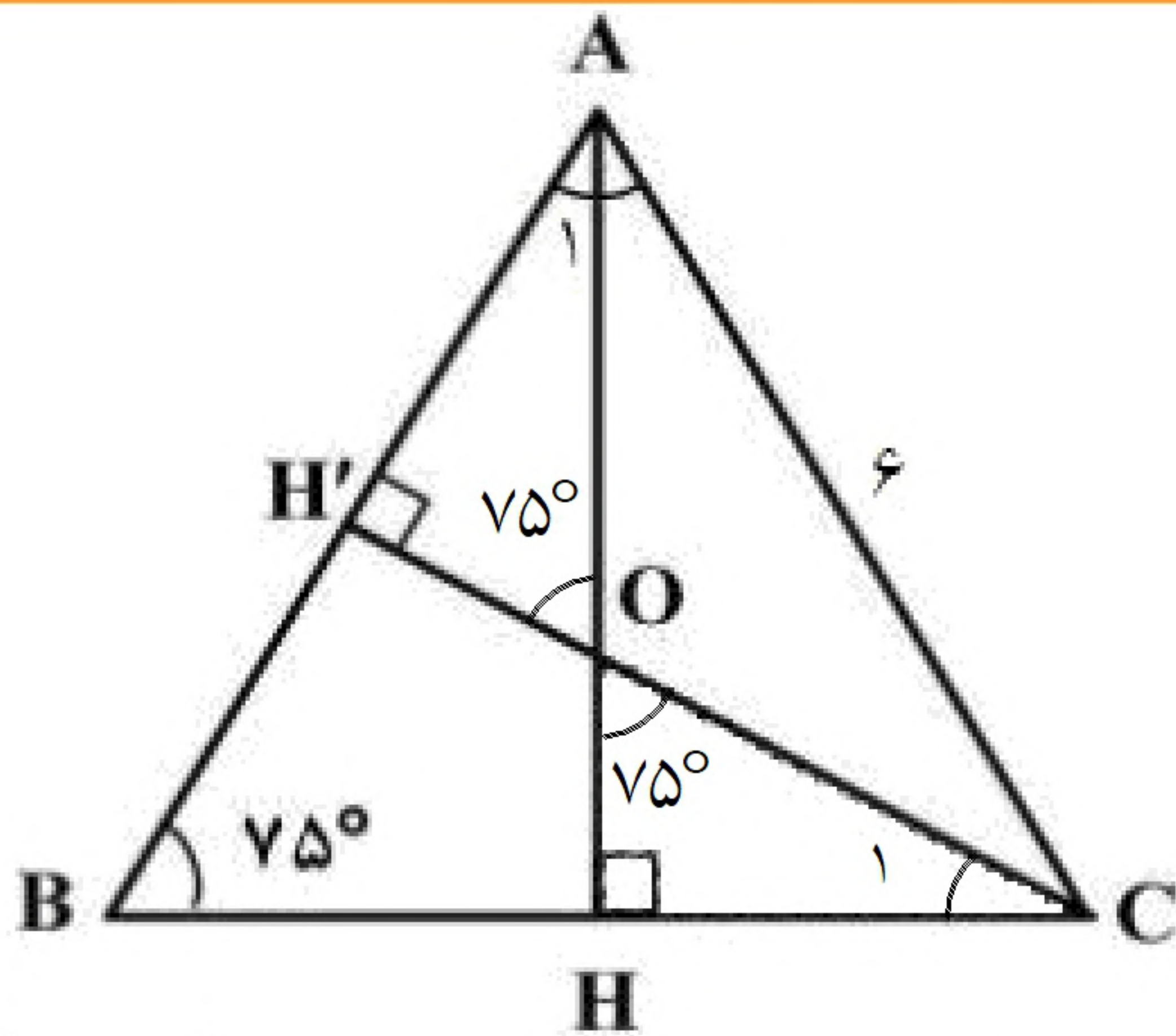
راه حل دوم:

$$\frac{\sin \theta}{1 - \cos \theta} + \frac{1 + \cos \theta}{\sin \theta} = \frac{2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}}{2 \sin^2 \left(\frac{\theta}{2}\right)} + \frac{2 \cos^2 \left(\frac{\theta}{2}\right)}{2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}} = \cot \frac{\theta}{2} + \cot \frac{\theta}{2} = 2 \cot \frac{\theta}{2}$$





۱۷- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.



در صورت سؤال مطرح شده رأس مثلث متساوی الساقین کدام است.

فرض کنیم در این جا $AB = AC = 6$ باشد. در این صورت ارتفاع AH میانه هم هست پس $BH = CH$.در مثلث‌های قائم‌الزاویه ABH و BCH' چون $\hat{B} = 75^\circ$ پس $\hat{A}_1 = \hat{C}_1 = 15^\circ$ بنابراین:

$$\left. \begin{array}{l} \hat{A}_1 = \hat{C}_1 = 15^\circ \\ \hat{H} = \hat{H}' = 90^\circ \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{(زز)}} \triangle ABH \sim \triangle OCH \Rightarrow \frac{OH}{BH} = \frac{OC}{AB} \quad (1)$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} \Rightarrow \sin^2 15^\circ = \frac{1 - \cos 30^\circ}{2} \Rightarrow \sin 15^\circ = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} \Rightarrow \cos^2 15^\circ = \frac{1 + \cos 30^\circ}{2} \Rightarrow \cos 15^\circ = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2}$$

$$\tan 15^\circ = \frac{\sin 15^\circ}{\cos 15^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}}{\frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2}} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{\sqrt{2 + \sqrt{3}}} \times \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{\sqrt{2 - \sqrt{3}}} = 2 - \sqrt{3}$$

$$\triangle OHC : \text{tg } \hat{C}_1 = \frac{OH}{CH} \xrightarrow{\hat{C}_1 = 15^\circ} \text{tg } 15^\circ = \frac{OH}{CH} \xrightarrow{CH = BH} \text{tg } 15^\circ = \frac{OH}{BH} \quad (2)$$

$$1, 2 \Rightarrow \frac{OC}{AB} = \text{tg } 15^\circ \xrightarrow{AB = 6} OC = 6 \text{tg } 15^\circ \Rightarrow OC = 6(2 - \sqrt{3})$$

در مثلث قائم‌الزاویه OHC چون یک زاویه‌ی حاده 15° است پس ارتفاع وارد بر OC مساوی $\frac{1}{4}$ آن است.

$$S_{OHC} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} OC \right) (OC) = \frac{1}{8} OC^2 = \frac{1}{8} \left(36(2 - \sqrt{3})^2 \right) = \frac{9}{2} (7 - 4\sqrt{3})$$

$$= \frac{9(7 - 4\sqrt{3})(7 + 4\sqrt{3})}{2(7 + 4\sqrt{3})} = \frac{9}{2(7 + 4\sqrt{3})}$$



۱۸- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\frac{\cos\left(2\alpha - \frac{\pi}{2}\right) + \cos(\alpha + \pi)}{\cotg(2\alpha)} = \frac{\sin 2\alpha - \cos \alpha}{\cotg 2\alpha}$$

$$\sin 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{\frac{3}{2}}{1 + \frac{9}{16}} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{25}{16}} = \frac{24}{25}$$

$$\frac{1}{\cotg 2\alpha} = \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{\frac{3}{2}}{1 - \frac{9}{16}} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{7}{16}} = \frac{24}{7}$$

$$\cos \alpha = \frac{-1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} = \frac{-1}{\sqrt{\frac{25}{16}}} = \frac{-4}{5}$$

$$\Rightarrow \frac{\sin 2\alpha - \cos \alpha}{\cotg 2\alpha} = \frac{\frac{24}{25} - \left(-\frac{4}{5}\right)}{\frac{7}{24}} = \frac{\frac{24 + 20}{25}}{\frac{7}{24}} = \frac{1056}{175}$$



۱۹- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} \Rightarrow \sin^2 \left(\frac{\pi}{12} \right) = \frac{1 - \cos \frac{\pi}{6}}{2} = \frac{2 - \sqrt{3}}{4} \Rightarrow \sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}$$

$$f(x) = \frac{\frac{1}{16} \sin^2 48x}{\frac{1}{16} \sin^2 3x} = \frac{\frac{1}{8} \sin^2 24x}{\frac{1}{4} \sin^2 12x} = \frac{\frac{1}{2} \sin^2 6x}{\sin^2 3x} = \frac{16 (\sin^2 3x \cos^2 3x \cos^2 6x \cos^2 12x \cos^2 24x)}{\sin^2 3x}$$

$$f(x) = \frac{\frac{1}{16} \sin^2 (48x)}{\sin^2 (3x)} = \frac{1}{16} \frac{\sin^2 \left(\frac{4\pi}{3} \right)}{\sin^2 \left(\frac{\pi}{12} \right)} = \frac{1}{16} \frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2}{\frac{2 - \sqrt{3}}{4}} = \frac{3}{16} (2 + \sqrt{3}) = \frac{6 + 3\sqrt{3}}{16}$$

۲۰- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. راه حل اول:

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= 4 \sin \alpha \cos 2\alpha + 2 \sin \alpha \Rightarrow f(\alpha) = 2 \sin \alpha (2 \cos 2\alpha + 1) \\ \cos \alpha f(\alpha) &= 2 \sin \alpha \cos \alpha (2 \cos 2\alpha + 1) \Rightarrow \cos \alpha f(\alpha) = \sin 2\alpha (2 \cos 2\alpha + 1) \\ \Rightarrow \cos \alpha f(\alpha) &= 2 \sin 2\alpha \cos 2\alpha + \sin 2\alpha \Rightarrow \cos \alpha f(\alpha) = \sin 4\alpha + \sin 2\alpha \\ \Rightarrow \cos \alpha f(\alpha) &= \sin(3\alpha + \alpha) + \sin(3\alpha - \alpha) = 2 \sin 3\alpha \cos \alpha \end{aligned}$$

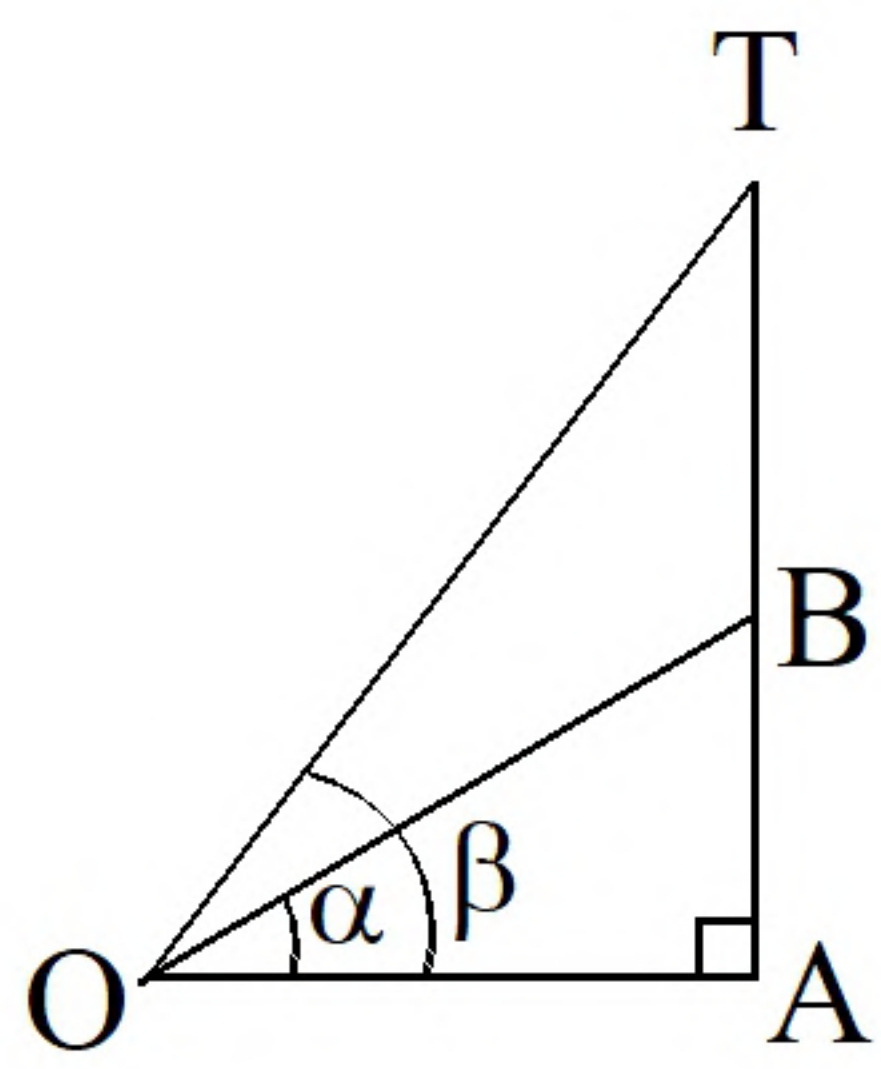
$$\begin{aligned} f(\alpha) &= 2 \sin 3\alpha = 2 \sin \frac{41\pi}{3} = 2 \sin \left(\frac{39\pi + 2\pi}{3} \right) = 2 \sin \left(13\pi + \frac{2\pi}{3} \right) \\ &= -2 \sin \frac{2\pi}{3} = -2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = -\sqrt{3} \end{aligned}$$

راه حل دوم:

$$\begin{aligned} 4 \sin \alpha (1 - 2 \sin^2 \alpha) + 2 \sin \alpha &= 6 \sin \alpha - 8 \sin^3 \alpha = 2(3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha) \\ &= 2 \sin 3\alpha = 2 \sin \frac{41\pi}{3} \\ -2 \sin \frac{2\pi}{3} &= -\sqrt{3} \end{aligned}$$



۲۱- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. $OA = AB = ۱ =$ شعاع دایره مثلثاتی



$$\Rightarrow \tan \alpha = \frac{AB}{OA} = ۱, \quad \tan \beta = \frac{AT}{OA} = \frac{BT + BA}{OA} = ۳$$

$$\tan(\widehat{TOB}) = \tan(\beta - \alpha) = \frac{\tan \beta - \tan \alpha}{1 + \tan \beta \tan \alpha} = \frac{۳ - ۱}{1 + ۱ \times ۳} = \frac{۲}{۴} = \frac{۱}{۲}$$

۲۲- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ابتدا نسبت مثلثاتی خواسته شده را ساده نموده و به کمک فرمول نسبت‌های مثلثاتی زوایای مرکب جواب را می‌یابیم.

$$\sin\left(\frac{۱۳\pi}{۴} + \alpha\right) = \sin\left(۳\pi + \frac{\pi}{۴} + \alpha\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{۴} + \alpha\right) = -\sin\frac{\pi}{۴}\cos\alpha - \sin\alpha\cos\frac{\pi}{۴}$$

$$\Rightarrow \frac{-\sqrt{2}}{۲}(\cos\alpha + \sin\alpha) \xrightarrow{\sin\alpha = \frac{۱}{\sqrt{۵۰}}, \cos\alpha = \frac{۷}{\sqrt{۵۰}}} \frac{-\sqrt{2}}{۲} \times \left(\frac{۱}{۵\sqrt{۲}} + \frac{۷}{۵\sqrt{۲}}\right)$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{۲} \left(\frac{۸}{۵\sqrt{۲}}\right) = -\frac{۴}{۵}$$

۲۳- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\text{Sin برعکس } b < ۰ \Rightarrow \text{Max} = a + |b| = \frac{۳}{۲} \Rightarrow a - b = \frac{۳}{۲}$$

$$A = \left(\frac{\pi}{۲}, ۰\right) \Rightarrow a + b\left(\frac{۱}{۲}\right) = ۰$$

$$\begin{cases} a - b = \frac{۳}{۲} \\ ۲a + b = ۰ \end{cases} \Rightarrow a = \frac{۱}{۲}$$

۲۴- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\text{tg}(۲۸۵) = \text{tg}(۲۷۰ + ۱۵) = -\text{Cotg } ۱۵$$

$$\text{tg}(-۱۶۵) = -\text{tg}(۱۸۰ - ۱۵) = \text{tg } ۱۵$$

$$\text{Sin}(۱۰۹۵) = \text{Sin}(۶\pi + ۱۵) = \text{Sin } ۱۵$$

$$\text{Cos}(۲۵۵) = \text{Cos}(۲۷۰ - ۱۵) = -\text{Sin } ۱۵$$

$$\tan(۲۸۵)\tan(-۱۶۵) - \text{Sin}(۱۰۹۵)\text{Cos}(۲۵۵) = -\cot ۱۵ \times \tan ۱۵ - \text{Sin } ۱۵(-\text{Sin } ۱۵)$$

$$\underbrace{-1 + \text{Sin}^2 ۱۵}_1$$

$$= -1 + \text{Sin}^2 ۱۵ = -(1 - \text{Sin}^2 ۱۵) = -\text{Cos}^2 ۱۵$$



$$S = \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta = \frac{-3}{2}$$

۲۵- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$P = \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta = \frac{-1}{2}$$

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta} = \frac{\frac{-3}{2}}{1 - \left(\frac{-1}{2}\right)} = -1$$

۲۶- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\operatorname{Sin}^2 \alpha + \operatorname{Cos}^2 \alpha = 1 \xrightarrow{\operatorname{Sin} \alpha = \frac{\sqrt{2}}{10}} \frac{2}{100} + \operatorname{Cos}^2 \alpha = 1 \Rightarrow \operatorname{Cos}^2 \alpha = 1 - \frac{1}{50} = \frac{49}{50}$$

$$\Rightarrow \operatorname{Cos} \alpha = \frac{-7}{5\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = -\frac{7\sqrt{2}}{10}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Cos}\left(\frac{11\pi}{4} + \alpha\right) &= \operatorname{Cos}\frac{11\pi}{4} \operatorname{Cos} \alpha - \operatorname{Sin}\frac{11\pi}{4} \operatorname{Sin} \alpha \\ &= \left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right) \left(-\frac{7\sqrt{2}}{10}\right) - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \left(\frac{\sqrt{2}}{10}\right) = \frac{3}{5} \end{aligned}$$

۲۷- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

ابتدا ضابطه تابع را ساده می کنیم

$$y = a + b \operatorname{Sin}\left(\frac{\pi}{2} + x\right) \Rightarrow y = a + b \operatorname{Cos}(x)$$

با توجه به نمودار تابع که عرض از مبدأ آن می نیمم است بنابراین باید ضریب کسینوس منفی باشد ($b < 0$) در نتیجه به ازای $x = \pi$ باید نمودار ماکزیمم شود یعنی نقطه ماکزیمم با عرض ۳ دارای طول π است و تابع از نقاط $A(\pi, 3)$ و

$B\left(\frac{7\pi}{3}, 0\right)$ می گذرد.

$$A(\pi, 3) \Rightarrow a + b \operatorname{Cos}(\pi) = 3 \Rightarrow a - b = 3$$

$$B\left(\frac{7\pi}{3}, 0\right) \Rightarrow a + b \operatorname{Cos}\left(\frac{7\pi}{3}\right) = 0 \Rightarrow a + b \operatorname{Cos}\left(2\pi + \frac{\pi}{3}\right) = 0 \Rightarrow a + \frac{b}{2} = 0$$

بنابراین $a = 1$, $b = -2$ می باشد.



۲۸- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\operatorname{tg} 300^\circ = -\operatorname{tg} 60^\circ = -\sqrt{3}, \operatorname{tg} 480^\circ = -\operatorname{tg} 60^\circ = -\sqrt{3}$$

$$\operatorname{tg} \left(2\pi - \frac{\pi}{3} \right) \quad \operatorname{tg} \left(3\pi - \frac{\pi}{3} \right)$$

$$\operatorname{Cos} 210^\circ = -\operatorname{Cos} 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \operatorname{Sin} 840^\circ = \operatorname{Sin} 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\operatorname{Cos} \left(2\pi + \frac{\pi}{6} \right) \quad \operatorname{Sin} \left(5\pi - \frac{\pi}{3} \right)$$

$$\left(-\sqrt{3} \times -\frac{\sqrt{3}}{2} \right) + \left(-\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{3}{2} - \frac{3}{2} = 0$$

۲۹- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\operatorname{tg} \frac{17\pi}{6} \operatorname{Sin} \frac{11\pi}{3} + \operatorname{Cos} \frac{10\pi}{3} = \operatorname{tg} \left(3\pi - \frac{\pi}{6} \right) \cdot \operatorname{Sin} \left(4\pi - \frac{\pi}{3} \right) + \operatorname{Cos} \left(3\pi + \frac{\pi}{3} \right)$$

$$= \left(-\operatorname{tg} \frac{\pi}{6} \right) \left(-\operatorname{Sin} \frac{\pi}{3} \right) - \operatorname{Cos} \frac{\pi}{3} = \left(-\frac{\sqrt{3}}{3} \right) \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right) - \frac{1}{2} = 0$$

«بانک سوال موسسه یاوران دانش»

۳۰- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$y = a + b \operatorname{Cos} \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \Rightarrow y = a + b \operatorname{Sin} x$$

چون به ازای $x > 0$ ، شروع صعودی است پس $b > 0$

$$y_{\max} = a + b = 3$$

$$f \left(-\frac{5\pi}{6} \right) = 0 \Rightarrow a + b \operatorname{Sin} \left(-\frac{5\pi}{6} \right) = 0 \Rightarrow a - \frac{b}{2} = 0 \Rightarrow b = 2a \Rightarrow a + 2a = 3$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases} \Rightarrow f(x) = 1 + 2 \operatorname{Sin} x \Rightarrow f \left(\frac{\pi}{6} \right) = 1 + 2 \left(\frac{1}{2} \right) = 2$$



۳۱- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\sin\left(\frac{9\pi}{2} + \alpha\right) = \sin\left(\frac{8\pi + \pi}{2} + \alpha\right) = \sin\left(4\pi + \frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos\alpha$$

$$\cos\left(\frac{7\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\left(\frac{6\pi - \pi}{2} - \alpha\right) = \cos\left(3\pi - \frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin\alpha$$

$$\operatorname{tg}\left(\alpha - \frac{3\pi}{2}\right) = -\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\operatorname{Cotg}\alpha$$

$$\cos\alpha(-\sin\alpha) + \operatorname{Cotg}\alpha = -\frac{1}{2}\sin 2\alpha + \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = -\frac{1}{2} \times \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 + \operatorname{tg}^2\alpha} + \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$$

$$= -\frac{1}{2} \times \frac{2 \times \frac{4}{3}}{1 + \frac{16}{9}} + \frac{3}{4} = \frac{27}{100}$$

۳۲- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\frac{\operatorname{tg}x}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2x}} \left(\frac{1}{\sin x} - \sin x\right) = \frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{\sqrt{\frac{1}{\cos^2x}}} \left(\frac{1 - \sin^2x}{\sin x}\right)$$

$$= \frac{\sin x}{\cos x} \times |\cos x| \left(\frac{\cos^2x}{\sin x}\right) = -\cos^2x$$

۳۳- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. با توجه به شروع صعودی به ازای $x > 0$ پس $b > 0$ بنابراین برای آنکه تابع ماکزیمم شود باید $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ باشد، در نتیجه $x = \frac{\pi}{6}$ است یعنی تابع از نقطه $\left(\frac{\pi}{6}, \sqrt{3}\right)$ می‌گذرد.

$$\left(\frac{\pi}{6}, \sqrt{3}\right) \Rightarrow a + b\sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3} \Rightarrow a + b = \sqrt{3} \Rightarrow a = \sqrt{3} - b$$

$$f(\pi) = -\frac{3}{2} \Rightarrow a + b\sin\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{3}{2} \Rightarrow a - \frac{\sqrt{3}}{2}b = -\frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow b + \frac{\sqrt{3}}{2}b = \sqrt{3} + \frac{3}{2} \Rightarrow b \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \sqrt{3} \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \Rightarrow b = \sqrt{3}$$



۳۴- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\begin{aligned} & \sin\left(\frac{17\pi}{3}\right) \cos\left(\frac{-17\pi}{6}\right) + \operatorname{tg}\left(\frac{19\pi}{4}\right) \sin\left(\frac{-11\pi}{6}\right) \\ &= \sin\left(6\pi - \frac{\pi}{3}\right) \cos\left(-3\pi + \frac{\pi}{6}\right) + \operatorname{tg}\left(5\pi - \frac{\pi}{4}\right) \sin\left(-2\pi + \frac{\pi}{6}\right) \\ &= \left(-\sin\frac{\pi}{3}\right) \left(-\cos\frac{\pi}{6}\right) + \left(-\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\right) \left(\sin\frac{\pi}{6}\right) = \frac{-\sqrt{3}}{2} \times \frac{-\sqrt{3}}{2} + (-1) \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

۳۵- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\begin{aligned} & \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x} \left(2 \sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right) - \sin^2 x\right) = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 x} (1 - \sin^2 x)} = \frac{1}{|\cos x|} \cos^2 x \\ &= |\cos x| \xrightarrow{\pi < x < \frac{3\pi}{2}} -\cos x \end{aligned}$$

۳۶- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\begin{aligned} & \operatorname{tg}\frac{11\pi}{4} + \sin\frac{15\pi}{4} \cdot \cos\frac{13\pi}{4} = \operatorname{tg}\left(2\pi + \frac{3\pi}{4}\right) + \sin\left(4\pi - \frac{\pi}{4}\right) \cdot \cos\left(3\pi + \frac{\pi}{4}\right) \\ &= \operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{4}\right) + \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \left(-\cos\frac{\pi}{4}\right) = -1 + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$