

گنجینه سوال رایگان  
+ پاسخ تشریحی

یاوران دانش



راه های ارتباطی با ما:

[www.Dyavari.com](http://www.Dyavari.com)

۰۲۱-۷۶۷۰۳۸۵۸

۰۹۱۲-۳۴ ۹۴ ۱۳۴





	۱	۲	۳	۴
۱ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۲ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۴ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۵ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۶ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۷ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۸ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۹ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۱۰ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۱ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۲ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۳ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۴ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۵ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۶ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۱۷ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۸ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۱۹ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۰ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۱ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۲ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۳ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۴ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۵ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۶ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۲۷ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۲۸ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۹ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۳۰ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۱ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۲ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۳۳ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۴ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۵ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۶ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۷ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۸ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۹ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۴۰ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>







۱- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\text{طرفین تساوی } \sin \alpha - \cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{5} \text{ را به توان ۲ می‌رسانیم:}$$

$$(\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = \frac{3}{25} \Rightarrow \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha - 2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{3}{25}$$

$$1 - \sin 2\alpha = \frac{3}{25} \Rightarrow \sin 2\alpha = 1 - \frac{3}{25} \Rightarrow \sin 2\alpha = \frac{22}{25}$$

۲- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

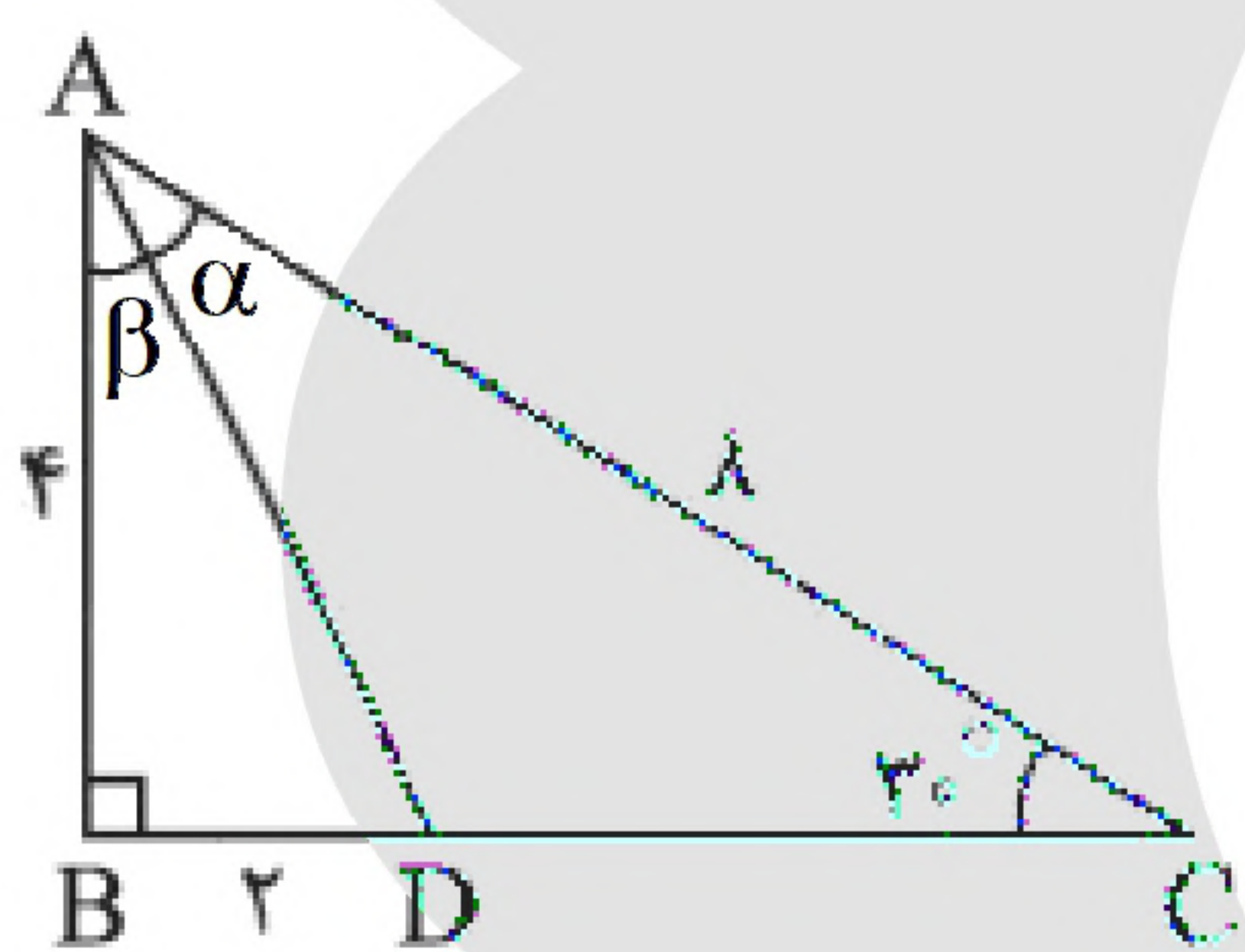
در هر ساعت، عقربه‌ی ساعت‌شمار  $\frac{1}{12}$  دور می‌چرخد که معادل  $\frac{1}{12} \times 2\pi = \frac{\pi}{6}$  رادیان است. بنابراین خواهیم داشت:

$$\frac{\pi}{6} \text{ رادیان } 60 \text{ دقیقه} \Rightarrow x = \frac{60 \times \frac{3\pi}{8}}{\frac{\pi}{6}} = 135 \text{ دقیقه}$$

$x = ?$

۳- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

طول AB نصف AC است.



$$\begin{aligned} \tan \alpha &= \tan \left( \frac{\pi}{3} - \beta \right) = \frac{\tan \frac{\pi}{3} - \tan \beta}{1 + \tan \frac{\pi}{3} \tan \beta} \\ &= \frac{\sqrt{3} - \frac{1}{2}}{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 2} = \frac{(2\sqrt{3} - 1)(2 - \sqrt{3})}{4 - 3} = 5\sqrt{3} - 8 \end{aligned}$$

۴- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

نکته:

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$$

$$\sin a \cos b - \cos a \sin b = 3(\sin a \cos b + \cos a \sin b)$$

$$\Rightarrow 2 \sin a \cos b = -4 \cos a \sin b$$

$$\Rightarrow \frac{\sin a \cos b}{\cos a \sin b} = -2 \Rightarrow \tan a \cot b = -2$$





۵- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\begin{cases} DE = AE \times \sin \frac{\pi}{12} = 8 \times \cos \frac{\pi}{8} \times \sin \frac{\pi}{12} \\ CE = BE \times \cos \frac{\pi}{12} = 8 \times \sin \frac{\pi}{8} \times \cos \frac{\pi}{12} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} DE \times CE &= 64 \sin \frac{\pi}{8} \cos \frac{\pi}{8} \sin \frac{\pi}{12} \cos \frac{\pi}{12} \\ &= 16 \sin \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{6} = 4\sqrt{2} \end{aligned}$$

۶- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\begin{aligned} y &= \frac{\tan x}{1 + \tan^2 x} = \frac{1}{2} \sin 2x \\ x &= \frac{\sqrt{\pi}}{12} \\ &\rightarrow \frac{1}{2} \sin 2 \left( \frac{\sqrt{\pi}}{12} \right) = \frac{1}{2} \left( -\frac{1}{2} \right) = -\frac{1}{4} \Rightarrow \left( \frac{\sqrt{\pi}}{12}, -\frac{1}{4} \right) \in f \\ &\Rightarrow \left( -\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{\pi}}{12} \right) \in f^{-1} \end{aligned}$$

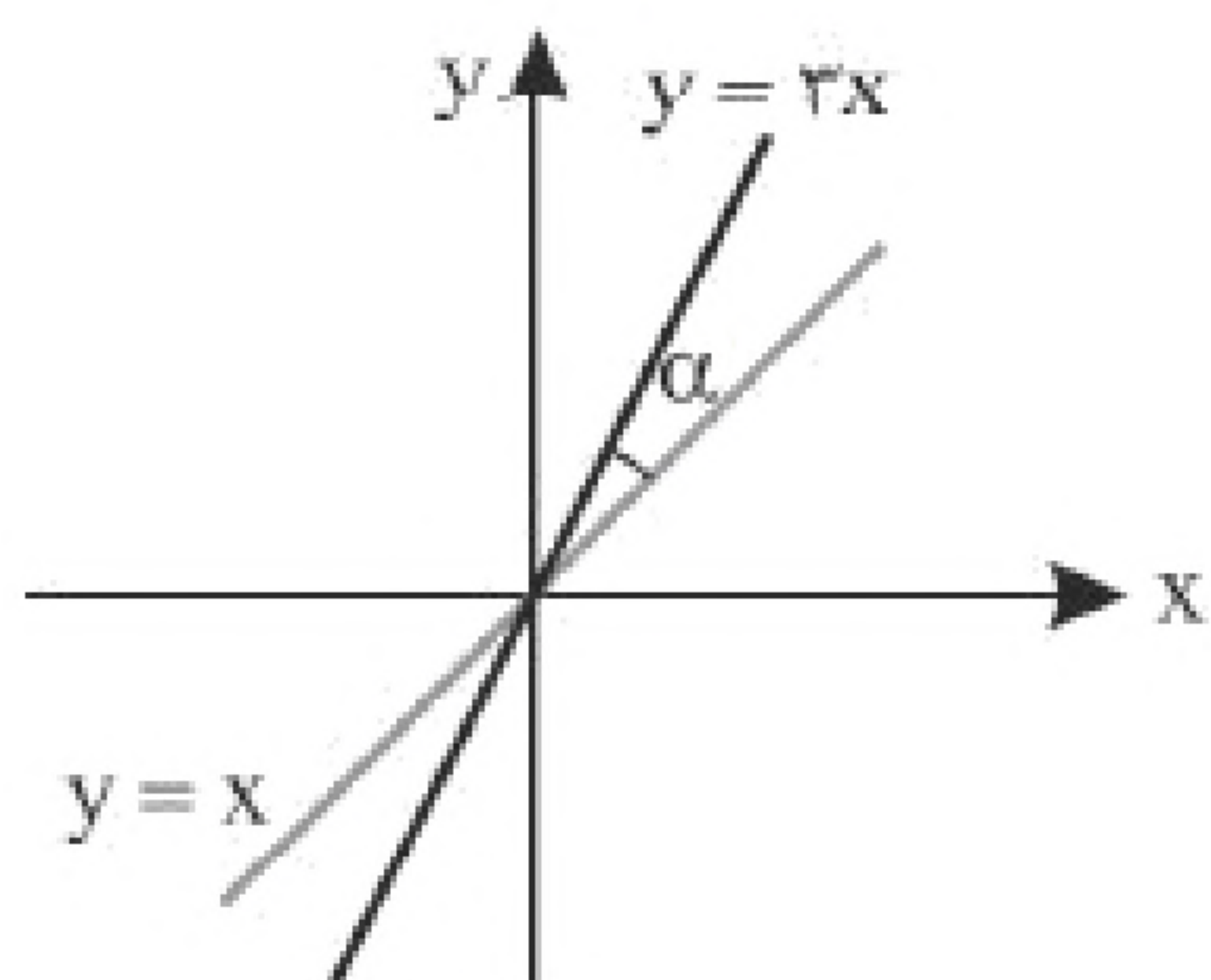
۷- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\begin{aligned} \frac{1}{\cos \alpha} - \frac{1}{\sin \alpha} &= 1 \xrightarrow{\text{توان ۲}} \frac{\sin \alpha - \cos \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha} = 1 \\ \Rightarrow \sin \alpha - \cos \alpha &= \sin \alpha \cos \alpha \\ \xrightarrow{\text{توان ۳}} 1 - \sin^2 \alpha &= \underbrace{(\sin \alpha \cos \alpha)^2}_{\frac{1}{2} \sin^2 \alpha} \Rightarrow 1 - \sin^2 \alpha = \frac{1}{2} \sin^2 \alpha \\ \xrightarrow{\times 4} \sin^2 2\alpha + 4 \sin 2\alpha - 4 &= 0 \\ \Rightarrow \sin 2\alpha &= \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 16}}{2} = -2 \pm 2\sqrt{2} \\ \xrightarrow{\text{حاده } \alpha} \sin 2\alpha &= -2 + 2\sqrt{2} \end{aligned}$$





۸- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.



$$y = x \Rightarrow m = 1 \Rightarrow m = \tan \theta \Rightarrow \tan \theta = 1$$

$$y = 3x \Rightarrow m' = 3 \Rightarrow m' = \tan \beta \Rightarrow \tan \beta = 3$$

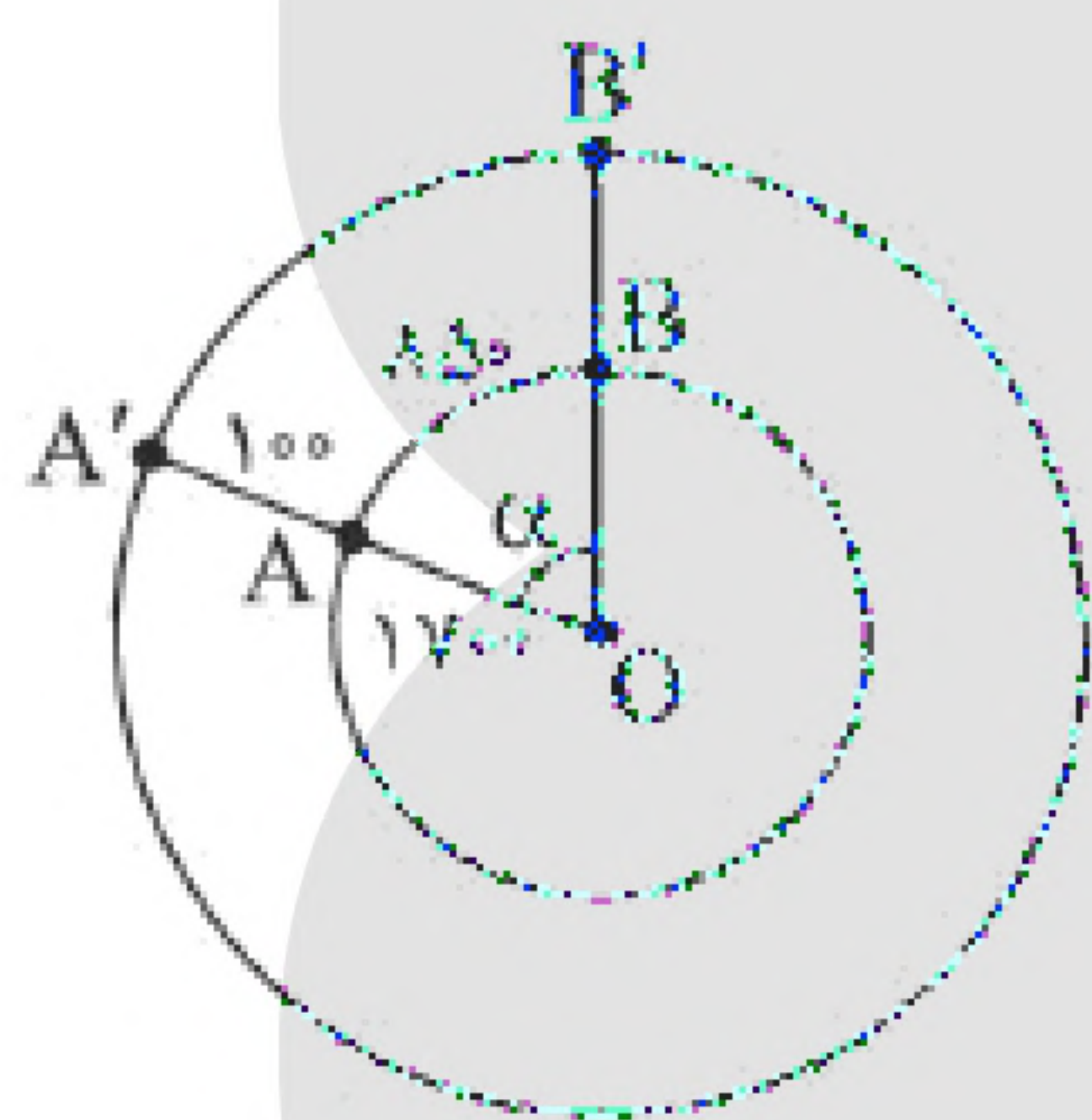
$\alpha$  زاویه بین ۲ خط است که

$$\tan \alpha = \left| \frac{m - m'}{1 + mm'} \right| = \left| \frac{3 - 1}{1 + 3} \right| = \frac{1}{2}$$

$$\tan 2\alpha = \left| \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} \right| = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4}{3}$$

۹- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

در دایره‌ی کوچک‌تر داریم:



$$\alpha = \frac{1}{r} \frac{850}{1700} = \frac{1}{2} \text{ rad}$$

حال دایره‌ی بزرگ‌تر با شعاع  $1700 + 100 \text{ km}$  را در نظر می‌گیریم و طول کمان  $A'B'$  را محاسبه می‌کنیم:

$$\alpha (\text{rad}) = \frac{\text{طول کمان } A'B'}{1700 + 100}$$

$$x = \text{طول کمان } A'B' = \frac{1}{2} \times 1800 = 900 \text{ km}$$

۱۰- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\frac{193\pi}{20} = \frac{160\pi}{20} + \frac{33\pi}{20} = 8\pi + \frac{33\pi}{20}$$

بعد از ۴ دور کامل،  $\frac{33\pi}{20}$  دیگر دوران کرده‌ایم. زاویه‌ی بین هر ۲ کابین مجاور  $\frac{2\pi}{80} = \frac{\pi}{40}$  رادیان است.

$\frac{33\pi}{20}$  یعنی ۶۶ کابین جلوتر:

$$66 + 33 = 99$$

$$99 - 80 = 19$$





۱۱- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

دو زاویه را  $\hat{A}$  و  $\hat{B}$  در نظر می‌گیریم. (فرض:  $\hat{A} > \hat{B}$ )

$$\hat{A} + \hat{B} = \frac{17}{36}\pi \xrightarrow{\text{تبدیل به درجه}} \frac{17 \times 180^\circ}{36} = 85^\circ$$

$$\hat{A} + \hat{B} = 85^\circ$$

$$\hat{A} - \hat{B} = 45^\circ$$

$$\frac{\hat{A} + \hat{B}}{2} = \frac{85^\circ + 45^\circ}{2} \Rightarrow \hat{A} = 65^\circ$$

$$65^\circ - \hat{B} = 45^\circ \Rightarrow \hat{B} = 20^\circ \xrightarrow{4 \times \hat{B}} 4\hat{B} = 80^\circ$$

$$\xrightarrow{\text{مکمل}} 180^\circ - 80^\circ = 100^\circ \text{ ربع دوم ناحیه‌ی مثلثاتی}$$

۱۲- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\operatorname{tg} x - 2 \operatorname{Cotg} x = 1 \Rightarrow \operatorname{tg} x - \frac{2}{\operatorname{tg} x} = 1$$

$$\xrightarrow{\times \operatorname{tg} x} \operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg} x - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \operatorname{tg} x = -1 \times \\ \operatorname{tg} x = 2 \end{cases}$$

$$\operatorname{Cos} 2x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \frac{1 - 4}{1 + 4} = -\frac{3}{5}$$

«بانک سوال موسسه یاوران دانش»

۱۳- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{1 + \operatorname{tg} 10^\circ} + \frac{1}{1 + \operatorname{tg} 80^\circ} = \frac{1}{1 + \operatorname{tg} 10^\circ} + \frac{1}{1 + \operatorname{Cotg} 10^\circ} \\ &= \frac{1 + \operatorname{Cotg} 10^\circ + 1 + \operatorname{tg} 10^\circ}{(1 + \operatorname{tg} 10^\circ)(1 + \operatorname{Cotg} 10^\circ)} = \frac{2 + \operatorname{tg} 10^\circ + \operatorname{Cotg} 10^\circ}{1 + \operatorname{Cotg} 10^\circ + \operatorname{tg} 10^\circ + \operatorname{tg} 10^\circ \operatorname{Cotg} 10^\circ} \\ &= \frac{2 + \operatorname{tg} 10^\circ + \operatorname{Cotg} 10^\circ}{2 + \operatorname{tg} 10^\circ + \operatorname{Cotg} 10^\circ} = 1 \end{aligned}$$

۱۴- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

می‌دانیم:  $\operatorname{Sin}(13^\circ + 90^\circ) = \operatorname{Cos} 13^\circ$ ، پس:

$$2 \operatorname{Sin} 13^\circ \operatorname{Cos} 13^\circ = \operatorname{Sin} 26^\circ$$

می‌دانیم:  $\operatorname{Sin} \alpha = \operatorname{Cos}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ ، پس:

$$\operatorname{Sin} 26^\circ = \operatorname{Cos} 64^\circ$$

می‌دانیم:  $\operatorname{Cos} 2\alpha = 2 \operatorname{Cos}^2 \alpha - 1$ ، پس:

$$\operatorname{Cos} 64^\circ = 2 \operatorname{Cos}^2 32^\circ - 1$$





۱۵- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

بررسی گزینه‌ها:

گزینه (۱):

$$f(-x) = \sin(-x) + \cos(-x) = \cos x - \sin x \neq -f(x)$$

گزینه (۲):

$$f(-x) = \operatorname{tg}(-x) + \cos(-x) = \cos x - \operatorname{tg} x \neq -f(x)$$

گزینه (۳):

$$\begin{aligned} f(-x) &= \operatorname{tg}(-x) + \operatorname{Cotg}(-x) = -\operatorname{tg} x - \operatorname{Cotg} x \\ &= -(\operatorname{tg} x + \operatorname{Cotg} x) = -f(x) \end{aligned}$$

گزینه (۴):

$$f(-x) = \sin^3(-x) + \cos^3(-x) = -\sin^3 x + \cos^3 x \neq -f(x)$$

۱۶- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

مساحت شش ضلعی منتظم به ضلع  $a$  برابر  $\frac{3\sqrt{3}}{2}a^2$  است پس:

$$\frac{3\sqrt{3}}{2}a^2 = \sqrt{108} \Rightarrow \frac{3\sqrt{3}}{2}a^2 = 6\sqrt{3} \Rightarrow a^2 = 4 \Rightarrow a = 2$$

طول ضلع شش ضلعی و شعاع دایره برابرند، بنابراین دایره دارای شعاع ۲ واحد است و کمان  $AB$  روبه‌رو به زاویه مرکزی  $120^\circ$  است:

$$L = r\theta = 2 \times \frac{2\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$$

۱۷- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1 + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} x} = 2 \Rightarrow 1 + \operatorname{tg} x = 2 - 2\operatorname{tg} x \Rightarrow \operatorname{tg} x = \frac{1}{3}$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{4} - 2x\right) = \frac{-1 - \operatorname{tg} 2x}{1 + \operatorname{tg} \frac{3\pi}{4} \operatorname{tg} 2x} = \frac{-1 - \operatorname{tg} 2x}{1 - \operatorname{tg} 2x}$$

از طرفی:

$$\operatorname{tg} 2x = \frac{2\operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow \operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{4} - 2x\right) = \frac{-1 - \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{4}} = -\frac{3}{3} = -1$$





۱۸- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

طرفین فرض را بر  $\cos^2 \alpha \neq 0$  تقسیم می‌کنیم:

$$\operatorname{tg}^2 \alpha + 6 = \frac{2}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow \operatorname{tg}^2 \alpha + 6 = 2(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) \Rightarrow \operatorname{tg}^2 \alpha = 4 \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \pm 2$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{\pm 4}{1 - 4} = \pm \frac{4}{3}$$

۱۹- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\operatorname{tg}(\alpha + 45^\circ) = \frac{1 + \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg} \alpha} = \frac{1 + \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 3$$

از طرفی طبق شکل داریم:

$$\operatorname{Cotg} \alpha = 2 \Rightarrow \frac{AB}{MB} = 2 \Rightarrow AB = 2MB$$

$$\operatorname{tg}(\alpha + 45^\circ) = \frac{MB + 10}{AB} = \frac{MB + 10}{2MB} = 3 \Rightarrow MB = 2 \Rightarrow AB = 4$$

۲۰- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

زاویه  $2\alpha$  تقریباً برابر  $36^\circ$  است پس در ناحیه اول است:

$$\sin 2\alpha = \sqrt{1 - \cos^2 2\alpha} = \sqrt{1 - 0.64} = 0.6$$

$$\sin 4\alpha = 2 \sin 2\alpha \cos 2\alpha = 2 \times 0.6 \times 0.8 = 0.96$$

۲۱- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

دقت کنید که در مثلث  $ABC$ ، زاویه  $B$  برابر  $\alpha$  است:

$$\begin{cases} \sin \alpha = \sin(\widehat{ABC}) = \frac{AC}{BC} = \frac{4}{\sqrt{52}} = \frac{2}{\sqrt{13}} \\ \cos \alpha = \cos(\widehat{ABC}) = \frac{AB}{BC} = \frac{6}{\sqrt{52}} = \frac{3}{\sqrt{13}} \end{cases}$$

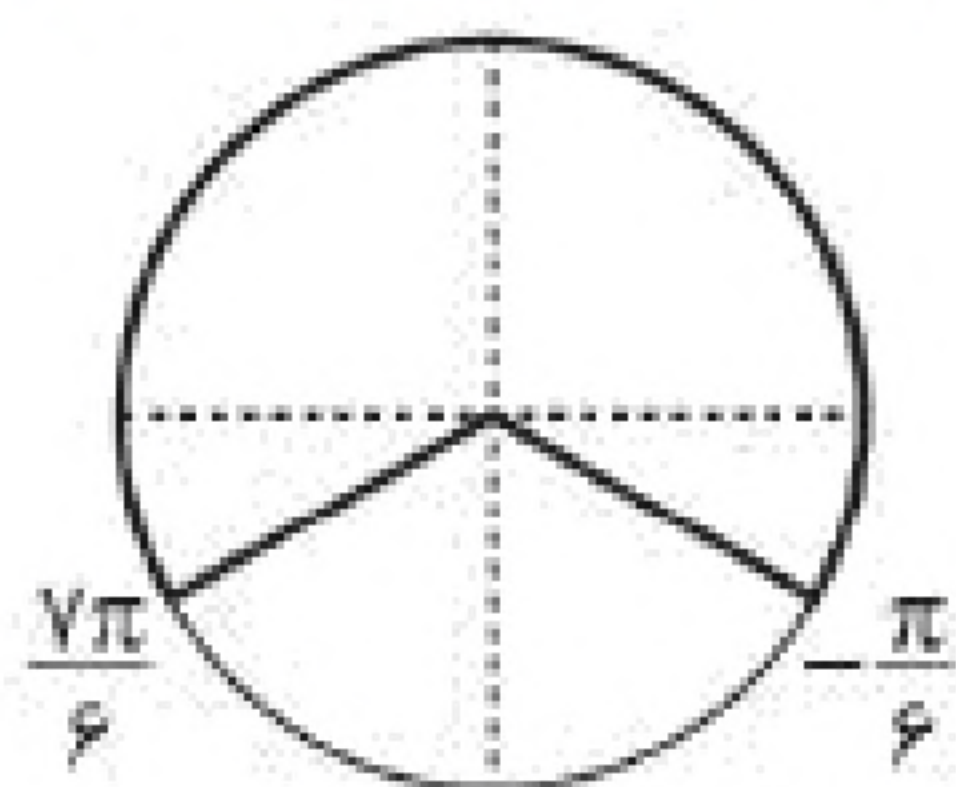
$$\Rightarrow \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \frac{9}{13} - \frac{4}{13} = \frac{5}{13}$$





۲۲- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$A = (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)(\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) = \cos 2\alpha$$



$$-1 \leq \cos 2\alpha \leq 1$$

۲۳- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.  
راه حل اول:

$$\begin{aligned} \hat{A} &= \pi - (\hat{B} + \hat{C}) \Rightarrow \sin \hat{A} = \sin(\hat{B} + \hat{C}) \\ P &= 2 \cos \hat{B} \sin \hat{C} - \sin(\hat{B} + \hat{C}) \\ &= 2 \cos \hat{B} \sin \hat{C} - (\sin \hat{B} \cos \hat{C} + \cos \hat{B} \sin \hat{C}) \\ &= \cos \hat{B} \sin \hat{C} - \sin \hat{B} \cos \hat{C} \\ &= \sin(\hat{C} - \hat{B}) = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

راه حل دوم: فرض کنید:

$$\begin{aligned} \hat{C} &= \frac{\pi}{4}, \hat{B} = \frac{\pi}{4}, \hat{A} = \frac{\pi}{4} \\ P &= 2 \cos \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{4} - \sin \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

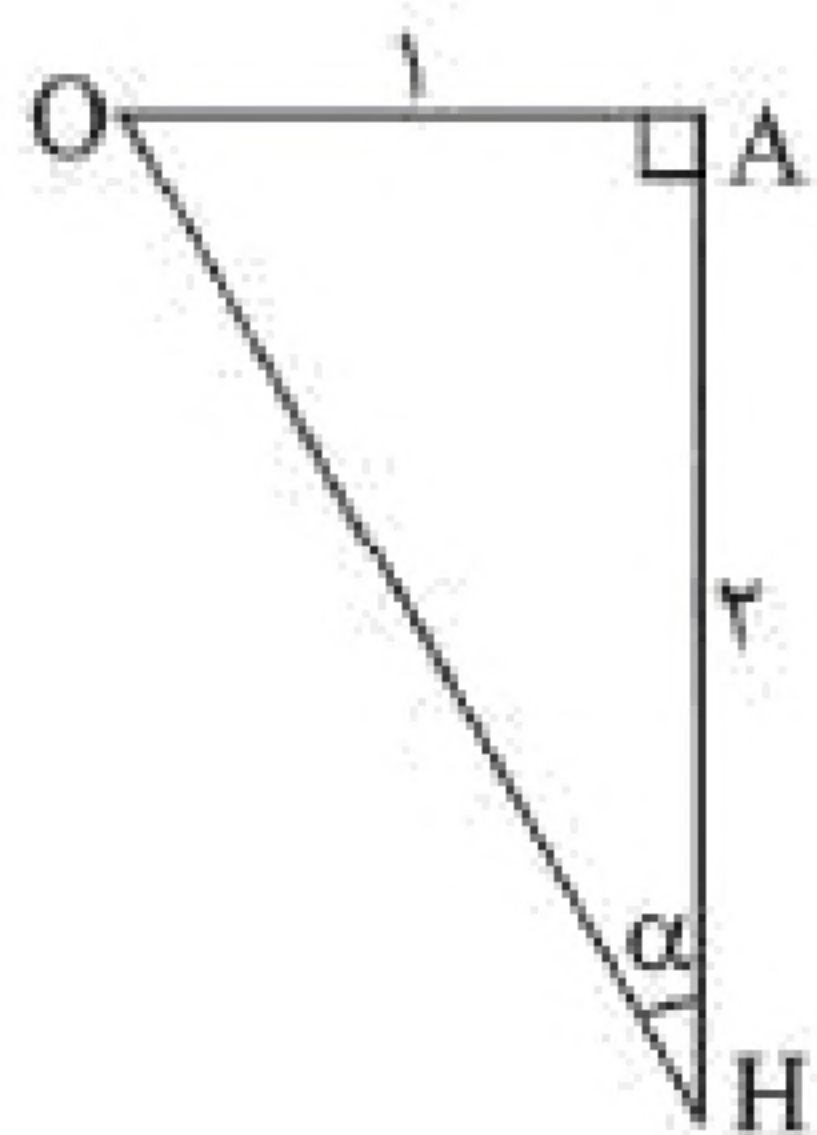
۲۴- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\begin{aligned} \cos \frac{7\pi}{12} &= \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{12}\right) = -\sin \frac{\pi}{12} \\ \cos \frac{11\pi}{12} &= \cos\left(\pi - \frac{\pi}{12}\right) = -\cos \frac{\pi}{12} \\ \sin \frac{7\pi}{6} &= \sin\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = -\sin \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2} \\ P &= \left(-\sin \frac{\pi}{12}\right)\left(-\cos \frac{\pi}{12}\right) - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{6} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4} \end{aligned}$$





۲۵- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.  
به مثلث OAH توجه کنید:



$$\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = \sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

۲۶- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\frac{2 \cot x + \frac{1}{2}}{\cot x + \frac{1}{2}} = 3 \Rightarrow 2 \cot x + \frac{1}{2} = 3 \cot x + \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \cot x = -1 \Rightarrow x = \frac{3\pi}{4} \text{ یا } \frac{7\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \cos 2x = 0$$

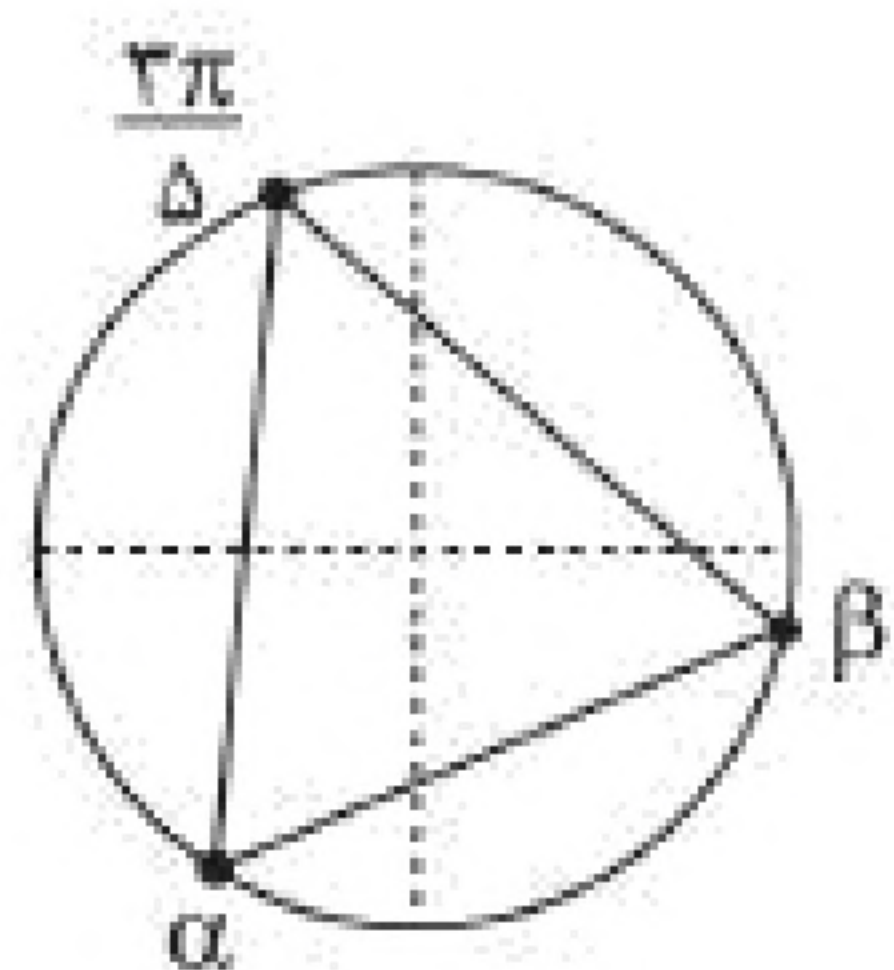
۲۷- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = \sin \alpha = \frac{5}{13} \xrightarrow[\alpha \text{ در ربع دوم}]{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1} \cos \alpha = -\frac{12}{13}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos \alpha = -\frac{12}{13}$$

۲۸- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

باید  $2\pi$  را به ۳ قسمت مساوی تقسیم کنیم:



$$\begin{cases} \alpha = \frac{3\pi}{5} + \frac{2\pi}{3} \\ \beta = \frac{3\pi}{5} + \frac{4\pi}{3} \end{cases} \Rightarrow \alpha + \beta = \frac{16\pi}{5}$$

۲۹- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

زاویه ۳ رادیان در ناحیه دوم و زاویه ۴ رادیان در ناحیه سوم دایره مثلثاتی قرار دارد، پس کسینوس ۳ رادیان، منفی و سینوس ۴ رادیان نیز منفی است.





«بانک سوال موسسه یاوران دانش»

۳۰- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

چون حاصل  $[x]$  عددی صحیح است، پس در تابع  $f(x) = \cos\left(\frac{\pi [x]}{2}\right)$  کمان تابع کسینوس به صورت  $\frac{k\pi}{2}$  خواهد بود  $(k \in \mathbb{Z})$ ، یعنی ضابطه تابع  $f$  به صورت  $f(x) = \cos\left(\frac{k\pi}{2}\right)$  است که چون  $\frac{k\pi}{2}$  چهار نقطه اصلی دایره مثلثاتی را مشخص می کند، پس مقادیر تابع  $f$  اعداد  $-1, 0, 1$  است یعنی  $R_f = \{-1, 0, 1\}$ .

۳۱- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

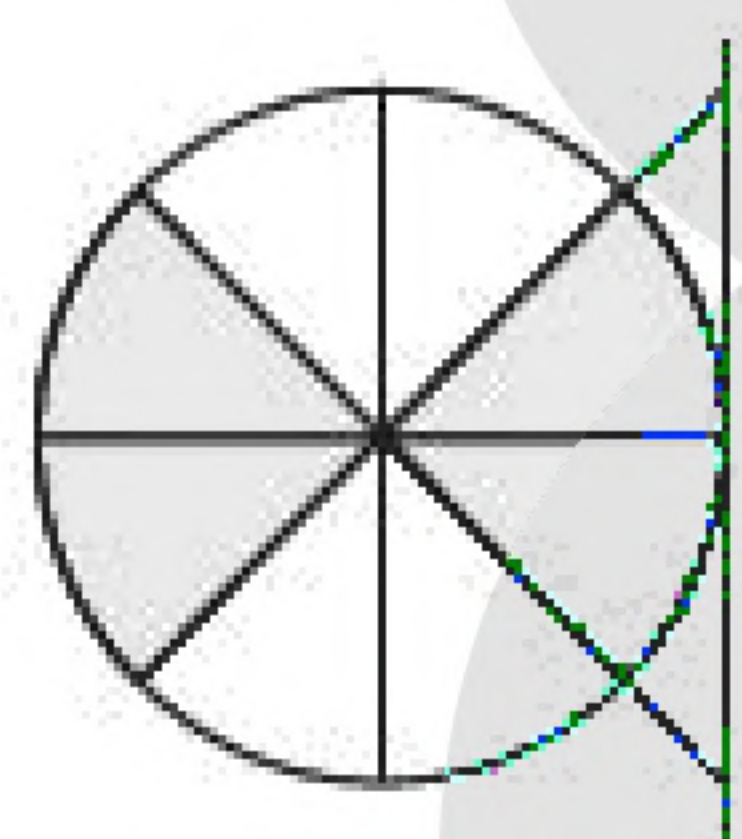
با طرفین وسطین داریم:

$$2 \cos^2 x - 5(2 \sin x \cdot \cos x) = 1 \Rightarrow 2 \cos^2 x - 1 = 5(2 \sin x \cdot \cos x)$$

$$\Rightarrow \cos 2x = 5 \sin 2x \Rightarrow \tan 2x = \frac{1}{5}$$

$$\tan 4x = \frac{2 \tan 2x}{1 - \tan^2 2x} = \frac{2 \left(\frac{1}{5}\right)}{1 - \left(\frac{1}{5}\right)^2} = \frac{\frac{2}{5}}{\frac{24}{25}} = \frac{5}{12}$$

۳۲- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.



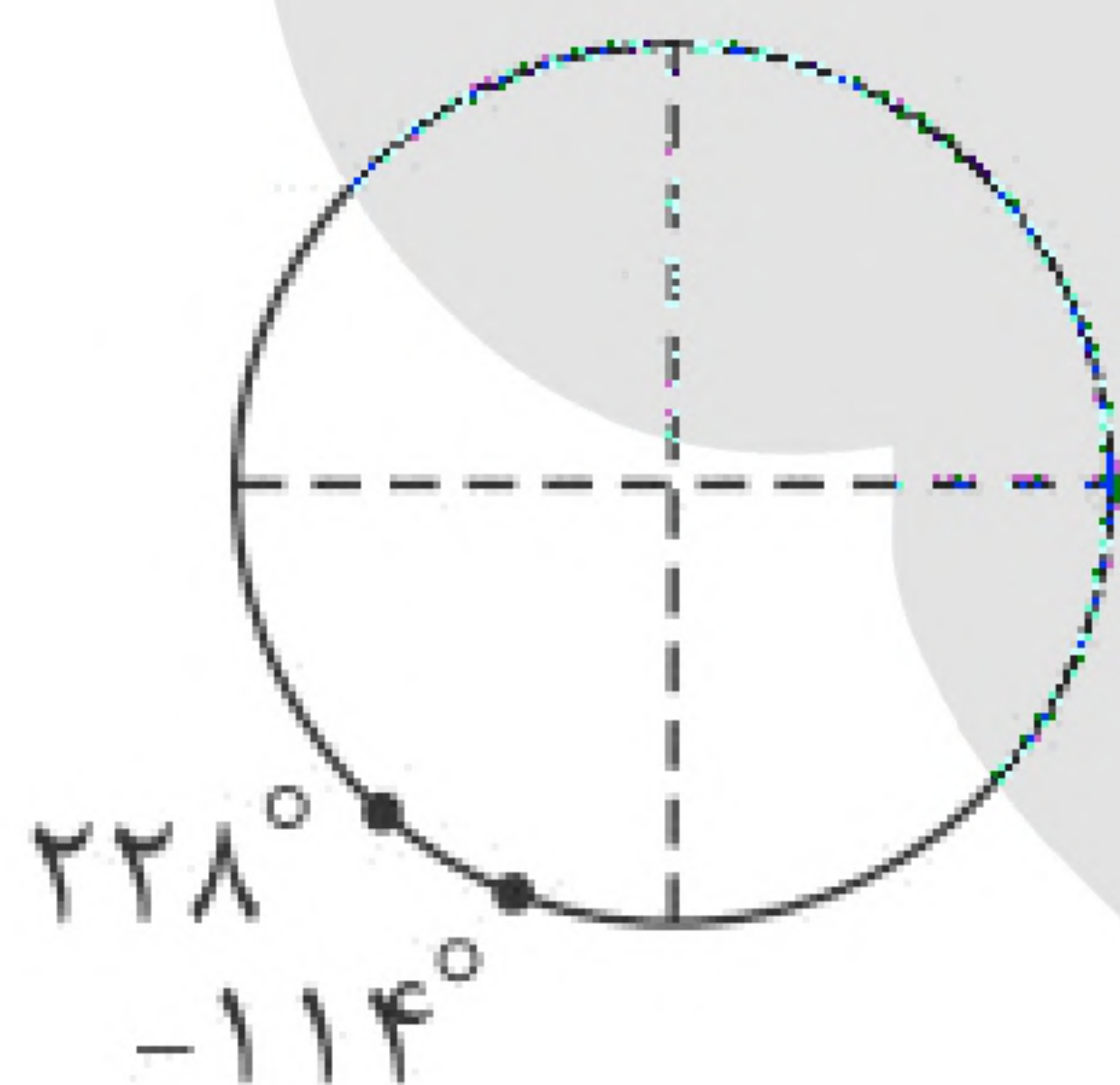
$$\tan \alpha \cdot \tan 2\alpha > 0 \Rightarrow \frac{2 \tan^2 \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} > 0 \Rightarrow \tan^2 \alpha < 1 \Rightarrow -1 < \tan \alpha < 1$$

۳۳- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

هر یک رادیان تقریباً  $57^\circ$  است.

ناحیه ۳  $228^\circ \approx 4 \times 57^\circ = 4$  رادیان

ناحیه ۳  $-114^\circ \approx -2 \times 57^\circ = -2$  رادیان



۳۴- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. فرض کنید  $DC = x$  پس  $\tan \alpha = \frac{AB}{30 + x} = \frac{1}{4}$  در نتیجه  $AB = \frac{30 + x}{4}$

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{16}} = \frac{8}{15} = \frac{\frac{30 + x}{4}}{30}$$

$$\Rightarrow \frac{8}{15} = \frac{30 + x}{120} \Rightarrow x = 34$$





۳۵- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\sin \alpha = -\cos \left( \beta - \frac{\pi}{3} \right) = \sin \left( \frac{3\pi}{2} - \beta + \frac{\pi}{3} \right) = \sin \left( \frac{11\pi}{6} - \beta \right)$$

یکی از حالت‌ها آن است که  $\alpha = \frac{11\pi}{6} - \beta$  باشد پس  $\alpha + \beta = \frac{11\pi}{6}$

۳۶- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

طول کمال مقابل به زاویه  $\alpha$  در دایره‌ای به شعاع  $R$  برابر است با  $R \alpha$

$$\begin{aligned} \text{محیط} &= R_1 \alpha + R_2 \alpha + 2(R_2 - R_1) = 4 \left( \frac{2\pi}{3} \right) + 6 \left( \frac{2\pi}{3} \right) + 2(6 - 4) \\ &= \frac{8}{3} \times 3 + 4 \times 3 + 2 \times 2 = 8 + 12 + 4 = 24 \end{aligned}$$

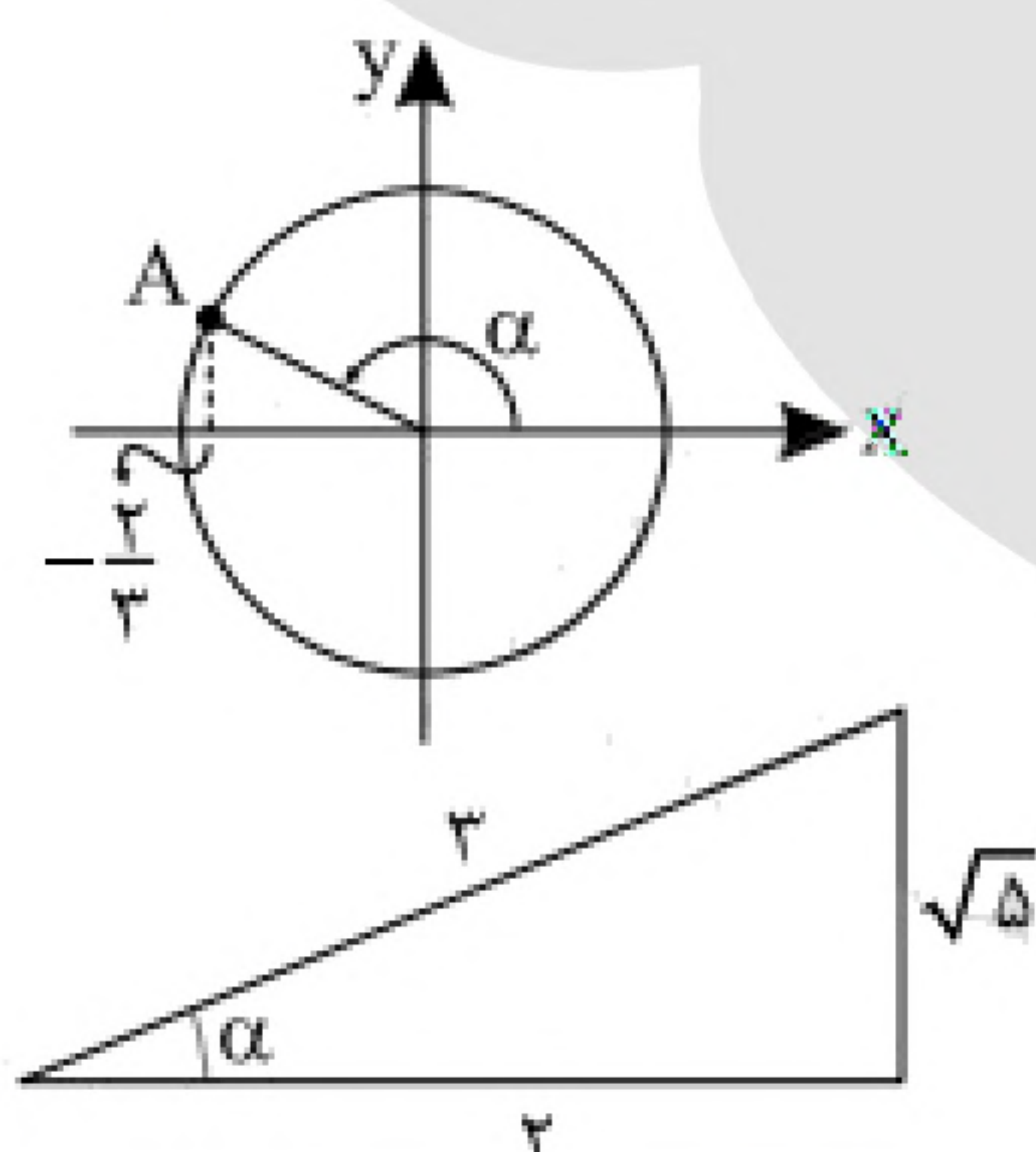
۳۷- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$S = \frac{MH + AT}{2} \times AH \Rightarrow S = \frac{\sin \alpha + \tan \alpha}{2} \times (1 - \cos \alpha)$$

$$S = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{8}$$

۳۸- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. با توجه به شکل  $\cos(\alpha) = -\frac{2}{3}$  سایر نسبت‌های مثلثاتی مربوط به  $\alpha$  را با رسم

یک مثلث پیدا می‌کنیم:



$$\sin \alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$\tan \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$3 \cos \left( \frac{3\pi}{2} - \alpha \right) + 4 \tan^2 \alpha = -3 \sin \alpha + 4 \tan^2 \alpha$$

$$\Rightarrow -3 \left( \frac{\sqrt{5}}{3} \right) + 4 \left( -\frac{\sqrt{5}}{2} \right)^2 = -\sqrt{5} + 4 \left( \frac{5}{4} \right) - \sqrt{5} + 5$$





۳۹- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.  
نکته: اگر  $\alpha$  و  $\beta$  متمم باشند.

$$\cos \alpha = \sin \beta, \quad \cos \beta = \sin \alpha$$

$$\cos 75^\circ = \sin 15^\circ, \quad \sin 75^\circ = \cos 15^\circ$$

$$A = \left( \sin 15^\circ - \frac{1}{\cos 15^\circ} \right) \left( \cos 15^\circ - \frac{1}{\sin 15^\circ} \right)$$

$$A = \frac{(\cos 15^\circ \sin 15^\circ - 1)^2}{\cos 15^\circ \sin 15^\circ} = \frac{\left( \frac{1}{2} \sin 30^\circ - 1 \right)^2}{\frac{1}{2} \sin 30^\circ}$$

$$90^\circ = 75^\circ + 15^\circ \text{ پس:}$$

دقت کنید

$$\sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2} \sin 2\alpha$$

$$A = \frac{\left( \frac{3}{4} \right)^2}{\frac{1}{4}} = \frac{\frac{9}{16}}{\frac{1}{4}} = \frac{9}{4}$$

$$\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha \quad \sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$$

۴۰- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.  
نکته ۱:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \quad \text{نکته ۲:}$$

اگر فرض کنیم در مثلث قائم الزاویه  $\widehat{ABC}$  زاویه  $A$  قائمه است، داریم:

$$\begin{cases} \widehat{A} = 90^\circ \\ \widehat{B} + \widehat{C} = 90^\circ \end{cases}$$

پس با توجه به نکات ۱ و ۲، خواهیم داشت:

$$\frac{\sin^2 90^\circ + \sin^2 \widehat{B} + \sin^2 (90^\circ - \widehat{B})}{\cos^2 90^\circ + \cos^2 \widehat{B} + \cos^2 (90^\circ - \widehat{B})} = \frac{1 + \sin^2 \widehat{B} + \cos^2 \widehat{B}}{0 + \cos^2 \widehat{B} + \sin^2 \widehat{B}} = \frac{1 + 1}{0 + 1} = \frac{2}{1} = 2$$