

گنجینه سوال رایگان  
+ پاسخ تشریحی

یاوران دانش



راه های ارتباطی با ما:

[www.Dyavari.com](http://www.Dyavari.com)

۰۲۱-۷۶۷۰۳۸۵۸

۰۹۱۲-۳۴ ۹۴ ۱۳۴





	۱	۲	۳	۴
۱ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۲ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۴ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۵ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۶ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۷ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۸ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۹ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۰ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۱ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۱۲ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۳ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۱۴ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۱۵ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۶ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۷ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۸ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۹ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۰ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۱ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۲ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۳ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۲۴ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۲۵ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۶ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۲۷ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۸ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۹ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۰ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۱ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۲ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۳ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۴ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۵ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۳۶ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۳۷ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۸ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۹ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۴۰ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>







عبارت مورنظر =  $\sin \alpha \cdot \cos \alpha (\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha)$

$$= \frac{1}{2} \times 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha \cdot (-\cos^2 \alpha)$$

$$= \frac{1}{2} \sin^2 \alpha (-\cos^2 \alpha)$$

$$= -\frac{1}{4} \sin \alpha = -\frac{1}{4} \sin \left( 4 \times \frac{\pi}{16} \right) = -\frac{1}{4} \sin \left( \frac{\pi}{4} \right) = -\frac{1}{4} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = -\frac{\sqrt{2}}{8}$$

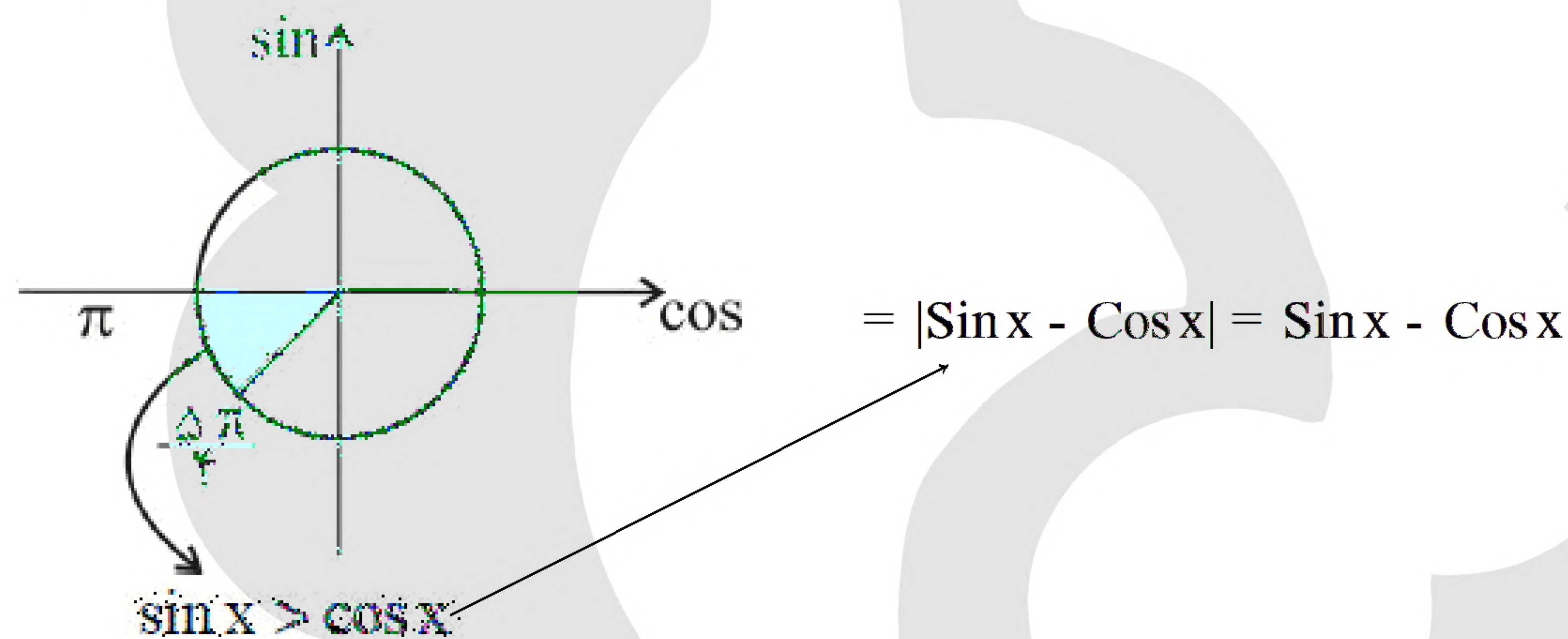
۱- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\sqrt{1 - 2\sqrt{\sin^2 x (1 - \sin^2 x)}} = \sqrt{1 - 2\sqrt{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}}$$

۲- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$= \sqrt{1 - 2|\sin x||\cos x|} \xrightarrow{\pi < x < \frac{5\pi}{4} \Rightarrow \sin x < 0, \cos x < 0} \sqrt{1 - 2\sin x \cos x}$$

$$= \sqrt{1 - 2\sin x \cos x} = \sqrt{(\sin x - \cos x)^2}$$



۳- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{1}{2} \xrightarrow{\text{توان ۲}} \underbrace{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}_1 + \underbrace{2\sin \alpha \cdot \cos \alpha}_{\sin 2\alpha} = \frac{1}{4}$$

$$1 + \sin 2\alpha = \frac{1}{4} \Rightarrow \sin 2\alpha = -\frac{3}{4}$$

$$\cos 4\alpha = 1 - 2\sin^2 2\alpha = 1 - 2\left(-\frac{3}{4}\right)^2 = 1 - \frac{9}{8} = -\frac{1}{8}$$

$$\cos 8\alpha = 2\cos^2 4\alpha - 1 = 2\left(-\frac{1}{8}\right)^2 - 1 = \frac{-31}{32}$$





۴- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\sin x - \cos x = \frac{1}{2} \xrightarrow{\text{دو طرف به توان ۲}} \underbrace{\sin^2 x + \cos^2 x}_1 - \underbrace{2 \sin x \cdot \cos x}_{\sin 2x} = \frac{1}{4}$$

$$1 - \sin 2x = \frac{1}{4} \Rightarrow \sin 2x = \frac{3}{4} \quad (1)$$

$$\Rightarrow \sin^2 2x + \cos^2 2x = 1 \Rightarrow \frac{9}{16} + \cos^2 2x = 1 \Rightarrow \cos^2 2x = \frac{7}{16}$$

$$\Rightarrow \cos 2x = \pm \frac{\sqrt{7}}{4}$$

$$\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2} \xrightarrow{\times 2} \frac{\pi}{2} < 2x < \pi$$

$$\text{ناحیه دوم مثلثاتی} \quad (\cos 2x < 0) \Rightarrow \cos 2x = -\frac{\sqrt{7}}{4} \quad (2)$$

$$1, 2 \Rightarrow \sin 4x = 2 \sin 2x \cdot \cos 2x = 2 \left( \frac{3}{4} \right) \left( -\frac{\sqrt{7}}{4} \right) = -\frac{3\sqrt{7}}{8}$$

$$\text{عبارت مورد نظر} = \frac{8 \sin 4x}{\sqrt{7}} = \frac{8}{\sqrt{7}} \left( -\frac{3\sqrt{7}}{8} \right) = -3$$

۵- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$\theta$  بر حسب رادیان است

$$\widehat{AB} = R \cdot \theta$$

$$OA = OB = R \quad \begin{array}{l} \text{شعاع دایره} \\ \text{رادیان} \end{array}$$

$$OAB \text{ محیط} = 2R + R \cdot \theta = 10.8$$

$$2 \times 2.4 + 2.4\theta = 10.8 \Rightarrow \theta = 2/5 \text{ رادیان}$$

$$\theta = \frac{180}{\pi} \times 2/5 \text{ رادیان} = \frac{180}{3} \times 2/5 = 150^\circ$$





۶- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. کسینوس، منفی کمان خود را حذف ولی تانژانت، منفی کمان را به ضریب منتقل می‌کند:

$$۴ \sin\left(\pi - \frac{\pi}{۳}\right) \cos\left(۳\pi - \frac{\pi}{۶}\right) - ۸ \operatorname{tg}\left(۵\pi - \frac{\pi}{۴}\right) \sin\left(۲\pi - \frac{\pi}{۶}\right)$$

دوره‌های دایره در محاسبه نسبت مثلثاتی تأثیری ندارند.

$$-۴ \sin\left(\frac{\pi}{۳}\right) \cos\left(\pi - \frac{\pi}{۶}\right) - ۸ \operatorname{tg}\left(\pi - \frac{\pi}{۴}\right) \sin\left(-\frac{\pi}{۶}\right)$$

$$= +۴ \sin\left(\frac{\pi}{۳}\right) \cos\left(\frac{\pi}{۶}\right) - ۸ \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{۴}\right) \sin\left(\frac{\pi}{۶}\right) = ۴ \times \frac{\sqrt{۳}}{۲} \times \frac{\sqrt{۳}}{۲} - ۸ \times ۱ \times \frac{۱}{۲} = ۳ - ۴ = -۱$$

۷- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. شیب خط برابر است با تانژانت زاویه‌ای که خط با جهت مثبت محور افقی می‌سازد، بنابراین:

$$y = -۰/۴x + \frac{۱}{۳} \Rightarrow \operatorname{tg} ۱۶۰ = -۰/۴ \Rightarrow \operatorname{tg}(\pi - ۲۰) = -۰/۴ \Rightarrow -\operatorname{tg} ۲۰ = -۰/۴ \Rightarrow \operatorname{tg} ۲۰ = ۰/۴$$

شیب خط =  $\operatorname{tg} \alpha$

$$\frac{\sin\left(\frac{۳\pi}{۲} - ۲۰^\circ\right) + \sin(۴\pi - ۲۰^\circ)}{\cos(۲\pi + \pi + ۲۰^\circ) - \cos\left(\frac{\pi}{۲} + ۲۰^\circ\right)} = \frac{-\cos ۲۰^\circ - \sin ۲۰^\circ}{-\cos ۲۰^\circ + \sin ۲۰^\circ}$$

$$\xrightarrow{\text{صورت و مخرج بر } \cos ۲۰^\circ \text{ تقسیم می‌شود}} \frac{-۱ - \operatorname{tg} ۲۰^\circ}{-۱ + \operatorname{tg} ۲۰^\circ} = \frac{-۱ - ۰/۴}{-۱ + ۰/۴} = \frac{-۱/۴}{-۰/۶} = \frac{۷}{۳}$$

۸- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$۱ + \operatorname{tg}^۲ \alpha = \frac{۱}{\cos^۲ \alpha} \Rightarrow ۱ + \frac{۹}{۱۶} = \frac{۱}{\cos^۲ \alpha} \Rightarrow \cos \alpha = \pm \frac{۴}{۵}$$

$$\xrightarrow{\text{ناحیه دوم مثلثاتی}} \cos \alpha = -\frac{۴}{۵}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \Rightarrow \frac{-۳}{۴} = \frac{\sin \alpha}{-\frac{۴}{۵}} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{۳}{۵}$$

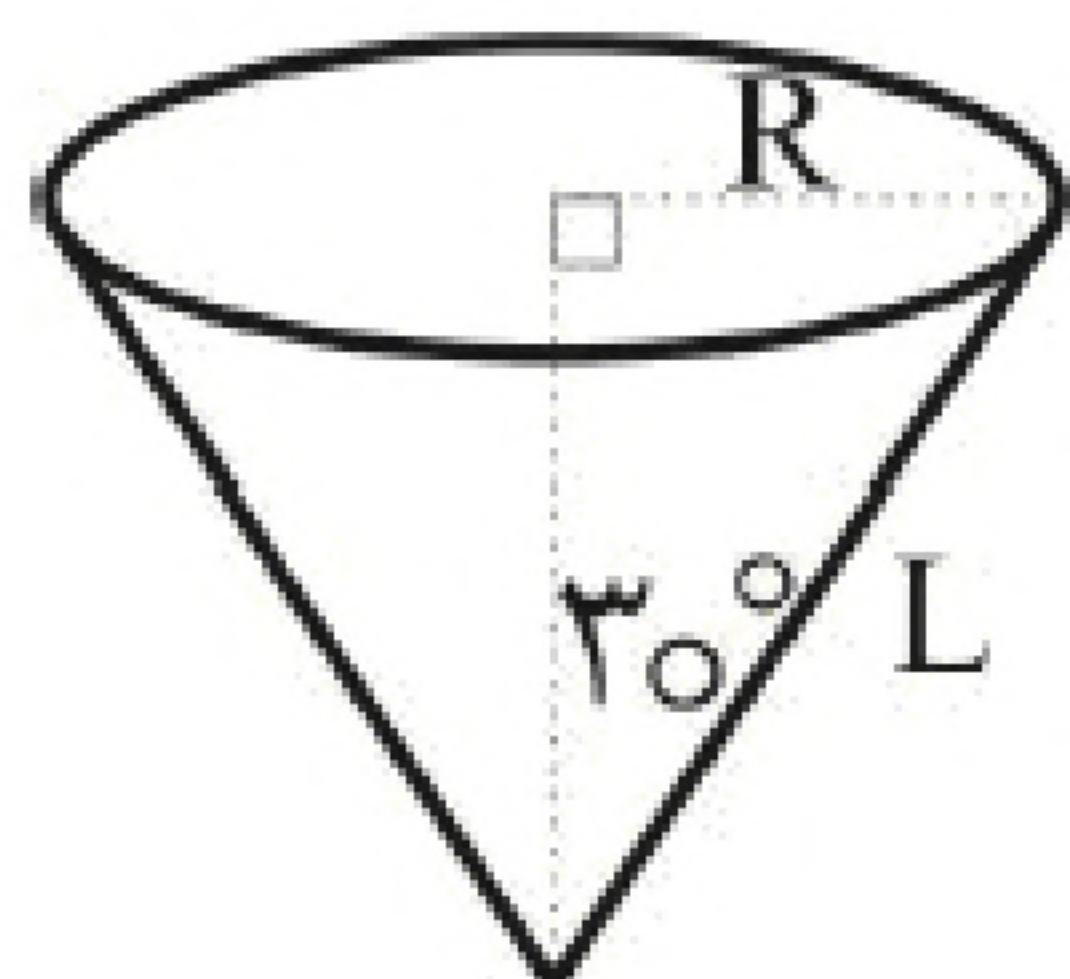
$$\operatorname{Cotg} \alpha = \frac{۱}{\operatorname{tg} \alpha} = -\frac{۴}{۳}$$

$$\text{عبارت مورد نظر} = \frac{۲۵ \sin^۲ \alpha - ۹ \operatorname{Cotg} \alpha}{۱ + \cos \alpha} = \frac{۲۵ \times \frac{۹}{۲۵} - ۹ \left(-\frac{۴}{۳}\right)}{۱ - \frac{۴}{۵}} = \frac{۲۱}{\frac{۱}{۵}} = ۱۰۵$$





۹- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.



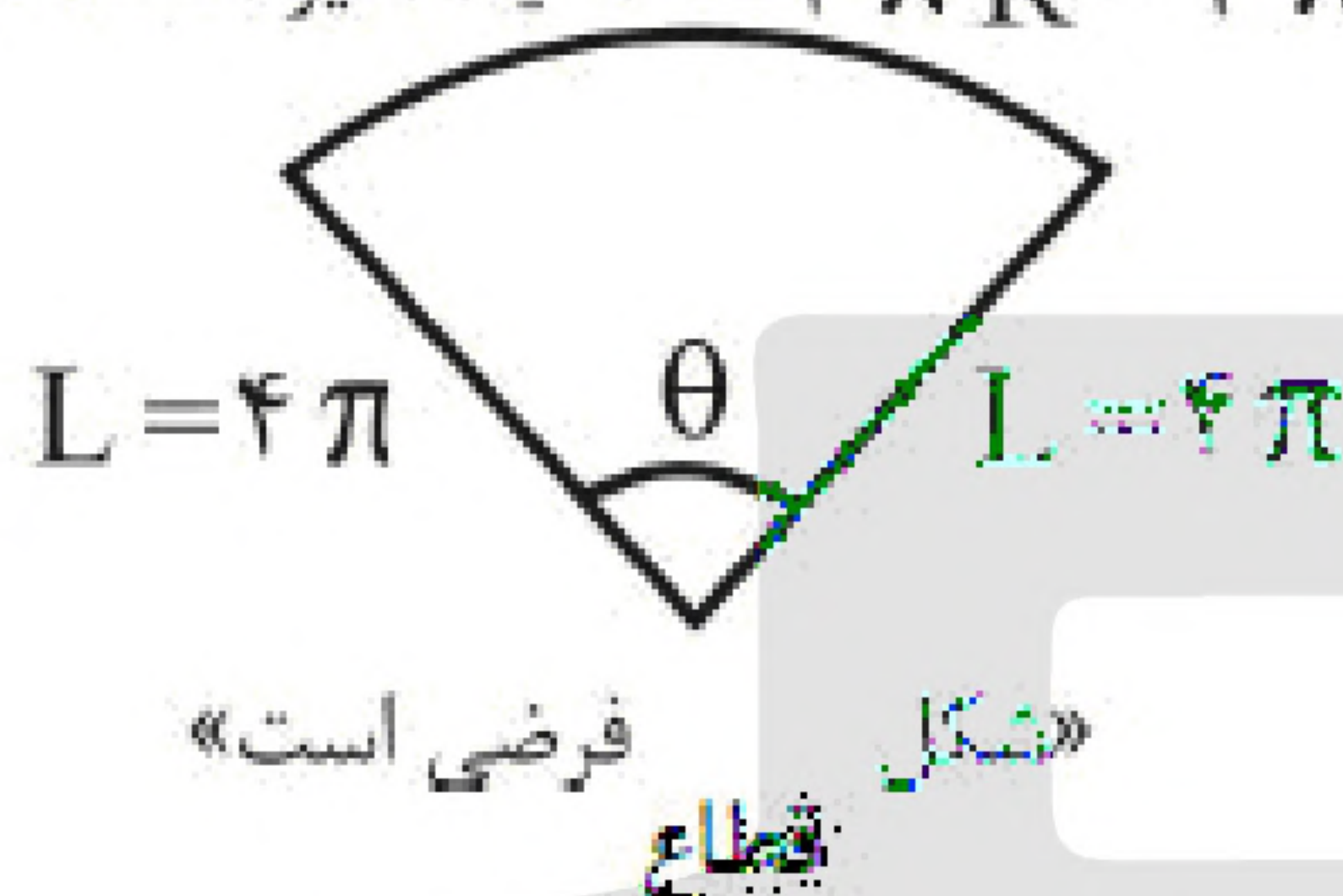
$$\pi R^2 = \pi R L \Rightarrow R = L$$

$$\sin 30^\circ = \frac{R}{L} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{R}{L} \Rightarrow L = 2R$$

بنابراین قطاع حاصل از شکل گسترده مخروط به ابعاد زیر است:

زاویه قطاع بر حسب رادیان  $\times$  شعاع قطاع = طول کمان قطاع

$$2\pi R = 4\pi^2$$



$$4\pi^2 = 4\pi \cdot \theta \Rightarrow \theta = \pi$$

$$S = \frac{1}{2} R^2 \cdot \theta = \frac{1}{2} \times (4\pi)^2 \times \pi$$

$$S = 8\pi^3$$

«بانک سوال موسسه یاوران دانش»

$$1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} \Rightarrow 1 + 9 = \frac{1}{\sin^2 x} \Rightarrow \sin^2 x = \frac{1}{10}$$

$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1 - \frac{1}{10} = \frac{9}{10}$$

$$\cos^2 2x = 2\cos^2 x - 1 = 2\left(\frac{9}{10}\right) - 1 = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$$

۱۰- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

۱۱- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\sin 75^\circ = \sin(45^\circ + 30^\circ) = \sin 45^\circ \cos 30^\circ + \cos 45^\circ \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

$$\sin 15^\circ = \sin(45^\circ - 30^\circ) = \sin 45^\circ \cos 30^\circ - \cos 45^\circ \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

$$\frac{1}{\sin 75^\circ} + \frac{1}{\sin 15^\circ} = \frac{4}{\sqrt{6} + \sqrt{2}} + \frac{4}{\sqrt{6} - \sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{6} - 4\sqrt{2} + 4\sqrt{6} + 4\sqrt{2}}{(\sqrt{6} + \sqrt{2})(\sqrt{6} - \sqrt{2})}$$

$$= \frac{8\sqrt{6}}{6 - 2} = \frac{8\sqrt{6}}{4} = 2\sqrt{6}$$





۱۲- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

صرف نظر از دور دایره

$$\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} + 14^\circ\right) - \sin(\cancel{2\pi} + \pi - 14^\circ)}{-\cos\left(\frac{3\pi}{2} + 14^\circ\right) - \sin\left(\frac{3\pi}{2} - 14^\circ\right)} = \frac{\cos 14^\circ - \sin 14^\circ}{+\sin 14^\circ + \cos 14^\circ}$$

صورت و مخرج تقسیم بر  $\cos 14^\circ$

$$\rightarrow \frac{1 - \operatorname{tg} 14^\circ}{\operatorname{tg} 14^\circ + 1} = \frac{1 - 0/25}{0/25 + 1} = \frac{0/75}{1/25} = \frac{3}{5} = 0/6$$

۱۳- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\frac{1 - \sin x}{1 + \sin x} = 4 \Rightarrow 1 - \sin x = 4 + 4 \sin x \Rightarrow \sin x = -\frac{3}{5} \xrightarrow{\text{ربع سوم}} \cos x = \frac{-4}{5} \Rightarrow \operatorname{tg} x = \frac{3}{4}$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2}}{1 - 2 \sin^2 \frac{x}{2}} \xrightarrow{\text{صورت و مخرج تقسیم بر } \cos^2 \frac{x}{2}}$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{\frac{2 \sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2}}}{\frac{1 - 2 \sin^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2}}} \Rightarrow \operatorname{tg} x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} - 2 \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} \Rightarrow \operatorname{tg} x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{4} = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} \Rightarrow 3 \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} + 8 \operatorname{tg} \frac{x}{2} - 3 = 0$$

$$\left( \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right) \text{ (جمع دو مقدار ممکن برای } \operatorname{tg} \frac{x}{2} \text{)} = \frac{-b}{a} = \frac{-8}{3}$$





۱۴- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. می‌دانیم:

$$\sin\left(\frac{19\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{16\pi + 3\pi}{4}\right) = \sin\left(4\pi + \frac{3\pi}{4}\right) = \sin\frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos(945^\circ) = \cos(\underbrace{720^\circ}_{2 \times 360^\circ} + 225^\circ) = \cos(225^\circ) = \cos(180^\circ + 45^\circ) = -\cos 45^\circ = \frac{-\sqrt{2}}{2}$$

پس فرض مسئله به این صورت می‌شود:

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \sin \alpha + \left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right) \cos \alpha = \frac{1}{3} \xrightarrow{\text{طرفین تقسیم بر } \frac{\sqrt{2}}{2}} \sin \alpha - \cos \alpha = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$\Rightarrow \sin \alpha - \cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

طرفین تساوی اخیر را به توان دو می‌رسانیم:

$$(\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2 \Rightarrow \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha - 2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{2}{9} = 1 - \sin^2 \alpha = \frac{2}{9}$$

$$\Rightarrow \sin^2 \alpha = \frac{7}{9}$$

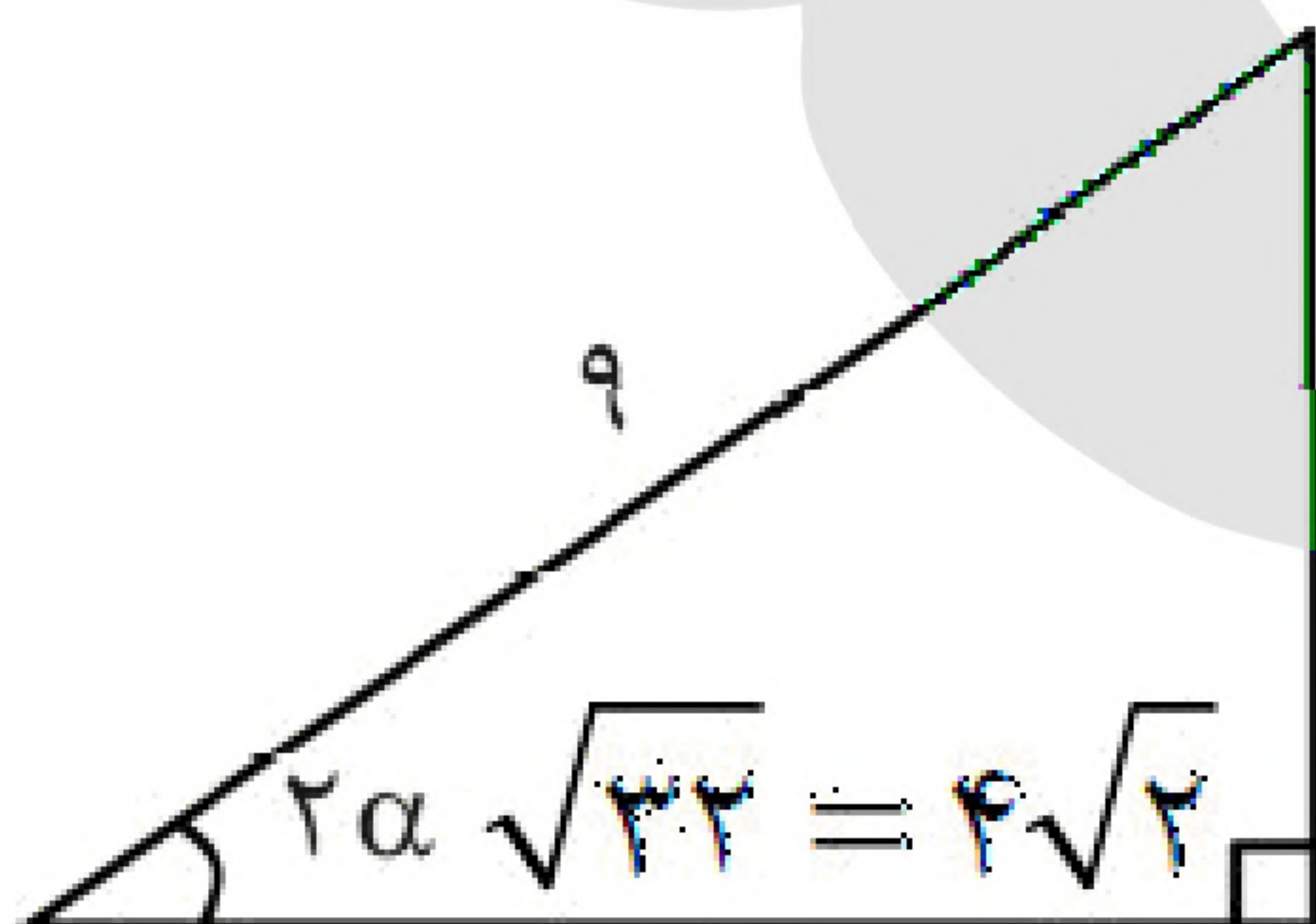
می‌دانیم شیب یک خط،  $\tan$  زاویه‌ای است که آن خط با جهت مثبت محور  $x$  ها می‌سازد که در اینجا می‌شود:

$$m = \tan 2\alpha$$

$$\begin{cases} \sin^2 \alpha = \frac{7}{9} \\ \tan 2\alpha = ? \end{cases}$$

یعنی:

از طریق رسم یک مثلث قائم‌الزاویه فرضی عمل می‌کنیم:



$$\Rightarrow \tan 2\alpha = \frac{7}{4\sqrt{2}} \Rightarrow m = \frac{?}{4\sqrt{2}}$$

(دقت کنید که  $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$  و لذا  $0 < 2\alpha < \frac{\pi}{2}$  است، یعنی زاویه  $2\alpha$  در ربع اول دایره مثلثاتی و مقدار  $\tan$  آن مثبت است) پس معادله خط موردنظر به صورت  $y = \frac{7}{4\sqrt{2}}x + h$  است که با جایگذاری نقطه  $(\sqrt{2}, 0)$  در آن

داریم:

$$0 = \frac{7}{4\sqrt{2}}(\sqrt{2}) + h \Rightarrow 0 = \frac{7}{4} + h \Rightarrow h = \frac{-7}{4}$$





$$\cos \alpha = \frac{2}{2m-1}$$

۱۵- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. واضح است که:

$$\cos \beta = \frac{3}{5-m}$$

$\alpha$  ,  $\beta$  هر دو در ربع اول دایره مثلثاتی و  $\cos$  آن‌ها مثبت است، یعنی عددی بین صفر و یک، پس داریم:

$$\begin{cases} 0 < \frac{2}{2m-1} < 1 \Rightarrow \begin{cases} 0 < 2m-1 \Rightarrow \frac{1}{2} < m \\ 2 < 2m-1 \Rightarrow \frac{3}{2} < m \end{cases} \Rightarrow \frac{3}{2} < m \quad (1) \\ 0 < \frac{3}{5-m} < 1 \Rightarrow \begin{cases} 0 < 5-m \Rightarrow m < 5 \\ 3 < 5-m \Rightarrow m < 2 \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} m < 2 \quad (2) \end{cases}$$

$$\frac{3}{2} < m < 2$$

از اشتراک بین ۱ و ۲ داریم:

دقت کنید با توجه به صورت تست،  $\alpha < \beta$  است و لذا در ربع اول:

$$\cos \alpha > \cos \beta \Rightarrow \frac{2}{2m-1} > \frac{3}{5-m}$$

برای حل این نامساوی، طرفین را در عبارت‌های  $(5-m)$  و  $(2m-1)$  (که در قسمت قبل دیدیم، عبارت‌هایی همواره مثبت هستند) ضرب می‌کنیم:

$$2(5-m) > 3(2m-1) \Rightarrow 10-2m > 6m-3 \Rightarrow 13 > 8m \Rightarrow m < \frac{13}{8}$$

$$\frac{3}{2} < m < \frac{13}{8}$$

از اشتراک این محدوده با  $\frac{3}{2} < m < 2$  داریم:

۱۶- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow 1 + (-3)^2 = \frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow 10 = \frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow \cos^2 x = \frac{1}{10}$$

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 = 2\left(\frac{1}{10}\right) - 1 = -\frac{8}{10}$$

$$\cos 4x = 2\cos^2(2x) - 1 = 2\left(-\frac{8}{10}\right)^2 - 1 = \frac{1}{25} - 1 = -\frac{24}{25}$$





$$\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{4} + \alpha\right) = \frac{\operatorname{tg}\frac{3\pi}{4} + \operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}\frac{3\pi}{4} \times \operatorname{tg}\alpha} = \frac{-1}{\nu}$$

۱۷- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\frac{-1 + \operatorname{tg}\alpha}{1 + \operatorname{tg}\alpha} = \frac{-1}{\nu} \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{4} \xrightarrow{\alpha \text{ حاده}} \sin\alpha = \frac{3}{5}, \cos\alpha = \frac{4}{5}$$

می‌دانیم  $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cos\alpha$  و  $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$

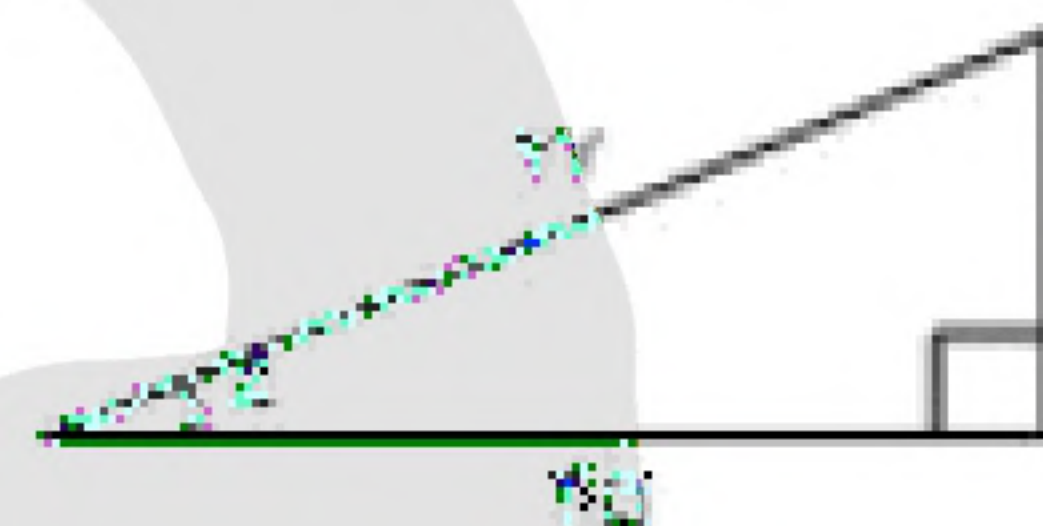
$$\begin{aligned} \cos 3\alpha &= \cos(2\alpha + \alpha) = \cos 2\alpha \cdot \cos\alpha - \sin 2\alpha \cdot \sin\alpha \\ &= (2\cos^2\alpha - 1)\cos\alpha - 2\sin^2\alpha \cdot \cos\alpha = 2\cos^3\alpha - \cos\alpha - 2(1 - \cos^2\alpha)\cos\alpha \\ &= 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha = 4\left(\frac{4}{5}\right)^3 - 3\left(\frac{4}{5}\right) = \frac{-44}{125} \end{aligned}$$

$$\text{عبارت مورد نظر} = \frac{132\left(\frac{3}{5}\right)}{25 \times \left(\frac{-44}{125}\right)} = -9$$

۱۸- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

اعداد ۱۲ و ۳۵ و ۳۷ اعداد فیثاغورثی‌اند، بنابراین ساده‌ترین روش برای به‌دست آوردن نسبت‌ها مثلثاتی  $x$  در نظر

و توجه به این نکته است که در ناحیه‌ی چهارم مثلثاتی فقط  $\cos$



مثبت و سه نسبت دیگر  $\sin$  و  $\tan$  و  $\cot$  منفی‌اند:

$$\cot x = \frac{-35}{12}, \tan x = \frac{-12}{35}, \sin x = -\frac{12}{37}, \cos x = \frac{35}{37}$$

$$\begin{aligned} &36 \tan\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - 35 \cot\left(-\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)\right) - 74 \cos(-(\pi - x)) - 111 \cos\left(-\left(\frac{13\pi}{2} - x\right)\right) \\ &= -36 \cot x + 35 \tan x + 74 \cos x - 111 \sin x \\ &= -36\left(\frac{-35}{12}\right) + 35\left(\frac{-12}{35}\right) + 74\left(\frac{35}{37}\right) - 111\left(\frac{-12}{37}\right) = 105 - 12 + 70 + 36 = 199 \end{aligned}$$

۱۹- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\begin{aligned} &\frac{2\sin(2 \times 36^\circ + 180^\circ - 15^\circ) + \cos(2 \times 36^\circ + 90^\circ + 15^\circ)}{2\sin(2 \times 36^\circ + 90^\circ - 15^\circ) - \cos(2 \times 36^\circ + 15^\circ)} \cdot \frac{\sin(180^\circ + 75^\circ)}{\cos(36^\circ + 75^\circ)} \\ &= \frac{2\sin 15^\circ - \sin 15^\circ - \sin 75^\circ}{2\cos 15^\circ - \cos 15^\circ \cdot \cos 75^\circ} = -\operatorname{tg} 15^\circ \cdot \operatorname{tg} 75^\circ = -\operatorname{tg} 15^\circ \cdot \operatorname{Cotg} 15^\circ = -1 \end{aligned}$$





۲۰- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\sin^2 \theta = 2 \sin \theta \cdot \cos \theta = \frac{1}{4} \Rightarrow \sin \theta \cdot \cos \theta = \frac{1}{8}$$

$$\operatorname{tg} \theta + \operatorname{Cotg} \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \frac{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta}{\sin \theta \cdot \cos \theta} = \frac{1}{\frac{1}{8}} = 8$$

$$\operatorname{tg}^3 \theta + \operatorname{Cotg}^3 \theta = (\operatorname{tg} \theta + \operatorname{Cotg} \theta) (\operatorname{tg}^2 \theta - \operatorname{tg} \theta \cdot \operatorname{Cotg} \theta + \operatorname{Cotg}^2 \theta)$$

$$= 8 (\operatorname{tg}^2 \theta + \operatorname{Cotg}^2 \theta - 1) = 8 ((\operatorname{tg} \theta + \operatorname{Cotg} \theta)^2 - 2 \operatorname{tg} \theta \cdot \operatorname{Cotg} \theta - 1)$$

$$= 8 (8^2 - 2 - 1) = 8 (61) = 488$$

$$f(x) = 2 \sin^2 x - 5(1 - \sin^2 x) + 11$$

$$f(x) = 7 \sin^2 x + 6$$

$$\text{چون } 0 \leq \sin^2 x \leq 1 \xrightarrow{\times 7} 0 \leq 7 \sin^2 x \leq 7 \xrightarrow{+6} 6 \leq 7 \sin^2 x + 6 \leq 13 \Rightarrow 6 \leq f(x) \leq 13$$

نمودار تابع ۸ خط افقی با عرض صحیح ۶ و ۷ و ... و ۱۳ را قطع می‌کند.

۲۱- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

۲۲- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$-\cos \alpha \cdot \cos \alpha + 2 \cos \alpha (\cos \alpha) + \sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$$

۲۳- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\sin \theta = \frac{-5}{13} \Rightarrow \cos^2 \theta = 1 - \frac{25}{169} = \frac{144}{169} \Rightarrow \cos \theta = \pm \frac{12}{13} \Rightarrow \cos \theta = \frac{12}{13}$$

انتهای کمان در ربع چهارم

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\frac{-5}{13}}{\frac{12}{13}} = -\frac{5}{12}, \operatorname{Cotg} \theta = -\frac{12}{5}$$

$$-5 \operatorname{Cotg} \theta + 12 \operatorname{tg} \theta - \cos \theta + \cos \theta = -5 \left( -\frac{12}{5} \right) + 12 \left( -\frac{5}{12} \right) = 12 - 5 = 7$$





$$f(x) = 2 \left( \frac{1}{2} \cos x + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x \right) + 5$$

۲۴- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$f(x) = 2 \left( \sin \frac{\pi}{6} \cdot \cos x + \cos \frac{\pi}{6} \sin x \right) + 5$$

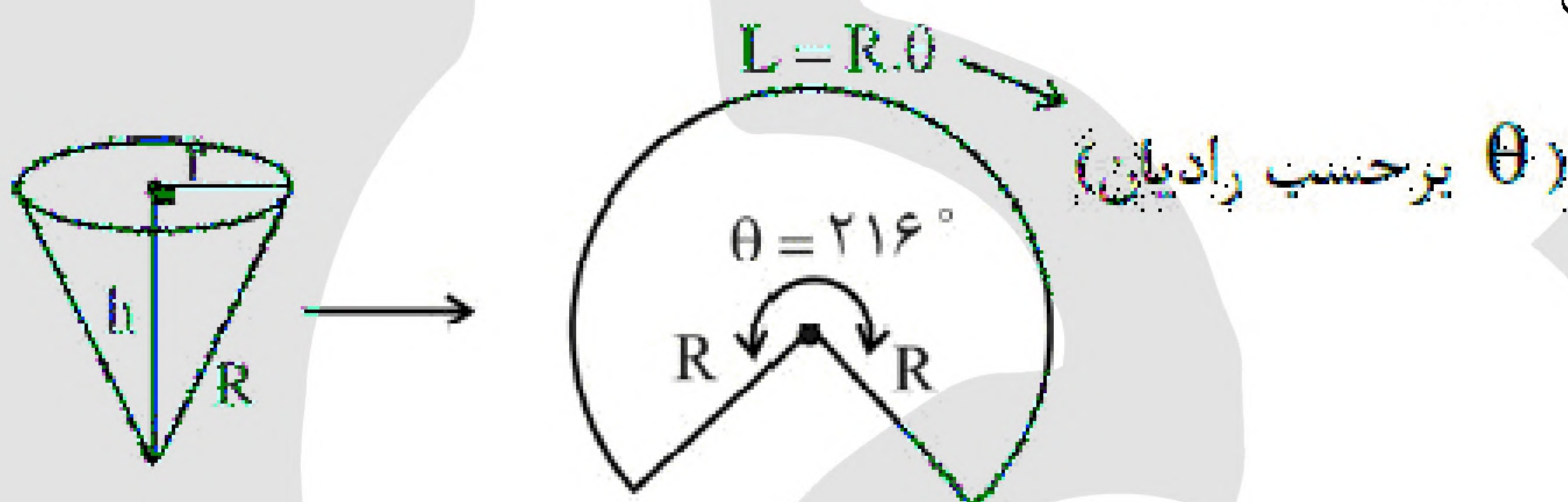
$$f(x) = 2 \sin \left( x + \frac{\pi}{6} \right) + 5$$

$$-1 \leq \sin \left( x + \frac{\pi}{6} \right) \leq 1 \xrightarrow{\times 2} -2 \leq 2 \sin \left( x + \frac{\pi}{6} \right) \leq 2 \xrightarrow{+5}$$

$$3 \leq f(x) \leq 7 \Rightarrow m^2 - n^2 = 7^2 - 3^2 = 40$$

$$\begin{matrix} \downarrow & \downarrow \\ n & m \end{matrix}$$

۲۵- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.



$$\frac{D \text{ درجه}}{180} = \frac{\theta \text{ رادیان}}{\pi} \Rightarrow \frac{216}{180} = \frac{\theta}{\pi} \Rightarrow \theta = \frac{6\pi}{5} \text{ رادیان} \xrightarrow{\pi=3} \theta = \frac{18}{5}$$

$$\theta = \frac{L}{R} \Rightarrow \frac{18}{5} = \frac{L}{R} \Rightarrow L = \frac{18}{5}R$$

طول کمان قطاع

$$\text{محیط قطاع} = 56 \Rightarrow 2R + L = 56 \Rightarrow 2R + \frac{18}{5}R = 56 \Rightarrow R = 10$$

$$2\pi r = L \Rightarrow 2 \times 3 \times r = \frac{18}{5} \times 10 \Rightarrow r = 6$$

$$R^2 = r^2 + h^2 \Rightarrow 10^2 = 6^2 + h^2 \Rightarrow h = 8$$

$$V \text{ مخروط} = \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot h = \frac{1}{3} \times 3 \times 6^2 \times 8 = 288$$





۲۶- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$A = \sin x \cdot \cos x (\cos^4 x - \sin^4 x) = \frac{1}{4} \sin 2x \underbrace{(\cos^2 x - \sin^2 x)}_{\cos 2x} \underbrace{(\cos^2 x + \sin^2 x)}_1$$

$$A = \frac{1}{4} \sin 2x \cdot \cos 2x = \frac{1}{4} \sin 4x \xrightarrow{x = \frac{\pi}{24}} A = \frac{1}{8}$$

با تقسیم صورت و مخرج بر  $\cos 15^\circ$ :

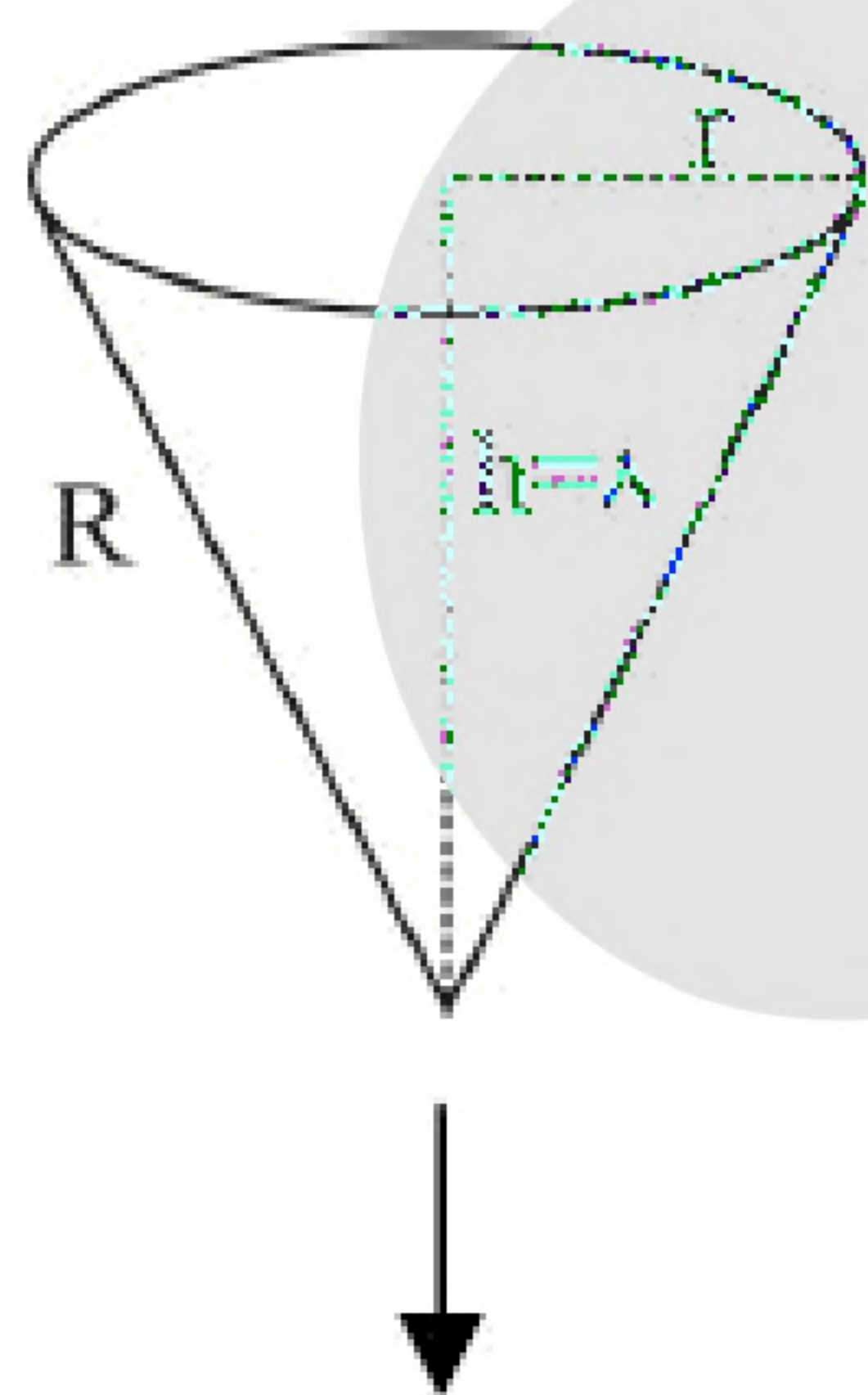
$$B = \frac{\cos\left(\frac{3\pi}{2} + 15^\circ\right) - \sin\left(\frac{3\pi}{2} - 15^\circ\right)}{\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \pi - 15^\circ\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2} + 15^\circ\right)} = \frac{\sin 15^\circ + \cos 15^\circ}{\sin 15^\circ - \cos 15^\circ}$$

دور دایره صرف نظر می شود

$$B = \frac{\tan 15^\circ + 1}{\tan 15^\circ - 1} = \frac{0.28 + 1}{0.28 - 1} = \frac{-16}{9}$$

$$8A - 9B = 8\left(\frac{1}{8}\right) - 9\left(\frac{-16}{9}\right) = 17$$

۲۷- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.



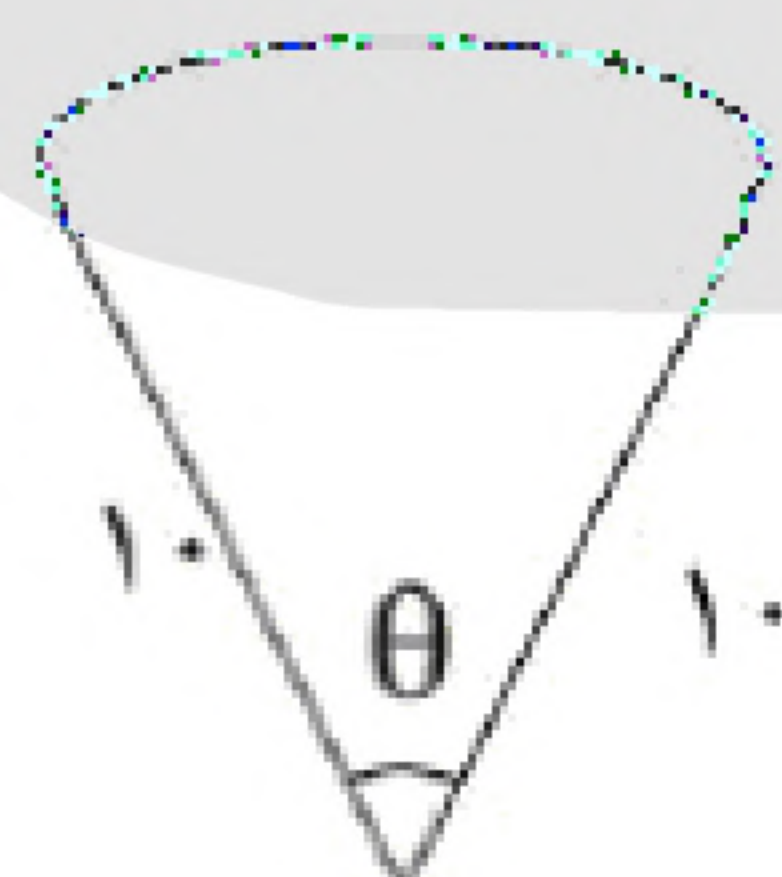
$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot h$$

$$288 = \frac{1}{3} \times 3 \times r^2 \times 8$$

$$r = 6 \Rightarrow r^2 + h^2 = R^2 \Rightarrow R = 10$$

$$L = 2\pi r = 36$$

قطاع حاصل از شکل گسترده



$$\begin{cases} \text{محيط} = 10 + 10 + 36 = 56 \\ L = R \cdot \theta \Rightarrow \text{رادیان} \end{cases}$$

$$36 = 10 \times \theta \Rightarrow \theta = 3/6 \text{ رادیان}$$

$$s_{\text{قطاع}} = \frac{1}{2} R^2 \cdot \theta \Rightarrow s_{\text{قطاع}} = \frac{1}{2} (10)^2 \times 3/6 = 180$$

$$\text{اختلاف محیط و مساحت قطاع} = 180 - 56 = 124$$





۲۸- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\frac{2 \sin 20^\circ \cdot \cos 20^\circ \cdot \cos 20^\circ}{(\cancel{1} + 2 \cos^2 20^\circ \cancel{-1}) \sin 10^\circ} = \frac{\cancel{1} \sin 20^\circ \cdot \cos^2 20^\circ}{2 \cos^2 20^\circ \cdot \sin 10^\circ} = \frac{2 \cancel{\sin 10^\circ} \cdot \cos 10^\circ}{\cancel{\sin 10^\circ}} = 2 \cos 10^\circ$$

۲۹- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\tan x = \frac{\sin\left(4\pi + \frac{\pi}{4} - x\right) - \sin(-x)}{\sin x + \cos x} = \frac{\cos x + \sin x}{\sin x + \cos x} = 1$$

$$\tan x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}, \pi, \frac{5\pi}{4}, 2\pi + \frac{\pi}{4}, \dots$$

۳۰- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\frac{\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)} = \frac{\sin x \cos \frac{\pi}{4} - \cos x \sin \frac{\pi}{4}}{\sin x \cos \frac{\pi}{4} + \cos x \sin \frac{\pi}{4}} = \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x} = \frac{\tan x - 1}{\tan x + 1} = \frac{-3 - 1}{-3 + 1} = 2$$

۳۱- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$x + 10x = 11x = 11 \times \frac{\pi}{11} = \pi \Rightarrow \sin x = \sin 10x$$

$$3x + \frac{5}{2}x = \frac{11}{2}x = \frac{11}{2} \times \frac{\pi}{11} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos 3x = \sin \frac{5}{2}x$$

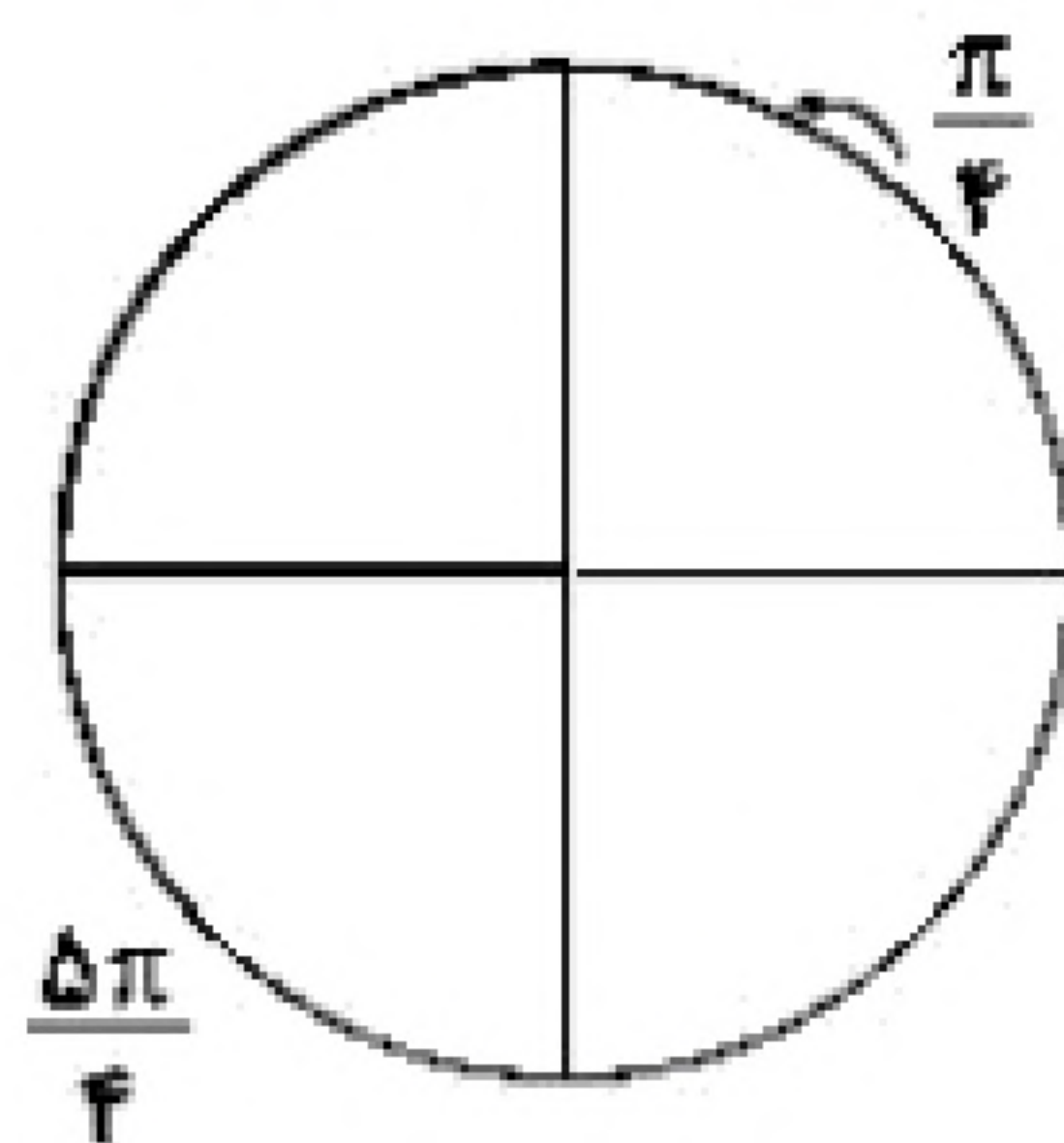
$$A = \frac{\sin x \cos 3x \tan \frac{44x}{3}}{\sin 10x \sin \frac{5x}{2} \cot \frac{11x}{4}} = \frac{\tan\left(\frac{44}{3} \times \frac{\pi}{11}\right)}{\cot\left(\frac{11}{4} \times \frac{\pi}{11}\right)} = \frac{\tan \frac{4\pi}{3}}{\cot\left(\frac{\pi}{4}\right)}$$

$$A = \tan\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$$





۳۲- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. در محدوده رنگی در شکل زیر  $\sin \alpha > \cos \alpha$  است.



بررسی گزینه‌ها:

$$۱) \frac{3\pi}{20} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{10}$$

$$۲) \frac{7\pi}{20} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{10}$$

$$۳) \frac{3\pi}{28} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{7}$$

$$۴) \frac{13\pi}{10} = \frac{26\pi}{20} = \frac{5\pi}{4} + \frac{\pi}{20}$$

«بانک سوال موسسه یاوران دانش»

۳۳- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\frac{3\pi}{4} < x - \frac{\pi}{4} < \frac{7\pi}{4} \xrightarrow{+\frac{\pi}{4}} \pi < x < 2\pi$$

$x$  در نواحی سوم و چهارم است و  $\sin x$  در این دو ناحیه منفی است و در بازه  $(-1, 0)$  تغییر می‌کند.

$$-1 \leq \frac{4+m}{1+m} < 0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{4+m}{1+m} < 0 & (۱) \\ \frac{4+m}{1+m} \geq -1 & (۲) \end{cases}$$

$$۱) \frac{4+m}{1+m} < 0 \Rightarrow m \in (-4, -1)$$

$$۲) \frac{4+m}{1+m} + 1 \geq 0 \Rightarrow \frac{2m+5}{m+1} \geq 0 \Rightarrow m \in (-\infty, -\frac{5}{2}] \cup (-1, +\infty)$$

اشتراک جواب‌های به دست آمده برابر  $[-\frac{5}{2}, -4)$  است.

۳۴- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. اگر  $\pi \approx \frac{3}{14}$  فرض شود کل محیط دایره مثلثاتی  $2\pi$  یعنی  $\frac{6}{28}$  واحد خواهد بود. اگر طول کمان‌های برابر را  $x$  فرض کنیم آن‌گاه:

$$4x + \frac{1}{18} = \frac{6}{28} \Rightarrow 4x = \frac{4}{4} \Rightarrow x = \frac{1}{4}$$

$$|ABC| = 2x = \frac{1}{2}$$





۳۵- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\sin(3\alpha + \pi) = \sin(\alpha + 2(\alpha + \pi)) = \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \cos \alpha$$

$$\Rightarrow \cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{1.0} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{1.0} \Rightarrow \tan \alpha = \sqrt{2}, \cot \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

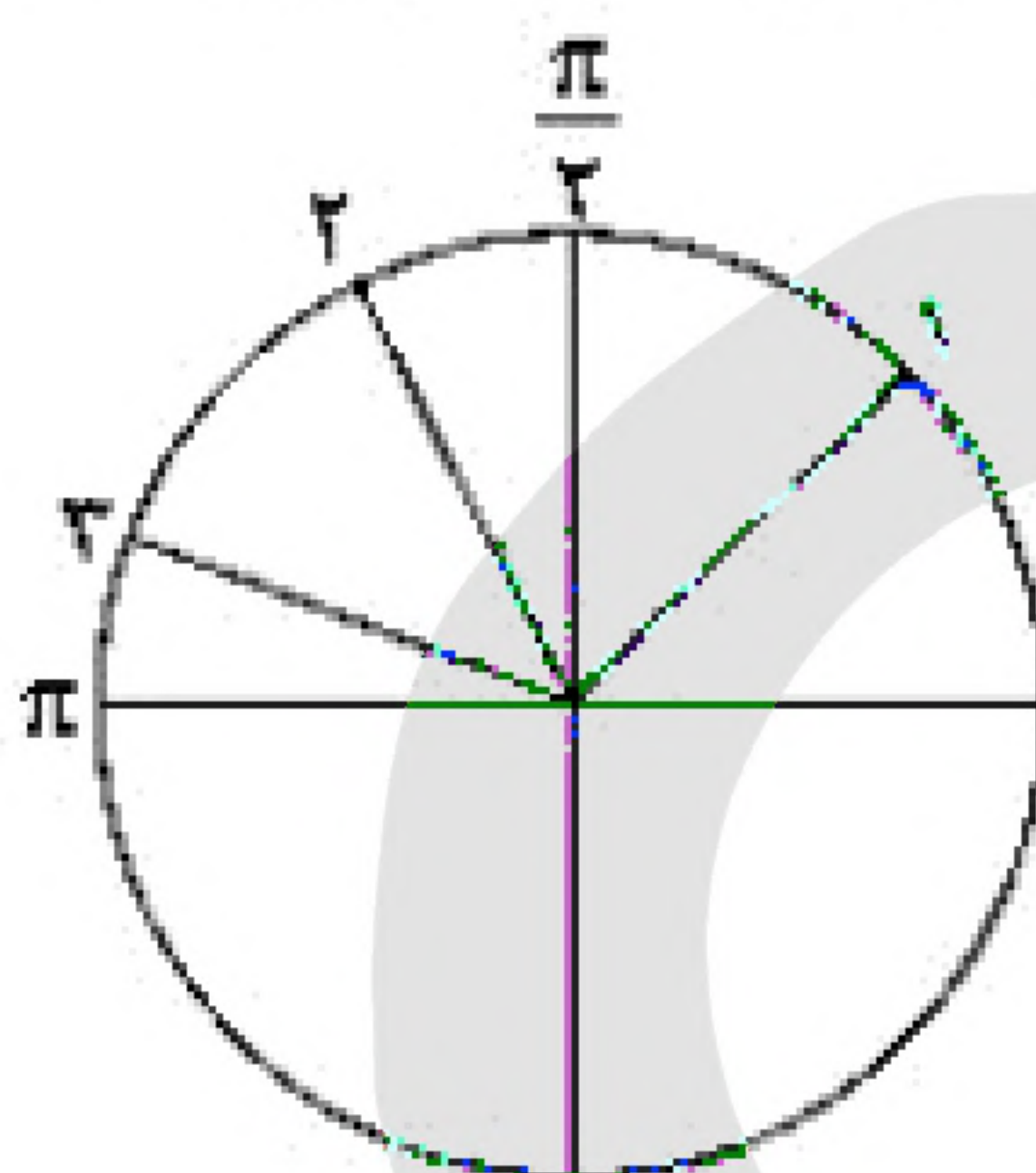
$$\sqrt{2} \cot(3\pi + \alpha) + \tan(\pi - \alpha) = \sqrt{2} \cot \alpha - \tan \alpha = 1 - \sqrt{2} = -\epsilon$$

۳۶- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\tan(3x + 5y + 2z) = \tan((3x + 5y + 2z) - (x + y)) = \tan(2x + 4y + 2z) = \tan(2(x + y + z))$$

$$= -\tan(x + y) = -\frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y} = -\frac{2 + 3}{1 - 2 \times 3} = 1$$

۳۷- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۱، ۲ و ۳ رادیان را در دایره مثلثاتی ببینید:



با توجه به دایره بالا  $\sin 2 > \sin 1$  صحیح است.

۳۸- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$t_2 = \frac{[\sin 3]}{[\cos 2]} = \frac{0}{-1} = 0$$

$$t_3 = \frac{[\sin 4]}{[\cos 3]} = \frac{-1}{-1} = 1$$

$$t_4 = \frac{[\sin 5]}{[\cos 4]} = \frac{-1}{-1} = 1$$

مجموع سه جمله برابر ۲ است.





۳۹- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$f(\pi) = -1 \Rightarrow a + b \sin \frac{\pi}{3} = -1 \Rightarrow a + \frac{b\sqrt{3}}{2} = -1 \quad (1)$$

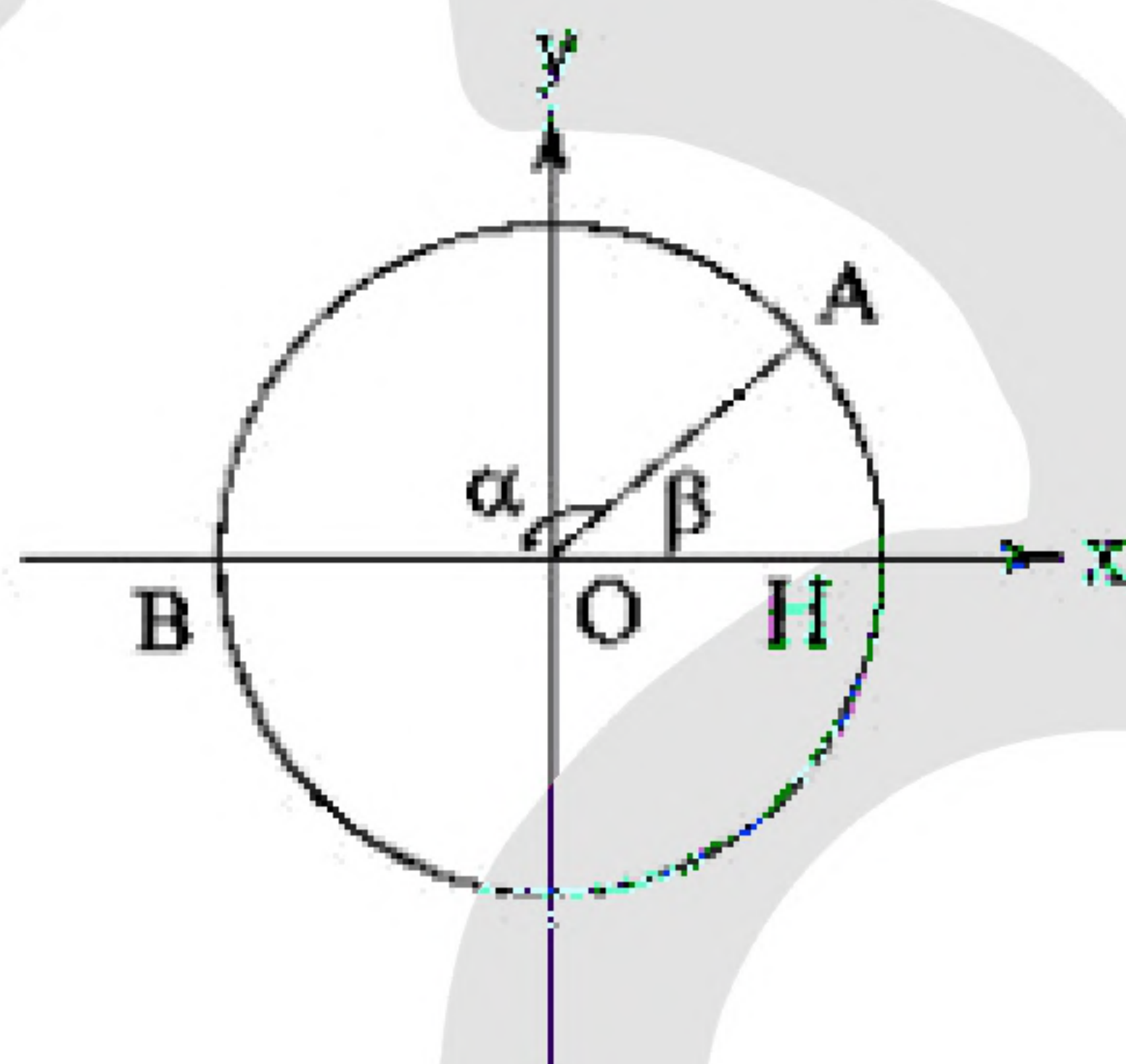
$$f(0) = 2\sqrt{3} \Rightarrow a - \frac{\sqrt{3}}{2} b = 2\sqrt{3} \quad (2)$$

رابطه‌های (۱) و (۲) را با هم جمع می‌کنیم:

$$2a = 2\sqrt{3} - 1 \Rightarrow a = \sqrt{3} - \frac{1}{2}$$

$$\xrightarrow{\text{جایگذاری در (۲)}} \frac{\sqrt{3}}{2} b = \sqrt{3} - \frac{1}{2} - 2\sqrt{3} = -\frac{1}{2} - \sqrt{3} \Rightarrow b = -\frac{\sqrt{3}}{3} - 2$$

۴۰- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.



$$A\left(\frac{2}{\sqrt{13}}, k\right) \in \text{دایره مثلثاتی} \Rightarrow \left(\frac{2}{\sqrt{13}}\right)^2 + (k)^2 = 1 \Rightarrow k = \frac{3}{\sqrt{13}}$$

$$\Delta OAH : \sin \beta = \frac{3}{\sqrt{13}}, \cos \beta = \frac{2}{\sqrt{13}} \xrightarrow{\alpha + \beta = 180^\circ}$$

$$\sin \alpha = \frac{3}{\sqrt{13}}, \cos \alpha = -\frac{2}{13}, \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = -\frac{12}{13}$$